**UNIVERSITÉ PARIS 13 - Institut Galilée**
**Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539**

**THÈSE**
pour obtenir le grade de
**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 13**
Discipline : **Mathématiques**

présentée par
**Javier FRESÁN**

# Sur les périodes des structures de Hodge à multiplication complexe

dirigée par Christophe Soulé et Jörg Wildeshaus

Soutenue le 18 novembre 2013 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| M. Jean-Benoît BOST | Université Paris 11 | Rapporteur |
| M. Lawrence BREEN | Université Paris 13 | Examinateur |
| Mme. Hélène ESNAULT | Freie Universität Berlin | Examinateur |
| M. Claude SABBAH | École Polytechnique | Examinateur |
| M. Christophe SOULÉ | IHÉS | Directeur |
| M. Jörg WILDESHAUS | Université Paris 13 | Directeur |

Rapporteur absent lors de la soutenance :

| | |
|---|---|
| M. Takeshi SAITO | University of Tokyo |

*Le plus beau compliment que je puisse faire*
*à cette musique c'est de dire que les principes*
*qu'on peut y trouver ne sont pas neufs,*
*qu'ils ont au moins cinq cent ans.*

Glenn Gould, aux étudiants du Conservatoire
de Moscou, après voir joué des morceaux de
Webern, Schönberg et Krenek le 12 mai 1957.

*Remerciements*


Ils vont tout d'abord à Christophe Soulé, pour avoir accepté de diriger ma thèse, m'avoir proposé un sujet intéressant et pour sa grande disponibilité et son soutien constant durant ces trois dernières années.

Je suis reconnaissant à Jörg Wildeshaus pour son accueil chaleureux dans l'équipe de géométrie et arithmétique du LAGA lors de mon M2 et pour avoir bien voulu co-encadrer cette thèse.

C'est avec plaisir que je remercie Jean-Benoît Bost et Takeshi Saito d'avoir consenti à être rapporteurs de ma thèse. Je ne saurais trop reconnaître les améliorations que la lecture vigilante et l'attention au style de Jean-Benoît Bost ont apporté à la version finale du texte : c'est pour moi un modèle. Quant à Takeshi Saito, il suffira au lecteur de jeter un coup d'oeil à l'introduction pour comprendre jusqu'à quel point cette thèse repose sur son travail en commun avec Terasoma. Je tiens à lui exprimer toute ma gratitude pour avoir toujours répondu à mes questions dans les plus brefs délais.

Lawrence Breen, Hélène Esnault et Claude Sabbah ont bien voulu faire partie de mon jury : c'est pour moi un grand honneur. Je suis particulièrement touché par la générosité de Hélène Esnault, qui a toujours trouvé, aussi occupée qu'elle fût, un moment pour me faire part de ses idées et pour suivre avec indulgence mes progrès à tâtons. Les séances de travail avec Claude Sabbah au printemps de cette année ont été pour moi précieuses : qu'il soit remercié pour toutes les belles mathématiques qu'il m'a apprises.

L'intuition que les facteurs gamma des périodes de motifs à multiplication complexe devraient être liés aux facteurs gamma intervenant dans les facteurs epsilon des connexions est due à Spencer Bloch. Je tiens à le remercier d'avoir partagé cette idée avec moi, ainsi que de m'avoir communiqué une partie de sa correspondance avec Hélène Esnault, datée de l'hiver 2005-2006.

Je suis également reconnaissant à Pierre Deligne pour deux discussions lumineuses à l'IHÉS et à Benedict Gross pour des échanges électroniques concernant des variantes $p$-adiques de sa conjecture. Je n'oublie pas mon « prof » de formes automorphes et géométrie d'Arakelov Gerard Freixas i Montplet ni Dennis Eriksson, toujours prêt à m'expliquer un argument de théorie de l'intersection avec la bonne humeur qui le caractérise.

J'ai présenté des versions préliminaires de mes résultats dans plusieurs exposés, notamment à la conférence *Periods and Motives* à l'ICMAT le 4 juillet

2012 ; au séminaire *Jeunes chercheurs* de l'IHÉS le 30 octobre 2012 ; au séminaire *Mathjeunes* à l'ENS le 2 février 2013 ; au séminaire *Autour de la géométrie d'Arakelov* à l'IMJ le 3 juin 2013 ; à la conférence *Heights and moduli spaces* au Lorentz Center le 11 juin 2013 ; et à la conférence *Explicit formulae and Arakelov Geometry* à Jussieu le 20 septembre 2013. Je tiens à remercier les organisateurs de ces rencontres ainsi que les participants pour les échanges enrichissants qui en ont résulté.

# TABLE DES MATIÈRES

# INTRODUCTION

Le thème général de cette thèse est le rapport entre les périodes de certaines variétés algébriques et les valeurs spéciales de la fonction gamma. Un exemple historiquement important de ce phénomène est la formule d'Euler

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}dt = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

qui permet, par exemple, de calculer la longueur de la lemniscate :

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^2}{4\sqrt{2\pi}}.$$

Une période est l'intégrale d'une forme différentielle algébrique sur un cycle topologique. Du point de vue moderne, les périodes apparaissent comme des coefficients de l'isomorphisme de comparaison entre la cohomologie de de Rham algébrique et la cohomologie de Betti d'une variété algébrique définie sur un corps de nombres. On peut ainsi interpréter les intégrales ci-dessus comme des périodes d'une courbe de Fermat et d'une courbe elliptique à multiplication complexe par $\mathbb{Q}(i)$ respectivement.

Il ne s'agit pas d'un exemple isolé : la formule de Lerch-Chowla-Selberg exprime la « partie transcendante » des périodes d'une courbe elliptique à multiplication complexe par un corps quadratique imaginaire de discriminant $-d$ comme produit des valeurs de la fonction gamma en des nombres rationnels de dénominateur $d$. Les premières démonstrations de ce résultat (dû à Lerch à la fin du XIXe siècle [**Ler97**] et rédecouvert par Chowla et Selberg [**CS67**]) furent de nature analytique, basées pour l'essentiel sur la première formule limite de Kronecker. À la fin des années 70, Gross en donna une preuve géométrique : en se plaçant sur une variété de Shimura convenable, le calcul se réduit à celui des périodes d'un facteur simple de la jacobienne d'une courbe de Fermat, calcul qui peut être réalisé explicitement grâce à l'action des racines de l'unité. Ceci le mena à conjecturer, avec Deligne, que les périodes des structures de Hodge géométriques, ayant multiplication complexe par un corps de nombres abélien, sont des produits de valeurs de la fonction gamma en des nombres rationnels, avec des exposants déterminés par les nombres de Hodge [**Gr78**, p. 205].

Les variétés projectives et lisses, munies d'automorphismes d'ordre fini, fournissent une famille d'exemples de ces structures. Examinons plus en détail l'énoncé de la conjecture dans ce cas particulier (cf. section 1.4 pour l'énoncé général). Soit $X$ une variété projective et lisse définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et supposons qu'elle soit munie d'un automorphisme $g$ d'ordre $d > 1$. Fixons une racine primitive $d$-ième de l'unité $\xi$. Pour chaque $u \in (\mathbb{Z}/d)^{\times}$, notons $H^k_{dR}(X)_u$ et $H^k_B(X)_u$ les sous-espaces de la cohomologie de de Rham algébrique $H^k_{dR}(X/\overline{\mathbb{Q}})$ et de la cohomologie de Betti $H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}(\mu_d))$ où $g^*$ agit par multiplication par $\xi^u$ [1]. Par fonctorialité, l'isomorphisme des périodes de Grothendieck (cf. section 1.1) se restreint en des isomorphismes

$$\rho^k_u : H^k_{dR}(X)_u \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^k_B(X)_u \otimes_{\mathbb{Q}(\mu_d)} \mathbb{C}.$$

Notons $P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X)) \in \mathbb{C}^{\times}/\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ le déterminant d'une matrice de $\rho^k_u$ par rapport à des bases quelconques de $H^k_{dR}(X)_u$ sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et de $H^k_B(X)_u$ sur $\mathbb{Q}(\mu_d)$.

***Conjecture* (Gross-Deligne).** — *L'égalité*

$$P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X)) = \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1 - \frac{\langle a \rangle}{d}\right)^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*est vraie dans* $\mathbb{C}^{\times}/\overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ *pour n'importe quelle fonction* $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ *telle que*

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon(a) \langle au \rangle = \sum_{p+q=k} p h^{p,q}_u(X)$$

*pour tout* $u \in (\mathbb{Z}/d)^{\times}$. *Ici, le symbole* $\langle \cdot \rangle$ *désigne le répresentant entre* $0$ *et* $d-1$ *d'un élément dans* $\mathbb{Z}/d$ *et* $h^{p,q}_u(X) := \dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X)_u$, *avec* $H^{p,q}(X)_u$ *le sous-espace du facteur* $H^{p,q}(X)$ *dans la décomposition de Hodge de* $H^k(X(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ *où* $g^*$ *agit par multiplication par* $\xi^u$.

Lorsque $X$ est une variété abélienne et $k = 1$, la conjecture de Gross-Deligne résulte des travaux de Gross [**Gr78**] et Anderson [**And82**], précisés ensuite par Colmez [**Col93**]. En dehors des variétés abéliennes, le seul progrès dans la direction de la conjecture est dû à Maillot et Rössler [**MR04**]. En s'appuyant sur une formule de type Lefschetz en géométrie d'Arakelov, ils ont réussi à démontrer en 2004 le résultat suivant :

1. Si $g^*$ n'a pas ordre exactement $d$, alors ces sous-espaces sont nuls pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^{\times}$ et les énoncés qui suivent sont vides.

***Théorème* (Maillot-Rössler).** — *Si $d$ est premier, l'égalité*

$$\prod_{k=0}^{2\dim X} |P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))|^{(-1)^k} = \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1-\frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\gamma(\frac{a}{u})}$$

*est vraie dans $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*\cap\overline{\mathbb{Q}}^*)$ quelle que soit la fonction $\gamma:\mathbb{Z}/d\to\mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\gamma(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2\dim X}(-1)^k\sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(X)$$

*pour tout $u\in(\mathbb{Z}/d)^\times$.*

Dans leur travail, les périodes apparaissent comme des facteurs de comparaison entre la métrique $L^2$ et la métrique de Hodge sur le complexe de de Rham, et les valeurs spéciales de la fonction gamma sont liées aux dérivées de la fonction zêta de Lerch, qui interviennent dans les classes caractéristiques "arithmétiques" corrigeant le défaut de commutativité du caractère de Chern arithmétique équivariant [**KR01**]. Faute d'une théorie de l'intersection arithmétique à valeurs complexes, ces techniques permettent seulement de calculer les modules des périodes.

Dans cette thèse, je propose une nouvelle approche à la conjecture de Gross-Deligne, dont l'ingrédient essentiel est une formule du produit pour les périodes des fibrés à connexion plats due à Saito et Terasoma [**ST97**]. Dans ce travail, il s'agit de comparer l'hypercohomologie du complexe défini par une connexion intégrable à singularités régulières et la cohomologie à valeurs dans le système local de ses sections horizontales, que l'on suppose muni d'une structure rationnelle. D'après le théorème de Saito et Terasoma, le produit alterné des déterminants de ces isomorphismes est donné par une puissance de $2\pi i$ (dépendant uniquement de la variété topologique sous-jacente), multiplié par un produit des valeurs de la fonction gamma calculées en les valeurs propres des résidus de la connexion, multiplié par l'accouplement du déterminant de la connexion avec un cycle canonique (cf. section 2.4). Lorsque la connexion est de type Gauss-Manin, ces valeurs propres sont des nombres rationnels et l'accouplement ne contribue pas à la partie transcendante des périodes. Grâce à ce résultat, j'ai pu démontrer :

***Théorème principal.*** — *L'égalité*

$$\prod_{k=0}^{2\dim X} P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))^{(-1)^k} = \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1-\frac{\langle a\rangle}{u}\right)^{\gamma(\frac{a}{u})}$$

*est vraie dans* $\mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ *pour toute fonction* $\gamma : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ *satisfaisant à*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\gamma(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(X)$$

*pour tout* $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.

Étant donnée une variété projective et lisse $X$, avec un automorphisme d'ordre fini, la stratégie pour démontrer ce théorème consiste *grosso modo* à appliquer la formule de Saito et Terasoma aux composantes isotypiques de la connexion de Gauss-Manin associée à la projection vers le quotient par l'automorphisme. Le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch permet ensuite de relier les exposants des valeurs gamma aux nombres de Hodge. Ceci donne le résultat voulu lorsque $X$ est de dimension un, mais en général on se heurte à la difficulté que la base est singulière, et donc le théorème de Saito et Terasoma ne peut pas être utilisé directement. Pour la résoudre, on calcule d'abord les périodes des revêtements cycliques dans un contexte plus général et on construit ensuite des éclatements équivariants qui, tout en ne changeant pas les périodes, permettent de réduire le calcul aux cas déjà traités.

En plus de fournir une nouvelle preuve du théorème de Maillot et Rössler, ces techniques permettent de le raffiner en deux sens : on considère (la classe du) nombre complexe $P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)}H^k(X))$ et non seulement son module $|P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)}H^k(X)|$ et on n'a plus besoin de supposer que l'ordre de l'automorphisme est premier. Par contre, il reste le défi de séparer les périodes provenant des différents degrés dans le produit alterné, et d'étendre nos résultats aux structures de Hodge à multiplication complexe plus générales que celles définies par la cohomologie d'une variété munie d'un automorphisme. De nouvelles idées semblent nécessaires pour aborder ces questions.

Voici une brève description des différents chapitres de ce mémoire.

Le premier chapitre s'ouvre par des rappels sur l'isomorphisme des périodes (à coefficients constants). Au numéro 1.2, on utilise le théorème de Lefschetz difficile pour calculer le déterminant de cet isomorphisme en chaque degré lorsque la variété est projective et lisse : c'est essentiellement une puissance de $2\pi i$. On discute ensuite quelques aspects de la formule de Lerch-Chowla-Selberg (§1.3). Au numéros 1.4 et 1.5, on donne l'énoncé de la conjecture de Gross-Deligne : d'abord en toute généralité, puis dans le cas particulier concernant les variétés avec automorphismes d'ordre fini.

Le deuxième chapitre contient le calcul du produit alterné des déterminants des périodes dans le cas quasi-projectif : grâce à la théorie de Hodge mixte, rappelée brièvement au début, on voit que c'est encore une puissance de $2\pi i$.

Des calculs de classes de Chern permettent d'exprimer, au numéro 2.4, l'exposant en termes des nombres de Hodge mixtes. Le reste du chapitre est consacré au théorème de Saito et Terasoma : après avoir rappelé comment associer des périodes à des connexions à singularités régulières dont le système local des sections horizontales est muni d'une structure rationnelle, on introduit le facteur gamma et le cycle canonique et on énonce le théorème. Au numéro 2.5.2, on étudie l'algébricité d'un des termes intervenant dans la formule de Saito et Terasoma ; ce petit complément à l'article [**ST97**] est important pour la suite.

Les résultats principaux de ce mémoire se trouvent dans le troisième chapitre. Le paragraphe 3.1 développe, suivant [**EV92**], les préliminaires nécessaires sur les revêtements cycliques construits à partir de la donnée d'un diviseur à croisements normaux $D$ sur une variété projective et lisse $X$, d'un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $X$ et d'un entier $d \geq 2$ tel que $\mathcal{L}^d$ possède une section globale dont $D$ est le schéma des zéros. Au numéro suivant, on applique le théorème de Saito et Terasoma et les résultats du deuxième chapitre pour démontrer la version alternée de la conjecture de Gross-Deligne pour ces revêtements ; on donne ensuite une variante à support compact de ce résultat. Dans la section 3.3, on montre comment en déduire le théorème principal. On conclut en discutant l'exemple d'une hypersurface et de la variété de Fano des droites dans une cubique de dimension 4.

# NOTATIONS ET CONVENTIONS

Tout au long de ce texte, $\overline{\mathbb{Q}}$ désigne la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$. Un *corps de nombres* est un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$ de dimension finie sur $\mathbb{Q}$ ; tous les corps de nombres sont donc plongés dans $\mathbb{C}$. On dira qu'un corps de nombres $F$ est *abélien* si l'extension $F/\mathbb{Q}$ est galoisienne de groupe de Galois abélien.

Une variété sur un corps $k$ est un schéma séparé et géométriquement intègre de type fini sur $k$. Le groupe des cycles algébriques de codimension $p$ sur une variété lisse $X$ sera noté $\mathcal{Z}^p(X)$ et le quotient de celui-ci par la relation d'équivalence rationnelle $\mathrm{CH}^p(X)$ : c'est le groupe de Chow. Pour tout entier $r \geq 0$, on posera

$$\mathrm{CH}^{\leq r}(X) = \bigoplus_{p \leq r} \mathrm{CH}^p(X), \quad \mathrm{CH}^{>r}(X) = \bigoplus_{p > r} \mathrm{CH}^p(X).$$

Soit $X$ une variété projective et lisse sur un corps $k$, de dimension $n$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $X$, on écrira $h^q(X, \mathcal{F})$ pour $\dim_k H^q(X, \mathcal{F})$ et

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^q(X, \mathcal{F}).$$

On utilisera librement la théorie des classes de Chern et le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch, pour lesquels on se réfère, par exemple, à **[Ful97]** dont nous reprenons les notations (2). Rappelons l'énoncé de ce théorème pour la commodité du lecteur :

***Théorème*** **(Hirzebruch-Riemann-Roch).** — *Soit $\mathcal{E}$ un faisceau localement libre sur $X$. Alors :*

$$\chi(X, \mathcal{E}) = \int_X \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \mathrm{td}(TX).$$

2. En particulier, $\int_X : \mathrm{CH}^*(X) \to \mathbb{Z}$ désigne l'application degré sur $\mathrm{CH}^n(X)$ et zéro sur le reste de composantes.

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur une variété $X$, on notera $\mathcal{L}^m$ la puissance tensorielle $\mathcal{L}^{\otimes m}$, avec les conventions usuelles $\mathcal{L}^0 = \mathcal{O}_X$ et $\mathcal{L}^{\otimes m} = (\mathcal{L}^*)^{\otimes -m}$ lorsque $m$ est négatif.

Le symbole $[\cdot]$ désigne la partie entière d'un nombre réel. Fixons un entier $d \geq 2$. Étant donné un élément $x$ dans $\mathbb{Z}$ ou dans $\mathbb{Z}/d$, on notera $\langle x \rangle$ le seul nombre entier tel que $0 \leq \langle x \rangle \leq d-1$ et que $x \equiv \langle x \rangle \mod d$.

Si $K \subset \mathbb{C}$ est un corps et $a, b \in \mathbb{C}$, la notation $a \sim_{K^\times} b$ signifie que $a$ et $b$ ne sont pas nuls et que $a/b \in K^\times$.

Étant donnés un diviseur $D = \sum \alpha_i D_i$, avec $D_i$ intègres et deux à deux distincts, et un nombre rationnel $r$, on notera $[rD]$ la « partie entière » du $\mathbb{Q}$-diviseur $rD$, définie comme

$$[rD] = \sum [r\alpha_i] D_i.$$

Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X$-module et $D$ est un diviseur sur $X$, le produit tensoriel $\mathcal{E} \otimes \mathcal{O}_X(D)$ sera souvent abrégé en $\mathcal{E}(D)$.

# CHAPITRE 1

# PÉRIODES DES STRUCTURES DE HODGE À MULTIPLICATION COMPLEXE

## 1.1. L'isomorphisme des périodes

**1.1.1. Cohomologie de de Rham algébrique.** — Soit $X$ une variété lisse sur un corps $k$ de caractéristique zéro. Les puissances extérieures successives du faisceau des différentielles de Kähler $\Omega^1_{X/k}$, munies de la différentielle extérieure, forment un complexe de faisceaux pour la topologie de Zariski (le complexe de de Rham algébrique) :

$$\Omega^\bullet_{X/k} : 0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1_{X/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X/k} \xrightarrow{d} \cdots$$

***Définition 1.1.*** — *La cohomologie de de Rham algébrique est l'hypercohomologie de ce complexe :*

$$H^j_{dR}(X/k) := \mathbb{H}^j(X, \Omega^\bullet_{X/k}).$$

Elle est reliée aux groupes de *cohomologie de Hodge* $H^q(X, \Omega^p_{X/k})$ par la première suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_{X/k}) \Rightarrow H^{p+q}_{dR}(X/k). \tag{1}$$

La cohomologie de de Rham algébrique est compatible aux extensions de corps : si $k'$ est une extension de $k$ et si $X_{k'} = X \times_{\mathrm{Spec}\ k} \mathrm{Spec}\ k'$ désigne la variété déduite de $X$ par extension des scalaires, on dispose d'un isomorphisme canonique

$$I^j_{k'/k} : H^j_{dR}(X/k) \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} H^j_{dR}(X_{k'}/k').$$

En particulier, lorsque $k$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$, les groupes $H^j_{dR}(X_{\mathbb{C}}/\mathbb{C})$ et $H^j_{dR}(X/k) \otimes_k \mathbb{C}$ sont canoniquement identifiés.

**1.1.2. Cohomologie de de Rham analytique.** — Supposons maintenant $k = \mathbb{C}$. Soit $X^{\mathrm{an}}$ la variété analytique complexe associée à $X$, dont l'espace topologique sous-jacent est $X(\mathbb{C})$ muni de la topologie usuelle. À l'aide de la description locale des différentielles de Kähler, on voit que l'analytifié de $\Omega^p_{X/\mathbb{C}}$ est le faisceau des différentielles holomorphes $\Omega^p_{X^{\mathrm{an}}}$. On obtient ainsi le complexe de de Rham analytique

$$\Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}} : 0 \to \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{d} \Omega^1_{X^{\mathrm{an}}/k} \xrightarrow{d} \Omega^2_{X^{\mathrm{an}}/k} \xrightarrow{d} \cdots$$

et l'opération « d'analytification » détermine une application $\mathbb{C}$-linéaire canonique entre les cohomologies de de Rham algébrique et analytique

$$H^j_{dR}(X/\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{H}^j(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}}). \tag{2}$$

***Théorème 1.1*** **(Grothendieck, [Gro66]).** — *La flèche* (2) *est un isomorphisme.*

**1.1.3. Cohomologie de Betti.** — Considérons maintenant la cohomologie de $X^{\mathrm{an}}$ à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{Q}_{X^{\mathrm{an}}}$, dite *cohomologie de Betti* :

$$H^j_B(X) := H^j(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}_{X^{\mathrm{an}}}).$$

Au contraire de la cohomologie de de Rham, la cohomologie de Betti est, par définition même, de nature purement topologique ; on peut aussi la calculer à l'aide du complexe des cochaînes singulières sur $X(\mathbb{C})$.

La cohomologie de Betti à coefficients complexes

$$H^j_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

s'identifie canoniquement à la cohomologie $H^j(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}})$ de $X^{\mathrm{an}}$ à valeurs dans le faisceau constant $\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$. De plus, l'inclusion de $\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}$ dans $\mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}}$ induit, grâce au lemme de Poincaré analytique, un quasi-isomorphisme $\mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}} \to \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}}$ de complexes de faisceaux sur $X^{\mathrm{an}}$, donc un isomorphisme

$$H^j(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^j(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}}). \tag{3}$$

En composant (2) avec l'inverse de (3) on obtient un isomorphisme canonique

$$\psi^j : H^j_{dR}(X/\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} H^j(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}}) = H^j_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

**1.1.4. L'isomorphisme des périodes.** — Revenons au cas où la variété $X$ est définie sur un sous-corps $k$ de $\mathbb{C}$. Alors l'espace vectoriel complexe $H^j(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}_{X^{\mathrm{an}}})$ est muni de deux structures rationnelles : la $\mathbb{Q}$-forme $H^j_B(X)$ et la $k$-forme $H^j_{dR}(X/k)$ induite par l'isomorphisme $\rho^j := \psi^j \circ I^j_{\mathbb{C}/k}$. Ces deux structures ne sont pas compatibles en général : c'est précisément la comparaison entre les deux qui produit des « périodes ».

***Corollaire 1.1* (Grothendieck, [Gro66]).** — *Soit $X$ une variété lisse sur un sous-corps $k$ de $\mathbb{C}$. Il existe un isomorphisme canonique*

$$\rho^j : H^j_{dR}(X/k) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}.$$

Ce résultat entraîne, en particulier, que les espaces vectoriels $H^j_{dR}(X/k)$ sont de dimension finie. Lorsque $X$ est propre, on aurait pu le démontrer directement par le biais de la suite spectrale (1) car tous les termes initiaux sont de dimension finie d'après le théorème de finitude pour la cohomologie cohérente. Par ailleurs, dans ce cas le théorème 1.1 est lui même une conséquence simple du théorème GAGA de Serre (étendu au cas propre par Grothendieck). En effet, la cohomologie de de Rham analytique se calcule par la suite spectrale

$$E_1^{p,q} = H^q(X^{\mathrm{an}}, \Omega^p_{X^{\mathrm{an}}}) \Rightarrow \mathbb{H}^{p+q}(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}})$$

dont les termes initiaux satisfont à

$$H^q(X, \Omega^p_{X/\mathbb{C}}) \xrightarrow{\sim} H^q(X^{\mathrm{an}}, \Omega^p_{X^{\mathrm{an}}})$$

d'après GAGA. Puisque la formation des deux suites spectrales est compatible au foncteur d'analytification, leurs aboutissements sont isomorphes :

$$H^j_{dR}(X/\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{H}^j(X^{\mathrm{an}}, \Omega^\bullet_{X^{\mathrm{an}}}).$$

**1.1.5. La décomposition de Hodge.** — La cohomologie de Betti est munie d'une structure additionnelle : la filtration croissante

$$F^p H^k(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

induite par la suite spectrale (1) et l'isomorphisme de comparaison sur le complexifié $H^k_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. D'après la théorie de Hodge, si $X$ est projective, cette suite spectrale dégénère en $E_1$. Posant $H^{p,q} = F^p \cap \overline{F}^q$, où $\overline{F}^q$ désigne la filtration complexe conjuguée, on obtient une bigraduation

$$H^k(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q} \tag{4}$$

satisfaisant à la « symétrie de Hodge » $\overline{H^{p,q}} = H^{q,p}$.

**1.1.6. Un exemple.** — Soit $E \subset \mathbb{P}^2_k$ la courbe elliptique d'équation affine

$$y^2 = 4x^3 - ax - b.$$

Les classes des différentielles

$$\omega_1 = \frac{dx}{y} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{xdx}{y}$$

forment une base de $H^1_{dR}(E/k)$ et engendrent $H^0(E, \Omega^1_E)$ et $H^1(E, \mathcal{O}_E)$ respectivement. Prenons une base orientée $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ de $H_1(E^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$, le premier groupe d'homologie d'un tore complexe. La matrice des périodes par rapport à $\{\omega_1, \omega_2\}$ et la base duale de $\{\gamma_1, \gamma_2\}$ est :

$$\begin{pmatrix} \int_{\gamma_1} \omega_1 & \int_{\gamma_2} \omega_1 \\ \int_{\gamma_1} \omega_2 & \int_{\gamma_2} \omega_2 \end{pmatrix}.$$

Une relation classique, due à Legendre, affirme que le déterminant de cette matrice vaut $2\pi i$ [**Cha85**, Thm. 2, p. 50].

## 1.2. Le déterminant des périodes

Le but de cette section est de généraliser la relation de Legendre aux variétés projectives lisses. Notons

$$[\det H^j(X)] \in \mathbb{C}^\times / k^\times$$

la classe du déterminant de la matrice de l'isomorphisme des périodes par rapport à des bases de $H^j_{dR}(X/k)$ et de $H^j_B(X)$ (sur $k$ et $\mathbb{Q}$ respectivement).

***Proposition 1.1***. — *Soit $X$ une variété projective et lisse sur un corps $k$ de caractéristique zéro. L'égalité suivante est vraie dans $\mathbb{C}^\times/k^\times$ :*

$$[\det H^j(X)]^2 = (2\pi i)^{j \dim H^j(X)}.$$

Cette proposition est certes connue des experts, mais je n'ai pas trouvé de preuve dans la littérature ni même d'énoncé avec l'exposant explicite [(1)].

***Remarque 1.1***. — *Le nombre $j \dim H^j(X)$ est toujours pair car, pour $j$ impair, $\dim H^j(X)$ est pair grâce à la symétrie de la décomposition* (4).

**1.2.1. Préliminaires.** — La preuve de la proposition 1.1 repose sur le théorème de Lefschetz difficile. Dans la suite, $H^j(X)$ sans indice désigne soit la cohomologie de de Rham algébrique soit la cohomologie de Betti. Rappelons que l'on dispose d'une application « classe de cycles »

$$\mathrm{cl} : \mathcal{Z}^p(X) \longrightarrow H^{2p}(X).$$

On n'aura à en faire usage que pour $p = 1$, auquel cas la classe d'un diviseur peut être définie comme la première classe de Chern du faisceau inversible associé. En cohomologie de Betti, elle est donnée par le morphisme connectant

$$c_1^B : H^1(X^{\mathrm{an}}, \mathcal{O}^*_{X^{\mathrm{an}}}) \longrightarrow H^2(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Z})$$

dans la suite exacte longue induite par la suite exacte exponentielle

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_{X^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\exp(2\pi i \cdot)} \mathcal{O}^*_{X^{\mathrm{an}}} \longrightarrow 0.$$

1. Par exemple, pour $X$ projective et lisse sur $\mathbb{Q}$, Kontsevich dit dans [**Kon99**, p. 63] : 'it follows from several results in algebraic geometry that the period matrix is a square matrix with [...] determinant in $\sqrt{\mathbb{Q}^\times} \cdot (2\pi i)^{\mathbb{Z}_{\geq 0}}$."

En cohomologie de de Rham, on la construit par passage à l'hypercohomologie du morphisme de complexes

$$d\log : \mathcal{O}_X^* \longrightarrow \Omega^\bullet_{X/k}[1],$$

où la seule flèche non nulle envoie une section locale $f$ de $\mathcal{O}_X^*$ vers $df/f$, qui est une différentielle fermée :

$$c_1^{dR} : H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \mathbb{H}^1(X, \Omega^\bullet_{X/k}[1]) = H^2_{dR}(X/k).$$

On vérifie alors la compatibilité suivante entre les deux classes (2) :

***Lemme 1.1***. — *Soient $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $X$ et $\mathcal{L}^{\mathrm{an}}$ le faisceau analytique associé sur $X^{\mathrm{an}}$. L'isomorphisme des périodes*

$$H^2_{dR}(X/k) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^2_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

*envoie $c_1^{dR}(\mathcal{L})$ vers $(2\pi i)c_1^B(\mathcal{L}^{\mathrm{an}})$.*

Soient $D$ un diviseur sur $X$ et $\omega = \mathrm{cl}(D) \in H^2(X)$ la classe correspondante en cohomologie de de Rham ou de Betti. Notons $L : H^\bullet(X) \to H^{\bullet+2}(X)$ le morphisme cup-produit avec $\omega$ et considérons les itérés de $L$

$$L^{n-i} : H^i(X) \longrightarrow H^{2n-i}(X).$$

***Théorème 1.2* (Lefschetz difficile)**. — *Si $D$ est ample, $L^{n-i}$ est un isomorphisme pour tout $0 \leq i \leq n$.*

**1.2.2. Preuve de la proposition 1.1.** — Choisissons un diviseur ample $D$ sur $X$ et posons $\omega = \mathrm{cl}(D)$. Le groupe $H^{2n}(X)$ est engendré par $\omega^n$ et on a

$$[\det H^n(X)] = (2\pi i)^n$$

d'après le lemme 1.1. Il s'ensuit que les cup-produits

$$H^j(X) \otimes H^{2n-j}(X) \longrightarrow H^{2n}(X)$$

en cohomologie de Betti et en cohomologie de de Rham diffèrent de $(2\pi i)^n$ quand on les compare via l'isomorphisme des périodes. Puisque, par dualité de Poincaré, ce sont des accouplements parfaits, on en déduit

$$[\det H^j(X)] \cdot [\det H^{2n-j}(X)] = (2\pi i)^{n \dim H^j(X)},$$

ce qui permet de supposer $j \leq n$ dans l'énoncé.

Soit donc $j \leq n$. Considérons les morphismes

$$\begin{aligned} H^j(X) \otimes H^j(X) &\longrightarrow H^{2n}(X) \\ \alpha \otimes \beta &\longmapsto \alpha \cup \beta \cup \omega^{n-j} \end{aligned}$$

2. Peut-être au signe près, dépendant des conventions d'algèbre homologique (cf. [**Bos13**, Lem. 2.1] et [**Del71**, 2.2.5.2]).

et les accouplements induits

$$\langle\ ,\ \rangle_{dR} : H^j_{dR}(X/k) \otimes H^j_{dR}(X/k) \longrightarrow k$$

en cohomologie de de Rham et

$$\langle\ ,\ \rangle_B : H^j_B(X) \otimes H^j_B(X) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

en cohomologie de Betti. D'après le théorème de Lefschetz difficile et la dualité de Poincaré, ceux-ci sont parfaits. Via l'isomorphisme des périodes et le lemme 1.1, les accouplements induits sur les complexifiés vérifient

$$\langle\ ,\ \rangle_{dR,\mathbb{C}} = (2\pi i)^{-j} \langle\ ,\ \rangle_{B,\mathbb{C}}. \tag{5}$$

Soient $P$, $A_{dR}$ et $A_B$ les matrices de l'isomorphisme des périodes, de $\langle\ \ \rangle_{dR}$ et de $\langle\ ,\ \rangle_B$ par rapport à des bases de $H^j_{dR}(X/k)$ sur $k$ et $H^j_B(X)$ sur $\mathbb{Q}$ respectivement. Alors (5) se récrit :

$$A_{dR} = (2\pi i)^{-j} P^t A_B P.$$

En prenant des déterminants, on trouve

$$(\det P)^2 = (2\pi i)^{j \dim H^j} \cdot \det A_{dR} \cdot (\det A_B)^{-1},$$

d'où le résultat car $\det A_{dR} \in k^\times$ et $\det A_B \in \mathbb{Q}^\times$. □

On en déduit aussitôt le corollaire suivant, qui aurait pu été démontré directement en remplaçant le théorème de Lefschetz difficile par la dualité de Poincaré dans l'argument précédent et qui est énoncé dans [**ST97**, p. 866, 2e paragaphe. après le théorème].

***Corollaire 1.2.*** — *L'égalité suivante est vraie dans* $\mathbb{C}^\times/k^\times$ :

$$\prod_{j=0}^{2n} [\det H^j(X)]^{(-1)^j \cdot 2} = (2\pi i)^{n\chi(X)}.$$

**1.2.3. Remarques.** —

(a) Bien entendu, aussi bien dans l'énoncé de la proposition 1.1 que dans son corollaire, il est possible d'extraire le carré du déterminant des périodes dans la formule au prix d'introduire (éventuellement) un facteur algébrique de degré deux sur $k$. Le calcul de celui-ci, souvent lié à un discriminant, est une question intéressante ; signalons, dans cette direction, les travaux [**Sai94**] et [**Sai12**].

(b) Comme le lecteur l'aura déjà pensé, la proposition 1.1 admet une interprétation motivique, du moins conjecturalement : si les projecteurs de Chow-Künneth existent et si les motifs $h^j(X)$ qu'ils découpent sur $X$ sont de dimension finie au sens de Kimura [**Kim05**], alors on peut définir des « motifs déterminants » $\det h^j(X)$ qui devraient être eux mêmes (et qui le sont supposant la conjecture de Hodge vraie) isomorphes aux produits des puissances correspondantes du motif de Lefschetz et des motifs d'Artin d'ordre au plus deux [**Ka09**, §14.5d].

## 1.3. La formule de Lerch-Chowla-Selberg

Dans cette section, je discute le calcul des périodes d'une courbe elliptique à multiplication complexe en termes des valeurs spéciales de la fonction gamma. On se réfère à [**Gr79**] pour les détails.

**1.3.1. La fonction gamma.** — Rappelons que la fonction gamma est définie, sur le demi-plan $\mathrm{Re}(s) > 0$ du plan complexe, par l'intégrale convergente

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} e^{-x} dx$$

et qu'elle vérifie, sur ce domaine, l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s).$$

Celle-ci permet d'étendre $\Gamma$ en une fonction méromorphe sur tout le plan complexe avec des pôles simples aux entiers $n \leq 0$. La fonction $\Gamma$ vérifie aussi

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

et la relation dite « de distribution »

$$\Gamma(s) = (2\pi)^{\frac{1-d}{2}} d^{s-\frac{1}{2}} \prod_{a=0}^{d-1} \Gamma(\tfrac{s+a}{d})$$

pour tout entier $d \geq 1$. En faisant $s = 1$, on trouve l'identité

$$\prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{d}) = \frac{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}}{\sqrt{d}} \tag{6}$$

dont on se servira souvent dans la suite.

**1.3.2. La formule de Lerch-Chowla-Selberg.** — Soit $F$ un corps quadratique imaginaire de discriminant $-d$. L'inclusion $F \subset \mathbb{Q}(\mu_d)$ induit, par restriction des groupes de Galois, un caractère quadratique modulo $d$

$$\chi_F : \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q}) \simeq (\mathbb{Z}/d)^\times \longrightarrow \mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \simeq \{\pm 1\}.$$

Notons $h$ le nombre de classes de $F$ et $w$ le nombre de racines de l'unité dans $F$ (donc $w = 2$ sauf si $d = 3$ ou $4$ auxquels cas $w = 6$ et $4$ respectivement).

***Théorème 1.3***. — *Soit $E$ une courbe elliptique définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, avec multiplication complexe par l'anneau des entiers de $F$. Alors*

$$\int_\gamma \omega \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \sqrt{\pi} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{d})^{\frac{w\chi_F(a)}{4h}}$$

*pour toute forme différentielle (non nulle) de première espèce $\omega \in H^0(E, \Omega^1_E)$ et pour tout cycle $\gamma \in H_1(E, \mathbb{Q})$ non homologue à zéro.*

Le théorème 1.3 permet de retrouver les autres périodes de la courbe elliptique car la multiplication complexe entraîne que le quotient entre deux périodes associées à la même forme différentielle est un nombre algébrique et on dispose de surcroît de la relation de Legendre. On en déduit :

***Corollaire 1.3***. — *Sous les mêmes hypothèses,*

$$\int_\gamma \nu \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \sqrt{\pi} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(\tfrac{a}{d})^{-\frac{w\chi_F(a)}{4h}}$$

*pour toute forme différentielle (non nulle) de seconde espèce $\nu \in H^1(E, \mathcal{O}_E)$.*

***Remarque 1.2***. — *Le théorème 1.3 et le corollaire 1.3 montrent que la « partie transcendante » des périodes dépend seulement du corps $F$ et non de la courbe $E$, ce qui est en accord avec le fait que toutes les courbes elliptiques à multiplication complexe par $F$ sont isogènes sur $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Les premières preuves du théorème 1.3 sont basées sur la formule suivante, qui se trouve déjà dans un mémoire de Lerch à la fin du XIXe siècle [**Ler97**, formule 26, p. 303] et qui serait redécouverte 70 ans plus tard par Chowla et Selberg [**CS67**, p. 110] :

***Théorème 1.4*** **(Lerch-Chowla-Selberg)**. — *Soient $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_h$ des représentants du groupe de classes de $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Alors :*

$$\prod_{i=1}^{h} \Delta(\mathfrak{a}_i)\Delta(\mathfrak{a}_i^{-1}) = \left(\frac{2\pi i}{d}\right)^{12h} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(\frac{a}{d}\right)^{6w\chi_F(a)}.$$

Ici $\Delta$ est la forme modulaire de poids 12, vue comme une fonction sur les réseaux de $\mathbb{C}$, définie par les formules clasiques :

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{\lambda^4},$$

$$g_3(\Lambda) = 140 \sum_{\lambda \in \Lambda^*} \frac{1}{\lambda^6},$$

$$\Delta(\Lambda) = g_2(\Lambda)^3 - 27 g_3(\Lambda)^2.$$

Pour déduire de la formule de Lerch-Chowla-Selberg le calcul de

$$P = \int_\gamma \omega,$$

on s'appuie sur le fait que les courbes elliptiques $\mathbb{C}/P\mathfrak{a}$ ont un discriminant algébrique quel que soit l'idéal fractionnaire $\mathfrak{a}$ de $F$, d'où $P^{12} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \Delta(\mathfrak{a})$ et

$$P^{24h} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{i=1}^{h} \Delta(\mathfrak{a}_i)\Delta(\mathfrak{a}_i^{-1}).$$

***Remarque 1.3.*** — *C'est dans cette dernière étape que l'on perd l'exactitude du théorème 1.4, qui est une égalité de nombres complexes. Dans* [**GK79**, p. 579-581]*, Gross et Koblitz expliquent comment utiliser la fonction gamma p-adique de Morita et la foncton zêta de la courbe elliptique pour raffiner le calcul de $P$, obtenant une expression à un élément de $F^*$ près.*

**1.3.3. Rapport avec les dérivées logarithmiques.** — Une formule classique, due à Hurwitz, relie les dérivées logarithmiques en zéro des fonctions $L$ d'un caractère de Dirichlet modulo $d$ aux logarithmes des valeurs gamma aux points rationnels de dénominateur $d$ (voir, par exemple, [**Col93**, III.1.2.2.]) :

$$\frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} = -\log d - \frac{\sum_{a=1}^{d-1}\chi(a)\log\Gamma(\frac{a}{d})}{\sum_{a=1}^{d-1}\chi(a)\frac{a}{d}}. \tag{7}$$

Lorsque $\chi = \chi_F$, pour un corps quadratique imaginaire $F$, la formule du nombre des classes de Dirichlet

$$h = -\frac{w}{2d}\sum_{a=1}^{d-1}\chi_F(a)\frac{a}{d}$$

permet de simplifier cette expression :

$$\frac{L'(\chi_F,0)}{L(\chi_F,0)} = -\log d + \frac{w}{2h}\sum_{a=1}^{d-1}\chi_F(a)\Gamma(\frac{a}{d}).$$

Ceci, joint à la factorisation

$$\zeta_F(s) = \zeta_{\mathbb{Q}}(s)L(\chi_F,0)$$

de la fonction zêta de Dedekind de $F$ et à la formule $\zeta_{\mathbb{Q}}'(0)/\zeta_{\mathbb{Q}}(0) = \log 2\pi$, donne une formulation alternative du théorème 1.3 :

$$\int_\gamma \omega \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \exp\left(\frac{1}{2}\frac{\zeta_F'(0)}{\zeta_F(0)}\right).$$

**1.3.4. Applications en théorie des nombres transcendants.** — En 1976 Chudnovsky a démontré le théorème suivant [**Chu84**, Thm. 1, p. 6], que l'on énonce reprenant les notations de l'exemple 1.1.6 :

***Théorème 1.5* (Chudnovsky).** — *Soit $E$ une courbe elliptique sur $\overline{\mathbb{Q}}$. Le degré de transcendance du corps engendré (sur $\overline{\mathbb{Q}}$) par les périodes $\int_{\gamma_i} \omega_j$ est au moins* 2.

Lorsque $E$ a multiplication complexe, la relation de Legendre et le fait que le quotient des périodes associés à la même forme différentielle soit algébrique entraînent le corollaire suivant :

***Corollaire 1.4.*** — *Soient $E$ une courbe elliptique avec multiplication complexe, $\omega \in H^0(E, \Omega^1_E)$ une différentielle non nulle et $\gamma \in H_1(E^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ un cycle non homologue à zéro. Alors les nombres complexes $\int_\gamma \omega$ et $\pi$ sont algébriquement indépendants.*

Combiné avec ce corollaire, la formule de Lerch-Chowla-Selberg permet de vérifier la conjecture suivante pour $d = 3$ et 4, ce qui implique notamment la transcendance de $\Gamma(\frac{1}{3})$ et $\Gamma(\frac{1}{4})$.

***Conjecture 1.*** — *Les nombres $2\pi i$ et $\Gamma(\frac{a}{d})$ pour $(a, d) = 1$ et $0 < a < \frac{d}{2}$ sont algébriquement indépendants.*

Le seul autre cas connu est $d = 6$, qui se déduit de $d = 3$ puisque

$$\Gamma(\tfrac{1}{6}) = \frac{2^{-\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(\tfrac{1}{3})^2$$

par la relation de distribution appliquée à $z = 1/6$ et $d = 2$. Déjà le cas $d = 5$ est ouvert, bien qu'on sache que deux parmi les trois nombres $2\pi i$, $\Gamma(\frac{1}{5})$ et $\Gamma(\frac{2}{5})$ sont algébriquement indépendants [**Gri00**, Prop. 3.12.1, p. 96].

**1.3.5. Autres preuves de la formule de Lerch-Chowla-Selberg.** — En 1978, Gross donna une preuve géométrique du théorème 1.3 : en se plaçant sur une variété de Shimura convenable, le calcul est réduit à celui des périodes sur un facteur simple de la jacobienne d'une courbe de Fermat, calcul qui peut être réalisé explicitement grâce à l'action des racines de l'unité [**Gr78**]. Cette nouvelle preuve mena Gross à conjecturer, avec Deligne, que le résultat reste vrai pour toute structure de Hodge géométrique avec multiplication complexe par un corps de nombres abélien.

## 1.4. La conjecture de Gross-Deligne

Soient $F$ un corps de nombres et $H$ une structure de Hodge rationnelle et pure de poids $n$. Désignons par $\mathrm{End}(H)$ l'anneau des endomorphismes de structures de Hodge de $H$.

***Définition 1.2***. — *Une multiplication complexe par $F$ sur $H$ est la donnée d'un morphisme (injectif) d'anneaux $\{\cdot\} : F \hookrightarrow \mathrm{End}(H)$. On dit qu'elle est maximale si $\dim_{\mathbb{Q}} H = [F : \mathbb{Q}]$.*

On a déjà vu un exemple dans la section précédente :

***Exemple 1***. — *Si $E$ est une courbe elliptique à multiplication complexe par le corps quadratique imaginaire $F = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, alors la structure de Hodge de poids un $H = H^1(E)$ admet multiplication complexe maximale par $F$ car*

$$\mathrm{End}(H) \simeq \mathrm{End}(E) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}.$$

Soit $(H, \{\cdot\})$ une structure de Hodge à multiplication complexe par $F$, non nécessairement maximale. Le morphisme $\{\cdot\}$ munit $H$ d'une structure d'espace vectoriel sur $F$ ; le complexifié $H_{\mathbb{C}} := H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ est donc un module sur

$$F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})},$$

d'où une décomposition canonique

$$H_{\mathbb{C}} = H \otimes_F (F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}) = H \otimes_F \mathbb{C}^{\mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})} = \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})} H_\sigma, \tag{8}$$

où l'on a posé $H_\sigma := H \otimes_{F,\sigma} \mathbb{C}$. La décomposition (8) ci-dessus montre que $H_\sigma$ s'identifie au sous-espace vectoriel de $H_{\mathbb{C}}$ où $F$ agit par $\sigma$ : on peut le décrire concrètement comme

$$H_\sigma = \ker(\{\alpha\} - \sigma(\alpha) \cdot \mathrm{id})$$

pour n'importe quel élément primitif $\alpha \in F$. Tous les $H_\sigma$ ont même dimension, égale à $m = \dim_F H$.

Puisque $F$ agit sur $H$ par des morphismes de structures de Hodge, la décomposition (8) est compatible à la décomposition de Hodge, d'où

$$H_\sigma = \bigoplus_{p+q=n} H_\sigma^{p,q} \tag{9}$$

pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$. Lorsque la multiplication complexe est maximale, tous les $H_\sigma$ sont de dimension un ; chacun est donc inclus dans un seul $H^{p,q}$. Notons $(p(\sigma), q(\sigma))$ le type de Hodge de $H_\sigma$. Vu que $\overline{H_\sigma} = H_{\overline{\sigma}}$, la fonction

$$p : \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ainsi définie satisfait à la relation $p(\sigma) + p(\overline{\sigma}) = n$. Qui plus est, la donnée d'une telle fonction équivaut à celle d'une décomposition de Hodge ; c'est ce qu'on appelle un *type CM*.

Si la condition $\dim_{\mathbb{Q}} H = [F : \mathbb{Q}]$ n'est pas vérifiée, il y a toujours moyen d'associer à $H$ une structure de Hodge à multiplication complexe maximale par $F$, qui sera notée $\det_F H$. Pour ce faire, commençons par plonger

$$V := \bigoplus_{\sigma \in \mathrm{Hom}(F,\mathbb{C})} \det_{\mathbb{C}} H_\sigma$$

dans $H_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$ à travers l'application

$$\iota(\sum_\sigma v_1^\sigma \wedge \cdots \wedge v_m^\sigma) = \sum_\sigma \mathrm{Alt}(v_1^\sigma \otimes \cdots \otimes v_m^\sigma),$$

où Alt désigne, comme d'habitude,

$$\mathrm{Alt}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_m} \mathrm{sign}(\pi) \cdot x_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\pi(m)},$$

avec $\mathfrak{S}_m$ le groupe de permutations de $m$ éléments. Grâce à $\iota : V \hookrightarrow H_{\mathbb{C}}^{\otimes m}$, on peut munir $V$ d'une structure de Hodge de poids $mn$

$$V = \bigoplus_{p+q=mn} V^{p,q}$$

pour laquelle la droite $\det_{\mathbb{C}} H_\sigma$ a pour $p$-type de Hodge

$$\sum_{p+q=n} p h_\sigma^{p,q}.$$

Le lemme suivant est démontré dans [**MR04**, Lem. 2.1].

***Lemme 1.2***. — *Il existe une unique structure de Hodge rationnelle $V_{\mathbb{Q}}$ et un unique morphisme injectif de structures de Hodge $\iota_{\mathbb{Q}} : V_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow H^{\otimes m}$ induisant, par complexification, $V$ et $\iota$ respectivement.*

Dans le reste du chapitre on se placera dans le cadre suivant :

***Hypothèses H***. — *Soit $H$ une structure de Hodge de poids $n$ telle que*

(a) *$H$ est une sous-structure de Hodge de la structure de Hodge rationnelle $H_B^n(X) := H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ pour une variété $X$ projective et lisse sur $\overline{\mathbb{Q}}$,*

(b) *$H$ admet une multiplication complexe $\{\cdot\} : F \hookrightarrow \mathrm{End}(H)$ par un corps de nombres abélien $F \supsetneq \mathbb{Q}$.*

Si $H$ vérifie les hypothèses ci-dessus, il en va de même pour la structure de Hodge $\det_F H$, de poids $nm$, car

$$\det_F H \subset H_B^n(X)^{\otimes m} \subset H_B^{nm}(X^m)$$

par la formule de Künneth. Signalons maintenant les conséquences de l'hypothèse (b). Par le théorème de Kronecker-Weber, $F$ se plonge dans un corps cyclotomique $F \hookrightarrow \mathbb{Q}(\mu_d)$, où $d$ est un entier $\geq 3$ ; choisissons un tel plongement. À l'aide du plongement fixé dès le début $\varphi : F \hookrightarrow \mathbb{C}$, on construit une application

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$$

associant, à chaque $\tau$ dans le groupe de Galois, le plongement $\varphi \circ (\tau_{|F})$. Ceci est bien défini car $F$ est normal par hypothèse. Grâce à l'isomorphisme canonique $(\mathbb{Z}/d)^\times \simeq \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\mu_d)/\mathbb{Q})$, on en déduit une application surjective

$$(\mathbb{Z}/d)^\times \longrightarrow \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C}). \tag{10}$$

Finalement, en composant avec le type CM de $\det_F H$, on obtient une fonction

$$p : (\mathbb{Z}/d)^\times \longrightarrow \mathbb{Z}$$

satisfaisant à $p(u) + p(-u) = nm$ pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.

***Lemme 1.3***. — *Soit $p : (\mathbb{Z}/d)^\times \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que $p(u) + p(-u)$ soit constante. Il existe une fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$p(u) = \frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon(a) \langle au \rangle. \tag{11}$$

*Démonstration.* — C'est le contenu de [**Del77**, Lem. 6.12]. □

***Remarque 1.4***. — *Réciproquement, si $p$ qui s'écrit sous la forme* (11)*, alors $p(u) + p(-u)$ est constante et la constante vaut $\sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon(a)$.*

La fonction $\varepsilon$ n'est pas unique.

On dispose maintenant de tous les ingrédients nécessaires pour définir les périodes associées à des structures de Hodge vérifiant nos hypothèses H. Pour chaque $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$, soit $\omega_u \in \det_{\mathbb{C}} H_u$ un élément défini sur $\overline{\mathbb{Q}}$ pour la structure de de Rham provenant de l'isomorphisme des périodes sur la variété $X^m$. Un tel élément est bien défini à multiplication par un nombre algébrique près. Soit $v \in H^\vee$ n'importe quel élément non nul du dual du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\det_F H$. On définit des périodes par :

$$P_u(\det_F H) = v(\omega_u) \in \mathbb{C}^\times / \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

Dans [**Gr78**, p. 205], Gross énonce la conjecture suivante dont la version précise lui a été suggérée par Deligne :

***Conjecture 2* (Gross-Deligne).** —

$$P_u(\det_F H) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma\left(1 - \frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\varepsilon(\frac{a}{u})}.$$

Puisque la fonction $\varepsilon$ n'est pas unique, le plus urgent est d'établir que :

***Proposition 1.2.*** — *La conjecture 2 est indépendante du choix de $\varepsilon$.*

Ceci découle du résultat d'algébricité suivant, démontré par Koblitz et Ogus dans l'appendice à [**Del79**].

***Théorème 1.6.*** — *Soit $\gamma : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ une fonction satisfaisant aux équations*

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \gamma(a)\langle au\rangle = 0$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$. Alors les nombres*

$$\prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1 - \frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\gamma(\frac{a}{u})}$$

*sont algébriques pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

**1.4.1. Retour à la formule de Lerch-Chowla-Selberg.** — Voyons comment la formule de Lerch-Chowla-Selberg entraîne la conjecture de Gross-Deligne pour le $H^1$ d'une courbe elliptique à multiplication complexe.

***Exemple 2.*** — *Lorsque $F$ est le corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, l'application $(\mathbb{Z}/d)^\times \to \mathrm{Hom}(F, \mathbb{C})$ construite dans (10) n'est autre que le caractère quadratique $\chi_F$ associé à $F$. Soit $H = H^1_B(E)$, pour $E$ une courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers de $F$. D'après la formule de Lerch-Chowla-Selberg*

$$P_u(H) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^*} \sqrt{\pi} \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma\left(\frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\frac{w\chi_F(a)}{4h}}$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ tel que $\chi_F(u) = 1$ et*

$$P_u(H) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^*} \sqrt{\pi} \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma\left(\frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{-\frac{w\chi_F(a)}{4h}}$$

*si* $\chi_F(u) = -1$. *Grâce à la relation* (6), *ces deux identités sont équivalentes à*

$$P_u(H) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^*} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1-\frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*où* $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ *est la fonction*

$$\varepsilon(a) = -\frac{w\chi_F(a)}{4h} + \frac{1}{d-1}.$$

*Il reste à montrer que* $\varepsilon$ *vérifie les équations du lemme 1.3. Pour ce faire, utilisons la formule du nombre de classes de Dirichlet*

$$h = -\frac{w}{2d}\sum_{a=1}^{d-1} \chi_F(a)a.$$

*Elle entraîne :*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d} \varepsilon(a)\langle au\rangle = \frac{1}{2}(1+\chi_F(u))$$

*et c'est le résultat voulu car* $H_u = H^{1,0}$ *pour* $\chi_F(u) = 1$ *et* $H_u = H^{0,1}$ *sinon.*

**1.4.2. Invariance par torsion à la Tate.** — Finissons cette section par un lemme qui décrit l'invariance de la conjecture par torsion à la Tate. C'est pour l'essentiel une conséquence de la relation de distribution (6) reliant $2\pi i$ à un produit des valeurs gamma. Rappelons que, si $m$ est un entier, $\mathbb{Q}(m)$ est la structure de Hodge de poids $-2m$ sur la droite $(2\pi i)^m\mathbb{Q} \subset \mathbb{C}$. En particulier, $\mathbb{Q}(-1) = H^2_B(\mathbb{P}^1)$. Étant donnée une structure de Hodge $H$, on définit la structure de Hodge « tordue à la Tate » comme

$$H(m) := H \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(m).$$

Elle a pour nombres de Hodge $H(m)^{p,q} = H^{p+m,q+m}$. Lorsque $m = -r$ avec $r \geq 0$, si $H$ vérifie les hypothèses H, il en va de même pour $H(-r)$ car cette structure est incluse dans la cohomologie de $H^{n+2r}(X \times \mathbb{P}^r)$ d'après la formule de Künneth.

***Lemme 1.4.*** — *Soient* $r \geq 0$ *un entier et* $H$ *une structure de Hodge vérifiant les hypothèses H. La conjecture de Gross-Deligne vaut pour* $\det_F H$ *si et seulement si elle vaut pour* $\det_F(H(-r))$.

*Démonstration.* — Posons $m = \dim_F H$. On a, d'un côté,

$$P_u(\det_F(H(-r))) = (2\pi i)^{rm} P_u(\det_F H)$$

et de l'autre côté,

$$\sum_{p+q=n+2r} ph^{p,q}(-r)_u = \sum_{p+q=n+2r} [(p-r)+r]h_u^{p-r,q-r} = rm + \sum_{p+q=n} ph_u^{p,q}.$$

Compte tenu de l'identité

$$rm = \frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \frac{2rm}{d-1} \langle au \rangle,$$

l'énoncé du lemme équivaut à l'identité

$$(2\pi i)^{rm} \sim \prod_{a=1}^{d-1} \Gamma(1 - \frac{a}{d})^{\frac{2rm}{d-1}}$$

qui est une conséquence de la relation (6). □

## 1.5. Les périodes des variétés avec automorphismes d'ordre fini

Les variétés projectives et lisses munies d'automorphismes d'ordre fini fournissent une classe intéressante de structures de Hodge vérifiant les hypothèses de la conjecture de Gross-Deligne. Soient $d \geq 2$ un entier et $K$ un corps de nombres contenant $F = \mathbb{Q}(\mu_d)$. Fixons une racine primitive $d$-ième de l'unité $\xi$ une fois pour toutes. Soient $X$ une variété projective et lisse sur $K$ et $g : X \to X$ un automorphisme d'ordre $d$. Par fonctorialité, $g$ induit des endomorphismes $g^*$ en cohomologie de Betti et de de Rham algébrique. Lorsque $g^*$ a pour ordre exactement $d$, ceci munit la structure de Hodge $H^j_B(X)$ d'une multiplication complexe par $F$. Notons

$$H^j_B(X)_u \quad (\text{resp. } H^j_{dR}(X)_u)$$

le sous-espace de $H^j_B(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\mu_d)$ (resp. de $H^j_{dR}(X/K)$) où $g^*$ agit par multiplication par $\xi^u$. Par fonctorialité, on dispose des isomorphismes

$$\rho^j_u : H^j_{dR}(X/K)_u \otimes_K \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j_B(X)_u \otimes_F \mathbb{C}$$

pour chaque $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$. Les périodes de la section précédente admettent alors la description (plus fine) suivante :

$$P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^j(X)) \in \mathbb{C}^\times / K^\times$$

est la classe du déterminant de la matrice de l'isomorphisme $\rho^j_u$ par rapport à des bases rationnelles.

Dans [**MR04**, Thm. 1], Maillot et Rössler démontrent le résultat suivant :

***Théorème 1.7* (Maillot-Rössler).** — *Soit $\chi : (\mathbb{Z}/d)^\times \to \mathbb{C}^\times$ un caractère de Dirichlet primitif et impair. L'égalité*

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{u\in(\mathbb{Z}/d)^\times} \log|P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))|\chi(u)$$
$$= \frac{L'(0,\chi)}{L(0,\chi)} \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{u\in(\mathbb{Z}/d)^\times} \sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(X)\chi(u)$$

*est vraie à l'addition près d'un terme de la forme $\sum_u \log|a_u|\chi(u)$ avec $a_u \in F^\times$.*

L'ingrédient principal de la preuve de ce théorème est un analogue équivariant du théorème de Riemann-Roch en géométrie d'Arakelov démontré par Köhler et Rössler [**KR01**, Thm. 4.4]. En général, le terme le plus difficile à calculer est la torsion analytique (équivariante), mais elle s'annule pour le complexe de de Rham par des raisons de symétrie. On renvoie à l'article original ou au séminaire Bourbaki [**Sou05**] pour les détails.

Lorsque $d$ est premier, le théorème 1.7 et la formule de Hurwitz entraînent le corollaire suivant [**MR04**, Lemma 4.1, p. 751] :

***Corollaire 1.5* (Maillot-Rössler).** — *La relation*

$$\prod_{k=0}^{2n}|P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))|^{(-1)^k} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1-\frac{\langle a\rangle}{d}\right)^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*est vraie quelque soit la fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d} \varepsilon(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(X)$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

Grâce à ce corollaire, Maillot et Rössler démontrent la conjecture de Gross-Deligne en module pour les hypersurfaces dans $\mathbb{P}^N(\overline{\mathbb{Q}})$ et les surfaces munies d'automorphismes d'ordre premier [**MR04**, p. 753].

# CHAPITRE 2

# PÉRIODES DES FIBRÉS À CONNEXION PLATS

## 2.1. Préliminaires sur les différentielles logarithmiques et la théorie de Hodge mixte

Dans cette section, on suppose donnés un corps $k$ de caractéristique zéro et une variété $X$ projective et lisse sur $k$, de dimension $n$.

***Définition 2.1.*** — *Un diviseur $D$ sur $X$ a des croisements normaux simples si toutes ses composantes irréductibles $\{D_i\}_{i\in I}$ sont lisses et l'intersection schématique $D_J = \bigcap_{i\in J} D_i$ est transverse pour toute partie non vide $J \subseteq I$.*

Rappelons que cette dernière condition signifie que, lorsque $s$ composantes irréductibles $D_1, \dots, D_s$ se rencontrent en un point fermé $P$ de $X$, leurs équations locales $f_1, \dots, f_s \in \mathfrak{m}_P$ forment une suite régulière dans $\mathcal{O}_{X,P}$.

Si $D$ est un diviseur réduit, à croisements normaux simples sur $X$, notons $j$ l'inclusion de $U = X - D$ dans $X$. Les sections de $j_*\Omega^p_U$ s'appellent différentielles méromorphes. Si $V \subseteq X$ est un ouvert et

$$\omega \in j_*\Omega^p_U(V) = \Omega^p_X(V \cap U),$$

on dit que $\omega$ a au pire un pôle simple le long de $D \cap V$ si pour tout ouvert affine $W \subseteq V$ tel que l'idéal de $D \cap W$ dans $\mathcal{O}_X(W)$ soit principal et pour tout générateur $f$ de cet idéal, la section $f \cdot \omega_{|U\cap W}$ appartient à l'image de la restriction $\Omega^p_X(W) \to \Omega^p_X(U \cap W)$.

***Définition 2.2.*** — *Pour chaque $p \geq 0$, le faisceau des $p$-formes différentielles logarithmiques le long de $D$ est le sous-faisceau $\Omega^p_X(\log D)$ de $j_*\Omega^p_U$ défini par*

$$\Omega^p_X(\log D)(V) := \{\omega \in j_*\Omega^p_U(V) \mid \omega \text{ et } d\omega \text{ ont au pire des pôles simples le long de } D \cap V\}$$

*pour tout ouvert $V$ de $X$.*

On vérifie aussitôt que $\Omega^p_X(\log D)$ est muni d'une structure de $\mathcal{O}_X$-module, compatible à l'inclusion dans $j_*\Omega^p_U$.

***Lemme 2.1***. — *$\Omega^p_X(\log D)$ est localement libre de rang $\binom{n}{p}$.*

Soit $P \in X$ un point fermé, inclus exactement dans $s$ composantes irréductibles de $D$. L'anneau $\mathcal{O}_{X,P}$ étant régulier, l'ensemble des équations locales correspondantes peut être complété en un système régulier de paramètres locaux $f_1, \dots, f_n$. Sur un voisinage $V$ de $P$, les éléments $df_1, \dots, df_n$ forment une base de $\Omega^1_X(V)$ comme $\mathcal{O}_X(V)$-module. Dans cette situation,

$$\frac{df_1}{f_1}, \dots, \frac{df_s}{f_s}, df_{s+1}, \dots, df_n$$

est une base de $\Omega^1_X(\log D)(V)$ en tant que $\mathcal{O}_X(V)$-module [**EV92**, 2.2 (c)]. Comme pour les différentielles usuelles, on a [**EV92**, 2.2 (b)] :

$$\Omega^p_X(\log D) = \bigwedge^p \Omega^1_X(\log D).$$

Soit $D_i$ une composante irréductible de $D$ et $P \in D_i$ un point fermé. Vu ce qui précède, sur un voisinage $V$ de $P$, toute section $\omega$ de $\Omega^1_X(\log D)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$\omega = \alpha \frac{df_i}{f_i} + \varphi,$$

avec $\alpha \in \mathcal{O}_X(V)$ et $\varphi \in \Omega^1_X(\log D)(V)$ ne faisant pas intervenir $df_i/f_i$.

***Définition 2.3***. — *Le résidu le long de $D_i$ est l'application*

$$\mathrm{Res}_{D_i} : \Omega^1_X(\log D) \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i}$$

*qui envoie $\omega \in \Omega^1_X(\log D)(V)$ vers $\alpha_{|D_i} \in \mathcal{O}_{D_i}(V \cap D_i)$.*

La proposition suivante est démontrée dans [**EV92**, 2.3].

***Proposition 2.1***. — *On a des suites exactes de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres*

(a) $0 \to \Omega^1_X \longrightarrow \Omega^1_X(\log D) \xrightarrow{\oplus \mathrm{Res}_{D_i}} \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{D_i} \to 0,$

(b) *Pour tout $i \in I$,*

$$0 \to \Omega^p_X(\log D)(-D_i) \to \Omega^p_X(\log(D - D_i)) \to \Omega^p_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i}) \to 0,$$

(c) *Pour tout $i \in I$,*

$$0 \to \Omega^p_X(\log(D - D_i)) \longrightarrow \Omega^p_X(\log D) \xrightarrow{\beta_i} \Omega^{p-1}_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i}) \to 0,$$

*avec $\beta_i$ définie comme suit : toute section $\omega$ de $\Omega^p_X(\log D)$ s'écrit de manière unique comme $\omega = \alpha \cdot df_i/f_i + \varphi$ avec $\varphi \in \Omega^p_X(\log D)$ ne faisant pas intervenir $df_i/f_i$. Avec ces notations, $\beta_i(\omega) = \alpha_{D_i}$.*

***Remarque 2.1.*** — *En particulier, par application successive de (b), on voit que les faisceaux* $\Omega^n_X(\log D)(-D)$ *et* $\Omega^n_X$ *sont isomorphes par un isomorphisme canonique qui prolonge l'identité sur* $X - D$*, ce qui est aussi une conséquence immédiate de la description en coordonnées locales.*

**2.1.1. Théorie de Hodge mixte.** — Rappelons brièvement, sans preuves, comment le complexe des différentielles logarithmiques permet de construire une structure de Hodge mixte sur la cohomologie d'une variété complexe lisse. On renvoie le lecteur à l'article original de Deligne [**Del71**] ou au chapitre 4 de la monographie [**PS08**] pour les démonstrations.

Soit $U$ une variété quasi-projective lisse et choisissons une compactification lisse $j : U \hookrightarrow X$ par un diviseur à croisements normaux simples $D$.

***Proposition 2.2.*** — *L'inclusion*

$$\Omega^\bullet_X(\log D) \hookrightarrow j_*\Omega^\bullet_U$$

*est un quasi-isomorphisme.*

Compte tenu de l'isomorphisme de comparaison entre la cohomologie de de Rham algébrique et analytique et du lemme de Poincaré expliqués dans le chapitre précédent, ceci entraîne :

$$\mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_X(\log D)) \simeq \mathbb{H}^i(U, \Omega^\bullet_U) \simeq H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}).$$

Comme dans le cas pur, la filtration bête $\Omega^{\geq p}_X(\log D)$ induit, à travers les identifications précédentes, une filtration décroissante

$$F^pH^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) := \mathrm{Im}(\mathbb{H}^i(X, \Omega^{\geq p}_X(\log D)) \to \mathbb{H}^i(X, \Omega^\bullet_X(\log D)))$$

dite *filtration de Hodge*. La suite spectrale associée

$${}_FE_1^{p,q} = H^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

dégénère en $E_1$ d'après [**Del71**, Cor. 3.2.13(ii)].

On dispose également d'une filtration croissante du complexe des différentielles logarithmiques, tenant compte du nombre de pôles :

$$W_m\Omega^p_X(\log D) = \begin{cases} 0 & m < 0 \\ \Omega^{p-m}_X \wedge \Omega^m_X(\log D) & 0 \leq m \leq p \\ \Omega^p_X(\log D) & m \geq p \end{cases}$$

La filtration induite en cohomologie

$$W_mH^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) := \mathrm{Im}(\mathbb{H}^i(X, W_{m-i}\Omega^\bullet_X(\log D)) \to H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}))$$

est appelée *filtration par le poids*. Avec cette définition, $W_mH^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = 0$ lorsque $m < i$ et $W_iH^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) = \mathrm{Im}(H^i(X) \to H^i(U))$.

***Proposition 2.3.*** — *La filtration par le poids est définie sur* $\mathbb{Q}$.

Désignons, comme précédemment, $\{D_i\}_{i\in I}$ les composantes irréductibles du diviseur $D$ et $D_J = \bigcap_{i\in J} D_i$ l'intersection schématique de celles indexées par une partie non vide $J \subset I$, avec la convention $D_\emptyset = X$. Posons

$$D(m) = \bigsqcup_{|J|=m} D_J$$

pour $0 \leq m \leq |I|$. L'hypothèse « croisements normaux simples » entraîne que $D(m)$ est un sous-schéma lisse de dimension $n - m$. Notons finalement $a_J : D_J \hookrightarrow X$ l'inclusion et $a_m = \bigsqcup_{|J|=m} a_J$.

Pour chaque partie non vide $J \subset I$, de cardinal $m$, on définit une application

$$\mathrm{Res}_J : \Omega^\bullet_X(\log D) \longrightarrow \Omega^\bullet_{D_J}(\log(D \cap D_I))[-m]$$

comme suit : si $f_1, \ldots, f_m$ sont des équations locales des composantes $D_i$ indexées par $J$, alors

$$\mathrm{Res}_J(\frac{df_1}{f_1} \wedge \cdots \wedge \frac{df_m}{f_m} \wedge \eta + \eta') = \eta_{|D_J},$$

où $\eta$ a au pire des pôles le long des composantes n'appartenant pas à $J$ et $\eta'$ ne fait pas intervenir toutes les formes $df_1/f_1, \ldots, df_m/f_m$. Cette application se restreint en un morphisme de complexes

$$\mathrm{Res}_J : W_m\Omega^\bullet_X(\log D) \longrightarrow \Omega^\bullet_{D_J}[-m]$$

qu'il est d'usage d'appeler « résidu de Poincaré ».

***Proposition 2.4***. — *Le « résidu de Poincaré » induit des isomorphismes :*

$$\mathrm{Res}_m = \bigoplus_{|J|=m} \mathrm{Res}_J : \mathrm{Gr}^W_m \Omega^\bullet_X(\log D) \xrightarrow{\sim} a_{m*}\Omega^\bullet_{D(m)}[-m]$$

La suite spectrale

$$E_1^{-m,i+m} = \mathbb{H}^i(X, \mathrm{Gr}^W_m \Omega^\bullet_X(\log D)) \otimes_k \mathbb{C} \Rightarrow H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}) \tag{12}$$

associée à la filtration par le poids dégénère en $E_2$. La proposition 2.4 permet de la récrire en termes des $D(m)$.

Pour la suite, il sera commode de formuler les résultats dans le groupe de Grothendieck des structures de Hodge pures, qui sera noté $K_0(\mathfrak{hs})$. Celui-ci est le quotient du groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphisme $[H]$ de structures de Hodge pures par les relations

$$[H] = [H'] + [H'']$$

pour toute suite exacte $0 \to H' \to H \to H'' \to 0$ de structures de Hodge. Étant donnée une structure de Hodge mixte, on définit sa classe dans $K_0(\mathfrak{hs})$ comme la somme des classes des gradués par le poids. En particulier :

$$[H^i(U)] := \sum_{m \geq 0} [\mathrm{Gr}_m^W H^i(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})] \in K_0(\mathfrak{hs}).$$

Dans ce langage, la suite spectrale (12) et la proposition 2.4 donnent :

***Théorème 2.1.*** — *L'égalité suivante est vraie dans* $K_0(\mathfrak{hs})$ :

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i [H^i(U)] = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \mathbb{Q}(-m) \sum_{\ell=0}^{2(n-m)} (-1)^\ell [H^\ell(D(m))].$$

On dispose également d'une structure de Hodge mixte sur la cohomologie à support compact $H_c^i(U)$, construite de sorte que la dualité de Poincaré

$$H^i(U) \otimes H_c^{2n-i}(U) \longrightarrow H_c^{2n}(U) \simeq \mathbb{Q}(-n)$$

et la suite exacte longue d'excision

$$\cdots \to H^{i-1}(X) \to H^{i-1}(D) \to H_c^i(U) \to H^i(X) \to \cdots$$

soient des morphismes de structures de Hodge mixtes. Cette dernière propriété entraîne un résultat analogue au théorème 2.1, qui a l'avantage de ne pas faire intervenir la torsion à la Tate :

***Théorème 2.2.*** — *L'égalité suivante est vraie dans* $K_0(\mathfrak{hs})$ *:*

$$\sum_{i=0}^{2n} (-1)^i [H_c^i(U)] = \sum_{m \geq 0} (-1)^m \sum_{\ell=0}^{2(n-m)} (-1)^\ell [H^\ell(D(m))].$$

***Exemple 3.*** — *Soient* $\bar{C}$ *une courbe projective et lisse sur un corps* $k \subset \mathbb{C}$ *et* $C = \bar{C} - S$*, où* $S$ *est un ensemble formé de* $s \geq 1$ *points. Alors on a*

| | *poids* 0 | *poids* 1 | *poids* 2 |
|---|---|---|---|
| $H^0(C)$ | $\mathbb{Q}(0)$ | 0 | 0 |
| $H^1(C)$ | 0 | $H^1(\bar{C})$ | $\mathbb{Q}(-1)^{\oplus(s-1)}$ |
| $H^2(C)$ | 0 | 0 | 0 |

*pour la cohomologie ordinaire et*

| | *poids* 0 | *poids* 1 | *poids* 2 |
|---|---|---|---|
| $H_c^0(C)$ | 0 | 0 | 0 |
| $H_c^1(C)$ | $\mathbb{Q}(0)^{\oplus(s-1)}$ | $H^1(\bar{C})$ | 0 |
| $H_c^2(C)$ | 0 | 0 | $\mathbb{Q}(-1)$ |

*pour la cohomologie à support compact.*

## 2.2. Quelques calculs de classes de Chern

Dans cette section je rassemble quelques calculs de classes de Chern qui seront utilisés à plusieurs reprises dans la suite.

***Lemme 2.2.*** — *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $r$ sur $X$. Les égalités suivantes sont vraies modulo* $\mathrm{CH}^{>r}(X)$ :

(a) $\sum_{p=0}^{r}(-1)^p \mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E}) = (-1)^r c_r(\mathcal{E})$,

(b) $(-1)^r \sum_{p=0}^{r}(-1)^p p\,\mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E}) = c_{r-1}(\mathcal{E})[1+\frac{1}{2}c_1(\mathcal{E})] + \frac{r}{2}c_r(\mathcal{E})$.

*Démonstration.* — Par le principe de scindage, on peut supposer

$$\sum_{i=0}^{r} c_i(\mathcal{E})T^{r-i} = \prod_{i=1}^{r}(T+\beta_i).$$

En particulier

$$c_r(\mathcal{E}) = \beta_1\cdots\beta_r, \quad c_{r-1}(\mathcal{E}) = \sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}\beta_j, \quad c_1(\mathcal{E}) = \beta_1+\cdots+\beta_r$$

et $\mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E})$ vaut

$$e_p := \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq r} \exp(\beta_{i_1}+\cdots+\beta_{i_p}).$$

Considérons le polynôme

$$f(T) = \sum_{p=0}^{r}(-1)^p e_p T^{r-p} = \prod_{i=1}^{r}(T-e^{\beta_i}) \tag{13}$$

dont la valeur en $T=1$ donne $\sum(-1)^p\mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E})$. Or,

$$f(1) = \prod_{i=1}^{r}(1-e^{\beta_i}) = (-1)^r\prod_{i=1}^{r}\sum_{\ell\geq 1}\frac{\beta_i^\ell}{\ell!} \equiv (-1)^r\beta_1\cdots\beta_r \mod \mathrm{CH}^{>r}(X),$$

ce qui établit la première partie du lemme.

Pour démontrer la seconde, dérivons l'identité (13) ci-dessus :

$$f'(T) = \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p(r-p)e_pT^{r-p-1} = \sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}(T-e^{\beta_j}),$$

d'où :

$$f'(1) = \sum_{p=0}^{r-1}(-1)^p(r-p)e_p = (-1)^{r-1}\sum_{i=1}^{r}\prod_{j\neq i}\sum_{\ell\geq 1}\frac{\beta_j^\ell}{\ell!}. \tag{14}$$

Calculons les termes en degré $\leq r$ du côté droite de cette équation. Puisque

$$\prod_{j\neq i}\sum_{\ell\geq 1}\frac{\beta_j^\ell}{\ell!} = \prod_{j\neq i}[\beta_j + \frac{\beta_j^2}{2} + \cdots] \equiv \prod_{j\neq i}\beta_j + \sum_{k\neq i}(\prod_{j\neq i}\beta_j)\frac{\beta_k}{2} \mod \mathrm{CH}^{>r}(X)$$
$$\equiv (\prod_{j\neq i}\beta_j)(1 + \frac{1}{2}\sum_{j\neq i}\beta_j) \mod \mathrm{CH}^{>r}(X),$$

on voit que

$$\sum_{i=1}^r\prod_{j\neq i}\sum_{\ell\geq 1}\frac{\beta_j^\ell}{\ell!} \equiv \sum_{i=1}^r\prod_{j\neq i}\beta_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r(\prod_{j\neq i}\beta_j)(\sum_{j\neq i}\beta_j) \mod \mathrm{CH}^{>r}(X).$$

Or, ce dernier terme est égal à

$$\sum_{i=1}^r(\prod_{j\neq i}\beta_j)(\sum_{j\neq i}\beta_j) = (\sum_{i=1}^r\beta_i)(\sum_{i=1}^r\prod_{j\neq i}\beta_j) - r\prod_{i=1}^r\beta_i,$$

d'où la relation

$$f'(1) \equiv (-1)^{r-1}(\sum_{i=1}^r\prod_{j\neq i}\beta_j)(1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^r\beta_i) + (-1)^r\frac{r}{2}\prod_{i=1}^r\beta_i$$
$$\equiv (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E})[1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{E})] + (-1)^r\frac{r}{2}c_r(\mathcal{E}) \mod \mathrm{CH}^{>r}(X).$$

Puisque

$$f'(1) = \sum_{p=0}^r(-1)^p(r-p)e_p = r\sum_{p=0}^r(-1)^pe_p - \sum_{p=1}^r(-1)^p pe_p$$

d'après (14) et que

$$\sum_{p=0}^r(-1)^pe_p \equiv (-1)^rc_r(\mathcal{E}) \mod \mathrm{CH}^{>r}(X)$$

d'après la partie (a) du lemme, on trouve finalement

$$\sum_{p=1}^r(-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E}) = \sum_{p=1}^r(-1)^p pe_p = r\sum_{p=0}^r(-1)^pe_p - f'(1)$$
$$\equiv (-1)^rc_{r-1}(\mathcal{E})[1 + \frac{1}{2}c_1(\mathcal{E})] + (-1)^r\frac{r}{2}c_r(\mathcal{E}) \mod \mathrm{CH}^{>r}(X),$$

ce qu'on voulait démontrer. $\square$

***Remarque 2.2.*** — *La première partie du lemme 2.2 ci-dessus est due à Hirzebruch* [**Hir66**, Thm. 10.1.1]*, qui montre en fait l'identité plus précise*

$$\sum_{p=0}^{r}(-1)^p \mathrm{ch}(\Lambda^p\mathcal{E}) = (-1)^r c_r(\mathcal{E}) \cdot \mathrm{td}(\mathcal{E}^\vee)^{-1}.$$

*La preuve de la partie (b) complète la méthode de* [**ST97**, Lem. 5.2, p. 918]*, où le terme en degré $r-1$ est calculé.*

***Lemme 2.3.*** — *Avec les notations précédentes :*

$$\chi(U^{\mathrm{an}}) = (-1)^n \int_X c_n(\Omega^1_X(\log D))$$

*Démonstration.* — Par l'identité de Hirzebruch (cf. lemme 2.2(a) ci-dessus) :

$$(-1)^n c_n(\Omega^1_X(\log D)) = \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{ch}(\Omega^p_X(\log D)).$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
(-1)^n \int_X c_n(\Omega^1_X(\log D)) &= \int_X (-1)^n c_n(\Omega^1_X(\log D))\mathrm{td}(TX) \\
&= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \int_X \mathrm{ch}(\Omega^p_X(\log D))\mathrm{td}(TX) \\
&\overset{(1)}{=} \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \chi(X, \Omega^p_X(\log D)) \\
&= \sum_{0\le p,q\le n}(-1)^{p+q} h^q(X, \Omega^p_X(\log D)) \\
&\overset{(2)}{=} \sum_{j=0}^{2n}(-1)^j \dim_{\mathbb{C}} H^j(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{C}).
\end{aligned}$$

L'égalité (1) vient du théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch et (2) découle de la dégénerescence en $E_1$ de la suite spectrale ${}_FE_1^{p,q}$. □

Étant donné un diviseur à croisements normaux simples $D \subset X$, notons

$$D_i^* := D_i - \bigcup_{i\neq j} D_j$$

l'intersection de $D_i$ avec la partie régulière de $D$.

***Lemme 2.4.*** —

$$\chi(D_i^*) = (-1)^{n-1} \int_{D_i} c_{n-1}(\Omega^1_X(\log D)_{|D_i})$$

*Démonstration.* — Considérons, pour chaque composante irréductible, la suite exacte de faisceaux localement libres sur $D_i$

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i}) \longrightarrow \Omega^1_X(\log D)_{|D_i} \longrightarrow \mathcal{O}_{D_i} \longrightarrow 0.$$

obtenue par restriction de (c) dans la proposition 2.1. Par la multiplicativité des classes de Chern :

$$\begin{aligned} c_{n-1}(\Omega^1_X(\log D)_{|D_i}) &= \sum_{r+s=n-1} c_r(\Omega^1_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i})) \cdot c_s(\mathcal{O}_{D_i}) \\ &= c_{n-1}(\Omega^1_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i})). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_{D_i} c_{n-1}(\Omega^1_X(\log D)_{|D_i}) = \int_{D_i} c_{n-1}(\Omega^1_{D_i}(\log(D - D_i)_{|D_i}))$$

et le résultat suit du lemme 2.3 appliqué au diviseur à croisements normaux simples $(D - D_i)_{|D_i} = \bigcup_{i \neq j} D_i \cap D_j$ dans $D_i$ car, dans ce cas, $U = D_i^*$. □

## 2.3. La catégorie $M_{k,F}(U)$

Dans cette section, $k$ et $F$ sont deux sous-corps de $\mathbb{C}$ et $U$ une variété quasi-projective et lisse sur $k$. À ces données, Saito et Terasoma associent dans [**ST97**, Def. 2, p. 872] une catégorie $M_{k,F}(U)$ formée de fibrés à connexions plats, avec singularités régulières et dont le système local des sections horizontales est muni d'une structure rationnelle.

### 2.3.1. Préliminaires sur les fibrés à connexions. —

***Définition 2.4.*** — *Un fibré à connexion sur $U$ est un couple $(\mathcal{E}, \nabla)$ formé d'un $\mathcal{O}_U$-module localement libre de rang fini $\mathcal{E}$ et d'un morphisme de faisceaux $k$-linéaire*

$$\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_U$$

*satisfaisant à la règle de Leibniz :*

$$\nabla(f \cdot e) = f \cdot \nabla(e) + e \otimes df$$

*quelles que soient les sections locales $e$ de $\mathcal{E}$ et $f$ de $\mathcal{O}_U$.*

La connexion $\nabla = \nabla_0$ s'étend canoniquement en des morphismes $k$-linéaires

$$\nabla_p : \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^p_U \longrightarrow \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^{p+1}_U$$

en posant, pour des sections locales $e$ de $\mathcal{E}$ et $\omega$ de $\Omega^p_U$,

$$\nabla_p(e \otimes \omega) = e \otimes dw + (-1)^p \nabla(e) \wedge \omega.$$

***Définition 2.5***. — *Une connexion* $(\mathcal{E}, \nabla)$ *est dite intégrable si* $\nabla_{p+1} \circ \nabla_p = 0$ *pour tout* $p \geq 0$*. Dans ce cas, on lui associe le complexe de de Rham*

$$DR(\mathcal{E}, \nabla) = [\mathcal{E} \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_U \xrightarrow{\nabla_1} \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^2_U \longrightarrow \cdots]$$

*et on définit la cohomologie de de Rham à valeurs dans* $(\mathcal{E}, \nabla)$ *comme l'hypercohomologie de ce complexe*

$$H^j_{dR}(U, (\mathcal{E}, \nabla)) := \mathbb{H}^j(U, DR(\mathcal{E}, \nabla)).$$

Fixons un tel fibré à connexion intégrable $(\mathcal{E}, \nabla)$ sur $U$. Ces données induisent, par analytification, un morphisme $\mathbb{C}$-linéaire

$$\nabla^{\mathrm{an}} : \mathcal{E}^{\mathrm{an}} \longrightarrow \mathcal{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathcal{O}_U^{\mathrm{an}}} \Omega^1_{U^{\mathrm{an}}}$$

et la même construction fournit un complexe de faisceaux analytiques sur $U^{\mathrm{an}}$

$$DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}}) = [\mathcal{E}^{\mathrm{an}} \xrightarrow{\nabla^{\mathrm{an}}} \mathcal{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathcal{O}_U^{\mathrm{an}}} \Omega^1_{U^{\mathrm{an}}} \xrightarrow{\nabla_1^{\mathrm{an}}} \mathcal{E}^{\mathrm{an}} \otimes_{\mathcal{O}_U^{\mathrm{an}}} \Omega^2_{U^{\mathrm{an}}} \longrightarrow \cdots]$$

et un morphisme en hypercohomologie

$$H^j_{dR}(U, (\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{H}^j(U^{\mathrm{an}}, DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})). \tag{15}$$

Par ailleurs, les « sections horizontales » de $\nabla^{\mathrm{an}}$ forment un système local d'espaces vectoriels complexes $E^\nabla$ sur $U^{\mathrm{an}}$, du même rang que $\mathcal{E}$. On dispose encore d'un lemme de Poincaré analytique à coefficients selon lequel l'inclusion de $E^\nabla$ dans $\mathcal{E}^{\mathrm{an}}$ induit un quasi-isomorphisme $E^\nabla \to DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})$ de complexes de faisceaux sur $U^{\mathrm{an}}$, donc un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes

$$H^j(U^{\mathrm{an}}, E^\nabla) \xrightarrow{\sim} H^j_{dR}(U^{\mathrm{an}}, (\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})).$$

Nonobstant le parallélisme avec le cas à coefficients constants, des exemples simples montrent qu'on ne peut pas espérer que la flèche (15) soit un isomorphisme dans cette généralité, ce qui serait l'analogue du théorème 1.1.

***Exemple 4***. — *Considérons, sur la droite affine* $\mathbb{A}^1_k$*, la connexion* $(\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}, \nabla)$ *définie par* $\nabla(1) = dx$*. Dans ce cas, l'hypercohomologie se calcule comme la cohomologie du complexe des sections globales. Pour la déterminer en degré zéro, on est donc amené à résoudre l'équation différentielle* $df = -f dx$ *qui n'a pas de solution algébrique mais dont* $\exp(-x)$ *est une solution analytique. Il s'ensuit que* $H^0_{dR}(\mathbb{A}^1, (\mathcal{O}_{\mathbb{A}^1}, \nabla)) = 0$ *tandis que* $\mathbb{H}^0_{dR}(\mathbb{A}^{1,\mathrm{an}}, DR(\mathcal{O}^{\mathrm{an}}_{\mathbb{A}^1}, \nabla^{\mathrm{an}})) = \mathbb{C} \cdot \exp(-x)$*.*

**2.3.2. Singularités régulières.** — Pour que les deux cohomologies considérées dans le paragraphe précédent soient isomorphes, il faudra se restreindre à une classe des connexions dites « à singularités regulières ». Rappelons-en la définition. Soit $X$ une variété projective et lisse contenant $U$ comme le complémentaire d'un diviseur à croisements normaux simples $D$ (il en existe d'après le théorème de résolution des singularités d'Hironaka).

***Définition 2.6.*** — *Soit $\mathcal{E}_X$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent. Une connexion logarithmique sur $\mathcal{E}_X$ est un morphisme $k$-linéaire*

$$\nabla : \mathcal{E}_X \longrightarrow \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X(\log D)$$

*satisfaisant à la règle de Leibniz*

$$\nabla(f \cdot e) = f \cdot \nabla(e) + e \otimes df$$

*pour toute section locale $e$ de $\mathcal{E}_X$ et $f$ de $\mathcal{O}_X$.*

Comme précédemment, on dit que $\nabla$ est intégrable si les morphismes

$$\nabla_p : \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^p_X(\log D) \longrightarrow \mathcal{E}_X \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^{p+1}_X(\log D)$$

vérifient $\nabla_{p+1} \circ \nabla_p = 0$ pour tout $p \geq 0$.

***Définition 2.7.*** — *On appelle extension de $(\mathcal{E}, \nabla)$ à $X$ toute connexion logarithmique intégrable $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ sur $X$ telle que $(\mathcal{E}_X, \nabla)_{|U} \simeq (\mathcal{E}, \nabla)$. S'il existe une telle extension, on dit que $(\mathcal{E}, \nabla)$ a des singularités régulières le long de $D$.*

On vérifie facilement que la notion de singularités régulières ne dépend pas de la compactification choisie [**Kat70**, III, p. 438]. Fixons une compactification $X$ par un diviseur à croisements normaux simples $D$ et une extension $(\mathcal{E}_X, \nabla_X)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$. Pour chaque composante irréductible $D_i$ de $D$, on dispose de l'application

$$\mathrm{Res}_{D_i}\nabla : \mathcal{E}_X \xrightarrow{\nabla} \mathcal{E}_X \otimes \Omega^1_X(\log D) \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{Res}_{D_i}} \mathcal{E}_X \otimes \mathcal{O}_{D_i}.$$

C'est un morphisme $\mathcal{O}_{D_i}$-linéaire, qui se factorise par la restriction de $\mathcal{E}_X$ à $D_i$. L'endomorphisme qui s'en déduit sera encore noté

$$\mathrm{Res}_{D_i}\nabla \in \mathrm{End}_{\mathcal{O}_{D_i}}(\mathcal{E}_{X|D_i}).$$

Désignons par $\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T)$ le polynôme caractéristique de $\mathrm{Res}_{D_i}\nabla$. Puisque $D_i$ est propre, il s'agit d'un polynôme à coefficients dans l'extension finie de $k$

$$k_i := \Gamma(D_i, \mathcal{O}_{D_i}).$$

***Définition 2.8.*** — *Une extension $(\mathcal{E}_X, \nabla_X)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$ est dite petite (resp. grande) si, pour toute composante irréductible $D_i$, le polynôme $\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T)$ n'a pas de racine entière $n \leq 0$ (resp. $n \geq 1$).*

Le lemme suivant montre qu'on peut toujours trouver des extensions petites ou grandes partant d'une extension quelconque.

***Lemme 2.5.*** — *Soit $B = \sum \mu_i D_i$ un diviseur. La connexion $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ induit une connexion $\nabla^B$ sur $\mathcal{E}_X(B)$ telle que*

$$\Phi_{\mathcal{E}_X(B),i}(T) = \Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T + \mu_i).$$

*Démonstration.* — Cf. [**EV92**, Lemma 2.7]. □

Le résultat suivant est dû à Deligne [**Del70**, II, 6] :

***Théorème 2.3* (Deligne).** — *Soit $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ une extension grande de $(\mathcal{E}, \nabla)$. Alors $j_*DR(\mathcal{E}, \nabla)$ est quasi-isomorphe à $DR(\mathcal{E}_X, \nabla)$. Le même résultat vaut pour les complexes $j_*^{\mathrm{an}}DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})$ et $DR(\mathcal{E}_X^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})$.*

Signalons, avant de continuer, que le morphisme $j$ est affine, car c'est l'inclusion d'un sous-schéma fermé localement principal dans $X$ ; on en déduit que le foncteur $j_*$ est exact. Soient $(\mathcal{E}, \nabla)$ une connexion à singularités régulières et $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ une extension grande de $(\mathcal{E}, \nabla)$. On a :

$$\begin{aligned}
H^j_{dR}(U, DR(\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} &\overset{(1)}{\simeq} \mathbb{H}^j(X, j_*DR(\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \\
&\overset{(2)}{\simeq} \mathbb{H}^j(X, DR(\mathcal{E}_X, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \\
&\overset{(3)}{\simeq} \mathbb{H}^j(X^{\mathrm{an}}, DR(\mathcal{E}_X^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})) \\
&\overset{(4)}{\simeq} \mathbb{H}^j(X^{\mathrm{an}}, j_*^{\mathrm{an}}DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})) \\
&\overset{(5)}{\simeq} \mathbb{H}^j(U^{\mathrm{an}}, DR(\mathcal{E}^{\mathrm{an}}, \nabla^{\mathrm{an}})).
\end{aligned}$$

Dans ce qui précède, (1) et (5) résultent de l'exactitude du foncteur $j_*$, (2) et (4) sont conséquence du théorème 2.3 ci-dessus et (3) vient du théorème GAGA. On a donc démontré :

***Corollaire 2.1* (Deligne).** — *Supposons que la connexion $(\mathcal{E}, \nabla)$ ait des singularités régulières. Alors on a des isomorphismes canoniques*

$$H^j_{dR}(U, (\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j(U^{\mathrm{an}}, E^{\nabla})$$

*définis par analytification.*

Pour avoir un isomorphisme des périodes dans cette situation, on se heurte à une dernière difficulté : l'espace vectoriel $H^j(U^{\mathrm{an}}, E^{\nabla})$ ne possède pas, en général, de structure rationnelle naturelle. Il faudra l'imposer parmi les données.

**2.3.3. La catégorie $M_{k,F}(U)$ et le déterminant des périodes.** — Suivant [**ST97**, Def. 2, p. 872], on associe à la donnée de deux sous-corps $k$ et $F$ de $\mathbb{C}$ et d'une variété quasi-projective $U$ sur $k$, la catégorie $M_{k,F}(U)$ dont les objets sont les triplets

$$\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \rho)$$

formés de

(a) un $\mathcal{O}_U$-module localement libre de rang fini $\mathcal{E}$, muni d'une connexion intégrable $\nabla : \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_U} \Omega^1_U$ à singularités régulières,

(b) un système local $V$ de $F$-espaces vectoriels sur la variété analytique complexe $U^{\mathrm{an}}$,

(c) un isomorphisme

$$\rho : E^{\nabla} \xrightarrow{\sim} V \otimes_F \mathbb{C}$$

de systèmes locaux d'espaces vectoriels complexes sur $U^{\mathrm{an}}$.

On notera $\mathrm{rk}(\mathcal{M})$ l'entier positif $\mathrm{rang}_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E} = \mathrm{rang}_F V$.

En combinant le corollaire 2.1 avec la donnée de $V$ et de $\rho$, on associe à chaque objet $\mathcal{M}$ dans $M_{k,F}(U)$ des isomorphismes qui seront notés

$$H^j(\rho) : H^j_{dR}(U, (\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j(U^{\mathrm{an}}, V) \otimes_F \mathbb{C}.$$

***Définition 2.9***. — *Soit $\mathcal{M} \in M_{k,F}(U)$. On définit*

$$\mathrm{per}(\mathcal{M}) \in F^{\times}\backslash\mathbb{C}^{\times}/k^{\times}$$

*comme le produit alterné des déterminants des isomorphismes $H^j(\rho)$ par rapport à des bases rationnelles. Plus précisément, si $(e^j_s)$ et $(v^j_t)$ sont des bases quelconques de $H^j_{dR}(U, (\mathcal{E}, \nabla))$ sur $k$ et de $H^j(U^{\mathrm{an}}, V)$ sur $F$ et si $P_j = (a^j_{st})$ est la matrice de $H^j(\rho)$ dans les bases $(e^j_s \otimes_k 1_{\mathbb{C}})$ et $(v^j_t \otimes_F 1_{\mathbb{C}})$, alors*

$$\mathrm{per}(\mathcal{M}) = \prod_{j=0}^{2n} (\det P_j)^{(-1)^j}.$$

*On écrira* $\mathrm{per}(U, \mathcal{M})$ *au lieu de* $\mathrm{per}(\mathcal{M})$ *quand il sera nécessaire de préciser l'ouvert sur le quel on se place.*

Signalons, pour mémoire, que la définition de $\mathrm{per}(\mathcal{M})$ ci-dessus est formulée différemment que chez Saito et Terasoma, qui construisent l'isomorphisme $H^j(\rho)$ en sens opposé et prennent ensuite $(-1)^{j+1}$ au lieu de $(-1)^j$ dans l'expression ci-dessus.

### 2.4. Les périodes de l'objet unité

La catégorie $M_{k,F}(U)$ contient l'objet « unité »

$$\mathbf{1} = ((\mathcal{O}_U, d), F, can)$$

où *can* désigne l'isomorphisme canonique $\mathbb{C} \simeq F \otimes_F \mathbb{C}$. Dans cette section, je calcule $\mathrm{per}(\mathbf{1})$ au sens de la définition 2.9 ; ceci n'est autre que le déterminant de l'isomorphisme des périodes du corollaire 1.1 dans le cas ouvert. Avant de passer à la situation générale, regardons un exemple élémentaire.

***Exemple 5.*** — *Soit $U \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{Q}}$ la conique affine d'équation*

$$ax^2 + by^2 = 1,$$

*avec $a, b \in \mathbb{Q}^\times$. Alors $H^1_{dR}(U/\mathbb{Q})$ est de dimension un, engendré par la classe de la forme différentielle $ydx$. D'un autre côté, le changement de variable*

$$u = \sqrt{a}x - i\sqrt{b}y, \quad v = \sqrt{a}x + i\sqrt{b}y$$

*montre que $U^{\mathrm{an}}$ est isomorphe à $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$. Il s'ensuit que $H_1(U^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q})$ est engendré par le cycle $\gamma$ paramétré par $t \mapsto u = \exp(2\pi i t)$. Par intégration, on trouve*

$$[\det H^1(U)] = \int_\gamma ydx = \frac{\pi}{\sqrt{ab}}.$$

*Remarquons que $ab$ est le discriminant de la forme quadratique $ax^2 + by^2$ et que $\mathbb{Q}(\sqrt{ab})$ et le corps de définition des points « à l'infini » de $U$.*

***Proposition 2.5.*** — *Avec les notations précédentes, l'égalité*

$$\mathrm{per}(\mathbf{1})^2 = (2\pi i)^{n\chi(U) + \sum_{m\geq 0}(-1)^m m\chi(D(m))} \tag{16}$$

*est vraie dans $k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times$.*

*Démonstration.* — Il suffit de démontrer le résultat pour $F = \mathbb{Q}$. Puisque la filtration par le poids $W$ est définie sur $\mathbb{Q}$ (cf. proposition 2.3), on peut choisir des bases de $H^j_B(U)$ sur $\mathbb{Q}$ et de $H^j_{dR}(U/k)$ sur $k$ adaptées à $W$. La matrice des périodes par rapport à ces bases est diagonale par blocs, d'où

$$[\det H^j(U)] = \prod_{m\geq 0} [\det \mathrm{Gr}^W_m H^j(U)].$$

Il s'ensuit que le calcul du déterminant est compatible avec la décompositon dans $K_0(\mathfrak{hs})$ donnée par théorème 2.1, d'où :

$$\prod_{j=0}^{2n} [\det H^j(U)]^{(-1)^j} = \prod_{m\geq 0} \prod_{\ell=0}^{2(n-m)} [\det(H^\ell(D(m)) \otimes \mathbb{Q}(-m))]^{(-1)^m}. \tag{17}$$

On peut donc exprimer $\mathrm{per}(\mathbf{1})$ en termes des périodes des différents $D(m)$ :

$$\mathrm{per}(\mathbf{1}) = \prod_{m\geq 0} \mathrm{per}(\mathbf{1}_{D(m)})^{(-1)^m} \cdot (2\pi i)^{(-1)^m m\chi(D(m))},$$

la puissance de $2\pi i$ provenant de la torsion à la Tate dans (17). D'après le corollaire 1.2, on a pour tout $m \geq 0$

$$\mathrm{per}(\mathbf{1}_{D(m)})^2 = (2\pi i)^{(n-m)\chi(D(m))}.$$

Il s'ensuit

$$\mathrm{per}(\mathbf{1})^2 = (2\pi i)^{\sum(-1)^m(n+m)\chi(D(m))} = (2\pi i)^{n\chi(U)+\sum(-1)^m m\chi(D(m))}$$

compte tenu de l'égalité $\chi(U) = \sum(-1)^m\chi(D(m))$. □

On aura besoin pour la suite d'une expression alternative de l'exposant intervenant dans la formule (16).

***Proposition 2.6***. —

$$\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(X, \Omega_X^p(\log D)) = \frac{n}{2}\chi(U^{\mathrm{an}}) + \frac{1}{2}\sum_{m\geq 0}(-1)^m m\chi(D(m)^{\mathrm{an}}).$$

*Démonstration*. — Pour $p$ fixé, on a d'après le « résidu de Poincaré » :

$$\begin{aligned}\sum_{q=0}^{n}(-1)^q h^q(X, \Omega_X^p(\log D)) &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \sum_{m\geq 0} h^q(X, \mathrm{Gr}_m^W\Omega_X^p(\log D)) \\ &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \sum_{m\geq 0} h^q(X, a_{m*}\Omega_{D(m)}^p[-m]) \\ &= \sum_{q=0}^{n}(-1)^q \sum_{m\geq 0} h^q(D(m), \Omega_{D(m)}^{p-m}).\end{aligned}$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(X, \Omega_X^p(\log D)) &= \sum_{m\geq 0}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(D(m), \Omega_{D(m)}^{p-m}) \\ &= \sum_{m\geq 0}(-1)^m \sum_{k=0}^{2(n-m)}(-1)^k \sum_{p+q=k}(p+m)h^q(D(m), \Omega_{D(m)}^p). \qquad (18)\end{aligned}$$

D'un autre côté, par le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch

$$\sum_{k=0}^{2(n-m)} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(D(m), \Omega^p_{D(m)}) = \sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p p\chi(D(m), \Omega^p_{D(m)})$$

$$(19) \qquad = \int_{D(m)} [\sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p \Omega^1_{D(m)})]\mathrm{td}(TD(m))$$

pour chaque $m \geq 0$. Or, d'après le lemme 2.2,

$$\int_{D(m)} [\sum_{p=0}^{n-m} (-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p \Omega^1_{D(m)})]\mathrm{td}(TD(m)) = (-1)^{n-m} \frac{n-m}{2} c_{n-m}(\Omega^1_{D(m)})$$

compte tenu du fait que

$$[1 + \frac{1}{2}c_1(\Omega^1_{D(m)})]\mathrm{td}(TD(m)) \equiv [1 + \frac{1}{2}c_1(\Omega^1_{D(m)})][1 - \frac{1}{2}c_1(\Omega^1_{D(m)})]$$

modulo $CH^{\geq 2}(D(m))$ n'a pas de terme en degré un. On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{2(n-m)} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(D(m), \Omega^p_{D(m)}) = \frac{n-m}{2} \chi(D(m)^{\mathrm{an}}),$$

d'après le lemme 2.3 appliqué au diviseur vide. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(X, \Omega^p_X(\log D)) &= \sum_{m \geq 0} (-1)^m \frac{n+m}{2} \chi(D(m)^{\mathrm{an}}) \\ &= \frac{n}{2}\chi(U^{\mathrm{an}}) + \frac{1}{2}\sum_{m\geq 0} (-1)^m m\chi(D(m)^{\mathrm{an}}), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait démontrer. □

## 2.5. Le théorème de Saito et Terasoma

**2.5.1. Le facteur Gamma.** — Dans cette section, on associe à chaque objet $\mathcal{M}$ dans $M_{k,F}(U)$ un produit de valeurs de la fonction gamma, noté $\Gamma(\nabla : \mathcal{M})$. Si $f \in k[T]$ est un polynôme tel que $f(n) \neq 0$ pour tout entier $n \leq 0$, posons

$$\Gamma(f) := \prod_{f(\alpha)=0} \Gamma(\alpha) \in \mathbb{C}^\times,$$

où $\alpha$ décrit les racines complexes de $f$, comptées avec multiplicité.

Fixons une extension petite $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$. Rappelons que, pour chaque composante irréductible $D_i$ de $D$, le polynôme caractéristique $\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T)$ est à coefficients dans une extension finie $k_i$ de $k$. Par définition, $\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T)$ n'a pas de racine entière négative et il en est de même pour le polynôme

$$N_{k_i/k}\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T) \in k[T],$$

qui est, par définition, le produit $\prod \sigma(\Phi_{\mathcal{E}_X,i})$, où $\sigma$ décrit l'ensemble $\mathrm{Hom}_k(k_i, \mathbb{C})$ et $\sigma(\Phi_{\mathcal{E}_X,i})$ est le résultat d'appliquer $\sigma$ à chaque coefficient. On définit

$$\Gamma_{D_i}(\nabla : \mathcal{E}_X) := \Gamma(N_{k_i/k}\Phi_{\mathcal{E}_X,i}(T)).$$

Notons $c_i = \chi(D_i^*)$ la caractéristique d'Euler de l'analytifié de $D_i^*$ et soit

$$\Gamma(\nabla : \mathcal{E}_X) := \prod_{i\in I} \Gamma_{D_i}(\nabla : \mathcal{E}_X)^{c_i}.$$

L'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ permet de montrer que la classe de $\Gamma(\nabla : \mathcal{E}_X)$ modulo $k^\times$ est indépendante du choix de l'extension petite $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ [**ST97**, Lem. 1.8].

***Définition 2.10***. — *Soit $\mathcal{M}$ dans $M_{k,F}(U)$. Le facteur gamma de $\mathcal{M}$ est*

$$\Gamma(\nabla : \mathcal{M}) = [\Gamma(\nabla : \mathcal{E}_X)] \in \mathbb{C}^\times/k^\times$$

*pour n'importe quelle extension petite $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$.*

Visiblement, $\Gamma(\nabla : \mathcal{M})$ ne fait intervenir que la partie « de Rham » de $\mathcal{M}$.

**2.5.2. L'accouplement** $(\det \mathcal{M}, c_{X\mathrm{mod}D})$. — Une bonne partie de l'article de Saito et Terasoma [**ST97**] (notamment les sections 2 et 3 et l'annexe) est consacré à l'étude d'un accouplement

$$MPic_{k,F}(U) \times \mathrm{CH}^n(X \bmod D) \longrightarrow k^\times\backslash\mathbb{C}^\times/F^\times$$

entre le groupe de classes d'isomorphisme d'objets de rang un dans $M_{k,F}(U)$ et le groupe de Chow relative de dimension zéro $\mathrm{CH}^n(X \bmod D)$.

*2.5.2.1. Le groupe $MPic_{k,F}(U)$.* — Considérons la sous-catégorie $P_{k,F}(U)$ de $M_{k,F}(U)$ formée des objets de rang un et notons $MPic_{k,F}(U)$ le groupe de classes d'isomorphisme de $P_{k,F}(U)$ par rapport au produit tensoriel.

***Définition 2.11***. — *Soit $\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \rho)$ un objet de rang $r$ dans $M_{k,F}(U)$. L'objet $\det \mathcal{M}$ dans $P_{k,F}(U)$ est le triplet*

$$\det \mathcal{M} = ((\det \mathcal{E}, \nabla^{\det}), \det V, \det \rho),$$

*où $\det \mathcal{E} = \Lambda^r\mathcal{E}$, $\det V = \Lambda^r V$ et la connexion $\nabla^{\det}$ est définie par la formule*

$$\nabla^{\det}(e_1 \wedge \cdots \wedge e_r) = \sum_{i=1}^{r} e_1 \wedge \cdots \wedge \nabla(e_i) \wedge \cdots \wedge e_r.$$

Si $L$ est une extension finie de $k$, le groupe $MPic_{k,F}(\mathrm{Spec}\ L)$, qui sera noté simplement $MPic_{k,F}(L)$, est formé des classes d'isomorphisme de triplets $(E, V, \rho)$, où $E$ et $V$ sont des espaces vectoriels de dimension un sur $L$ et $F$ respectivement et $\rho = (\rho_\sigma)_{\sigma \in \mathrm{Hom}_k(L,\mathbb{C})}$, avec $\rho_\sigma : E \otimes_{L,\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V \otimes_F \mathbb{C}$, est une famille d'isomorphismes d'espaces vectoriels complexes.

***Remarque 2.3***. — *On dispose d'un isomorphisme canonique*

$$MPic_{k,F}(L) \xrightarrow{\sim} k^\times \backslash (\mathbb{C}^\times)^{\mathrm{Hom}_k(L,\mathbb{C})} / (F^\times)^{\mathrm{Hom}_k(L,\mathbb{C})}$$

*qui envoie la classe d'un object $(E, V, \rho)$ vers $(\rho_\sigma(e)/v)$ pour n'importe quelle base $e$ de $E$ sur $L$ et $v$ de $V$ sur $F$* [**ST97**, p. 872, dernière ligne].

On dispose également d'un foncteur norme [**ST97**, pp. 882, 922]

$$\begin{aligned} N_{L/k} : MPic_{k,F}(L) &\longrightarrow MPic_{k,F}(k) \\ (E, V, \rho) &\longmapsto (NE, NV, N\rho), \end{aligned} \tag{20}$$

où l'objet à droite est défini comme suit :

- étant donnée une base $e$ de $E$ sur $L$, le $k$-espace vectoriel $NE$ a pour base le symbole $Ne$, avec la compatibilité suivante : si $e' = \ell e$ est une autre base, avec $\ell \in L^\times$, alors $Ne' = (N_{L/k}\ell)Ne$,
- étant donnée une base $v$ de $V$ sur $F$, le $F$-espace vectoriel $NV$ a pour base le symbole $Nv$, et si $v' = fv$, avec $f \in F^\times$, alors $Nv' = fNv$,
- l'isomorphisme de comparaison $N\rho$ est défini par

$$(N\rho)Ne = \left( \prod_\sigma \frac{\rho_\sigma(e)}{v} \right) Nv,$$

où $\sigma$ décrit l'ensemble de plongements $\mathrm{Hom}_k(L, \mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \rho)$ un objet dans $MPic_{k,F}(U)$. À chaque point fermé $x$ de $U$ et à chaque plongement complexe $\sigma : k(x) \hookrightarrow \mathbb{C}$, on associe un objet

$$\mathcal{M}_{|x} = (\mathcal{E}_x, V_x, \rho_{x,\sigma}) \in MPic_{k,F}(k(x))$$

comme suit. La fibre $\mathcal{E}_x := \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} k(x)$ de $\mathcal{E}$ en $x$ s'identifie canoniquement à la fibre $\mathcal{E}_x^{\mathrm{an}}$ du faisceau analytique $\mathcal{E}^{\mathrm{an}}$ en $x$, vu comme point complexe de $U^{\mathrm{an}}$ via le plongement $\sigma$. Considérons aussi la fibre $E_x^\nabla$ du système local $E^\nabla$ en $x$. Il existe un isomorphisme canonique

$$\mathcal{E}_x \otimes_{k(x),\sigma} \mathbb{C} \simeq \mathcal{E}_x^{\mathrm{an}} \simeq E_x^\nabla. \tag{21}$$

De plus, la donnée de $V$ et de $\rho$ induit, par restriction à $x$, une $F$-structure

$$E_x^\nabla \xrightarrow{\sim} V_x \otimes_F \mathbb{C} \tag{22}$$

sur $E_x^\nabla$. En composant (21) et (22), on obtient un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes de dimension un

$$\rho_{x,\sigma} : \mathcal{E}_x \otimes_{k(x),\sigma} \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} V_x \otimes_F \mathbb{C}.$$

Finalement, par application du foncteur norme (20), on en déduit un objet

$$N_{k(x)/k}(\mathcal{M}_{|x}) \in MPic_{k,F}(k) \simeq k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times.$$

***Lemme 2.6***. — *Supposons $F \subset k \subset \overline{\mathbb{Q}}$. Soit $\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \ \rho)$ un objet dans $MPic_{k,F}(U)$ tel que l'isomorphisme $\rho : E^\nabla \xrightarrow{\sim} V \otimes_F \mathbb{C}$ soit induit par une inclusion $V \subset E^\nabla$. Alors*

$$N_{k(x)/k}(\mathcal{M}_{|_x}) = 1$$

*dans $k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times$ pour tout point fermé $x$ dans $U$.*

*Démonstration.* — Soient $x$ un point fermé de $U$ et $\sigma : k(x) \to \mathbb{C}$. Démontrons que $\mathcal{M}_{|x} = 1$ dans $k(x)^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times$. Soit $v_x$ une base quelconque de $V_x$ sur $F$. Puisque $V \subset E^\nabla$ par hypothèse, $E_x^\nabla$ admet pour base $v_x \otimes_F 1_\mathbb{C}$. Compte tenu de l'identification canonique entre $E_x^\nabla$ et $\mathcal{E}_x \otimes_{k(x),\sigma} x$ et de l'hypothèse $F \subset k \subset k(x)$, l'élément $e_x := v_x \otimes_F k(x)$ est une base de $\mathcal{E}_x$. Avec ces choix, on a $\rho_{x,\sigma}(e_x \otimes_{k(x)} \mathbb{C}) = v_x \otimes_F \mathbb{C}$, d'où $\mathcal{M}_{|x} = 1$. □

***Remarque 2.4***. — *Pour qu'un système local sur $U^{\mathrm{an}}$ admette une structure $F$-rationnelle, la répresentation de monodromie doit être à valeurs dans $F$. Soient $\mathcal{M}$ un objet dans $P_{k,F}(U)$ comme précédemment et $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ une extension de $\mathcal{E}$ à $X$. Puisque la monodromie locale autour de $D_i$ est donnée par* $\exp(-2\pi i \mathrm{Res}_{D_i} \nabla)$ *d'après* [**Del70**, II. Prop. 3.11], *l'existence d'une $F$-structure force la propriété* $\exp(-2\pi i \mathrm{Res}_{D_i} \nabla) \in F$ *pour tout $i \in I$. En particulier, lorsque $F \subset \overline{\mathbb{Q}}$ comme dans les hypothèses du lemme 2.6 ci-dessus, le théorème de Gelfond-Schneider entraîne que* $\mathrm{Res}_{D_i} \nabla \in \mathbb{Q}$.

*2.5.2.2. Le groupe de Chow relatif de dimension zéro.* — Soit $\mathcal{K}_n(X)$ le faisceau associé au préfaisceau de $K$-théorie de Quillen $U \mapsto K_n(U)$ sur $X_{\mathrm{Zar}}$ [**Qu73**, §7]. Introduisons le complexe

$$\mathcal{K}_n(X \bmod D) := [\mathcal{K}_n(X) \longrightarrow \oplus_{i \in I} \mathcal{K}_n(D_i)]$$

où $\mathcal{K}_n(X)$ est placé en degré 0 et $\mathcal{K}_n(D_i)$ désigne l'image de $\mathcal{K}_n(D_i)$ par le morphisme $\iota_i^* : \mathcal{K}_n(D_i) \to \mathcal{K}_n(X)$ induit par l'immersion $\iota_i : D_i \hookrightarrow X$.

***Définition 2.12***. — *On appelle groupe de Chow relatif de dimension zéro l'hypercohomologie en degré $n = \dim X$ de ce complexe*

$$\mathrm{CH}^n(X \bmod D) := \mathbb{H}^n(X, \mathcal{K}_n(X \bmod D)).$$

Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang $n$ sur $X$.

***Définition 2.13.*** — *On appelle trivialisation partielle de $\mathcal{E}$ la donnée d'une famille $r = (r_i)_{i \in I}$ de morphismes surjectives $r_i : \mathcal{E}_{|D_i} \to \mathcal{O}_{D_i}$.*

Par exemple, les applications résidus $\mathrm{Res}_{D_i} : \Omega^1_X(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{D_i} \to \mathcal{O}_{D_i}$ fournissent une trivialisation partielle Res du faisceau des différentielles logarithmiques $\Omega^1_X(\log D)$.

Soit $(\mathcal{E}, r)$ un $\mathcal{O}_X$-module de rang $n$ partiellement trivialisé. Puisque les morphismes $r_i$ sont surjectifs, les classes de Chern $c_n(\mathcal{E})_{|D_i}$ s'annulent dans les groupes de Chow $\mathrm{CH}^{n-1}(D_i)$. Reprenant le travail [**Sai93**], Saito et Terasoma associent à $(\mathcal{E}, r)$ une classe de Chern relative

$$c_n(\mathcal{E}, r) \in \mathrm{CH}^n(X \bmod D).$$

***Définition 2.14.*** — *Le cycle canonique est l'élément*

$$c_{X \mathrm{mod} D} := (-1)^n c_n(\Omega^1_X(\log D), \mathrm{Res}) \in \mathrm{CH}^n(X \bmod D).$$

***Exemple 6.*** — *Si $X$ est une courbe et $K$ désigne son corps de fonctions, le groupe* $\mathrm{CH}^1(X \bmod D)$ *s'identifie, d'après* [**Sai93**, Ex. 1], *à*

$$\left( \bigoplus_{x \in U_0} \mathbb{Z} \oplus \bigoplus_{x \in D} K^\times / 1 + \mathrm{m}_x \right) / K^\times,$$

*où $U_0$ est l'ensemble des points fermés de $U$ et $\mathfrak{m}_x$ est l'idéal maximal de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$. On peut alors calculer $c_{X \mathrm{mod} D}$ comme suit* [**Sai93**]. *Soit $s$ une section rationnelle non nulle de $\Omega^1_X(\log D)$. Pour chaque $x \in D$, soit $f_x \in K^\times$ tel que $\mathrm{ord}_x(s) = \mathrm{ord}_x(f_x)$ et que $r_x(f_x^{-1} s) = 1$. Alors :*

$$c_{X \mathrm{mod} D} = - \sum_{x \notin U_0} \mathrm{ord}_x(s) \cdot [x] - \sum_{x \in D} \bar{f}_x.$$

Reprenant les notations de l'exemple ci-dessus, posons $A_x = \mathbb{Z}$ si $x$ est un point fermé de $U$ et $A_x = K^\times / 1 + \mathfrak{m}_x$ pour $x \in D$. Dans ce dernier cas, en combinant les suites exactes « ordre en x »

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}^*_{X,x} \longrightarrow K^\times \longrightarrow \mathbb{Z} \to 0$$

et « évaluation en x »

$$1 \longrightarrow 1 + \mathfrak{m}_x \longrightarrow \mathcal{O}^*_{X,x} \longrightarrow k(x)^\times \longrightarrow 1,$$

on voit que $A_x$ est une extension de $\mathbb{Z}$ par $k(x)^\times$ et que $\mathrm{CH}^1(X \bmod D)$ admet une présentation de la forme

$$\mathrm{CH}^1(X \bmod D) \simeq \mathrm{coker}(k(y)^\times \longrightarrow \bigoplus_{x \in X_0} A_x),$$

où $y$ est le point générique de $X$ et $X_0$ est l'ensemble de points fermés.

En général, pour $X$ de dimension quelconque, $\mathrm{CH}^n(X \bmod D)$ s'écrit, d'après [**ST97**, Prop. 1], comme

$$\mathrm{CH}^n(X \bmod D) \simeq \mathrm{coker}(\partial : \bigoplus_{y \in X_1} B_y \longrightarrow \bigoplus_{x \in X_0} A_x).$$

Dans cette formule, $A_x$ est une extension de $\mathbb{Z}$ par $\bigoplus_{i \in I_x} k(x)^\times$, où $I_x$ désigne l'ensemble d'indices $i \in I$ tels que $x \in D_i$, et $B_y$ et l'application $\partial$ sont définis en termes de $K$-théorie [**ST97**, pp. 878-879]. Comme corollaire de cette présentation de $\mathrm{CH}^n(X \bmod D)$, Saito et Terasoma montrent le résultat suivant dans [**ST97**, Cor., p. 880] :

***Proposition 2.7* (Saito-Terasoma).** — *Le groupe* $\mathrm{CH}^n(X \bmod D)$ *est engendré par les classes* $[x]$ *des points fermés* $x$ *dans* $U$.

En particulier, pour définir l'accouplement

$$MPic_{k,F}(U) \times \mathrm{CH}^n(X \bmod D) \longrightarrow k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times,$$

il suffit de définir l'accouplement d'un objet $\mathcal{M}$ dans $MPic_{k,F}(U)$ avec $[x] \in \mathrm{CH}^n(X \bmod D)$ pour tout point fermé $x$ dans $U$.

***Définition 2.15.*** — *Avec les notations précédentes, on pose*

$$(\mathcal{M}, [x]) := N_{k(x)/k}(\mathcal{M}_{|x}).$$

***Lemme 2.7.*** — *Supposons* $F \subset k \subset \overline{\mathbb{Q}}$. *Soit* $\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \ \rho)$ *un objet dans* $M_{k,F}(U)$ *tel que l'isomorphisme* $\rho : E^\nabla \xrightarrow{\sim} V \otimes_F \mathbb{C}$ *soit induit par une inclusion* $V \subset E^\nabla$. *Alors*

$$(\det \mathcal{M}, c_{X \mathrm{mod} D}) = 1.$$

*Démonstration.* — D'après la proposition 2.7, on a $c_{X \mathrm{mod} D} = \sum_{x \in U_0} n_x \cdot [x]$, où $n_x = 0$ sauf pour un nombre fini de $x$. Par définition,

$$(\det \mathcal{M}, c_{X \mathrm{mod} D}) = \prod_{x \in U_0} N_{k(x)/k}(\det \mathcal{M}_{|x})^{n_x}$$

et le résultat suit alors directement du lemme 2.6. □

***Remarque 2.5.*** — *Lorsque $X$ est une courbe, ce résultat a été déjà remarqué par Terasoma (cf.* [**Ter94**, Rem. 2, p. 583] *et* [**ST97**, Sec. 4(b)] *pour la correspondance entre* $(\det \mathcal{M}, c_{X \mathrm{mod} D})$ *et les notations de* [**Ter94**].*)*

***Exemple 7.*** — *Donnons un exemple d'une situation où les hypothèses du lemme 2.7 sont vérifiées, qui sera d'une particulière importance pour la suite. Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement cyclique de degré $d \geq 2$ ramifié le long d'un diviseur à croisements normaux simples $D$ sur $X$, le tout défini sur un sous-corps $k$ de $\overline{\mathbb{Q}}$. Posons $U = X - D$. L'image directe de la connexion $(\mathcal{O}_Y, d)$ par $\pi$ a des singularités régulières le long de $D$ et le système local des sections* *horizontales sur $U^{\mathrm{an}}$ est isomorphe à $\pi_*\mathbb{C}_{|U^{\mathrm{an}}}$. De plus, la représentation de monodromie est à valeurs dans $\mathbb{Q}(\mu_d)$. En prenant $V = \pi_*\mathbb{Q}(\mu_d)_{|U^{\mathrm{an}}}$ et $\rho$ l'isomorphisme induit par les inclusions $\mathbb{Q}(\mu_d)_{Y^{\mathrm{an}}} \subset \mathbb{C}_{Y^{\mathrm{an}}} \subset \mathcal{O}_{Y^{\mathrm{an}}}$, on obtient un objet vérifiant les hypothèses du lemme 2.6.*

**2.5.3. Le théorème de Saito et Terasoma.** — Énonçons enfin le résultat principal de [**ST97**].

***Théorème 2.4*** **(Saito-Terasoma)**. — *Soient $\mathcal{M}$ un objet dans $M_{k,F}(U)$ et $\mathcal{M}^* = ((\mathcal{E}^*, \nabla^*), V^*, \rho^*)$ l'objet dual. L'égalité*

$$\mathrm{per}(\mathcal{M}) = \mathrm{per}(\mathbf{1})^{\mathrm{rk}(\mathcal{M})} \cdot \Gamma(\nabla : \mathcal{M}^*) \cdot (\det \mathcal{M}, c_{X \mathrm{mod} D})$$

*est vraie dans $k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times$. Ici, .*

**2.5.4. Variante à support compact.** — Les constructions précédentes admettent une variante à support compact. Étant donné un objet

$$\mathcal{M} = ((\mathcal{E}, \nabla), V, \rho)$$

dans $M_{k,F}(U)$, on définit la cohomologie de de Rham à support compact comme

$$H^j_{dR,c}(U, DR(\mathcal{E}, \nabla)) := \mathbb{H}(X, DR(\mathcal{E}_X, \nabla))$$

pour n'importe quelle extension petite $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ de $(\mathcal{E}, \nabla)$. Ceci ne dépend pas de l'extension choisie d'après [**ST97**, Lem. 1.2]. La terminologie « à support compact » est justifiée par la dualité suivante (voir loc. cit pour la preuve) :

***Proposition 2.8***. — *Si $(\mathcal{E}_X, \nabla)$ est une extension petite, l'accouplement*

$$DR(\mathcal{E}_X) \otimes DR(\mathcal{E}^*_X) \to \Omega^n_X[-n]$$

*induit un accouplement parfait*

$$H^p(X, DR(\mathcal{E}_X, \nabla)) \otimes H^{2n-p}(U, DR(\mathcal{E}^*, -\nabla)) \to k$$

De même, on peut montrer que, pour des extensions petites, le complexe $DR(\mathcal{E}_X)$ est quasi-isomorphe à $j_! DR(\mathcal{E})$ [**ST97**, Lemma 1.6]. En imitant les constructions de la section 2.3, on en déduit des isomorphismes :

$$H^j_c(\rho) : H^j_{dR,c}(U, DR(\mathcal{E}, \nabla)) \otimes_k \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} H^j_c(U^{\mathrm{an}}, V) \otimes_F \mathbb{C}$$

et on définit la période à support compact

$$\mathrm{per}_c(\mathcal{M})$$

comme le produit alterné des déterminants des isomorphismes $H^j_c(\rho)$ par rapport à des bases rationnelles. La proposition 2.8 entraîne

***Corollaire 2.2***. — $\mathrm{per}_c(\mathcal{M}) = (2\pi i)^{n\chi(U)} \mathrm{per}(\mathcal{M}^*)^{-1}$.

***Corollaire 2.3*** **(Saito-Terasoma).** — *Soit* $\mathcal{M} \in M_{k,F}(U)$*. L'égalité*

$$\mathrm{per}_c(\mathcal{M}) = \mathrm{per}_c(\mathbf{1})^{\mathrm{rk}(\mathcal{M})} \cdot \Gamma(\nabla : \mathcal{M})^{-1} \cdot (\det \mathcal{M}, c_{X \bmod D})$$

*est vraie dans* $k^\times \backslash \mathbb{C}^\times / F^\times$*.*

Dans le corollaire, $\mathrm{per}_c(\mathbf{1})$ est la période à support compact de l'objet unité. Par dualité de Poincaré, la proposition 2.5 entraîne

$$\mathrm{per}_c(\mathbf{1})^2 = (2\pi i)^{n\chi(U^{\mathrm{an}}) - \sum (-1)^m m\chi(D(m))}.$$

et on peut exprimer cet exposant dans la même veine :

***Proposition 2.9.*** —

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(X, \Omega_X^p(\log D)(-D)) = \frac{n}{2}\chi(U^{\mathrm{an}}) - \frac{1}{2}\sum_{m\geq 1}(-1)^m m\chi(D(m)^{\mathrm{an}})$$

*Démonstration.* — Par dualité de Serre

$$h^q(X, \Omega_X^p(\log D)(-D)) = h^{n-q}(X, \Omega_X^{n-p}(\log D)),$$

ce qui permet de récrire le terme à gauche comme

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^{n-q}(X, \Omega_X^{n-p}(\log D)) \\ = n\chi(U^{\mathrm{an}}) - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(X, \Omega_X^p(\log D)).\end{aligned}$$

On conclut alors par la proposition 2.6. □

***Exemple 8.*** — *Si* $C$ *est une courbe, alors*

$$\mathrm{per}_c(\mathbf{1}) = (2\pi i)^{1-g(\bar{C})}.$$

# CHAPITRE 3

# PÉRIODES DES REVÊTEMENTS CYCLIQUES

## 3.1. Préliminaires sur les revêtements cycliques

La référence principale pour cette section est [**EV92**, §3]. Le lecteur prendra garde que, bien que les résultats ci-dessous soient énoncés dans loc. cit. pour un corps de base algébriquement clos, ils restent vrais lorsque celui-ci contient les racines de l'unité d'ordre le degré du revêtement.

Soient $d \geq 2$ un entier et $K$ un corps de nombres contenant $F = \mathbb{Q}(\mu_d)$. Soient $Z$ une variété projective, lisse et géométriquement connexe sur $K$ et

$$D = \sum_{i \in I} \alpha_i D_i$$

un diviseur effectif à croisements normaux simples sur $Z$, avec des composantes irréductibles $D_i$ indexées par un ensemble $I$. Posons $U = Z - D$ et supposons qu'il existe un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $Z$ satisfaisant à

$$\mathcal{O}_Z(D) \simeq \mathcal{L}^d. \tag{23}$$

Autrement dit, $\mathcal{L}^d$ possède une section globale $s \in H^0(Z, \mathcal{L}^d)$ ayant $D$ pour lieu des zéros. Pour $j = 0, \ldots, d-1$, introduisons les faisceaux inversibles

$$\mathcal{L}^{(-j)} := \mathcal{L}^{-j} \otimes \mathcal{O}_Z([\tfrac{j}{d} D]).$$

Localement, ceux-ci admettent la description suivante : sur un ouvert $W \subseteq Z$ tel que $D \cap W$ ait pour équation locale $f = f_1^{\alpha_1} \ldots f_s^{\alpha_s}$ et que $t^{-1}$ soit une base locale de $\mathcal{L}$ sur $W$, un générateur de $\mathcal{L}^{(-j)}$ est donné par

$$\sigma_j = t^j \cdot f_1^{-[\frac{\alpha_1 j}{d}]} \cdots f_s^{-[\frac{\alpha_s j}{d}]}.$$

Puisque la relation (23) entraîne $t^d = f$, la différentielle extérieure sur $\mathcal{O}_Z$ permet de « dériver » la section $t$

$$d \cdot \frac{dt}{t} = \frac{df}{f},$$

induisant une connexion logarithmique intégrable $\nabla$ sur $\mathcal{L}^{(-j)}$ qui satisfait à :

$$\begin{aligned}\nabla(\sigma_j) &= \sigma_j \cdot \left( j\frac{dt}{t} - \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{\alpha_i j}{d}\right] \frac{df_i}{f_i} \right) \\ &= \sigma_j \cdot \sum_{i=1}^{s} \left( \frac{\alpha_i j}{d} - \left[\frac{\alpha_i j}{d}\right] \right) \frac{df_i}{f_i} \\ &= \sigma_j \cdot \sum_{i=1}^{s} \frac{\langle \alpha_i j \rangle}{d} \frac{df_i}{f_i}.\end{aligned}$$

Notons $D^{(j)}$ le diviseur réduit formé des composantes irréductibles $D_i$ telles que $d$ ne divise pas $\alpha_i j$

$$D^{(j)} := \sum_{\frac{\alpha_i j}{d} \notin \mathbb{Z}} D_i$$

et $U^{(j)} = X - D^{(j)}$ son complémentaire dans $X$. Le calcul ci-dessus montre que la connexion $\nabla$ a des pôles logarithmiques exactement le long de $D^{(j)}$.

***Proposition 3.1***. — *Pour chaque $1 \leq j \leq d-1$, le faisceau $\mathcal{L}^{(-j)}$ est muni d'une connexion logarithmique intégrable*

$$\nabla : \mathcal{L}^{(-j)} \longrightarrow \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega^1_Z(\log D^{(j)})$$

*vérifiant*

$$\mathrm{Res}_{D_i} \nabla = \frac{\langle \alpha_i j \rangle}{d} \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{O}_{D_i}}.$$

Ces connexions apparaissent comme des facteurs de l'image directe de la connexion triviale sur un revêtement cyclique convenable de $Z$, ce qui permettra de donner une structure $F$-rationnelle au système local des sections horizontales de leurs restrictions à $U$ ou à $U^{(j)}$. Pour le construire, considérons les fibrés géométriques de rang un

$$\mathbb{V}(\mathcal{L}^{-1}) \to Z, \qquad \mathbb{V}(\mathcal{L}^{-d}) \to Z$$

associés aux faisceaux inversibles $\mathcal{L}^{-1}$ et $\mathcal{L}^{-d}$ respectivement. L'application « élévation à la puissance $d$ » $\mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^{-d}$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathbb{V}(\mathcal{L}^{-1}) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & \mathbb{V}(\mathcal{L}^{-d}) \arrow[d] \\ & Z \end{tikzcd}$$

et $s \in H^0(Z, \mathcal{L}^d)$ correspond à une section géométrique $\sigma : Z \to \mathbb{V}(\mathcal{L}^{-d})$. Définissons $Y$ comme la normalisation de

$$\eta^{-1}(\sigma(Z))$$

et notons $\pi : Y \to Z$ le morphisme évident. Posons enfin $E = \pi^{-1}D$.

***Remarque 3.1.*** — *De manière équivalente, la section duale de s définit une structure de $\mathcal{O}_Z$-algèbre sur*

$$\mathcal{A} := \bigoplus_{j=0}^{d} \mathcal{L}^{(-j)}$$

*et on peut construire $\pi : Y \to Z$ comme le spectre relatif* $\mathrm{Spec}_Z(\mathcal{A}) \to Z$. *On renvoie à* [**EV92**, 3.5] *pour les détails.*

***Exemple 9.*** — *Soient $a_1, \dots, a_r$ des entiers positifs, $d \geq 2$ un entier divisant la somme $a_1 + \dots + a_r$ et $p_1, \dots, p_r$ des points distincts sur la droite affine $\mathbb{A}^1$. Si l'on applique la construction précédente à*

$$X = \mathbb{P}^1, \quad D = \sum_{i=1}^{r} a_i p_i, \quad \mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\frac{1}{d}\sum_{i=1}^{r} a_i),$$

*on trouve le revêtement cyclique de la droite projective défini par l'équation*

$$y^d = (x - p_1)^{a_1} \dots (x - p_r)^{a_r}.$$

*Le lecteur est invité à consulter* [**Roh09**, Chap. 2] *pour voir comment les constructions ci-dessous se réalisent dans cet exemple.*

Revenant à la situation générale, un calcul local montre que $\pi$ est étale sur $Z - D$ et que les éventuelles singularités de $Y$ se trouvent au-dessus du lieu singulier de $D$ ; en particulier, $Y$ est lisse si $D$ l'est. On renvoie à [**EV92**, Lem. 3.24] ou à [**Kol07**, Thm. 2.23] pour la démonstration du lemme suivant.

***Lemme 3.1.*** — *La variété $Y$ a au pire des singularités quotient abélien.*

Ceci signifie que $Y$ est réunion d'ouverts affines de la forme $T/G$, avec $T$ une variété affine lisse sur laquelle agit un groupe abélien fini $G$. Il s'ensuit que la structure de Hodge sur $H^k_B(Y)$, a priori mixte, est en fait pure de poids $k$. En effet, si $p : X \to Y$ est une résolution de singularités, l'application induite en cohomologie $p^* : H^k_B(Y) \to H^k_B(X)$ est injective [**Del74**, Thm. 8.2.4]. D'autres énoncés de la théorie de Hodge se transposent directement du cas projectif lisse, quitte à remplacer le complexe de de Rham usuel par le complexe de faisceaux cohérents réflexifs

$$\widetilde{\Omega}^\bullet_Y := j_* \Omega^\bullet_{Y_{reg}},$$

où $j : Y_{reg} \hookrightarrow Y$ est l'inclusion du lieu lisse. Le théorème suivant résume les propriétés les plus importantes.

***Théorème 3.1.*** —

(a) *L'analytifié de $\widetilde{\Omega}^\bullet_Y$ est une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}$ sur $Y$.*

(b) *La suite spectrale*

$$E_1^{p,q} = H^q(Y, \widetilde{\Omega}_Y^p) \otimes_K \mathbb{C} \Rightarrow H^{p+q}(Y^{\mathrm{an}}, \mathbb{C})$$

*dégénère en* $E_1$ *induisant sur* $H_B^k(Y)$ *la même structure de Hodge qu'une désingularisation de* $Y$.

(c) *Le théorème de Lefschetz difficile vaut pour* $Y$.

*Démonstration.* — Cf. [**Ste77**, §1]. □

De même, on peut définir

$$\widetilde{\Omega}_Y^\bullet(\log E) = j_*\Omega_{Y_{reg}}^\bullet(\log(E \cap Y_{reg}))$$

et la dégénérescence en $E_1$ de la suite spectrale associée à la filtration « bête » de ce complexe entraîne l'existence d'une décomposition (non canonique)

$$H^k(Y - E, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=k} H^q(Y, \widetilde{\Omega}_Y^p(\log E)) \otimes_K \mathbb{C}. \tag{24}$$

Le groupe de Galois du revêtement $\pi : Y \to Z$, qui est cyclique d'ordre $d$, agit sur l'image directe de la connexion $(\mathcal{O}_Y, d)$. Fixons une racine primitive $d$-ième de l'unité $\xi$ et identifions-la à un générateur $g$ de $G$. D'après [**EV92**, Lemma 3.16],

$$\pi_*(\mathcal{O}_Y, d) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} (\mathcal{L}^{(-j)}, \nabla) \tag{25}$$

est la décomposition suivant les valeurs propres, autrement dit : $G$ agit sur $\mathcal{L}^{(-j)}$ par $g(s) = \xi^j \cdot s$ pour $s$ une section locale de $\mathcal{L}^{(-j)}$. Puisque le système local des sections horizontales de la restriction à $U^{(j)}$ de l'analytifié de $\pi_*(\mathcal{O}, d)$ n'est autre que $\pi_*\mathbb{C}_{|U^{(j)}}$, la décomposition (25) munit les systèmes locaux associés à $(\mathcal{L}^{(-j)}, \nabla)$ d'une structure $F$-rationnelle

$$\rho_j : \ker(\nabla^{\mathrm{an}}) \xrightarrow{\sim} V_j \otimes_F \mathbb{C},$$

avec $V_j$ le sous-système local de $\pi_*\mathbb{Q}(\mu_d)_{|U^{(j)}}$ où $\mu_d$ agit par multiplication par le caractère $\xi \mapsto \xi^j$. On obtient ainsi des objets

$$\mathcal{M}_j = ((\mathcal{L}^{(-j)}, \nabla)_{|U^{(j)}}, V_j, \rho_j) \in M_{K,F}(U^{(j)}).$$

Leurs restrictions à $U$ seront encore notés $\mathcal{M}_j \in M_{K,F}(U)$.

D'un autre côté, l'action de $\mu_d$ découpe la cohomologie de $Y$ selon les valeurs propres et les nombres de Hodge s'expriment en termes des faisceaux $\mathcal{L}^{(-j)}$ comme suit. Pour $0 \leq j \leq d-1$, désignons par

$$H_j^{p,q}(Y) \subset H^q(Y, \tilde{\Omega}_Y^p)$$

le sous-espace où $\mu_d$ agit par le caractère $\xi \mapsto \xi^j$.

***Lemme 3.2.*** —

$$H_j^{p,q}(Y) = H^q(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega_Z^p(\log D^{(j)}))$$

*Démonstration.* — Le morphisme $\pi$ étant fini, on a des isomorphismes

$$H^q(Y, \tilde{\Omega}_Y^p) = H^q(Z, \pi_* \tilde{\Omega}_Y^p)$$

compatibles à l'action de $\mu_d$. Posons $W = Z - D_{sing}$. Alors

$$(\pi_* \tilde{\Omega}_Y^p)_{|W} = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega_Z^p(\log D^{(j)})_{|W}$$

est, d'après [**EV92**, Lemma 3.16], la décomposition en valeurs propres. L'égalité s'étend à $Z$ car $\mathrm{codim}(D_{sing}) \geq 2$ et que les faisceaux $\tilde{\Omega}_Y^p$ sont réflexifs. □

***Corollaire 3.1.*** — *La partie $\mu_d$-invariante de $H^*(Y)$ est isomorphe à $H^*(Z)$.*

Le même type de résultat vaut pour la cohomologie de $Y - E$ :

***Lemme 3.3.*** —

$$H_j^q(Y, \widetilde{\Omega}_Y^p(\log E)) \simeq H^q(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega_Z^p(\log D))$$

*Démonstration.* — Par l'argument de la fin de la démonstration du lemme 3.2, on peut faire la preuve comme si $D$ est lisse. D'après [**EV92**, Lemma 3.16],

$$\pi^* \Omega_Z^p(\log D) = \Omega_Y^p(\log E)$$

et par la formule de projection

$$\pi_* \Omega_Y^p(\log E) = \pi_* \pi^* \Omega_Z^p(\log D) = \pi_* \mathcal{O}_Y \otimes \Omega_Z^p(\log D).$$

On conclut alors en utilisant $\pi_* \mathcal{O}_Y = \bigoplus_{j=0}^{d-1} \mathcal{L}^{(-j)}$. □

Finissons cette section par un énoncé d'annulation, qui est un cas particulier des théorèmes d'Esnault et Viehweg [**EV86**].

***Lemme 3.4.*** — *Supposons que le faisceaux $\mathcal{L}$ soit ample et que $D^{(j)} = D_{red}$. Si $p + q \neq n$, alors :*

$$H^q(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega_Z^p(\log D)) = 0.$$

*Démonstration.* — Traitons d'abord le cas $p + q > n$. Si $\mathcal{L}$ est ample, il en va de même pour le diviseur $D$. On en déduit que $Z - D$ est affine et lisse, donc $Y - E$ l'est aussi. Par conséquent, $H^k(Y - E, \mathbb{C}) = 0$ pour tout $k > n$. Or, d'après la décomposition (24) et le lemme 3.3

$$H^q(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega_Z^p(\log D)) \otimes_K \mathbb{C} \subset H^{p+q}(Y - E, \mathbb{C}).$$

Supposons maintenant $p+q<n$ et soit $\omega \in H^1(Y, \widetilde{\Omega}^1_Y)$ la première classe de Chern de $\pi^*\mathcal{L}$. Par construction, elle est $\mu_d$-invariante. Par le théorème de Lefschetz difficile sur $Y$, le cup produit avec $\omega^{n-(p+q)}$ induit des isomorphismes

$$H^q(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega^p_Z(\log D)) \simeq H^{n-p}(Z, \mathcal{L}^{(-j)} \otimes \Omega^{n-q}_Z(\log D)),$$

ce qui réduit l'énoncé d'annulation au cas précédent. □

## 3.2. Le produit alterné des périodes

On vient de voir que les structures de Hodge $H^k_B(Y)$ satisfont aux hypothèses H de la conjecture de Gross-Deligne car elles ont multiplication complexe par le corps cyclotomique $\mathbb{Q}(\mu_d)$ et ce sont des sous-structures de Hodge de la cohomologie d'une désingularisation de $Y$. Cette section est consacrée à la démonstration du théorème suivant, qui confirme la version alternée de la conjecture pour les structures de Hodge en question. Les notations sont les mêmes que dans les sections 1.4 et 1.5 :

***Théorème 3.2.*** — *La relation*

$$\prod_{k=0}^{2n} P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k_B(Y))^{(-1)^k} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma\left(1 - \frac{\langle a \rangle}{d}\right)^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*est vraie pour n'importe quelle fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ satisfaisant à*

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon(a) \langle au \rangle = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^{p,q}_u(Y)$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

Avant de passer à la preuve, signalons deux corollaires immédiats :

***Corollaire 3.2.*** — *Si $Y$ est de dimension un et géométriquement connexe, la conjecture de Gross-Deligne vaut pour la structure de Hodge $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^1_B(Y)$.*

*Démonstration.* — D'après le corollaire 3.1, $H^k(Z)$ s'identifie à la partie invariante de $H^k(Y)$. Puisque tant $Y$ que $Z$ sont géométriquement connexes, ceci entraîne que $\mu_d$ agit trivialement sur $H^0(Y)$ et $H^2(Y)$. Le seul terme non trivial dans l'énoncé du théorème 3.2 correspond donc à $k=1$. □

***Corollaire 3.3.*** — *Si $\mathcal{L}$ est ample et $D^{(u)} = D_{red}$ pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$, alors la conjecture de Gross-Deligne vaut pour $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^n_B(Y)$.*

*Démonstration.* — Sous ces hypothèses, $k=n$ est d'après le lemme 3.4 le seul degré où le groupe $\mu_d$ n'agit pas trivialement. □

**3.2.1. Preuve du théorème 3.2.** — Elle procède en deux étapes : dans la première, on applique le théorème de Saito et Terasoma à un objet dont les périodes calculent le terme à gauche dans le théorème et dans la seconde on utilise le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch pour montrer que les exposants intervenant dans les facteurs gamma vérifient bien la relation voulue avec les nombres de Hodge.

*3.2.1.1. Première étape.* — Soit $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$. D'après les résultats de la section 3.1, le terme à gauche dans le théorème s'exprime comme les périodes d'un objet de la catégorie $M_{K,F}(U^{(u)})$. Plus précisément,

$$\prod_{k=0}^{2n} P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H_B^k(Y))^{(-1)^k} = \operatorname{per}(U^{(u)}, \mathcal{M}_u),$$

où $\mathcal{M}_u$ est l'objet de rang un

$$\mathcal{M}_u = ((\mathcal{L}^{(-u)}, \nabla)_{|U^{(u)}}, V_u, \rho_u) \in M_{K,F}(U^{(u)}).$$

***Proposition 3.2.*** — *On a :*

$$\operatorname{per}(\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} (2\pi i)^M \cdot \prod_{i\in I} \Gamma(1 - \tfrac{\langle \alpha_i u\rangle}{d})^{c_i},$$

*où $M$ désigne l'entier*

$$M = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \Omega_Z^p(\log D^{(u)}))$$

*et $c_i = \chi(D_i^*)$, où $D_i^* = D_i - \bigcup_{i\neq j} D_j$.*

*Démonstration.* — Par la formule de Saito et Terasoma (Théorème 2.4), l'égalité suivante est vraie dans $\mathbb{C}^\times/\overline{\mathbb{Q}}^\times$ :

$$\operatorname{per}(\mathcal{M}_u) = \operatorname{per}(\mathbf{1}) \cdot \Gamma(-\nabla : \mathcal{M}_u) \cdot (\mathcal{M}_u, c_{X \operatorname{mod} D^{(u)}}).$$

Puisque $\det \mathcal{M}$ vérifie les hypothèses du lemme 2.7 d'après l'exemple 7, l'accouplement $(\det \mathcal{M}, c_{X \operatorname{mod} D^{(u)}})$ est algébrique, d'où la relation

$$\operatorname{per}(\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \operatorname{per}(\mathbf{1}) \cdot \Gamma(-\nabla : \mathcal{M}_u). \tag{26}$$

D'un autre côté, d'après les propositions 2.5 et 2.6,

$$\operatorname{per}(\mathbf{1}) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} (2\pi i)^M \tag{27}$$

où l'exposant $M$ est donné par

$$M = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \Omega_Z^p(\log D^{(u)})).$$

Calculons le facteur gamma $\Gamma(-\nabla : \mathcal{M}_u)$ en prenant l'extension $\mathcal{L}^{(-u)}(-D^{(u)})$ de $-\nabla$, pour laquelle les résidus sont

$$\mathrm{Res}_{D_i}(-\nabla) = (1 - \frac{\langle \alpha_i u \rangle}{d})\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{D_i}}$$

d'après la proposition 3.1 et le lemme 2.5. Il s'ensuit

$$\Gamma(-\nabla : \mathcal{M}_u) = \prod_{i \in I} \Gamma(1 - \tfrac{\langle \alpha_i u \rangle}{d})^{c_i}. \tag{28}$$

On trouve le résultat en mettant ensemble (26), (27) et (28). □

Définissons la fonction $\varepsilon' : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ par la formule

$$\varepsilon'(a) = \sum_{\langle \alpha_i \rangle = \langle a \rangle} c_i.$$

À l'aide de $\varepsilon'$, on peut récrire le facteur gamma comme

$$\prod_{i \in I} \Gamma(1 - \tfrac{\langle \alpha_i u \rangle}{d})^{c_i} = \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma(1 - \tfrac{\langle a \rangle}{d})^{\varepsilon'(\frac{a}{u})}$$

et alors la somme pondérée des exposants vaut

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon'(a) \langle au \rangle = \sum_{i \in I} \frac{\langle \alpha_i u \rangle}{d} c_i.$$

***Corollaire 3.4***. —

$$\mathrm{per}(\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} (2\pi i)^M \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma(1 - \frac{\langle a \rangle}{d})^{\varepsilon'(\frac{a}{u})}.$$

*3.2.1.2. Deuxième étape.* — En vertu du rapport entre $2\pi i$ et les produits des valeurs gamma donné par la formule (6), tel qu'expliqué dans la preuve du lemme 1.4, pour conclure la démonstration, il suffit de montrer

***Proposition 3.3***. —

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(Y) - \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \Omega_Z^p(\log D^{(u)})) = \sum_{i \in I} \frac{\langle a_i u \rangle}{d} c_i.$$

*Démonstration.* — D'après le lemme 3.2, on a des égalités

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(Y) &= \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)} \otimes \Omega_Z^p(\log D^{(u)})) \\ &= \sum_{p=0}^{n}(-1)^p p\chi(Z, \mathcal{L}^{(-u)} \otimes \Omega_Z^p(\log D^{(u)})).\end{aligned}$$

Par le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch :

$$\begin{aligned}\chi(Z, \mathcal{L}^{(-u)} \otimes \Omega_Z^p(\log D^{(u)})) &= \chi(Z, \Omega_Z^p(\log D^{(u)})) \\ &\quad + \int_Z c_1(\mathcal{L}^{(-u)})\mathrm{ch}(\Lambda^p\Omega_Z^1(\log D^{(u)}))\mathrm{td}(TZ),\end{aligned}$$

ce qui réduit la preuve à celle de l'identité suivante :

$$\int_Z c_1(\mathcal{L}^{(-u)})[\sum_{p=0}^{n}(-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p\Omega_Z^1(\log D^{(u)}))]\mathrm{td}(TZ) = \sum_{i\in I}\frac{\langle a_i u\rangle}{d}c_i. \tag{29}$$

***Lemme 3.5***. —

$$c_1(\mathcal{L}^{(-u)}) = -\sum_{i\in I}\frac{\langle \alpha_i u\rangle}{d}D_i$$

*Démonstration.* — Puisque $\mathcal{L}^d \simeq \mathcal{O}_X(D)$, on voit d'abord que $c_1(\mathcal{L}) = \frac{1}{d}D$. Ensuite, la formule $\mathcal{L}^{(-u)} = \mathcal{L}^{-u} \otimes \mathcal{O}_Z([\frac{u}{d}D])$ entraîne

$$c_1(\mathcal{L}^{(-u)}) = -uc_1(\mathcal{L}) + \sum_{i\in I}[\tfrac{\alpha_i u}{d}]D_i = \sum_{i\in I}(-\tfrac{\alpha_i u}{d} + [\tfrac{\alpha_i u}{d}])D_i = -\sum_{i\in I}\frac{\langle \alpha_i u\rangle}{d}D_i,$$

comme on voulait démontrer. □

***Remarque 3.2***. — *Au lieu de calculer $c_1(\mathcal{L}^{(-u)})$ « à la main », on aurait pu invoquer un résultat général qui affirme que la première classe de Chern d'un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ muni d'une connexion logarithmique intégrable $\nabla : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E} \otimes \Omega_X^1(\log D)$ est donnée par*

$$c_1(\mathcal{E}) = -\sum \mathrm{Tr}_{k_i/k}(\mathrm{Res}_{D_i}\nabla)\cdot[D_i].$$

*On renvoie à* [**EV86**, App. B] *pour la démonstration.*

En vertu du lemme 2.2, la classe

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p\Omega_Z^1(\log D^{(u)}))$$

commence en degré $n-1$ et le seul terme qui contribue à (29) est donc

$$(-1)^n c_{n-1}(\Omega_Z^1(\log D^{(u)})).$$

On en déduit :

$$\int_Z c_1(\mathcal{L}^{(-u)})[\sum(-1)^p p\mathrm{ch}(\Lambda^p\Omega^1_Z(\log D^{(u)}))]\mathrm{td}(TZ)$$
$$= \sum_{i\in I}\frac{\langle a_i u\rangle}{d}(-1)^{n-1}\int_{D_i} c_{n-1}(\Omega^1_Z(\log D^{(u)})_{|D_i}).$$

Or, d'après le lemme 2.4, on a l'égalité

$$(-1)^{n-1}\int_{D_i} c_{n-1}(\Omega^1_Z(\log D^{(u)})_{|D_i}) = c_i,$$

ce qui permet de conclure. □

***Remarque 3.3.*** — *La même preuve mutatis mutandi montre que les périodes de la restriction de $\mathcal{M}_u$ à l'ouvert plus petit $U = X - D$ vérifient*

$$\mathrm{per}(U,\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d}\Gamma(1-\frac{\langle a\rangle}{d})^{\delta(\frac{a}{u})}$$

*pour n'importe quelle fonction $\delta : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\delta(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\sum_{p+q=k} ph^q(Z,\mathcal{L}^{(-u)}\otimes\Omega^p_Z(\log D)). \tag{30}$$

**3.2.2. Variante à support compact.** — Pour les applications, on aura besoin de calculer aussi les périodes à support compact de $\mathcal{M}_u \in M_{K,F}(U)$. Pour ce faire, écrivons $D_{red}$ comme réunion de $D^{(u)}$ et du diviseur $B^{(u)}$ contenant le reste des composantes irréductibles, donc celles pour lesquelles $d$ divise $\alpha_i u$.

***Théorème 3.3.*** — *La relation*

$$\mathrm{per}_c(U,\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d}\Gamma(1-\frac{\langle a\rangle}{d})^{\gamma(\frac{a}{u})}$$

*est vraie pour n'importe quelle fonction $\gamma : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\gamma(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\sum_{p+q=k} ph^q(Z,\mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)})\otimes\Omega^p_Z(\log D))$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

*Démonstration.* — Par dualité de Poincaré (cf. corollaire 2.2),

$$\mathrm{per}_c(U,\mathcal{M}_u) = (2\pi i)^{n\chi(U)}\cdot\mathrm{per}(U,\mathcal{M}_{d-u})^{-1}$$
$$= (2\pi i)^{n\chi(U)}\prod_{a\in\mathbb{Z}/d}\Gamma(1-\frac{\langle a\rangle}{d})^{-\delta(\frac{a}{-u})}$$

quelle que soit la fonction $\delta : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ satisfaisant aux équations (30) de la remarque 3.3. À partir de $\delta$, définissons $\gamma : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ par

$$\gamma(a) = -\delta(-a) + \frac{2n}{d-1}\chi(U).$$

Avec ces notations,

$$\mathrm{per}_c(U, \mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma(1 - \frac{\langle a\rangle}{d})^{\gamma(\frac{a}{u})}$$

et la fonction $\gamma$ vérifie, d'après (30),

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d} \gamma(a)\langle au\rangle = n\chi(U) - \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \mathcal{L}^{(-(d-u))} \otimes \Omega^p_Z(\log D)).$$

***Lemme 3.6***. —

$$h^q(Z, \mathcal{L}^{(-(d-u))} \otimes \Omega^p_Z(\log D)) = h^{n-q}(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega^{n-p}_Z(\log D))$$

*Démonstration.* — La preuve repose sur le fait élémentaire

$$[\tfrac{u}{d}a_i] + [(1-\tfrac{u}{d})a_i] = \begin{cases} a_i - 1 & \text{si } \frac{a_iu}{d} \notin \mathbb{Z} \\ a_i & \text{si } \frac{a_iu}{d} \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ceci entraîne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{(-u)} \otimes \mathcal{L}^{(-(d-u))} &= \mathcal{L}^{-u} \otimes \mathcal{O}_Z([\tfrac{u}{d}D]) \otimes \mathcal{L}^{-d} \otimes \mathcal{L}^{u} \otimes \mathcal{O}_Z([(1-\tfrac{u}{d})D]) \\ &= \mathcal{O}_Z(-D + [\tfrac{u}{d}D] + [(1-\tfrac{u}{d})D]) \\ &= \mathcal{O}_Z(-D^{(u)}),\end{aligned}$$

d'où la relation

$$[\mathcal{L}^{(-(d-u))} \otimes \Omega^p_Z(\log D)]^\vee \simeq [\mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega^{n-p}_Z(\log D)] \otimes \Omega^n_Z$$

car $\Omega^n_Z(\log D)(-D_{red})$ est isomorphe à $\Omega^n_Z$ (cf. remarque 2.1). Le lemme résulte directement de la dualité de Serre. □

Pour conclure, observons qu'on a, d'un côté,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^{n-q}(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega^{n-p}_Z(\log D)) \\ &= n\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} h^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega^p_Z(\log D)) \\ &- \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega^p_Z(\log D))\end{aligned}$$

et, de l'autre côté,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} h^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega_Z^p(\log D)) \\
&\quad = \int_Z \mathrm{ch}(\mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}))[\sum_{p=0}^{n}(-1)^p \mathrm{ch}(\Lambda^p \Omega_Z^1(\log D))]\mathrm{td}(TZ) \\
&\quad = (-1)^n \int_Z c_n(\Omega_Z^1(\log D)) \\
&\quad = \chi(U)
\end{aligned}$$

d'après le théorème de Hirzebruch-Riemann-Roch et le lemme 2.2(a). Ces égalités, jointes au lemme 3.6 ci-dessus, donnent

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\gamma(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} p h^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega_Z^p(\log D)),$$

ce qu'il fallait démontrer. □

## 3.3. Les périodes des variétés avec automorphismes

Soient, comme dans les sections précédentes, $d \geq 2$ un entier et $K$ un corps de nombres contenant $\mathbb{Q}(\mu_d)$. Supposons maintenant que $X$ est une variété projective et lisse sur $K$, munie d'un automorphisme $g$ d'ordre $d > 1$ et que celui-ci est aussi défini sur $K$. Alors $H_B^k(X)$ a multiplication complexe par $\mathbb{Q}(\mu_d)$. Voyons comment utiliser les théorèmes 3.2 et 3.3 pour démontrer la version alternée de la conjecture de Gross-Deligne dans cette situation. Traitons d'abord le cas des courbes.

### 3.3.1. Le cas des courbes. —

***Théorème 3.4***. — *Soit $X$ une courbe projective et lisse sur $K$, munie d'un automorphisme $g$ d'ordre $d \geq 2$ agisant sur $H^1(X)$ avec ordre exactement $d$. Alors la relation*

$$P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H_B^1(X)) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d}\Gamma(1-\frac{a}{d})^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*est vraie pour n'importe quelle fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d}\varepsilon(a)\langle au\rangle = \dim H_u^{1,0}(X)$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

*Démonstration.* — Notons $Z = X/\langle g \rangle$ le quotient par l'action de l'automorphisme, $\pi : X \to Z$ la projection et $D \subset Z$ le diviseur de ramification. La courbe $Z$ est lisse car elle est normale (par définition de quotient) et que ces deux notions sont équivalentes en dimension un. D'un autre côté,

$$\pi_* \mathcal{O}_X = \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{L}^{-i},$$

avec $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur $Z$ tel que $\mathcal{L}^d = \mathcal{O}_Z(D)$. On en déduit que $X$ est isomorphe au revêtement cyclique de $Z$ associé à la donnée de $\mathcal{L}$ et $D$. Le résultat suit directement du corollaire 3.2. □

En dimension supérieure, le quotient $X/\langle g \rangle$ n'est plus lisse et on ne peut pas appliquer directement les résultats de la section précédente. Pour contourner ce problème, on considérera une suite d'éclatements de $X$ le long des points ayant un stabilisateur non trivial. Dans la situation la plus simple, lorsque l'ordre de $g$ est premier, ces points sont exactement les points fixes.

Soit $G$ un groupe fini agissant sur une variété projective et lisse $X$, définie sur un corps $k$ de caractéristique zéro. Si $H$ est un sous-groupe de $G$, notons $X^H$ le sous-schéma fermé des points fixes de $H$. On a $gX^H = X^{gHg^{-1}}$ pour tout $g \in G$, ce qui montre que tous les $X^H$ sont $G$-stables lorsque $G$ est abélien. Le résultat suivant est classique, mais peu documenté : on renvoie à [**ILO13**, VI, Prop. 4.2] pour une preuve.

***Proposition 3.4.*** — *Le sous-schéma $X^H$ est lisse.*

**3.3.2. Le cas d'ordre premier.** — Étudions d'abord le cas où $g$ est un automorphisme d'ordre premier et $G$ désigne le groupe engendré par $g$. Soient

$$X' = \mathrm{Bl}_{X^G} X \longrightarrow X$$

l'éclatement de $X$ le long des points fixes de $G$ et $E$ le diviseur exceptionnel. D'après la proposition précédente, $X'$ est lisse. Par fonctorialité, l'action de $G$ s'étend en une action sur $X'$, libre sur $X' - E \simeq X - X^G$. Fixons une racine primitive $\xi$ de l'unité d'ordre $d$ et identifions $G$ avec $\mathbb{Z}/d$ par $g \mapsto \xi$ :

***Lemme 3.7.*** — *Pour chaque $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$, on a des isomorphismes*

$$H^k(X)_u \simeq H^k(X')_u.$$

*Démonstration.* — La cohomologie de $X'$ est engendrée par la cohomologie de $X$ et la cohomologie du fibré projectif $E = \mathbb{P}(N_{X^G/X})$, où $N_{X^G/X}$ désigne le fibré normal de $X^G$ dans $X$. Il suffit donc de voir que $G$ agit trivialement sur la cohomologie de $E$. Or, celle-ci est engendrée par la cohomologie de $X^G$, qui porte une action triviale de $G$, et la première classe de Chern de $\mathcal{O}_E(1)$. Mais

$\mathcal{O}_E(1)$ est naturellement $G$-linéarisé, d'où $g^*\mathcal{O}_E(1) \simeq \mathcal{O}_E(1)$ et l'invariance de cette classe. $\square$

Compte tenu de ce lemme, on peut remplacer $X$ par $X'$ dans le calcul des périodes, ce qui revient à supposer que le lieu des points fixes $X^G$ est un diviseur à croisements normaux simples, qui sera noté $E$. Posons $V = X - E$. Par excision en cohomologie de de Rham et en cohomologie de Betti, on obtient le diagramme commutatif suivant, où toutes les flèches sont $G$-équivariantes.

$$\begin{tikzcd}
H^{k-1}_{dR}(E/K)_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{dR,c}(V/K)_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{dR}(X/K)_{\mathbb{C}} \arrow[r] \arrow[d] & H^k_{dR}(E/K)_{\mathbb{C}} \arrow[d] \\
H^{k-1}_B(E)_{\mathbb{C}} \arrow[r] & H^k_{B,c}(V)_{\mathbb{C}} \arrow[r] & H^k_B(X)_{\mathbb{C}} \arrow[r] & H^k_B(E)_{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

Puisque $G$ agit trivialement sur la cohomologie de $E$, on en déduit

$$P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X)) = P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k_c(V)) \tag{31}$$

pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$. Soit $U = V/G$ le quotient de $V$ par l'action de $G$ et $\pi : V \to U$ l'application naturelle. Comme l'action de $G$ sur $V$ est libre, la variété $U$ est lisse et le morphisme $\pi$ étale. De plus, $\pi$ étant fini, le foncteur $\pi_*$ est exact et coïncide avec $\pi_!$. On en déduit des isomorphismes

$$H^k_c(V, \mathbb{Q}(\mu_d)) \simeq H^k_c(U, \pi_*\mathbb{Q}(\mu_d))$$

compatibles à l'action de $g$, et le même résultat vaut pour la cohomologie de de Rham à support compact. L'image directe de la connexion triviale sur $V$ se décompose suivant les valeurs propres de l'action de $\mu_d$ comme

$$\pi_*(\mathcal{O}_V, d) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} (\mathcal{L}^{-j}, \nabla),$$

avec $\mathcal{L}$ un fibré inversible sur $V$ tel que $\mathcal{L}^d \simeq \mathcal{O}_U$. De même, le système local $\pi_*\mathbb{Q}(\mu_d)$ se décompose en des sous-systèmes locaux de rang un

$$\pi_*\mathbb{Q}(\mu_d) = \bigoplus_{j=0}^{d-1} V_j$$

tels que $\mu_d$ agit sur $V_j$ par multiplication par le caractère $\xi \mapsto \xi^j$ et que le système local des sections horizontales de l'analytifié de $(\mathcal{L}^{-j}, \nabla)$ est isomorphe à $V_j \otimes_F \mathbb{C}$. On obtient ainsi des objets de rang un

$$\mathcal{M}_j = ((\mathcal{E}_j, \nabla), V_j, \rho_j)$$

dans la catégorie $M_{K,F}(U)$ satisfaisant à l'égalité

$$\prod_{k=1}^{2n} P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H_c^k(V))^{(-1)^k} = \mathrm{per}_c(\mathcal{M}_u). \tag{32}$$

quel que soit $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.

D'un autre côté, comme les morphismes dans la ligne inférieure du diagramme d'excision sont des morphismes de structures de Hodge, la partie de $H_c^k(V)$ où $G$ n'agit pas trivialement est concentrée en poids $k$ et on a des isomorphismes

$$H_u^{p,q}(X) \simeq H_{c,u}^{p,q}(V). \tag{33}$$

Soit $Z$ une compactification lisse de $U$ par un diviseur à croisements normaux simples $D$, avec des composantes irréductibles $D_i$. Choisissons un faisceau inversible $\mathcal{L}_Z$ sur $Z$ tel que $\mathcal{L}_{Z|U} \simeq \mathcal{L}$ et que

$$\mathcal{L}^d \simeq \mathcal{O}_Z(\sum_{i\in I} \alpha_i D_i),$$

avec $\alpha_i \geq 0$. Alors la connexion $(\mathcal{L}^{(-u)}, \nabla)$ associée à la donnée de $\mathcal{L}$ et $D$ est une extension de $(\mathcal{L}^{-u}, \nabla)$ à $Z$ et, si l'on note $B^{(u)}$ la somme des composantes $D_i$ telles que $\mathrm{Res}_{D_i}\nabla = 0$, on a

$$h_{c,u}^{p,q}(V) = h^q(\mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega_Z^p(\log D)) \tag{34}$$

d'après les lemmes 3.3 et 3.6 et le fait que les nombres de Hodge de $H_c^k(V)$ et $H^{2n-k}(V)$ sont reliés par la transformation $(p,q) \leftrightarrow (n-p, n-q)$.

***Théorème 3.5***. — *Soit $X$ une variété projective et lisse munie d'un automorphisme d'ordre premier $d$. Alors*

$$\prod P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))^{(-1)^k} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma(1-\frac{\langle a\rangle}{d})^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*pour n'importe quelle fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d}\sum_{a\in\mathbb{Z}/d} \varepsilon(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \sum_{p+q=k} p h_u^{p,q}(X)$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

*Démonstration*. — En mettant ensemble (31), (32), (33) et (34), on voit que l'énoncé du théorème équivaut à : « la relation

$$\mathrm{per}_c(\mathcal{M}_u) \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a\in\mathbb{Z}/d} \Gamma(1-\frac{\langle a\rangle}{d})^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

est vraie pour n'importe quelle fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in ZZ/d} \varepsilon(a)\langle au\rangle = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph^q(Z, \mathcal{L}^{(-u)}(-B^{(u)}) \otimes \Omega_Z^p(\log D))$$

pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ ». Et c'est exactement le contenu du théorème 3.3. $\square$

**3.3.3. Le cas général.** — Revenons à la situation où $d$ est quelconque. La stratégie de la preuve sera la même, mais maintenant il ne suffit pas d'éclater le lieu des points fixes : afin d'obtenir un ouvert sur lequel l'action de $G$ est libre et dont le complémentaire est un diviseur à croisements normaux simples, il faudra considérer tous les points à stabilisateur non trivial. Pour ce faire, introduisons la notation suivante. Soit $d = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ la décomposition de $d$ en facteurs premiers. Notons $S$ l'ensemble des diviseurs de $d$ et $N = \sum_{i=1}^r e_i$. On peut alors écrire $S$ comme réunion disjointe des sous-ensembles

$$S_\ell = \{p_1^{f_1} \cdots p_r^{f_r} \mid 0 \leq f_i \leq e_i, \ \sum_{i=1}^r f_i = \ell\}$$

pour $\ell = 0, \dots, N$. Par exemple, $S_0 = \{1\}$ et $S_1 = \{p_1, \dots, p_r\}$. Pour chaque $n \in S$, notons $H_n$ le sous-groupe de $G$ engendré par $g^n$.

On construit une suite d'éclatements

$$\tau : \widetilde{X} = X_{N-1} \xrightarrow{\tau_{N-1}} \cdots \to X_1 \xrightarrow{\tau_1} X_0 \xrightarrow{\tau_0} X_{-1} = X.$$

comme suit : $\tau_0$ est l'éclatement de $X$ le long de $X^G$ et, pout tout $m \geq 1$, $\tau_m$ est l'éclatement de $X_{m-1}$ le long de la transformée stricte de $\bigcup_{n \in S_m} X^{H_n}$ par $\tau_{m-1} \circ \cdots \circ \tau_0$. Notons enfin $E$ l'image inverse de $\bigcup_{n \in S} X^{H_n}$ par $\tau$.

Rappelons qu'un diviseur à croisements normaux simples $D$, muni de l'action d'un groupe $G$, est dit *$G$-strict* si $D_i \cap g(D_i) \neq \emptyset$ entraîne $g(D_i) = D_i$ pour tout $g \in G$ et pour toute composante irréductible $D_i$.

***Lemme 3.8.*** — *La variété $\widetilde{X}$ est lisse et le diviseur $E$ est à croisements normaux simples et $G$-strict. De plus :*

(a) *$G$ agit librement sur $\widetilde{X} - E$.*

(b) *$H^k(\widetilde{X})_u = H^k(X)_u$ pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

*Démonstration.* — La variété $\widetilde{X}$ est lisse car elle est obtenue par une suite d'éclatements en des lieux lisses d'après la proposition 3.4. Le fait que le diviseur $E$ soit à croisements normaux simples et $G$-strict est démontré dans [**ILO13**, Exp. VIII, 4.2, pp. 118-122]. La propriété (a) résulte de l'isomorphisme

$$\widetilde{X} - E \simeq X - \bigcup_{n \in S} X^{H_n}.$$

Pour obtenir (b), on compare successivement la cohomologie de $X_{m-1}$ et de l'éclatement $X_m$. Notons $E_m$ le diviseur exceptionnel. Si $m = 0$, on a $H^k(X_0)_u = H^k(X)_u$ pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$ d'après le lemme 3.7. Les autres cas résultent du même argument : la cohomologie de $X_m$ est engendrée par la cohomologie de $X_{m-1}$, la cohomologie du lieu éclaté $\bigcup_{n \in S_m} X^{H_n}$ et la première classe de Chern du fibré $\mathcal{O}_{E_m}(1)$. Or, la restriction de $g$ à chaque $X^{H_n}$ a ordre strictement plus petit que $d$ et $g^*\mathcal{O}_{E_m}(1) \simeq \mathcal{O}_{E_m}(1)$ car il s'agit, à nouveau, d'un fibré naturellement $G$-linéarisé. Par conséquent, les valeurs propres de $g^*$ sur le complémentaire de $H^k(X_{m-1})$ dans $H^k(X_m)$ ne sont pas primitifs, d'où $H^k(X_m)_u = H^k(X_{m-1})_u$ pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$. □

En répétant l'argument de la section 3.3.2 avec le nouveau $E$, on obtient :

***Théorème 3.6***. — *Soit $X$ une variété projective et lisse munie d'un automorphisme d'ordre $d$. Alors*

$$\prod P_u(\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k(X))^{(-1)^k} \sim_{\overline{\mathbb{Q}}^\times} \prod_{a \in \mathbb{Z}/d} \Gamma(1 - \frac{\langle a \rangle}{d})^{\varepsilon(\frac{a}{u})}$$

*pour n'importe quelle fonction $\varepsilon : \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Q}$ telle que*

$$\frac{1}{d} \sum_{a \in \mathbb{Z}/d} \varepsilon(a)\langle au \rangle = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \sum_{p+q=k} ph_u^{p,q}(X)$$

*pour tout $u \in (\mathbb{Z}/d)^\times$.*

## 3.4. Exemples

***Proposition 3.5***. — *Soit $X \subset \mathbb{P}^{n+1}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ une hypersurface lisse munie d'un automorphisme $g$ d'ordre $d$. La conjecture de Gross-Deligne vaut pour la structure de Hodge $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^n(X)$.*

*Démonstration*. — Par le théorème de Lefschetz faible, la cohomologie de $X$ coïncide avec la cohomologie de $\mathbb{P}^{n+1}$ sauf en degré $n$. Puisque les automorphismes de $\mathbb{P}^{n+1}$ agissent trivialement en cohomologie, ceci entraîne que $H^n(X)$ est le seul groupe où $g^*$ n'agit pas trivialement. La conjecture résulte alors de la version alternée donnée par le théorème 3.6 □

***Remarque 3.4***. — *Lorsque l'on considère le module* $|\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^n(X)|$ *au lieu de* $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^n(X)$, *cette proposition a été obtenue dans* [**MR04**, Cor. 4.2].

Voyons comment la proposition 3.5 permet de déduire la conjecture de Gross-Deligne pour certaines variétés de Fano. Soient $X \subset \mathbb{P}^5_{\overline{\mathbb{Q}}}$ une hypersurface cubique lisse définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ et

$$F = \{\ell \in \mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathbb{P}^5_{\overline{\mathbb{Q}}}) \mid \ell \subset X\}$$

la variété de Fano des droites dans $X$. D'après Beauville et Donagi [**BD85**], $F$ est une variété projective et lisse de dimension 4, définie sur $\overline{\mathbb{Q}}$, sans cohomologie en degré impair. Notons $P$ la variété d'incidence

$$P = \{(x, \ell) \in X \times F \mid x \in \ell\}$$

et considérons les projections

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{q} & X \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \\ F & & \end{array}$$

***Proposition 3.6*** **(Beauville-Donagi, [BD85]).** — *L'application*

$$p_* q^* : H^4(X^{\mathrm{an}}, \mathbb{Q}) \to H^2(F, \mathbb{Q})$$

*est un isomorphisme de structures de Hodge de bidegré* $(-1, -1)$.

Soit $\mathcal{L}$ la restriction à $F$ du fibré de Plücker sur $\mathrm{Gr}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^5)$. Un automorphisme $g$ de $F$ est dit *polarisé* si $g^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$. D'après [**Cha13**, Prop. 4], tous ces automorphismes sont induits par des automorphismes de $X$ ; en particulier, ils sont tous d'ordre fini car $\mathrm{Aut}(X)$ est un groupe fini.

***Proposition 3.7.*** — *Soit $F$ la variété de Fano des droites d'une hypersurface cubique lisse $X \subset \mathbb{P}^5_{\overline{\mathbb{Q}}}$. Supposons que $F$ est munie d'un automorphisme polarisé $g$ d'ordre $d$. Alors la conjecture de Gross-Deligne vaut pour* $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^k_B(F)$.

*Démonstration.* — Compte tenu de la proposition 3.6 et du fait que $g$ est induit par un automorphisme de l'hypersurface $X$, la conjecture de Gross-Deligne vaut pour la structure de Hodge $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^2_B(F)$ si et seulement si elle vaut pour $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^4_B(X)$, ce qui résulte de la proposition 3.5. Par dualité de Poincaré, on en déduit la conjecture pour $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^6_B(F)$. Puisque $F$ n'a pas de cohomologie en degré impair, le seul terme qui reste est $\det_{\mathbb{Q}(\mu_d)} H^4_B(F)$ et pour le traiter on utilise le produit alterné du théorème 3.6. $\square$

# BIBLIOGRAPHIE


[Ad97] A. Adler. *Eisenstein and the Jacobian variety of Fermat curves*. Rocky Mountain J. Math. **27** (1997), 1-60.

[And82] G. W. Anderson. *Logarithmic derivatives of Dirichlet L-functions and the periods of abelian varieties*. Compositio Math. **45** (1982), 315-332.

[An04] Y. André. *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes)*. Panoramas et Synthèses **17**, Soc. Math. France, Paris, 2004.

[Ara12] D. Arapura. *Hodge theory of cyclic covers branched over a union of hyperplanes*, prépublication `http://arxiv.org/abs/1201.6403`.

[BD85] A. Beauville, R. Donagi. *La variété des droites d'une hypersurface cubique de dimension* 4. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **301**, 14, (1985), 703-706,

[Bos13] J.-B. Bost. *Algebraization, transcendence and D-group schemes*, prépublication `http://arxiv.org/pdf/1301.4102.pdf`.

[Cha13] F. Charles. *A remark on the Torelli theorem for cubic fourfolds*, prépublication `http://arxiv.org/pdf/1209.4509.pdf`.

[CS67] S. Chowla, A. Selberg. *On Epstein's zeta-function*. J. Reine. Angew. Math. **227** (1967), 86-110.

[Cha85] K. Chandrasekharan. *Elliptic functions*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **281**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Chu84] G. V. Chudnovsky. *Contributions to the theory of transcendental numbers*. Math. Surveys Monogr. **19**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1984.

[Col93] P. Colmez. *Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe.* Ann. Math. **138** (1993), 625-683.

[Del70] P. Deligne. *Équations différentielles à points singuliers réguliers.* Lect. Notes Math. **163**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970.

[Del71] P. Deligne. *Théorie de Hodge II.* Publ. Math. IHÉS **40** (1971), 5-57.

[Del74] P. Deligne. *Théorie de Hodge III.* Publ. Math. IHÉS **44** (1974), 5-77.

[Del77] P. Deligne. *Sommes trigonométriques.* SGA $4\frac{1}{2}$, Lect. Notes Math. **569**, Springer-Verlag, New York, 1977.

[Del79] P. Deligne. *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales.* Proc. of Symp. in Pure Math. 33 t. 2 (AMS 1979) pp. 247-290.

[DMOS82] P. Deligne, J. S. Milne, A. Ogus, K. Shih. *Hodge cycles, motives and Shimura varieties.* Lect. Notes Math. **900**, Springer-Verlag, 1982.

[EV86] H. Esnault, E. Viehweg. *Logarithmic de Rham complexes and vanishing theorems.* Invent. Math. **86** (1986), 161-194.

[EV92] H. Esnault, E. Viehweg. *Lectures on vanishing theorems.* DMV Seminar **20**, Birkhäuser Verlag, Bâle, 1992.

[Ful97] W. Fulton. *Intersection theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge, Springer-Verlag, Berlin, 1998.

[Gr78] B. H. Gross. *On the periods of abelian integrals and a formula of Chowla and Selberg.* Invent. Math. **45** (1978), 193-211.

[Gr79] B. H. Gross. *On an identity of Chowla and Selberg.* Journal of Number Theory **11** (1979), 344-348.

[GK79] B. H. Gross, N. Koblitz. *Gauss sums and the $p$-adic $\Gamma$-function.* Ann. Math. **109** (1979), 569-581.

[Gri00] P. Grinspan. *Approximation et indépendance algébrique de quasi-périodes de variétés abéliennes.* Thèse de doctorat, Université Paris 6, 2000.

[Gro66] A. Grothendieck. *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Publ. Math. IHÉS, **29** (1966), 95-103.

[Har75] R. Hartshorne. *On the de Rham cohomology of algebraic varieties.* Publ. Math. IHÉS, **45** (1975), 5-99.

[Hir66] F. Hirzebruch. *Topological methods in Algebraic Geometry*, Grundlehren **131**, Springer-Verlag, New York, 1966.

[ILO13] L. Illusie, Y. Laszlo, F. Orgogozo. *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, prépublication `http://arxiv.org/pdf/1207.3648v1.pdf`.

[Ka09] B. Kahn, *Zeta functions and motives.* Pure Appl. Math. Q. **5** (2009), 507-570.

[Kat70] N. M. Katz. *The regularity theorem in algebraic geometry.* Proc. Internat. Congr. Math. (Nice, 1970), Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, pp. 437-443.

[Kim05] S.-I. Kimura, *Chow groups are finite dimensional, in some sense.* Math. Ann. **331** (2005), 173-201.

[KR01] K. Köhler, D. Rössler. *A fixed-point formula of Lefschetz type in Arakelov geometry I : statement and proof.* Invent. Math. **145** (2001), 333-396.

[Kol07] J. Kollár. *Lectures on resolution of singularities.* Ann. Math. Stud. **166**, Princeton University Press, 2007.

[Kon99] M. Kontsevich. Operads and motives in deformation quantization. *Lett. in Math. Physics* **48** (1999), 35-72.

[Leg11] A.-M. Legendre. *Exercices de calcul intégral.* Paris, 1811.

[Ler97] M. Lerch. *Sur quelques formules relatives au nombre de classes.* Bull. Sci. Math. **21** (1897), première partie, 290-304.

[MR04] V. Maillot, D. Rössler. *On the periods of motives with complex multiplication and a conjecture of Gross-Deligne.* Ann. Math. **160** (2004), 727-754.

[PS08] C. A. M. Peters, J. H. Steenbrink. *Mixed Hodge structures.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. **52**. Springer-Verlag, Berlin, 2008

[Qu73] D. Quillen. Higher algebraic $K$-theory I. Dans *Algebraic $K$-theory I*, Lect. Notes in Math. **341**, Springer-Verlag, Berlin-New York 1973, 85-147.

[Roh09] J. C. Rohde. *Cyclic coverings, Calabi-Yau manifolds and complex multiplication.* Lect. Notes in Math. **1975**, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[Sai93] T. Saito. *$\varepsilon$-factor of a tamely ramified sheaf on a variety.* Invent. Math. **113** (1993), 389-417.

[Sai94] T. Saito. *Jacobi sum Hecke characters, de Rham discriminant, and the determinant of l-adic cohomologies.* J. Alg. Geo. **3** (1994) 411-434.

[Sai12] T. Saito. *The determinant and the discriminant of a hypersurface of even dimension.* Math. Res. Lett. **19** (2012), 855-871.

[ST97] T. Saito, T. Terasoma. *Determinant of period integrals.* JAMS **10**, 4 (1997), 865-937.

[Sil86] J. H. Silverman, *The arithmetic of elliptic curves.* Grad. Texts in Math. **106**, Springer-Verlag, New York, 1986.

[Sou05] C. Soulé. *Genres de Todd et valeurs aux entiers des dérivées de fonctions L.* Séminaire Bourbaki **955** (2005), Astérisque 311, 2007, 75-98

[Ste77] J. H. Steenbrink. *Mixed Hodge structures on the vanishing cohomology.* Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), 525-563

[Ter94] T. Terasoma. *A product formula for period integrals.* Math. Ann. **298** (1994), 577-589.

[Wal06] M. Waldschmidt. *Transcendence of periods : the state of the art.* Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 435-463.

[Wei76] A. Weil. *Elliptic functions according to Eisenstein and Kronecker.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **88**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.