THÈSE

Présentée pour obtenir

LE DIPLÔME DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ
PARIS 13, SORBONNE PARIS CITÉ

Spécialité : Informatique

par

Ladji KANE

Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité

Soutenue le 27 juin 2014 devant le jury :

Rapporteurs :

Jean-Gabriel LUQUE, professeur des universités (Rouen)
Nour-Eddine OUSSOUS, professeur des universités (Lille 1)

Examinateurs :

Christian LAVAULT, professeur des universités (Paris 13)
Hacène BELBACHIR, maître de conférences - HDR (Alger)
Pierre SIMONNET, maître de conférences - HDR (Corte)
Karim SAMAKE, maître de conférences (Bamako)

Directeurs/encadrants :

Gérard H.E. DUCHAMP, professeur des universités (Paris 13)
Vincel Hoang Ngoc MINH, professeur des universités (Lille 2)
Christophe TOLLU, maître de conférences (Paris 13)

Thèse préparée au
Laboratoire d'Informatique de Paris Nord
Université Paris 13
LIPN - UMR 7030,
99, Avenue Jean-Baptiste Clément
93 430 VILLETANEUSE

Remerciements : Avant tout je remercie Gérard H.E. Duchamp qui m'a guidé dans ma thèse et qui m'a proposé plein de problèmes intéressants, quelques uns que j'ai su résoudre et d'autres non. Je sais combien il aime la combinatoire des algèbres de Lie et combien il revendique l'appartenance à l'école de Schützenberger. Les trois années passées à travailler avec Gérard H.E. Duchamp ont été extrêmement instructives à bien des égards. Je dois mentionner son appétit scientifique insatiable, les réponses patientes à mes questions, et son enthousiasme constant pour partager ses connaissances. Sa rigueur et son refus des croyances non fondées sont aussi une leçon.

Je remercie très chaleureusement Christophe Tollu. C'est une chance d'avoir pu travailler avec quelqu'un ayant des connaissances aussi vastes que ce soit en mathématiques, en informatique et dans tant d'autres domaines. Ses qualités pédagogiques m'ont donné l'envie de m'interesser à la combinatoire.

J'adresse des remerciements spécifiques à Vincel Hoang Ngoc Minh : il est toujours prêt à partager ses idées, ses intuitions.

Je remercie Jean-Gabriel Luque et Nour-Eddine Oussous pour m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse, et pour leur disponibilité et leur gentillesse. Je remercie également Jean-Gabriel Luque de m'avoir invité à Rouen pour que je puisse y exposer mes travaux. Je le remercie également pour son accueil chaleureux, pour ses questions, les discussions avec lui ont toujours été très stimulantes.
Je remercie aussi les membres du jury de ma soutenance pour l'honneur qu'ils m'ont fait d'accepter d'y participer : merci donc à Christian Lavault, à Hacène Belbachir, à Pierre Simonnet et à Karim Samaké.

Je remercie les membres de l'équipe de combinatoire du laboratoire : Frédérique Bassino, Adrian Tanasa, Cyril Banderier, Silvia Goodenough. Ainsi que les doctorants : Quoc Hoang Ngo, Van Chiên Bui, Nguyen Hoang, Mohamed Mahdi Benmoussa. Je remercie particulièrement Van Chiên Bui, Nguyen Hoang et Mohamed Mahdi Benmoussa pour leur constante bonne humeur et pour leur soutien.

Je remercie ma famille pour leurs encouragements et leur soutien moral. Merci à mes parents, à mes frères et soeurs pour leur patience et leur compréhension.
Merci aussi à Yoro Diakité pour ses encouragements et son soutien qui a été décisif pour la continuation de mes études.
Le dernier mais non le moindre, je remercie mon épouse, Fathimata Mamary Kané, pour son amour et sa patience. Elle a su tenir bon et m'a donné un soutien indéfectible durant ma thèse.
Ces remerciements ne peuvent s'achever sans remercier Dieu, qui m'a donné la force et le bonheur de réaliser cette thèse. À Lui seul la gloire.

Titre : Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité.

Résumé : La Combinatoire a permis de résoudre certains problèmes en Mathématiques, en Physique et en Informatique, en retour celles-ci inspirent des questions nouvelles à la Combinatoire. Ce mémoire de thèse intitulé "Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité" regroupe plusieurs travaux sur la combinatoire des déformations du produit de shuffle.
L'objectif de cette thèse est d'écrire des factorisations dont le terme principal est l'identité à travers l'utilisation d'outils portant principalement sur la combinatoire des mots (ordres, graduations, etc.). Dans le cas classique, soit F une algèbre libre. En raison du fait que F est une algèbre enveloppante, on a une factorisation exacte de l'identité de

$$End(F) = F^{\star}\hat{\otimes}F$$

comme un produit infini d'exponentielles ($End(F)$ étant muni du produit de shuffle sur la gauche et de la concaténation sur la droite, une représentation fidèle du produit de convolution) comme suit : premiérement on commence avec une base de Poincaré-Birkhoff-Witt, deuxièment on calcule la famille des formes coordonnées et alors les propriétés (combinatoires) non triviales de ces familles en dualité donne la factorisation. Si on part de l'autre côté, l'écriture pour le même produit ne donne exactement l'identité que sous des conditions très restrictives que nous précisons ici. Dans de nombreux autres cas (déformés), la construction explicite des paires de bases en dualité nécessite une étude combinatoire et algorithmique que nous fournissons dans ce mémoire.

Mots-clefs : Combinatoire algébrique, Produit de shuffle, Produit de $q-$shuffle, Produit de $q-$stuffle, Éléments de Lie, Algèbre de Lie libre, Base de Poincaré-Birkhoff-Witt, Base de Transcendance, Bases multiplicatives, Factorisations tangentes à l'identité.

Title : Combinatorics and algorithmics of factorizations tangent to the identity.

Abstract : Combinatorics has solved many problems in Mathematics, Physics and Computer Science, in return these domains inspire new questions to Combinatorics. This memoir entitled "Combinatorics and algorithmics of factorizations tangent to identity" includes several works on the combinatorial deformations of the shuffle product.
The aim of this thesis is to write factorizations which principal term is the identity through the use of tools relating mainly to combinatorics on the words (orderings, gradings etc.). In the classical case, let F be the free algebra. Due to the fact that F is an enveloping algebra, one has an exact factorization of the identity of

$$End(F) = F^{\star}\hat{\otimes}F$$

as an infinite product of exponentials ($End(F)$ being endowed with the shuffle product on the left and the concatenation on the right, a faithful representation of the convolution product) as follows : first one begins with a Poincaré-Birkhoff-Witt basis, second one computes the family of coordinate forms and then non-trivial (combinatorial) properties of theses families in duality gives the factorization. Starting from the other side and writing the same product does give exactly identity only under very restrictive conditions that we clarify here. In many other (deformed) cases, the explicit construction of pairs of bases in duality requires combinatorial and algorithmic studies that we provide in this memoir.

Keywords : Algebraic combinatorics, Shuffle product, q-Shuffle product, q-Stuffle product, Lie elements, Free Lie algebra, Poincaré-Birkhoff-Witt basis, Transcendence basis, Multiplicative bases, Factorizations tangent to the identity.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction et Motivations

"Les gens qui font de la combinatoire et algorithmique ressentent une joie double. Ils expérimentent d'abord la beauté d'élégantes structures mathématiques qui entourent d'élégantes procédures informatiques. Puis ils reçoivent une récompense en retour lorsque leurs théories rendent possibles de résoudre d'autres problèmes plus rapidement et plus économiquement".

Cette thèse est consacrée à l'étude de certaines déformations de la factorisation de Schützenberger qui s'obtiennent en déformant le produit de shuffle de diverses manières. Dans un cas ($q-$shuffle, une déformation de la concaténation) le résultat (la factorisation) est simplement tangent à l'identité. Dans l'autre ($q-$stuffle) le résultat (la factorisation) est exact mais au prix d'une redéfinition des polynômes de Lie. Expliquons en quelques mots le contexte dans lequel le produit de $q-$shuffle a été introduit. Typiquement, les déformations qui nous intéressent dépendent d'un ou plusieurs paramètres et sont triviales dans le sens de la théorie de la déformation des algèbres. Autrement dit, pour des valeurs génériques de ces paramètres, il existe un isomorphisme de conjugaison [1]

$$u \sqcup\!\sqcup_q v = f\left(f^{-1}(u)f^{-1}(v)\right) \tag{1.1}$$

entre le produit déformé $\sqcup\!\sqcup_q$ et l'original . Cependant, pour des valeurs spécifiques des paramètres, le produit déformé dégénère de façon non négligeable, une situation qui permet la représentation des algèbres complexes comme en limitant aux cas de celles des plus connues.
La motivation de cette étude du produit de $q-$shuffle a été fournie par des exemples de

1. f est un isomorphisme entre l'algèbre de concaténation $(\mathbb{Z}(q)\langle X\rangle, .)$ et l'algèbre de $q-$shuffle $(\mathbb{Z}(q)\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup_q)$: $f(f^{-1}(u)f^{-1}(v)) = f(f^{-1}(u)) \sqcup\!\sqcup_q f(f^{-1}(v)) = u \sqcup\!\sqcup_q v$ (voir aussi [Dkt97] $u \sqcup\!\sqcup_q v = U(q)(U(q)^{-1}(u).U(q)^{-1}(v)) = U(q)(U(q)^{-1}(u)) \sqcup\!\sqcup_q U(q)(U(q)^{-1}(v)))$

décomposition en somme directe de l'algèbre libre universelle $\mathbb{K}\langle X\rangle$, considérée comme l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}\langle X\rangle$

$$\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{\lambda} U_\lambda \tag{1.2}$$

analogue à la décomposition de Poincaré-Birkhoff-Witt, c'est-à-dire λ parcourt l'ensemble de toutes les partitions, $U_0 = \mathbb{K}$ et $U_1 = \mathcal{L}\langle X\rangle$.
Dans ces exemples, chaque module U_λ est l'image de la composante homogène $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$ de degré n de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ par certains idempotents e_λ de l'algèbre du groupe symétrique $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$, agissant à droite par $(a_1a_2\cdots a_n)\sigma = a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}\cdots a_{\sigma(n)}$ (où $a_i \in X$).
Dans le cas de la décomposition de Poincaré-Birkhoff-Witt, venant de l'identification de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ avec l'algèbre symétrique $S(\mathcal{L}\langle X\rangle)$, U_λ est le sous-espace engendré par les produits de polynômes de Lie symétrisés

$$(P_1, P_2, \cdots, P_r) = \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}\cdots P_{\sigma(r)}, \tag{1.3}$$

de sorte que chaque P_i est homogène de degré λ_i. Les idempotents correspondants, introduits par Garsia et Reutenauer [Gre89], sont des raffinements d'idempotents dits d'Euler [Reu93], qui se posent par exemple dans le calcul de la série séparée [Mpl70], ou dans l'étude de la cohomologie de Hochschild d'algèbres commutatives [Gsc87, Lod89].
La forme des idempotents e_λ de Garsia-Reutenauer, en prenant toutes les partitions d'un n donné, un ensemble complet d'idempotents orthogonaux d'une sous-algèbre Σ_n remarquable de $\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n]$, découvert par L. Solomon [Sol76] est appelé algèbre des descentes. Il a été montré dans [Dkt97] que ces ensembles complets peuvent être construits pour toutes les algèbres de descente de toute séquence $e_{(n)}$ des idempotents de Lie de Σ_n, c'est-à-dire idempotents projetant $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$ sur $\mathcal{L}_n\langle X\rangle$. En particulier, en utilisant la théorie de la déformation des fonctions symétriques non commutatives, on peut obtenir des séquences intéressantes d'idempotents de Lie, selon un ou plusieurs paramètres, et d'interpolation d'une manière naturelle entre tous les exemples connus [Dkt97]. Cela conduit à différentes déformations des idempotents de Garsia-Reutenauer et des idempotents eulériens, et la première question est certainement d'expliciter les modules U_λ sur lequel ils projettent.

Il existe pour chaque n, un vecteur $p = (p_I)$ dont les composantes sont indexées par les compositions de n, satisfaisant $\sum_I p_I = 1$, tel que U_λ est engendré par les produits symétrisés pondérés

$$(P_1, P_2, \cdots, P_r)_p = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_r} p_{\lambda.\sigma}P_{\sigma(1)}P_{\sigma(2)}\cdots P_{\sigma(r)}, \tag{1.4}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r)$ et $P_i \in \mathcal{L}_{\lambda_i}\langle X\rangle$.
Les poids des p_I sont explicités dans plusieurs exemples intéressants.

Le seul exemple de décomposition (1.2) page 12 connu qui ne provient pas d'une séquence d'idempotents de Lie en algèbres de descente est la décomposition dite orthogonale [Dkt97]. Il a été montré par Ree [Ree58] que si l'on munit $\mathbb{K}\langle X\rangle$ avec le produit scalaire pour lequel les mots forment une base orthonormée, le complément orthogonal de $\mathcal{L}_n\langle X\rangle$ est l'espace engendré par les shuffles propres $u \sqcup\!\sqcup v$, $u, v \in X^+$. L'idempotent orthogonal de Lie π_n est le projecteur orthogonal de $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$ sur $\mathcal{L}_n\langle X\rangle$. Cet idempotent n'est pas dans l'algèbre de descente, et il serait intéressant de comprendre sa structure. La décomposition orthogonale de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ peut être affinée en une décomposition de type (1.2) page 12 , où U_λ est maintenant engendré par les shuffles des éléments de Lie homogènes

$$P_1 \sqcup\!\sqcup P_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup P_r, \tag{1.5}$$

où chaque P_i est de degré λ_i. La relation entre la projection $\pi_n = e_{(n)}$ de cette décomposition et les autres projecteurs e_λ est un peu analogue à celle rencontrée dans le cas de l'algèbre de descente, mais beaucoup plus complexe.
Pour comprendre cette analogie, ils [Dkt97, Zag92] ont été amenés à introduire un $q-$analogue du produit de shuffle, qui, à proprement parler, est une déformation du produit de concaténation pour $q = 0$, définie par :

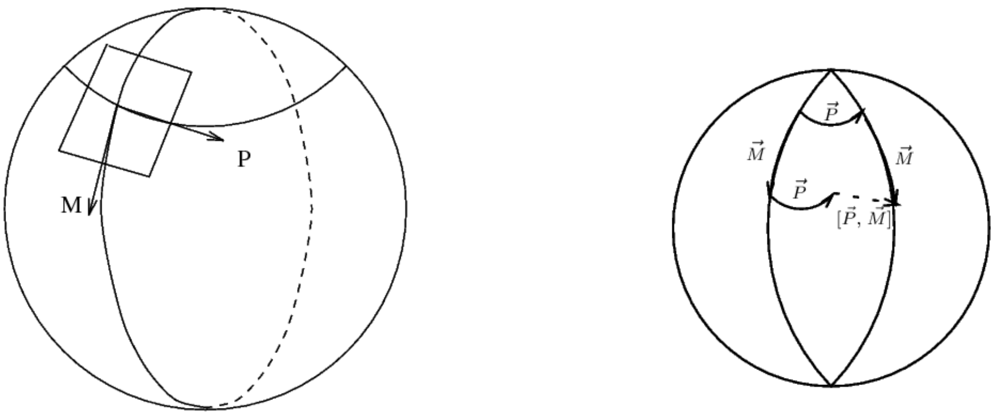
$$u \sqcup\!\sqcup_q 1_{X^*} = 1_{X^*} \sqcup\!\sqcup_q u = u \qquad et \qquad au \sqcup\!\sqcup_q bv = a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q v) \tag{1.6}$$

où $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$. Ce produit dégénère aux racines de l'unité, et en particulier donne le produit de shuffle (ou produit de mélange) commutatif pour $q = 1$ ainsi que le produit de concaténation pour $q = 0$.

Un problème difficile est de trouver une bonne déformation du produit de shuffle redonnant l'algèbre de convolution pertinent au problème des idempotents orthogonaux comme un cas dégénéré.
Il s'avère que le produit de $q-$shuffle, ainsi que les éléments $U_n(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)}\sigma$, qui lui sont naturellement associé, sont déjà connus dans la littérature, dans plusieurs contextes apparemment non apparentés.

Tout d'abord, l'algèbre de $q-$shuffle est le cas le plus simple d'une construction très générale de M.Rosso [Dkt97], obtenue dans le cadre de la théorie des groupes quantiques. En outre, l'algèbre de $q-$shuffle est isomorphe à l'algèbre associative libre si et seulement si $U_n(q)$ est inversible pour tout n. Le calcul de son déterminant (comme un opérateur de la représentation régulière de $\mathfrak{S}_n$) déjà eu lieu dans un problème de physique [Zag92], et a été résolu par D.Zagier [Zag92] qui a également calculé $U_n(q)^{-1}$ au moyen de certaines formules de factorisation. Curieusement, la formule de Zagier pour $det(U_n(q))$ s'avère être un cas particulier d'une formule récente de Varchenko [Var93], qui donne le déterminant de ce qu'il appelle la forme bilinéaire quantique d'un arrangement d'hyperplans. Pour compléter le tableau, ils [Dkt97, Zag92] mentionnent que le produit de $q-$shuffle dispose également d'une interprétation naturelle dans la théorie de la représentation des algèbres $0-$Hecke de type A [Dkt97]. Ces aspects du produit de $q-$shuffle sont examinés, et les différentes liaisons sont exploitées afin de donner des généralisations ou des simplifications de résultats connus lorsque cela est possible. Par exemple, on peut voir que l'on peut construire un shuffle quantique de toute solution de l'équation de Yang-Baxter (sans paramètres spectraux), et que les fonctions symétriques de Hall-Littlewood ou les espaces $q-$Fock de Kashiwara, Miwa et Stern [Kms95] peuvent être considérés comme des exemples de ces constructions. Ainsi, nous donnons quelques applications.

1.1 Illustration



(a) fig3 (b) fig4

FIGURE 1.1 – *les deux vecteurs vitesses dans le plan tangent*

On va voir comme illustration les directions tangentes à la sphère. En chaque point sur la sphère, on peut considérer les deux *vecteurs vitesses* suivants :

$\vec{M}$ avancer à $100km/h$ en suivant le méridien du nord vers le sud.
$\vec{P}$ avancer à $100km/h$ en suivant le parallèle vers l'est.

Les deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{P}$ sont portés par des directions, c'est-à-dire par des droites tangentes à la sphère. Ils sont situés entièrement dans le plan tangent à la sphère au point considéré. Ils ne sont pas sur la sphère, mais ils s'en "décollent" (voir la figure (1.1a fig3) page 14).
Par contre, ils indiquent un *mouvement* qui se fait sur la sphère : celui qui est obtenu en

faisant une *intégration* de la fonction vitesse. Mathématiquement, cela se traduit par des *exponentielles*.

Le mouvement le long de la sphère, suivant le méridien, pendant 1 heure sera représenté par l'exponentielle $\exp(M)$. Le mouvement pendant 1 heure suivant le méridien suivi du mouvement pendant 1 heure suivant le parallèle sera représenté par le produit : $\exp(P)\exp(M)$.

Or la direction PM (chemin suivant $\vec{M}$ puis suivant $\vec{P}$) et la direction MP (chemin suivant $\vec{P}$ puis suivant $\vec{M}$) ne sont pas égales, comme on peut s'en rendre compte par un simple dessin (voir la figure (1.1b fig4) page 14).

Par contre, on peut se convaincre que la différence qui s'obtient par passage à la limite :

$$[P, M] = PM - MP$$

représente une nouvelle direction de mouvement (un nouveau vecteur vitesse).

Sur les véritables mouvements (les exponentielles), on va tester la composition indiquée par le dessin :

$$\exp(P)\exp(M)\exp(-P)\exp(-M)$$

(on chemine " à l'envers" suivant $\vec{M}$, puis suivant $\vec{P}$, puis on chemine à l'endroit suivant $\vec{M}$, puis suivant $\vec{P}$).

Le cheminement composé obtenu aura lieu suivant une direction de mouvement qui n'est autre que $[\vec{P}, \vec{M}]$. Vérifions ce fait pour des cheminements durant un temps ε petit.

$$\exp(\varepsilon P) = 1 + \varepsilon P + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}P^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\exp(\varepsilon M) = 1 + \varepsilon M + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}M^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\exp(-\varepsilon P) = 1 - \varepsilon P + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}P^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

$$\exp(-\varepsilon M) = 1 - \varepsilon M + \tfrac{\varepsilon^2}{2!}M^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

Dans le produit $\exp(\varepsilon P)\exp(\varepsilon M)\exp(-\varepsilon P)\exp(-\varepsilon M)$ beaucoup de termes s'en vont. Il faut calculer soigneusement car le produit n'est pas commutatif. On obtient finalement :

$$\exp(\varepsilon P)\exp(\varepsilon M)\exp(-\varepsilon P)\exp(-\varepsilon M) = 1 + \varepsilon^2[P, M] + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 1 + \Theta, \text{ avec}$$
$$\Theta = \varepsilon^2[P, M] + \mathcal{O}(\varepsilon^3)$$

C'est donc bien la direction de mouvement portée par le vecteur $[P, M] = PM - MP$ qui est apparue. Ce nouveau vecteur vitesse est encore un vecteur tangent à la sphère.

1.2 Contributions et plan détaillé

Les factorisations de Schützenberger s'obtiennent en déformant le produit de shuffle de diverses manières. Dans [Reu93, Mre89, Mela91], C. Reutenauer et G. Mélançon ont montré que le résultat (la factorisation de Schützenberger) est exact en utilisant le produit de shuffle. Dans [Bam13, Mih13, Min13], C. Bui, G.H.E Duchamp et V. Minh ont montré que le résultat (la factorisation de Schützenberger) est exact en utilisant le produit de $q-$stuffle mais au prix d'une redéfinition des polynômes de Lie.
Nous avons entrepris nos travaux dans le but d'étendre ces résultats (les factorisations de Schützenberger) en utilisant le produit de $q-$shuffle .

Les contributions de cette thèse sont décrites dans les chapitres 4, 5 et 6 :

Chapitre 1 : Le but de ce chapitre est d'introduire des déformations et de donner les différentes motivations de cette thèse.

Chapitre 2 : Ce chapitre sert de préliminaire aux autres chapitres, rappelant plusieurs définitions et résultats qui seront utilisés plus loin. Il fournit les notions de base concernant les structures combinatoires mises en jeu dans cette thèse : mots, polynômes, algèbre de Lie, algèbre de Lie libre, algèbre enveloppante, algèbre de Hopf, algèbre de shuffle et algèbre de stuffle.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre nous explorons des faits généraux sur la dualité dans le contexte du Théorème de factorisations de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) et de Schützenberger. Nous rappelons des résultats connus dans
[Reu93, Mre89, Mela91, Bam13, Mih13, Min13] et traitons des exemples qui seront utiles dans les chapitres 4, 5 et 6.

Chapitre 4 : Le but de ce chapitre est de construire une paire de bases en dualité. Ce chapitre contient trois volets principaux : Dans le premier volet, nous donnons une construction des éléments de $(\mathfrak{S}_n)_m$ (Définition 20 page 63), dans un second volet, nous construisons une base $q-$analogue de la base duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$ ((4.39) page 81) et dans le troisième volet, la construction d'une base $q-$analogue de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(P_w^{(q)})_{w\in X^*}$ ((4.52) page 86) telle

que $\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}, \forall u, v \in X^*$.
Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires en utilisant le produit de $q-$shuffle.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. le Théorème 7 page 64 donne une généralisation du Théorème 8 page 64 [Hum, Kas09].

2. le Théorème 9 page 78 donne une triangularisation des éléments $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$ ($\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$).

3. le Théorème 10 page 81 donne une construction récursive des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$.

Chapitre 5 : Le but de ce chapitre est d'étudier la multiplicativité des familles obtenues en dualité. Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous redonnons une construction d'une paire de bases en dualité dans le cas du $q-$shuffle décroissants de mots de Lyndon et dans le second volet, nous donnons une autre construction de paire de bases en dualité. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. la Note 1 page 101 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(R_w^{(q)})_{w\in X^*}$ afin d'écrire des factorisations de $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

2. la Conjecture 2 page 102 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(P_w^{(q)})_{w\in X^*}$ afin d'écrire des factorisations de $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

Chapitre 6 : Le but de ce chapitre est d'écrire des factorisations associées aux paires de bases obtenues par dualité. Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous donnons une écriture de la factorisation de la série diagonale. Enfin, nous donnons une écriture des factorisations tangentes à l'identité.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

Écriture des factorisations : $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

Chapitre 7 : Le but de ce chapitre est de tirer des conclusions et perspectives de cette

thèse.
Annexe : Feuilles de calculs Maple et bibliographie.

Première partie

Généralités

Chapitre 2

Notions de base

Résumé : Ce chapitre sert de préliminaire aux autres chapitres, rappelant plusieurs définitions et résultats qui seront utilisés plus loin. Il fournit les notions de base concernant les structures combinatoires mises en jeu dans cette thèse : mots, polynômes, algèbre de Lie, algèbre de Lie libre, algèbre enveloppante, algèbre de Hopf, algèbre de shuffle et algèbre de stuffle.

2.1 Combinatoire des mots

2.1.1 Définitions de base

Un alphabet est un ensemble de lettres, fini $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$ ou infini (par exemple $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$). Un mot est une suite finie $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$ de lettres. Le mot vide, noté ε ou 1_{X^*} est le mot ne contenant aucune lettre. La longueur d'un mot $w = x_{i_1} \cdots x_{i_k}$, notée $|w|$ est la longueur de la suite de lettres constituant w, c'est-à-dire l'entier k. Si chaque lettre est associée à un entier nommé poids, nous appellerons poids d'un mot noté $[w]$ la somme des poids respectifs des lettres qui le composent. L'ensemble des mots sur un alphabet X est noté X^*. On note de plus X^+ l'ensemble des mots non vides.

Sur X^*, on définit une opération interne notée "." et appelée opération ou produit de concaténation, comme suit : si $u = x_0x_1x_0$ et $v = x_0x_1$ alors $u.v = x_0x_1x_0x_0x_1$ (c'est la juxtaposition des lettres de u et de celles de v). Il est clair que 1_{X^*} est l'élément neutre pour ce produit ($u.1_{X^*} = 1_{X^*}.u$ pour tout $u \in X^*$). Il est également évident que ce produit n'est pas commutatif (si l'alphabet comporte deux lettres distinctes $x_0 \neq x_1$ alors $x_0x_1 \neq x_1x_0$). Par contre, il est associatif ($(u.v).w = u.(v.w)$).

$$(x_0x_1x_0.x_0x_1).x_1 = x_0x_1x_0.(x_0x_1.x_1) = x_0x_1x_0x_0x_1x_1. \tag{2.1}$$

$(X^*, .)$ est le monoïde libre non commutatif sur l'alphabet X.

Si X est ordonné (on a un ordre sur les lettres. Par exemple $x_0 < x_1$), alors on peut définir les deux ordres suivants :

(i) L'ordre lexicographique : soit $u, v \in X^*$, on a

$$u < v \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists w \in X^+ \text{ tel que } uw = v \\ \text{ou} \\ \exists\ w_1, w_2, w_3 \in X^* \text{ et } x, y \in X \text{ tels que } u = w_1 x w_2,\ v = w_1 y w_3 \text{ et } x < y \end{cases}$$

Par exemple $x_0x_1 < x_0x_1^2$ et $x_0x_1x_0x_1^2 < x_0x_1x_1$.

(ii) L'ordre lexicographique par longueur : soit $u, v \in X^*$, on a

$$u < v \Longleftrightarrow \begin{cases} \mid u \mid < \mid v \mid \\ \text{ou} \\ \mid u \mid = \mid v \mid \text{ et } u < v \text{ pour l'ordre lexicographique.} \end{cases}$$

Par exemple $x_0x_1 < x_1x_0$ et $x_1 < x_0x_1$.

Exemple 1. (i) $|x_0x_1x_0| = 3$ et $|1_{X^*}| = 0$.
(ii) Soit $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$, et $w = y_1^2y_3y_2y_1 \in Y^*$, le poids de chaque lettre étant défini par son indice, w a pour poids $[w] = 8$. De plus $|w| = 5$.

À partir de maintenant, X est supposé totalement ordonné par $<$ et le mot vide sera noté 1_{X^*}.

2.1.2 Facteurs et conjugués d'un mot

Un mot $u \in X^*$ est un facteur d'un mot $v \in X^*$ s'il existe deux mots $w_1, w_2 \in X^*$ tels que

$$v = w_1 u w_2. \tag{2.2}$$

Un mot $u \in X^*$ est dit facteur gauche (resp. droit) d'un mot $v \in X^*$ si dans ((2.2) page 22), $w_1 = 1_{X^*}$ (resp $w_2 = 1_{X^*}$), si de plus $w_1 \neq 1_{X^*}$ et $w_2 = 1_{X^*}$ $u \in X^*$ est dit facteur droit propre de $v \in X^*$ (resp $w_1 = 1_{X^*}$ et $w_2 \neq 1_{X^*}$ $u \in X^*$ est dit facteur gauche propre de $v \in X^*$).

Exemple 2. Soit le mot $v = x_0x_1x_1x_0x_1$. L'ensemble de ses facteurs droits est :

$$\{x_1, x_0x_1, x_1x_0x_1, x_1x_1x_0x_1, x_0x_1x_1x_0x_1\}$$

et l'ensemble de ses facteurs droits propres est :

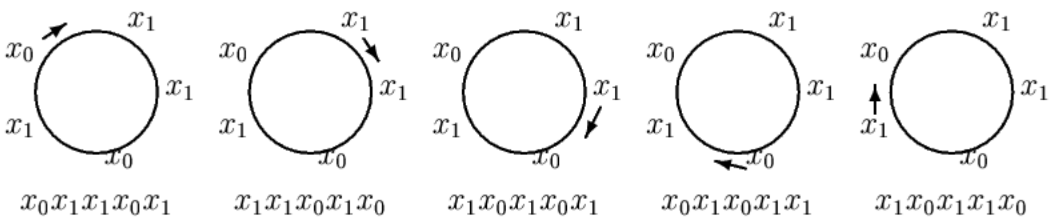
$$\{x_1, x_0x_1, x_1x_0x_1, x_1x_1x_0x_1\}.$$

Deux mots w_1 et w_2 sont dits conjugués s'il existe deux mots u et v de X^+ tels que $w_1 = uv$ et $w_2 = vu$.
Soit $u \in X^*$. La classe de conjuguaison de u est l'ensemble de ses conjugués.

Exemple 3. Soit le mot $v = x_0x_1x_1x_0x_1$. L'ensemble de ses conjugués est :

$$\{x_0x_1x_1x_0x_1, x_1x_1x_0x_1x_0, x_1x_0x_1x_0x_1, x_0x_1x_0x_1x_1, x_1x_0x_1x_1x_0\}.$$

On remarque que l'on obtient la classe de conjuguaison de w en plaçant les lettres de w sur un cercle et en enumérant tous les mots obtenus en accédant au cercle par ses différentes lettres.



Maintenant nous avons les éléments nécessaires pour définir les mots de Lyndon et ses propriétés.

2.2 Mots de Lyndon

Un mot $l \in X^*$ est un mot de Lyndon s'il est primitif (non puissance trivale d'un autre mot) et est strictement plus petit, pour l'ordre lexicographique, que chacun de ses facteurs droits propres.
Ainsi, le mot $v = x_0x_1x_0x_1$ n'est pas un mot de Lyndon car il est non primitif ($x_0x_1x_0x_1 = (x_0x_1)^2$) et est plus grand que x_0x_1 qui est un de ses facteurs droits propres. Par contre, le mot $l = x_0x_0x_1x_0x_1$ est un mot de Lyndon.

Une autre définition des mots de Lyndon : $l \in X^*$ est un mot de Lyndon s'il est primitif (non puissance trivale d'un autre mot) et est strictement plus petit, pour l'ordre lexicographique, que chacun de ses conjugués propres. Donc $l = x_0x_1x_0x_1^2$ est un mot de Lyndon au sens de cette deuxième définition. En particulier, les lettres sont des mots de Lyndon.

L'ensemble des mots de Lyndon sur X sera noté $\mathcal{L}yn(X)$.

Exemple 4. Pour $X = \{x_0, x_1\}$ muni de l'ordre $x_0 < x_1$, les mots de Lyndon de longueur inférieure ou égale à 5 sont (donnés dans l'ordre lexicographique croissant)

$$x_0, x_0^4x_1, x_0^3x_1, x_0^3x_1^2, x_0^2x_1, x_0^2x_1x_0x_1, x_0^2x_1^2, x_0^2x_1^3, x_0x_1, x_0x_1x_0x_1^2, x_0x_1^2, x_0x_1^3, x_0x_1^4, x_1.$$

Pour $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}_{\geqslant 0}\}$, muni de l'ordre $y_i < y_j$ si $i > j$, les mots de Lyndon de poids inférieur ou égal à 5 sont (donnés dans l'ordre lexicographique croissant)

$$y_5, y_4, y_4y_1, y_3, y_3y_2, y_3y_1, y_3y_1^2, y_2, y_2^2y_1, y_2y_1, y_2y_1^2, y_2y_1^3, y_1.$$

Signalons enfin deux décompositions fondamentales relatives aux mots de Lyndon [Reu93, Mre89, Mela91].

Proposition 1. [*Reu93*, *Mre89*, *Mela91*] *Si l_1 et l_2 sont deux mots de Lyndon, alors l_1l_2 est un mot de Lyndon si et seulement si $l_1 < l_2$ (pour l'ordre lexicographique).*

Proposition 2. [*Reu93*, *Mre89*, *Mela91*] *Soient $w \in \mathcal{L}yn(X)$ et soit m son plus long facteur droit propre dans $\mathcal{L}yn(X)$. Si $w = lm$, alors l est aussi un mot de Lyndon et $l < lm < m$. Le couple $\sigma(w) = (l, m)$ est appelé factorisation standard de w avec $|w| \geqslant 2$.*

Lemme 1. *Soient $w \in \mathcal{L}yn(X)$ (avec $|w| \geqslant 2$) et $\sigma(w) = (l, m)$ sa factorisation standard, et soit $n \in \mathcal{L}yn(X)$ un mot de Lyndon vérifiant $w < n$. Alors le couple (w, n) est la factorisation standard du mot wn si et seulement si $n \leqslant m$.*

Exemple 5. Avec l'ordre $x_0 < x_1$ sur l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, le mot $x_0^2x_1x_0x_1^2 \in \mathcal{L}yn(X)$ se décompose sous la forme d'un produit de deux mots de Lyndon de deux façons : $x_0^2x_1.x_0x_1^2$ et $x_0.x_0x_1x_0x_1^2$, mais, avec la condition sur la longueur de m, seule cette dernière expression correspond à la factorisation standard.

2.3 Listes standard et théorème de Lyndon

Définition 1. *Soient $L = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$ une liste de mots de Lyndon ($u_i \in \mathcal{L}yn(X)$) et $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. On dira que L est standard si et seulement si elle vérifie la propriété suivante :*

$$(S) \begin{cases} u_i \text{ est une lettre,} \\ \text{ou} \\ \text{si } \sigma(u_i) = (x, y), \text{ alors } u_j \leqslant y \text{ pour tout } i \leqslant j. \end{cases}$$

Si tous les éléments de L sont des lettres, alors L vérifie (S).
Si L est décroissante (c'est-à-dire $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_n$), alors elle vérifie (S).

Définition 2. *Soit $L = [u_1, u_2, \cdots, u_n]$ une liste de mots de Lyndon ($u_i \in \mathcal{L}yn(X)$). On appelle inversion tout couple (u_i, u_{i+1}) tel que $u_i < u_{i+1}$.*

À partir de ces deux définitions, nous pouvons écrire le théorème suivant :

Théorème 1. [Reu93, Mre89, Mela91] *Tout mot $w \in X^+$ se décompose de manière unique comme produit décroissant de mots de Lyndon :*

$$w = \ell_1 \ell_2 \cdots \ell_n, \tag{2.3}$$

où $\ell_1 \geqslant \ell_2 \geqslant \cdots \geqslant \ell_n$ et $\ell_i \in \mathcal{L}yn(X)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

On peut écrire aussi (2.3) page 25 de la façon suivante : Tout mot $w \in X^+$ peut s'écrire, de manière unique, comme un produit décroissant de mots de Lyndon,

$$w = \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(X),\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \tag{2.4}$$

Exemple 6. $x_1^2 x_0 x_1 x_0 x_1^2 x_0^2 x_1 x_0^3 = (x_1)^2 . x_0 x_1 x_0 x_1^2 . x_0^2 x_1 . (x_0)^3$,
avec $x_1 > x_0 x_1 x_0 x_1^2 > x_0^2 x_1 > x_0$.

2.4 Polynômes et séries en variables non commutatives

Dans cette partie, nous allons définir les notions de polynôme et de série en variables non commutatives. Ensuite, nous considérons un ensemble d'opérations sur ces objets. Ces opérations permettent de définir différentes structures sur l'ensemble des polynômes mais aussi sur l'ensemble des séries formelles.

Soit $\mathbb{K}$ un anneau commutatif et unitaire. On connaît bien les polynômes (commutatifs) classiques. Si l'on supprime la "commutativité", on obtiendra les polynômes non-commutatifs. On commence par quelques définitions.

Définition 3. *Un polynôme non commutatif d'alphabet X à coefficient dans $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}-$combinaison linéaire finie de mots de X^*. Alors, un polynôme non commutatif P d'alphabet X à coefficient dans $\mathbb{K}$ s'écrit*

$$P = \sum_{w \in X^*} \langle P \mid w \rangle w, \tag{2.5}$$

où $\langle P \mid w \rangle$ désigne le coefficient du mot $w \in X^*$. Sans ambiguïté, on l'appelle aussi un polynôme.

Chaque polynôme est donc une somme finie car il n'y a qu'un nombre fini de coefficients non nuls dans cette notation. On note $\mathbb{K}\langle X \rangle$ l'ensemble de tous les polynômes non commutatifs (d'alphabet X à coefficient dans $\mathbb{K}$).
Par ailleurs, on peut définir la série formelle non commutative par analogie. Autrement

dit, il s'agit d'une somme infinie, en utilisant la même écriture de P ; l'ensemble des séries formelles est noté $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$.

On appelle support du polynôme P, noté $supp(P)$, l'ensemble des mots $w \in X^*$ dont le coefficient est non nul :

$$supp(P) = \{w \in X^* \mid \langle P \mid w\rangle \neq 0\}. \tag{2.6}$$

On appelle degré du polynôme P, noté $deg(P)$, la longueur du plus long mot de $supp(P)$:

$$deg(P) = \begin{cases} max\{\mid w \mid, w \in supp(P)\} \text{ si } P \neq 0 \\ -\infty \text{ si } P = 0 \end{cases}$$

Ainsi, le degré d'un polynôme réduit à une constante non nulle est 0.

Définition 4. *Soient* $P = \sum_{u \in X*} \langle P \mid u\rangle u$ *et* $Q = \sum_{v \in X*} \langle Q \mid v\rangle v$ *deux polynômes non commutatifs, les coefficients de* $PQ = \sum_{w \in X*} \langle PQ \mid w\rangle w$ *sont définis par*

$$\langle PQ \mid w\rangle = \sum_{w=uv \in X*} \langle P \mid u\rangle\langle Q \mid v\rangle. \tag{2.7}$$

Proposition 3. *Muni de la multiplication précédente,* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *est une algèbre avec unité ;* $\mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ *aussi.*

Exemple 7. Soit $X = \{a, b\}$. Soient les polynômes $P_1 = 2aba + aab - 3abb$, $P_2 = -aba + 5abb$ et $Q = ab + ba$. Alors

(i) $P_1 + P_2 = aba + aab + 2abb.$

(ii) $P_1.Q = 2aba.ab + 2aba.ba + aab.ab + aab.ba - 3abb.ab - 3abb.ba$
$= 2abaab + 2ababa + aabab + aabba - 3abbab - 3abbba.$

(iii) $-3P_1 = -6aba - 3aab + 9abb.$

2.5 Algèbre de Hopf

La notion d'algèbre de Hopf apparaît pour la première fois en topologie algébrique dans les travaux d'Ehresmann.
La notion d'algèbre de Hopf permet de donner une version algébrique des opérations

combinatoires de concaténation et déconcaténation et, plus généralement, de composition et de décomposition.
Avant de définir ce qu'est une algèbre de Hopf, nous aurons besoin de quelques notions préliminaires.

Définition 5. *Soit $\mathbb{K}$ un corps. Une $\mathbb{K}-$cogèbre associative avec unité est un $\mathbb{K}-$espace vectoriel C muni de deux applications $\mathbb{K}-$linéaires*

$$\Delta : C \longrightarrow C \otimes C \tag{2.8}$$

et

$$e : C \longrightarrow \mathbb{K} \tag{2.9}$$

telles que

$$(Id_C \otimes \Delta) \circ \Delta = (\Delta \otimes Id_C) \circ \Delta \tag{2.10}$$

et

$$(Id_C \otimes e) \circ \Delta = Id_C = (e \otimes Id_C) \circ \Delta. \tag{2.11}$$

L'application Δ est appelée *coproduit*. C'est la notion duale de celle de produit dans une algèbre. Le coproduit d'un élément de C est une combinaison linéaire de produits tensoriels de deux éléments de C.
De même, la propriété (2.10) page 27, appelée *coassociativité*, est duale de la propriété d'associativité dans une algèbre, et (2.11) page 27 la *counité*. Si l'on voit l'unité d'une $\mathbb{K}-$algèbre $\mathcal{A}$ comme une application de $\mathbb{K}$ dans $\mathcal{A}$, alors la notion de counité d'une cogèbre est duale de celle d'unité dans une algèbre.

Définition 6. *Soit $\mathbb{K}$ un corps, $\mathcal{B}$ un $\mathbb{K}-$espace vectoriel muni d'une structure d'algèbre associative unitaire $(\mathcal{B}, \mu, \eta)$ et d'une structure de cogèbre $(\mathcal{B}, \Delta, e)$. On dira alors que $\mathcal{B}$ est une bigèbre si la structure d'algèbre et la structure de cogèbre sont compatibles, au sens où*

$$\Delta \quad \textit{et} \quad e \quad \textit{sont des morphismes d'algèbre.} \tag{2.12}$$

$$\mu \quad \textit{et} \quad \eta \quad \textit{sont des morphismes de cogèbre.} \tag{2.13}$$

(l'application $\mu : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ est la multiplication, et l'application $\eta : \mathbb{K} \longrightarrow \mathcal{B}$ est l'unité).

Remarque 1. Les conditions (2.12) page 27 et (2.13) page 27 sont équivalentes.

Nous sommes maintenant en mesure de définir ce qu'est une algèbre de Hopf.

Définition 7. *Soit $(\mathcal{H}, \mu, \eta, \Delta, e)$ une bigèbre. On définit alors la convolution $\star$ par*

$$f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta, \tag{2.14}$$

où $f : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ et $g : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ sont deux applications linéaires. Si l'identité est inversible pour la convolution, on dit que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf et on appelle antipode l'inverse S de l'identité par la convolution.

L'antipode S est un antimorphisme d'algèbres

$$S(xy) = S(y)S(x). \tag{2.15}$$

De plus, il vérifie par définition

$$Id_{\mathcal{H}} \star S = S \star Id_{\mathcal{H}} = \eta \circ e, \tag{2.16}$$

c'est-à-dire

$$\mu \circ (Id_{\mathcal{H}} \otimes S) \circ \Delta = \mu(S \otimes Id_{\mathcal{H}}) \circ \Delta = \eta \circ e. \tag{2.17}$$

Définition 8. *Soit $\mathcal{H} = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}_n$ une algèbre de Hopf graduée en dimensions finies. On munit alors le dual gradué $\mathcal{H}' = \bigoplus_{n \geqslant 0} \mathcal{H}'_n$ de $\mathcal{H}$ d'une structure d'algèbre de Hopf par*

$$\langle fg \mid x \rangle = \langle f \otimes g \mid \Delta_{\mathcal{H}}(x) \rangle \tag{2.18}$$

et

$$\langle \Delta_{\mathcal{H}'}(f) \mid x \otimes y \rangle = \langle f \mid xy \rangle \tag{2.19}$$

où pour tout $f \in \mathcal{H}'$ et pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\langle f \mid x \rangle$ désigne l'action de f sur x, et où on a posé

$$\langle f \otimes g \mid x \otimes y \rangle = \langle f \mid x \rangle \langle g \mid y \rangle. \tag{2.20}$$

Lorsque $\mathcal{H}'$ est isomorphe à $\mathcal{H}$, on dit que $\mathcal{H}$ est auto-duale. Ceci revient à définir un crochet de dualité qui échange le produit et coproduit par $\langle x \mid y \rangle = \langle \sigma(x) \mid y \rangle$ où σ est l'isomorphisme $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}'$ avec $\mathcal{H}' = (\mathcal{H}^{gr}, \star, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{\mathcal{H}'}, \delta_1)$.

Soit maintenant $(B_x)_{x \in X}$ une base de $\mathcal{H}$ indexée par une certaine famille X d'objets. On définit alors la base duale $(A_y)_{y \in X}$ de $(B_x)_{x \in X}$ comme étant la base de $\mathcal{H}'$ qui vérifie

$$\langle A_x \mid B_y \rangle = \delta_{xy}, \tag{2.21}$$

pour tout $x \in X$ et pour tout $y \in X$.

Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf. On dira que $\mathcal{H}$ est *cocommutative* si pour tout $x \in \mathcal{H}$, $\Delta_{\mathcal{H}}(x)$ est invariant par $x \otimes y \longmapsto y \otimes x$. On dira que $\mathcal{H}$ est une algèbre de Hopf *graduée* si elle est graduée en temps qu'algèbre associative et que pour tout $x \in \mathcal{H}$ homogène, chaque terme $x_1 \otimes x_2$ dans la décomposition de $\Delta_{\mathcal{H}}(x)$ en somme de produits tensoriels est tel que x_1 et x_2 sont homogènes et vérifient $deg(x_1) + deg(x_2) = deg(x)$. On dira enfin que $\mathcal{H}$ est *connexe* si elle est graduée et que sa composante homogène de degré 0 est de dimension 1.
Un élément x d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ est dit de *type groupe* si il vérifie $\Delta_{\mathcal{H}}(x) = x \otimes x$, et *primitif* si il vérifie $\Delta_{\mathcal{H}}(x) = x \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes x$. On peut munir l'ensemble des éléments primitifs d'une algèbre de Hopf d'une structure d'algèbre de Lie en prenant comme crochet le commutateur.

Remarque 2. Soit $C = (V, \Delta, \varepsilon)$ une cogèbre associative avec unité et $\mathcal{A} = (W, \mu, \mathbb{1})$ une algèbre associative avec unité. On définit plus généralement dans $\mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, W)$ la convolution $\star$ par $f \star g = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta$.

On montre que $(\mathcal{H}om_{\mathbb{K}}(V, W), \star, \mathbb{1}_{\varepsilon})$ est une algèbre associative avec unité.
Le cas utilisé dans la définition 7 page 28 correspond à $V = W = \mathcal{H}$. Nous verrons dans la page 40 le cas où $V = \mathcal{U}(\mathcal{G})$ et $W = \mathbb{K}$.

2.6 Algèbre des séries de Lie

Considérons un anneau commutatif et unitaire $\mathbb{K}$.

L'ensemble des monômes de Lie est défini par récurrence : les lettres de l'alphabet X sont des monômes de Lie et le crochet de Lie $[x_0, x_1] = x_0 x_1 - x_1 x_0$ de deux monômes de Lie x_0 et x_1 est un monôme de Lie. Un polynôme de Lie est une combinaison $\mathbb{K}-$linéaire de monômes de Lie. L'ensemble des polynômes de Lie forme alors une algèbre de Lie, notée $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X\rangle$, l'algèbre de Lie libre sur X. Une série est une série de Lie si et seulement si toutes ses composantes homogènes restreintes aux sous-alphabets finis sont des polynômes de Lie. L'ensemble des séries de Lie est noté $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle\langle X\rangle\rangle$.

Exemple 8. Soit $X = \{x_0, x_1\}$. Les éléments $[x_0, x_1] = x_0 x_1 - x_1 x_0$ et
$[x_1, [x_0, x_1]] = [x_1, x_0 x_1 - x_1 x_0] = 2x_1 x_0 x_1 - x_1^2 x_0 - x_0 x_1^2$ sont des monômes de Lie.
Le polynôme $[x_0, [x_0, x_1]] + 3[[x_1, x_1], x_0]$ est un polynôme homogène de Lie de degré 3.

Définition 9. *Soit Δ le morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ (muni du produit de concaténation) dans $\mathbb{K}\langle X\rangle \otimes \mathbb{K}\langle X\rangle$ défini pour une lettre $x \in X$ par $\Delta(x) = x \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes x$.*
(i) Pour une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$, on définit[1] $\Delta(S) = \sum_{w \in X^*} \langle S \mid w\rangle \Delta(w)$.

1. On montre facilement que la famille $(\langle S \mid w\rangle \Delta(w))_{w \in X^*}$ est sommable dans $\mathbb{K}\langle\langle X^* \otimes X^*\rangle\rangle$

(ii) Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite primitive si elle vérifie $\Delta(S) = S \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes S$.
(iii) Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est dite de type groupe si elle vérifie $\Delta(S) = S \otimes S$ et $\langle S \mid 1_{X^*}\rangle = 0$.
(iv) Une série $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ vérifie le critère de Friedrichs si pour tout couple $(w_1, w_2) \in (X^*)^2$, $\langle S \mid w_1\rangle\langle S \mid w_2\rangle = \langle S \mid w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2\rangle$

Théorème 2. [Reu93, Ous01, Jop00] *Soit $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ avec $\langle S \mid 1_{X^*}\rangle = 0$.*
(i) Les assertions suivantes sont équivalentes :
a) $S \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle\langle X\rangle\rangle$ est primitive,
b) $\exp(S) = S \otimes S$,
c) $\exp(S)$ vérifie le critère de Friedrichs.

(ii) $S \in \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$ est une exponentielle de Lie si et seulement s'il existe une série de Lie L telle que $S = \exp(L)$.

On note C^+ le noyau de e et on se donne un élément u de C tel que

$$\Delta(u) = u \otimes u \qquad et \qquad e(u) = 1. \tag{2.22}$$

Le $\mathbb{K}-$module C est somme directe de C^+ et du sous-module $\mathbb{K}.u$, qui est libre de base u ; on note $\pi_u : C \longrightarrow C^+$ et $\eta_u : C \longrightarrow \mathbb{K}.u$ les projecteurs associés à cette décomposition. On a

$$\pi_u(x) = x - e(x).u \qquad , \qquad \eta_u(x) = e(x).u. \tag{2.23}$$

Définition 10. *On dit qu'un élément $x \in C$ est $u-$primitif si l'on a*

$$\Delta(x) = x \otimes u + u \otimes x. \tag{2.24}$$

Définition 11. *Soit C une cogèbre.*
Les éléments $u-$primitifs de C forment un sous-module de C, noté $Prim_u(C)$.

2.7 Structure des algèbres de Hopf commutatives ou cocommutatives

Dans cette partie, on rappelle certains liens existant entre les algèbres de Lie et les algèbres de Hopf. On commence par définir ce qu'est une algèbre enveloppante.

Définition 12. *Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie .*
L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ est définie comme le quotient $\mathcal{U}(\mathcal{G}) = \mathcal{T}/\mathcal{I}$ de l'algèbre tensorielle

$$\mathcal{T} = \mathcal{G}^0 \otimes \mathcal{G}^1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}^n \otimes \cdots \tag{2.25}$$

avec

$$\mathcal{G}^0 = \mathbb{K}, \qquad \mathcal{G}^n = \underbrace{\mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \otimes \cdots \otimes \mathcal{G}}_{n \text{ fois}} \tag{2.26}$$

par l'idéal bilatère $\mathcal{I}$ engendré par les éléments de la forme :

$$x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \text{ pour tous } x, y \in \mathcal{G}.$$

On note $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ cette algèbre enveloppante.

Théorème 3. [*Reu93*, *Ous01*, *Jop00*] *L'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X\rangle$ s'identifie à l'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

D'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt [Bir37, Poi00, Wit37], toute algèbre de Lie se plonge de manière universelle dans une algèbre associative (appelée son algèbre enveloppante). Cette algèbre enveloppante est naturellement munie d'une structure d'algèbre de Hopf cocommutative pour le coproduit défini par

$$\Delta(x) = x \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes x, \tag{2.27}$$

pour tout x dans l'algèbre de Lie. Réciproquement, dans une algèbre de Hopf cocommutative les éléments x satisfaisant (2.27) page 31 s'appelle les éléments primitifs. Ils forment une algèbre de Lie, et l'algèbre de Hopf est isomorphe à l'algèbre enveloppante de cette algèbre de Lie. La version duale de ce résultat énonce qu'une algèbre de Hopf commutative graduée connexe est isomorphe, en tant qu'algèbre, à une algèbre polynomiale.

Proposition 4. [*Dmt14*, *Wmo65*] *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf.*
Alors $Prim(\mathcal{H})$ est une algèbre de Lie.

On peut, alors considérer le diagramme suivant : Soit $\mathcal{B}$ une bigèbre,

$$\begin{tikzcd}
Prim(\mathcal{B}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F"] & \mathcal{B} \\
\mathcal{U}(Prim(\mathcal{B})) \arrow[ur, "\lambda_{\mathcal{B}}"'] &
\end{tikzcd}$$

Puisque $\alpha = \lambda_{\mathcal{B}} \circ F$, le diagramme ci-dessu est commutatif et $\lambda_{\mathcal{B}} : \mathcal{U}(Prim(\mathcal{B})) \longrightarrow \mathcal{B}$ est un isomorphisme de bigèbre.

Théorème 4. *(Cartier-Quillen-Milnor-Moore)* [Bam13, Mih13, Min13, Dmt14].
Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf cocommutative, graduée et connexe sur un corps de caractéristique 0. Alors, $\mathcal{H}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf graduée $\mathcal{U}(Prim(\mathcal{H}))$ par $\lambda_{\mathcal{B}}$.

Nous pouvons à présent donner quelques exemples d'algèbres de Hopf.

2.7.1 Cas de l'algèbre de shuffle

Le produit de shuffle $\sqcup\!\sqcup$ est défini sur les mots par

$$sh \ : \begin{cases} \mathbb{K}\langle X\rangle \otimes \mathbb{K}\langle X\rangle & \to \quad \mathbb{K}\langle X\rangle \\ \quad w_1 \otimes w_2 & \mapsto \quad w_1 \sqcup\!\sqcup\, w_2, \end{cases} \tag{2.28}$$

et étendu par linéarité aux polynômes. Alors, l'application linéaire

$$\mathbb{1}_{X^*} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\langle X\rangle \quad , \quad k \longmapsto \mathbb{1}_{X^*}(k) = k.1_{X^*} \tag{2.29}$$

est un élément unité. Donc $(\mathbb{K}\langle X\rangle, sh, \mathbb{1}_{X^*})$ constitue une $\mathbb{K}-$algèbre associative et graduée. Cette algèbre est connue comme algèbre de shuffle (algèbre de mélange).
Nous définissons un coproduit, pour le produit $\sqcup\!\sqcup$, $\Delta_{conc} : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle X\rangle \otimes \mathbb{K}\langle X\rangle$ par l'opération classique de *déconcaténation*

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{uv=w\in X^*} u \otimes v. \tag{2.30}$$

$e : P \in \mathbb{K}\langle X\rangle \mapsto e(P) = \langle P \mid 1_{X^*}\rangle \in \mathbb{K}$ apparaît comme un élément unité pour le coproduit Δ_{conc}, et donc $(\mathbb{K}\langle X\rangle, \Delta_{conc}, e)$ est une cogèbre (non cocommutative).

Pour tout mot $w = x_1x_2\cdots x_k \in X^*$ on note la fonction miroir $\tilde{w} = x_k\cdots x_2x_1 \in X^*$. Dans le cas du produit de shuffle $\sqcup\!\sqcup$, l'antipode se calcul récursivement par :

$$a_{\sqcup\!\sqcup}(w) = \begin{cases} \qquad 1_{X^*} & \text{si} \qquad w = 1_{X^*} \ ; \\ -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sqcup\!\sqcup}(x_1\cdots x_k) \sqcup\!\sqcup\, x_{k+1}\cdots x_n & \text{si} \quad w = x_1x_2\cdots x_n \in X^+ \end{cases} \tag{2.31}$$

On peut illustrer la formule récurrente de l'antipode sur un exemple :
$a_{\sqcup\!\sqcup}(1_{X^*}) = 1_{X^*}$.
$a_{\sqcup\!\sqcup}(x_1) = -x_1$.
$a_{\sqcup\!\sqcup}(x_1x_2) = -(-x_1 \sqcup\!\sqcup\, x_2 + x_1x_2) = x_2x_1$.
$a_{\sqcup\!\sqcup}(x_1x_2x_3) = -(x_1 \sqcup\!\sqcup\, x_3x_2 - x_1x_2 \sqcup\!\sqcup\, x_3 + x_1x_2x_3) = -x_3x_2x_1$.

En effet, l'algèbre de Hopf dite de décomposition est la bigèbre $(\mathbb{K}\langle X\rangle, conc, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, e)$ munie de l'antipode $a_{\sqcup\!\sqcup}$ précédemment définie, et où le coproduit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}$ est défini par transposition du produit de shuffle $\sqcup\!\sqcup$:

$$\forall (P, P_1, P_2) \in (\mathbb{K}\langle X\rangle)^3 \quad , \quad \langle \Delta_{\sqcup\!\sqcup}(P) \mid P_1 \otimes P_2\rangle = \langle P \mid P_1 \sqcup\!\sqcup P_2\rangle. \tag{2.32}$$

Cette algèbre est alors non commutative, mais cocommutative.
En fait, les algèbres $\mathcal{H}_{\sqcup\!\sqcup} = (\mathbb{K}\langle X\rangle, conc, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{\sqcup\!\sqcup}, e, a_{\sqcup\!\sqcup})$ et $\mathcal{H}_{\sqcup\!\sqcup}^{\vee} = (\mathbb{K}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, \mathbb{1}_{X^*}, \Delta_{conc}, e, a_{\sqcup\!\sqcup})$ sont des algèbres de Hopf duales l'une de l'autre. Et, de plus, d'après le théorème 4 page 32, $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, à l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle X\rangle$.

2.7.2 Cas de l'algèbre de stuffle

Soit $Y = \{y_i\}_{i\geqslant 1}$ un alphabet totalement ordonné par $>$: $y_1 > y_2 > \cdots > \cdots$.
Le produit de stuffle $⧢$ est défini sur les mots par

$$st \ : \begin{cases} \mathbb{K}\langle X\rangle \otimes \mathbb{K}\langle X\rangle & \rightarrow \quad \mathbb{K}\langle X\rangle \\ \quad w_1 \otimes w_2 & \mapsto \quad w_1 ⧢ w_2, \end{cases} \tag{2.33}$$

et étendu par linéarité aux polynômes. Alors, l'application linéaire

$$\mathbb{1}_{Y^*} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y\rangle \quad , \quad k \longrightarrow \mathbb{1}_{X^*}(k) = k.1_{Y^*} \tag{2.34}$$

constitue un élément unité. Donc $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, st, \mathbb{1}_{Y^*})$ constitue une $\mathbb{K}-$algèbre associative et graduée. Cette algèbre est connue comme algèbre de stuffle (algèbre de quasi-mélange).

Nous définissons un coproduit, pour le produit $⧢$, $\Delta_{conc} : \mathbb{K}\langle Y\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle$ par l'opération classique de *déconcaténation* (duale de la concaténation)

$$\Delta_{conc}(w) = \sum_{\substack{(uv)=(w)\\ w\in Y^*}} u \otimes v. \tag{2.35}$$

$\mathbf{e} : P \in \mathbb{K}\langle Y\rangle \mapsto \mathbf{e}(P) = \langle P \mid 1_{X^*}\rangle \in \mathbb{K}$ apparaît comme un élément unité pour le coproduit Δ_{conc}, et donc $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, \Delta_{conc}, \mathbf{e})$ est une cogèbre (non cocommutative).

Dans le cas du produit de stuffle $⧢$, l'antipode se calcule récursivement par [Bam13, Mih13, Min13, Dmt14]

$$a_{⧢}(y_s) = \sum_{n\geqslant 1} (-1)^n \sum_{i_1+\cdots+i_n=s} y_{i_1}\cdots y_{i_n}. \tag{2.36}$$

On peut illustrer la formule récurrente de l'antipode sur un exemple :
$a_{\uplus}(y_1) = -y_1$.
$a_{\uplus}(y_2) = -y_2 + y_1^2$.
$a_{\uplus}(y_3) = -y_3 + y_1y_2 + y_2y_1 + y_1^3$.

En effet, l'algèbre de Hopf dite de décomposition est la bigèbre $(\mathbb{K}\langle Y\rangle, conc, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\uplus}, \mathbf{e})$ munie de l'antipode $a_{\uplus}$ précédemment définie, et où le coproduit $\Delta_{\uplus}$ est défini par transposition du produit de stuffle $\uplus$:

$$\forall (P, P_1, P_2) \in (\mathbb{K}\langle Y\rangle)^3 \quad , \quad \langle \Delta_{\uplus}(P) \mid P_1 \otimes P_2\rangle = \langle P \mid P_1 \uplus P_2\rangle. \tag{2.37}$$

Cette algèbre est alors non commutative, mais cocommutative. En fait, les algèbres $\mathcal{H}_{\uplus} = (\mathbb{K}\langle Y\rangle, conc, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{\uplus}, \mathbf{e}, a_{\uplus})$ et $\mathcal{H}_{\uplus}^{\vee} = (\mathbb{K}\langle Y\rangle, \uplus, \mathbb{1}_{Y^*}, \Delta_{conc}, \mathbf{e}, a_{\uplus})$ sont des algèbres de Hopf duales l'une de l'autre. Et, de plus, d'après le théorème 4 page 32, $\mathbb{K}\langle Y\rangle$ est isomorphe, comme algèbre de Hopf cocommutative graduée connexe, $\grave{a}$ l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie $\mathcal{L}ie_{\mathbb{K}}\langle Y\rangle$.

Par conséquent, on peut écrire le lemme suivant :

Lemme 2. *Soit α un morphisme d'algèbre tel que*

$$\alpha \ : \begin{cases} \mathbb{K}\langle Y\rangle & \rightarrow \qquad \mathbb{K}\langle Y\rangle \\ \quad w & \mapsto \quad w + \displaystyle\sum_{\substack{|u|>|w| \\ [u]=[w]}} \langle \alpha(w) \mid u\rangle u, \end{cases} \tag{2.38}$$

alors α est un isomorphisme.

Pour cela, on peut écrire le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}\langle Y\rangle \arrow[r, "\Delta_{\sqcup\!\sqcup}"] \arrow[d, "\alpha_1"'] & \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \arrow[d, "\alpha_1 \otimes \alpha_1"] \\ \mathbb{K}\langle Y\rangle \arrow[r, "\Delta_{\uplus}"'] & \mathbb{K}\langle Y\rangle \otimes \mathbb{K}\langle Y\rangle \end{tikzcd}$$

avec $\alpha_1(y_{i_1} \cdots y_{i_p}) = \pi_1(y_{i_1}) \cdots \pi_1(y_{i_p})$ (voir (3.51) page 51).

Remarque 3. La bijectivité de α tient au fait que la graduation par poids est en dimensions finies. Dans le cas de la dimension infinie, le résultat ne tient pas, comme le montre l'exemple, en une variable, de la substitution $x \mapsto x + x^2$. Dans ce cas les images sont toutes des polynômes pairs par rapport à la verticale $x = \frac{-1}{2}$ et cette substitution ne peut pas être bijective (par exemple $P(x) = x$ n'est pas dans l'image).

Chapitre 3

Poincaré-Birkhoff-Witt, Dualité, Factorisation de Schützenberger

Résumé : Dans ce chapitre nous explorons des faits généraux sur la dualité dans le contexte du Théorème de factorisations de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) et de Schützenberger. Nous rappelons des résultats connus dans
[Reu93, Mre89, Mela91, Bam13, Mih13, Min13] et traitons des exemples qui seront utiles dans les chapitres 4, 5 et 6.

3.1 Introduction

Soient $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ une base d'une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ sa famille duale de l'algèbre duale $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ [1]. La factorisation de Schützenberger s'écrit

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P_\alpha = \prod_{i\in I}^{\searrow} \exp(S_{e_i} \otimes P_{e_i}). \tag{3.1}$$

En particulier, C. Reutenauer a signalé que cette relation est valable dans toute algèbre enveloppante [Reu93, Mre89, Mela91].
Cette factorisation compte plusieurs applications, parmi lesquelles nous trouvons le domaine des équations différentielles non linéaires, dans lequel elle apparaît en tant que factorisation d'opérateurs de transport, et le domaine combinatoire, plus proche de cette thèse.
Elle est une conséquence des propriétés des deux bases en dualité. Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une

1. Cette famille formée par des formes linéaires coordonnées de $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est libre et engendre un espace stable par la convolution car $S_\alpha \star S_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} S_{\alpha+\beta}$

base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture de la factorisation. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires relatifs à l'algèbre de shuffle, à l'algèbre de stuffle et à l'algèbre de $q-$stuffle.

3.2 Résultats connus

Considérons un anneau commutatif et unitaire $\mathbb{K}$ et I un ensemble ordonné par $<$.

Soient $\mathbb{K}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre et $\mathcal{G}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie admettant une base linéaire ordonnée $[(B_{e_i})_{i\in I};(I,<)]$ (donc, $\mathcal{G}$ est libre en tant que $\mathbb{K}$-module).

3.2.1 Notations - Définitions

Notons $\mathbb{N}^{(I)}$ l'ensemble des fonctions à support fini de I dans $\mathbb{N}$ (multiindices). C'est un monoïde (le monoïde commutatif librement engendré par I) pour la loi $+$ définie par

$$(\alpha+\beta)_i = \alpha_i + \beta_i \quad , \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{N}^{(I)}, \tag{3.2}$$

admettant la fonction nulle pour l'élément neutre. De plus, si $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, nous définissons $\alpha!$ par

$$\alpha! = \prod_{i\in \mathrm{supp}(\alpha)} \alpha_i!. \tag{3.3}$$

La base canonique[2] de $\mathbb{N}^{(I)}$ est donnée par les fonctions s'annulant sur $I\backslash\{i_0\}$ et prenant la valeur 1 en i_0 ; ces fonctions sont notées e_{i_0} : $e_{i_0}(i) = \delta_{i\,i_0}$.

Maintenant, si $\mathcal{A}$ est une algèbre, $Y = (y_{e_i})_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{A}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, on pose

$$Y'_\alpha := y_{e_{i_1}}^{\alpha_1} y_{e_{i_2}}^{\alpha_2} \cdots y_{e_{i_k}}^{\alpha_k}, \tag{3.4}$$

pour tout sous-ensemble $J = \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, $i_1 > i_2 > \cdots > i_k$, de I contenant le support de α (on montre facilement que la valeur de Y'_α est indépendante du choix de $J \supset \mathrm{supp}(\alpha)$ si l'algèbre possède une unité).
En particulier, $Y'_{e_i} = y_i$. Nous appellerons *éléments atomiques* d'une famille $(Y'_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ les éléments Y'_{e_i}, $i \in I$.

2. En fait, $\mathbb{N}^{(I)}$ n'est pas un espace vectoriel. La famille que nous définissons est celle des *générateurs libres*.

Dans ce qui suit, nous nous intéressons à des familles définies par dualité (voir définition 8 page 28) : Si l'on dispose d'une famille $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ et d'un produit scalaire $\langle . \mid . \rangle$, on peut définir une famille duale $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ par

$$\langle S_\alpha \mid B_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \qquad \textit{avec} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(I)} \tag{3.5}$$

Dans ce qui suit, les éléments B'_α, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus par l'application du procédé de Poincaré-Birkhoff-Witt [3] (théorème 5 page 39) et les B_α, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus par dualité (en particulier $B_{e_i} = B'_{e_i}$ et $B_{e_i} = B_i, i \in I$).

Dans le cas d'une algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ si $B = (B_{e_i})_{i\in I}$ est une base ordonnée de $\mathcal{G}$ alors $(B'_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est une base de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ (voir théorème 5 page 39). On montre facilement que $\Delta(B'_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \dfrac{\alpha!}{\beta!\gamma!} B'_\beta \otimes B'_\gamma$, il en résulte que si les S_α désignent la famille duale dans $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ donnée par $\langle S_\alpha \mid B'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, on a : $S_\alpha \star S_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} S_{\alpha+\beta}$.

3.2.2 Théorème de factorisation

Théorème 5. ***Poincaré-Birkhoff-Witt.*** *Les éléments B'_α, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, forment une base de l'algèbre enveloppante $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$.*

La base formée par les B'_α, pour $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, est appelée *base de Poincaré-Birkhoff-Witt* de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$.

Cette propriété de décomposition de chaque élément d'une base par rapport à son multiindice [4] nous intéresse particulièrement et justifie l'introduction de la définition suivante. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative commutative avec unité.

Définition 13. *Soit $\mathcal{L}$ une partie de $\mathcal{A}$. On appelle $\mathcal{L}$* base de transcendance *de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{K}$ si les $\mathcal{L}'_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L})}$ (voir (3.4) page 38), forment une base linéaire de $\mathcal{L}$ de $\mathcal{A}$.*

Nous pouvons donner une caractérisation générale des familles multiplicatives dans une $\mathbb{K}-$algèbre associative et commutative avec unité $\mathcal{A}$. Pour cela, donnons la définition suivante :

Définition 14. *Soit $\mathcal{L}$ une partie de $\mathcal{A}$. Alors la famille $(\mathcal{L}'_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\mathcal{L})}}$ forme une base de $\mathcal{A}$ si et seulement si $\mathcal{L}$ est une base de transcendance de $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{K}$.*

3. obtenus par un procédé décroissant

4. une base $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ obtenue par l'application du procédé de Poincaré-Birkhoff-Witt (théorème 5 page 39) satisfait la relation $B'_\alpha = \prod^{\searrow}_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)} B_{e_i}^{\alpha_i} = \prod^{\searrow}_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)} B_i^{\alpha_i}$.

Notons $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$ le dual de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ et considérons la famille $(S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt $(B'_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$, c'est-à-dire la famille des formes linéaires sur $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ définies par

$$\langle S_\alpha \mid B'_\beta\rangle = \delta_{\alpha\,\beta}, \qquad \forall(\alpha,\beta)\in(\mathbb{N}^{(I)})^2. \tag{3.6}$$

Supposons que $\langle S_0 \mid 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}\rangle = 1$ (S_0 désigne l'élément obtenu pour le multiindice identiquement nul) et que $\langle S_\alpha \mid 1_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}\rangle = 0$ pour tout α non identiquement nul. Nous pouvons alors établir le théorème suivant.

Théorème 6. [*Reu93*, *Mre89*, *Mela91*, *Mat12*]

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B'_\alpha = \prod_{i\in I}^{\searrow} \exp(S_{e_i}\otimes B_{e_i}). \tag{3.7}$$

La preuve de ce théorème repose, entre autres, sur la propriété suivante des éléments S_α :

$$S_\alpha \star S_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}\, S_{\alpha+\beta} \tag{3.8}$$

(qui montre que cette famille est multiplicative à *une constante près*) que l'on peut établir comme suit [5]

$$\begin{aligned}
S_\alpha \star S_\beta &= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \star S_\beta \mid B'_\gamma\rangle S_\gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \Delta(B'_\gamma)\rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
&= \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1!\,\gamma_2!}\, B'_{\gamma_1}\otimes B'_{\gamma_2}\rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
&= \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!}\, S_{\alpha+\beta}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Cette propriété permet d'établir, par récurrence, que $\dfrac{S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k}}{\alpha_k!} = S_{\alpha_k e_{i_k}}$ puis que

$$\frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1}\star\cdots\star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k}}{\alpha_1!\ldots\alpha_k!} = S_\alpha. \tag{3.10}$$

5. Nous employons ci-dessous la notation $\langle\cdot\mid\cdot\rangle^{\otimes 2}$; celle-ci correspond à la définition suivante : si V_1 et V_2 sont deux espaces en dualité avec, respectivement, W_1 et W_2 pour les produits scalaires $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_1$ et $\langle\cdot\mid\cdot\rangle_2$, alors (on montre que) $V_1\otimes V_2$ est en dualité avec $W_1\otimes W_2$ pour le produit scalaire $\langle\cdot\mid\cdot\rangle^{\otimes 2}$:
$\left\{\begin{array}{ccc} (V_1\otimes V_2)\times(W_1\otimes W_2) & \to & k \\ (v_1\otimes v_2, w_1\otimes w_2) & \mapsto & \langle v_1\mid w_1\rangle_1\langle v_2\mid w_2\rangle_2. \end{array}\right.$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I}^{\searrow} \exp(S_{e_i} \otimes B_{e_i}) &= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_k \\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k}} \frac{(S_{e_{i_1}} \otimes B_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \cdots (S_{e_{i_k}} \otimes B_{e_{i_k}})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_k \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k} \otimes (B_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \ldots (B_{e_{i_k}})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_k \\ \alpha_1,\ldots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \otimes B'_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B'_\alpha.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Remarque 4. [*Mat12*]

– Le produit (3.7) page 40 du membre de droite est donné avec $\star \otimes \mu_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ où $\mu_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}$ désigne le produit usuel de l'algèbre enveloppante et $\star$ le produit de convolution des formes linéaires de $\mathcal{U}^*(\mathcal{G})$.
  En fait, toute algèbre enveloppante est une algèbre de Hopf et possède donc une structure de bigèbre. Notons Δ le coproduit associé à la structure de bigèbre de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. C'est un homomorphisme d'algèbres défini par :

$$\Delta(g) = g \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes g \tag{3.12}$$

  pour $g \in \mathcal{G}$ (il satisfait donc

$$\Delta(PQ) = \Delta(P)\Delta(Q) \text{ pour tous } P,\, Q \in \mathcal{U}(\mathcal{G})) \tag{3.13}$$

  puis étendu en une famille de morphismes d'algèbres $\Delta^{(k)} : \mathcal{U}(\mathcal{G}) \to \mathcal{U}(\mathcal{G})^{\otimes k+1}$ tels que, $\forall v \in \mathcal{G}$,

$$\Delta^{(k)}(v) = v\otimes 1_{X^*}\otimes\cdots\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes v\otimes 1_{X^*}\otimes\cdots\otimes 1_{X^*} + \cdots + 1_{X^*}\otimes 1_{X^*}\otimes\cdots\otimes 1_{X^*}\otimes v. \tag{3.14}$$

  En fait,

$$\Delta = \Delta^{(1)} \tag{3.15a}$$

$$\Delta^{(k)}(P) = (\mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})} \otimes \Delta^{(k-1)})\Delta(P) = (\Delta^{(k-1)} \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})})\Delta(P),\ k \geqslant 2. \tag{3.15b}$$

  La convolution est en fait définie comme la loi duale de Δ :

$$\langle a \star b \mid v\rangle = \langle a \otimes b \mid \Delta(v)\rangle,\ \forall a,\, b \in \mathcal{U}^*(\mathcal{G}) \text{ et } \forall v \in \mathcal{U}(\mathcal{G}). \tag{3.16}$$

- Les deux membres de (3.7) page 40 forment une *résolution de l'identité* lorsque l'on considère le morphisme[6]

$$\Phi \ : V^* \otimes V \to \mathcal{E}nd^{finis}(V) \tag{3.17}$$

($\mathcal{E}nd^{finis}(V)$ désigne l'espace des endomorphismes de rang fini) qui associe à tout produit tensoriel $f \otimes v \in V^* \otimes V$ l'endomorphisme $\Phi(f \otimes v) \ : b \mapsto f(b) \cdot v$. Le morphisme Φ peut être étendu, par continuité, aux séries[7] :

$$\Phi\left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes B'_\alpha\right)(v) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha(v) B'_\alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{U}(\mathcal{G})}(v). \tag{3.18}$$

Nous pouvons, à partir de l'équation précédente (3.11) page 41, revenir sur la convergence du membre de droite de (3.7) page 40. En fait, c'est $\Phi(\sum_{k \geqslant 0} \sum_{\substack{i_1 \geqslant \cdots \geqslant i_k \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star \alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star \alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} \otimes B'_\alpha)$ qui définit ce produit et permet d'en assurer l'existence.

Lemme 3. [Mat12] *La famille* $\left(\Phi(S_{e_{i_1}}^{\star \alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star \alpha_k} \otimes B'_\alpha)\right)_\alpha$ *est sommable (c'est-à-dire que, pour tout vecteur* $v \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$*,* $\left|\mathrm{supp}_\alpha \left[\Phi\left(S_{e_{i_1}}^{\star \alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star \alpha_k} \otimes B'_\alpha\right)(v)\right]_\alpha\right| < \infty$*).*

Remarque 5. (i) $(I, <) \longrightarrow (\mathcal{L}yn(X), <)$ (attention, cependant : comme le cas de l'algèbre libre, on considère des produits décroissants de mots de Lyndon, alors que dans le cas général, on considère des produits croissants) ;
(ii) le produit de convolution est le produit de shuffle dans le cas de l'algèbre libre ;
(iii) les S_{e_i} correspondent aux S_ℓ ($\ell \in \mathcal{L}yn(X)$), les P_α aux éléments B_α.

3.3 Remarques sur la dualisation

Nous revenons dans cette section sur une construction qui sera utilisée à plusieurs reprises dans les paragraphes suivants, celle d'une base duale dans le cas de l'algèbre libre.

Commençons par rappeler la définition d'une algèbre M-graduée. Soit $\mathcal{A}$ une algèbre associative sur $\mathbb{K}$ et M un monoïde additif. On dit que $\mathcal{A}$ est M-graduée si elle se décompose, en tant qu'espace vectoriel, de la façon suivante :

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{A}_m \tag{3.19}$$

6. $V = \mathcal{U}(\mathcal{G})$.
7. $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha(B'_\beta) B'_\alpha = B'_\beta$ (un seul terme non nul dans la somme).

avec $\mathcal{A}_m\mathcal{A}_{m'} \subseteq \mathcal{A}_{m+m'}$ pour tous m, $m' \in M$. Les $\mathcal{A}_m$, $m \in M$, sont appelés *composantes homogènes* de $\mathcal{A}$. De plus, on dit que $\mathcal{A}$ est *graduée en dimension finie* si chacun des $\mathcal{A}_m$, $m \in M$, est un espace vectoriel de dimension finie.

L'algèbre libre peut être graduée de différentes façons qui utilisent chacune une fonction de poids $\phi \ : X^* \to M$, définie sur les lettres et étendue aux mots et engendrant les composantes homogènes suivantes :

$$\mathbb{K}\langle X\rangle_m = \text{span}\,\{w \in X^*,\, \phi(w) = m\}\,, \quad m \in M. \tag{3.20}$$

Un premier exemple de graduation est donnée par la longueur des mots : M est alors le monoïde $(\mathbb{N}, +)$ et la fonction de poids $\phi_1(w) = |w|$, $\forall w \in X^*$. Cette graduation n'est cependant pas satisfaisante car les composantes homogènes auxquelles elle donne naissance ($\mathbb{K}\langle X\rangle_n = \mathit{span}\,\{\text{ensemble des mots de longueur } n\}$) ne sont pas de dimension finie. En effet, dans le cas où l'alphabet est infini, il existe un nombre infini de mots de longueur donnée.

C'est pour cette raison que nous introduisons une seconde graduation : on considère alors le monoïde des multiindices $(\mathbb{N}^{(X)}, +)$ (monoïde des fonctions à support fini de X dans $\mathbb{N}$) et la fonction de poids est donnée par

$$\phi_2 \ : \begin{cases} X & \to \quad \mathbb{N}^{(X)} \\ x_i & \mapsto \quad e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots), \end{cases} \tag{3.21}$$

étendue comme morphisme de monoïdes aux mots de sorte que $\phi_2(w) = \text{multideg}(w)$ est le multidegré de w, c'est-à-dire le nombre d'occurrences de chaque lettre de l'alphabet considéré dans w. Par exemple, si $X = \{a, b, c\}$ et $w = abbcab$, $\text{multideg}(w) = (2, 3, 1)$.
Même dans le cas d'un alphabet infini, les composantes multihomogènes
$\mathbb{K}\langle X\rangle_\alpha = \mathit{span}\,\{\text{ ensemble des mots de multidegré } \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$, sont de dimension finie. On dit que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ est *graduée en dimension finie par la multihomogénéité*. C'est cette graduation que nous utiliserons dans les paragraphes suivants.
On appelle *famille multihomogène* de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ une famille $(B_w)_{w\in X^*}$ telle que $\forall w \in X^*$, $\text{multideg}(w) = \alpha$:

$$B_w \in (\mathbb{K}\langle X\rangle)_\alpha\,. \tag{3.22}$$

Il est toujours possible, lorsque l'on considère une base $(B_w)_{w\in X^*}$ de l'algèbre libre de construire une famille duale $(D_w)_{w\in X^*}$, définie par $\langle D_u \mid B_v\rangle = \delta_{uv}$, $\forall u, v \in X^*$. A priori, cette famille est une famille de séries (rappelons que $(\mathbb{K}\langle X\rangle)^* = \mathbb{K}\langle\langle X\rangle\rangle$), mais ici, ce sont des polynômes.

Cependant, lorsque la famille $(B_w)_{w\in X^*}$ est multihomogène et triangulaire, la famille duale est une famille de polynômes qui forment une base de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. On peut alors construire les D_w comme suit : pour chaque multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, on construit la matrice $M = (M_{u,v})_{u,v\in X^\alpha}$ des coefficients des B_w, $w \in X^\alpha$ sur les mots :

$$M_{u,v} = \langle B_u \mid v\rangle. \tag{3.23}$$

La matrice $N = (N_{u,v})_{u,v\in X^\alpha}$ des coefficients des D_w, $w \in X^\alpha$ sur les mots, est donnée par :

$$N_{u,v} = \langle D_u \mid v\rangle. \tag{3.24}$$

Il est facile de voir que la matrice M est inversible en tant que matrice de changement de bases : Si la base $(B_w)_{w\in X^*}$ est triangulaire par rapport aux mots, M l'est aussi.

Les matrices M et N sont triangulaires, inversibles et vérifient l'identité $N = ({}^tM)^{-1}$.

Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et de triangularité (à ceci près que la base duale d'une base triangulaire inférieure est triangulaire supérieure).

Exemple 9. Soient $X = \{a < b\}$ et $\alpha = (2, 2)$.
La matrice $M = (\langle B_u \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{r} \\ B_{a^2b^2} = \\ B_{abab} = \\ B_{ab^2a} = \\ B_{ba^2b} = \\ B_{baba} = \\ B_{b^2a^2} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{array} \tag{3.25}$$

et la matrice recherchée $N = (\langle D_u \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{r} \\ D_{a^2b^2} = \\ D_{abab} = \\ D_{ab^2a} = \\ D_{ba^2b} = \\ D_{baba} = \\ D_{b^2a^2} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{array} \tag{3.26}$$

En fait cela revient à dualiser chaque composante multihomogène qui, étant finie, sont même dimension que leur dual : $\langle D_u \mid B_v\rangle = \delta_{uv}$, $\forall u, v \in X^\alpha$.

Lemme 4. *Soient* $(S_i)_{i\in I}$ *une base dans* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *et* $(P_i)_{i\in I}$ *la famille duale telle que* $\langle S_i \mid P_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall (i,j)\in I^2$.
(i) Alors, si $(S_i)_{i\in I}$ *est multihomogène, il en est de même* $(P_i)_{i\in I}$ *qui est alors une base de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$.
(ii) Si $(S_i)_{i\in I}$ *est triangulaire inférieure par rapport aux mots, alors* $(P_i)_{i\in I}$ *est triangulaire supérieure.*

Un procédé analogue de Gram-Schmidt nous permet de construire récursivement les éléments P_i, $i\in I$. En effet, cette méthode permet de construire une famille en dualité avec une famille finie donnée. Pour travailler avec des familles finies, il suffit de tirer profit de la multihomogénéité des bases considérées. La construction est adaptée à notre situation (voir la proposition 19 page 86).

Lemme 5. *Soit* V_1 *et* V_2 *deux espaces en dualité pour le produit scalaire* $\langle . \mid .\rangle$ *vérifiant* $V_1 \subset V_2^*$ *et* $V_2\subset V_1^*$.
Suppossons qu'il existe un ensemble ordonné $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_m\}$ *et deux familles d'éléments* S_i *et* P_i, $i\in I$ *respectivement dans* V_1 *et* V_2 *telles que* $\langle S_i\mid P_j\rangle=\delta_{ij}$, $\forall(i,j)\in I^2$.
Alors il existe une unique famille $(T_i)_{i\in I}$ *d'éléments de* V_2 *telle que* $\langle S_i \mid T_j\rangle = \delta_{ij}$, $\forall (i,j)\in I^2$. *Les éléments* T_i, $i\in I$, *sont donnés par*

$$T_{i_{m-k}} = P_{i_{m-k}} - \sum_{j=1}^{k} \langle P_{i_{m-k}} \mid S_{i_{m-k+j}}\rangle T_{i_{m-k+j}}. \tag{3.27}$$

Définition 15. *Soient* $\alpha\in\mathbb{N}^{(X)}$ *et* $X^\alpha = a_1^{\alpha_1}\cdots a_n^{\alpha_n}$ *avec* $a_1<\cdots<a_n\in X$ *et* $n,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}$.
(i) On dira que le mot $w\in X^*$ *est multihomogène et de multidegré* $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ *sur l'alphabet* X *si :*

$$w\in X^\alpha, \tag{3.28}$$

c'est-à-dire $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ *est le nombre d'occurrences de chaque lettre de l'alphabet* X *considéré dans* $w\in X^*$ *(chaque lettre* $a_s\in X$ *apparaît* α_s *fois dans* w *pour* $1\leqslant s\leqslant n$*).*
(ii) On définit la classe de multihomogénéité de X^α *par :*

$$M(X^\alpha)=\{w\in X^*\mid w\in X^\alpha\}, \tag{3.29}$$

c'est-à-dire $M(X^\alpha)$ *est l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré* $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ *sur l'alphabet* X.

Remarque 6. Avec les notations précédentes :
(i) Le nombre de mots $w\in X^\alpha$ est $m=\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)!}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!}$.
(ii) $M(X^\alpha)=\{w_1<w_2<\cdots<w_{m-1}<w_m\}$ par rapport à l'ordre lexicographique.

Exemple 10. Soit $X = \{a < b < c\}$.
(i) Pour $X^\alpha = a^2b^2$ avec $\alpha = (2,2)$, on a : $M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$.

(ii) Pour $X^\alpha = abc$ avec $\alpha = (1,1,1)$, on a : $M(abc) = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$.

(iii) Pour $X^\alpha = ab^2c$ avec $\alpha = (1,2,1)$, on a :
$M(ab^2c) = \{ab^2c, abcb, acb^2, babc, bacb, b^2ac, b^2ca, bcab, bcba, cab^2, cbab, cb^2a\}$.

Définition 16. *Soit $Y = \{y_i, i \in \mathbb{N}\}$ un alphabet totalement ordonné par $>$: $y_1 > y_2 > \cdots > \cdots$. On définit l'ensemble de tous les mots de poids $[\alpha]$ sur l'alphabet Y par*

$$M(Y_{[\alpha]}) = \{w = y_{\alpha_1} y_{\alpha_2} \cdots y_{\alpha_n} \in Y^* \mid [w] = [\alpha]\}, \tag{3.30}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ et $w \in Y^*$ a pour poids $[w] = [\alpha] = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

Remarque 7. Avec les notations précédentes :
(i) Le nombre de mots $w \in M(Y_{[\alpha]})$ est $m = 2^{[\alpha]-1}$.
(ii) $M(Y_{[\alpha]}) = \{w_1 < w_2 < \cdots < w_{m-1} < w_m\}$ par rapport à l'ordre lexicographique.

Exemple 11. Soit $Y = \{y_1 > y_2 > y_3\}$.
(i) Pour $[\alpha] = 3$, on a : $M(Y_3) = \{y_3, y_2y_1, y_1y_2, y_1^3\}$.

(ii) Pour $[\alpha] = 4$, on a : $M(Y_4) = \{y_4, y_3y_1, y_2^2, y_2y_1^2, y_1y_3, y_1y_2y_1, y_1^2y_2, y_1^4\}$.

Nous allons donner des exemples suivants :

3.3.1 Exemple : cas de l'algèbre libre et de l'algèbre de shuffle

Dans cette partie, X désigne de nouveau un alphabet totalement ordonné par $<$; l'ensemble des mots de Lyndon sur X est noté $\mathcal{L}yn(X)$ et la factorisation standard [Reu93, Mre89, Mela91] de $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ (avec $|\ \ell\ | \geqslant 2$) est désignée par $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ où ℓ_2 est le facteur (de Lyndon) droit propre de ℓ de longueur maximale (proposition 2 page 24).
Rappelons aussi que tout mot $w \in X^+$ admet une factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon ((2.4) page 25) :

$$w = \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(X),\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(P_w)_{w \in X^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ comme suit [Reu93, Mre89, Mela91] :

$$P_w = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| \leqslant 1\ ; \\ [P_{\ell_1}, P_{\ell_2}] & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X) \setminus X \text{ et } (\ell_1, \ell_2) = \sigma(\ell)\ ; \\ P_{\ell_1}^{i_1} \ldots P_{\ell_k}^{i_k} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.31}$$

Cette base est en fait la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à la base $(P_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}$ de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle X\rangle$. Les éléments primitifs P_ℓ, $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ sont appelés *crochets standard*. La famille $(P_w)_{w\in X^\alpha}$ est *triangulaire* :

$$P_w = w + \sum_{\substack{u>w\\ u\in X^\alpha}} \langle P_w \mid u\rangle\, u \tag{3.32}$$

et *multihomogène*.
La multihomogénéité des P_w, $w \in X^\alpha$ autorise la construction d'une base $(S_w)_{w\in X^\alpha}$ de $\mathbb{Q}\langle X\rangle_\alpha$ (voir page 43) satisfaisant $\langle S_u \mid P_v\rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^\alpha$. Rappelons la définition du *produit de shuffle* [Reu93, Mre89, Mela91] :

$$\begin{cases} 1_{X^*} \sqcup\!\sqcup\, w &= w \sqcup\!\sqcup\, 1_{X^*} = w,\\ au \sqcup\!\sqcup\, bv &= a(u \sqcup\!\sqcup\, bv) + b(au \sqcup\!\sqcup\, v), \end{cases} \tag{3.33}$$

si $a, b, \in X$, $u, v, w \in X^*$, 1_{X^*} : mot vide.
G. Mélançon et C. Reutenauer [Reu93, Mre89, Mela91] ont montré que

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si} & |w| = 1_{X^*}\ ;\\ aS_u & \text{si} & w = au \text{ et } w \in \mathcal{L}yn(X)\ ;\\ \dfrac{S_{\ell_1}^{\sqcup\!\sqcup\, i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup\, S_{\ell_k}^{\sqcup\!\sqcup\, i_k}}{i_1! \ldots i_k!} & \text{si} & w = \begin{cases} \ell_1^{i_1}\ldots\ell_k^{i_k}\\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)\\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.34}$$

On vérifie dans [Reu93, Mre89, Mela91] que pour tout mot $w \in X^\alpha$, on a :

$$S_w = w + \sum_{\substack{u<w\\ u\in X^\alpha}} \langle S_w \mid u\rangle\, u. \tag{3.35}$$

En d'autres termes, les éléments des bases $(S_w)_{w\in X^\alpha}$ et $(P_w)_{w\in X^\alpha}$ sont triangulaires inférieurs et triangulaires supérieurs et ils sont multihomogènes de multidegré α.

Rappelons que la dualité préserve le multidegré et échange les triangularités des polynômes. Pour cela, on peut construire des matrices triangulaires M et N admettant comme coefficients, les coefficients des mots multihomogènes de multidegré α des polynômes triangulaires, $(P_w)_{w\in X^\alpha}$ et $(S_w)_{w\in X^\alpha}$ dans la base $\mathbb{K}\langle X\rangle_\alpha$ respectivement :

$$M = (\langle P_u \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha} \qquad et \qquad N = (\langle S_u \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}. \tag{3.36}$$

Les matrices M et N sont triangulaires, inversibles et vérifient l'identité $M = ({}^tN)^{-1}$.

Exemple 12. Soit un alphabet $X = \{a, b\}$ avec $a < b$.
Pour cela, calculons les coefficients $\langle S_u \mid v\rangle$ pour les mots $u, v \in X^\alpha$ et nous avons

$M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
S_{a^2b^2} &= a^2b^2 \ ; \\
S_{abab} &= \frac{S_{ab}^{\sqcup\!\sqcup 2}}{2!} \\
&= \frac{1}{2}(ab \sqcup\!\sqcup ab) = abab + 2a^2b^2 \ ; \\
S_{ab^2a} &= ab^2 \sqcup\!\sqcup a \\
&= 2a^2b^2 + ab^2a + abab \ ; \\
S_{ba^2b} &= b \sqcup\!\sqcup a^2b \\
&= ba^2b + abab + 2a^2b^2 \ ; \\
S_{baba} &= b \sqcup\!\sqcup ab \sqcup\!\sqcup a \\
&= 4a^2b^2 + 3abab + 2ba^2b + 2ab^2a + baba \ ; \\
S_{b^2a^2} &= \frac{S_b^{\sqcup\!\sqcup 2}}{2!} \sqcup\!\sqcup \frac{S_a^{\sqcup\!\sqcup 2}}{2!} \\
&= b^2a^2 + a^2b^2 + ba^2b + ab^2a + abab + baba.
\end{aligned} \tag{3.37}$$

La matrice recherchée $N = (\langle S_u \mid v\rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\
\begin{array}{r} S_{a^2b^2} = \\ S_{abab} = \\ S_{ab^2a} = \\ S_{ba^2b} = \\ S_{baba} = \\ S_{b^2a^2} = \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
4 & 3 & 2 & 2 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{3.38}$$

À partir du lemme 5 page 45, nous pouvons écrire la proposition suivante

Proposition 5. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $w \in X^\alpha$. Alors*

$$P_w = w - \sum_{\substack{u > w \\ u \in X^\alpha}} \langle S_u \mid w\rangle P_u. \tag{3.39}$$

Exemple 13.

$$\begin{aligned}
P_{b^2a^2} &= b^2a^2 \ ; \\
P_{baba} &= baba - P_{b^2a^2} \\
&= baba - b^2a^2 \ ; \\
P_{ba^2b} &= ba^2b - 2P_{baba} - P_{b^2a^2} \\
&= ba^2b - 2baba + b^2a^2 \ ; \\
P_{ab^2a} &= ab^2a - 2P_{baba} - P_{b^2a^2} \\
&= ab^2a - 2baba + b^2a^2 \ ; \\
P_{abab} &= abab - P_{ab^2a} - P_{ba^2b} - 3P_{baba} - P_{b^2a^2} \\
&= abab - ab^2a - ba^2b + baba \ ; \\
P_{a^2b^2} &= a^2b^2 - 2P_{abab} - 2P_{ab^2a} - 2P_{ba^2b} - 4P_{baba} - P_{b^2a^2} \\
&= a^2b^2 - 2abab + 2baba - b^2a^2.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (\langle P_u \mid v\rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\
\begin{array}{r} P_{a^2b^2} = \\ P_{abab} = \\ P_{ab^2a} = \\ P_{ba^2b} = \\ P_{baba} = \\ P_{b^2a^2} = \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & -2 & 0 & 0 & 2 & -1 \\
0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array}, \tag{3.41}$$

Ces deux familles ((3.31) page 46 et (3.34) page 47) vérifient les hypothèses du théorème 6 page 40. Par conséquent,

$$\sum_{w \in X^\alpha} S_w \otimes P_w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp(S_\ell \otimes P_\ell). \tag{3.42}$$

Puisque $\sum_{w \in X^\alpha} S_w \otimes P_w = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w$, on peut aller plus loin et écrire

$$\sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp(S_\ell \otimes P_\ell). \tag{3.43}$$

Par conséquent, si $\mathcal{D}_X$ désigne la série diagonale sur X,

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w. \tag{3.44}$$

– Factorisation de Schützenberger :

$$\sum_{w\in X^{\alpha}} S_w \otimes P_w = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp(S_\ell \otimes P_\ell). \tag{3.45}$$

– Factorisation de la série diagonale :

$$\mathcal{D}_X = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp(S_\ell \otimes P_\ell). \tag{3.46}$$

Nous utiliserons les formules (3.46) et (3.45) dans les chapitres 5 et 6.

3.3.2 Exemple : cas de l'algèbre libre et de l'algèbre de stuffle

Soit $Y = \{y_i\}_{i\geqslant 1}$ un alphabet totalement ordonné par $>$: $y_1 > y_2 > \cdots > \cdots$.

Définition 17. *Soient $y_s, y_t \in Y$ et $u, v \in Y^*$, alors nous définissons le produit de stuffle ($\uplus$) récursivement comme suit :*

$$\begin{cases} 1_{Y^*} \uplus u & = & u \uplus 1_{Y^*} = u, \\ y_s u \uplus y_t v & = & y_s(u \uplus y_t v) + y_t(y_s u \uplus v) + y_{s+t}(u \uplus v). \end{cases} \tag{3.47}$$

Exemple 14. $y_2 \uplus y_3 y_1 = y_2 y_3 y_1 + y_3 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2 + y_3 y_3 + y_5 y_1.$

Ce produit ($\uplus$) est commutatif, associatif et avec unité (l'élément neutre étant le mot vide : 1_{Y^*}).
Il admet un coproduit dual qui est un morphisme et qui peut être défini comme suit : pour toute lettre $y_s \in Y$, on a :

$$\begin{cases} \Delta_{\uplus}(1_{Y^*}) & = & 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*}, \\ \Delta_{\uplus}(y_s) & = & y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + \displaystyle\sum_{s_1+s_2=s} y_{s_1} \otimes y_{s_2}. \end{cases} \tag{3.48}$$

et $\forall w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k} \in Y^+$, on a $[w] = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$.

Rappelons que tout mot de Lyndon $\ell \in \mathcal{L}yn(Y)$ (avec $\mid \ell \mid \geqslant 2$) admet une factorisation standard $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ (proposition 2 page 24) et tout mot $w \in Y^+$ admet aussi une factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon ((2.4) page 25) :

$$w = \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y),\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(\Pi_w)_{w\in Y^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ comme suit :

Proposition 6. [*Bam13*, *Mih13*, *Min13*, *Bui12*]
Soit $\mathcal{D}_Y$ *la série diagonale sur* Y*. Alors*
(*i*) $log(\mathcal{D}_Y) = \sum_{w\in Y^+} w \otimes \pi_1(w) = \sum_{w\in Y^+} \pi_1^*(w) \otimes w$,
(*ii*) *pour tout* $w \in Y^+$*, nous avons*

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1,v_2,\cdots,v_k\in Y^+} \langle w \mid v_1 ⧢ \cdots ⧢ v_k \rangle\, \pi_1(v_1)\pi_1(v_2)\cdots\pi_1(v_k) \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1,v_2,\cdots,v_k\in Y^+} \langle w \mid v_1v_2\cdots v_k \rangle\, \pi_1^*(v_1) ⧢ \cdots ⧢ \pi_1^*(v_k). \end{aligned} \tag{3.49}$$

(*iii*) *pour tout* $w \in Y^+$*, nous avons*

$$\pi_1(w) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{v_1,v_2,\cdots,v_k\in Y^+} \langle w \mid v_1 ⧢ \cdots ⧢ v_k \rangle\, v_1v_2\cdots v_k. \tag{3.50}$$

En particulier pour toute lettre $y_s \in Y^+$*, nous avons*

$$\pi_1(y_s) = y_s + \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=s} y_{s_1}y_{s_2}\cdots y_{s_k}. \tag{3.51}$$

On obtient (*ii*) à partir de (*i*) en identifiant dans le développement de $e^{log(\mathcal{D}_Y)}$ et $\mathcal{D}_Y$ et on obtient (*iii*) à partir de (*i*) en développant directement la série $log(\mathcal{D}_Y)$.

Exemple 15. $\pi_1(y_1) = y_1$.
$\pi_1(y_2) = y_2 - \frac{1}{2}y_1^2$.
$\pi_1(y_3) = y_3 - \frac{1}{2}(y_1y_2 + y_2y_1) + \frac{1}{3}y_1^3$.
$\pi_1(y_4) = y_4 - \frac{1}{2}(y_1y_3 + y_2^2 + y_3y_1) + \frac{1}{3}(y_1^2y_2 + y_1y_2y_1 + y_2y_1^2) - \frac{1}{4}y_1^4$.

Par conséquent, les éléments de la base $(\Pi_w)_{w\in Y^*}$ peuvent être construits récursivement comme suit [Bam13, Mih13, Min13, Dmt14] :

$$\Pi_w = \begin{cases} \pi_1(y) & \text{si} \quad w = y \in Y \ ; \\ [\Pi_{\ell_1}, \Pi_{\ell_2}] & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(Y)\backslash Y \text{ et } (\ell_1,\ell_2) = \sigma(\ell) \ ; \\ \Pi_{\ell_1}^{i_1}\dots\Pi_{\ell_k}^{i_k} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1}\dots\ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.52}$$

Cette base est en fait la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à la base $(\Pi_\ell)_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}$ de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}}\langle Y \rangle$.

On vérifie dans [Bam13, Mih13, Min13] que pour tout mot $w \in Y^*$, on a :

$$\Pi_w = w + \sum_{\substack{w<v\in Y^* \\ [v]=[w]}} \langle \Pi_w \mid v \rangle\, v. \tag{3.53}$$

En d'autres termes, les éléments de la base $(\Pi_w)_{w\in Y^*}$ sont triangulaires supérieurs et ils sont multihomogènes en poids.

La multihomogénéité des Π_w, $w \in Y^*$ autorise la construction d'une base $(\Sigma_w)_{w\in Y^*}$ de $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$ satisfaisant $\langle \Sigma_u \mid \Pi_v\rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in Y^*$. Cette famille vit dans l'algèbre $\mathbb{Q}\langle Y\rangle$.
Les éléments de la base $(\Sigma_w)_{w\in Y^*}$ peuvent être construits récursivement comme suit [Bam13, Mih13, Min13, Bui12] :

$$\Sigma_w = \begin{cases} y & \text{si} \quad w = y \in Y\ ; \\ \displaystyle\sum_{\substack{\{s'_1,\cdots,s'_i\}\subset\{s_1,\cdots,s_k\},\ell_1\geqslant\cdots\geqslant\ell_n\in\mathcal{L}yn(Y) \\ (y_{s_1}\cdots y_{s_k})\overset{*}{\Leftarrow}(y_{s'_1},\cdots,y_{s'_n},\ell_1,\cdots,\ell_n)}} \frac{1}{i!} y_{s'_1+\cdots+s'_i} \Sigma_{\ell_1\cdots\ell_n} & \text{si} \quad w = \ell = y_{s_1}\cdots y_{s_k} \in \mathcal{L}yn(Y)\ ; \\ \dfrac{\Sigma_{\ell_1}^{\sqcup\!\sqcup\, i_1} \sqcup\!\sqcup \ \ldots \ \sqcup\!\sqcup\ \Sigma_{\ell_k}^{\sqcup\!\sqcup\, i_k}}{i_1!\ldots i_k!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1}\ldots\ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.54}$$

On vérifie dans [Bam13, Mih13, Min13] que pour tout mot $w \in Y^*$, on a :

$$\Sigma_w = w + \sum_{\substack{w>u\in Y^* \\ [w]=[u]}} \langle \Sigma_w \mid u \rangle\, u. \tag{3.55}$$

En d'autres termes, les éléments de la base $(\Sigma_w)_{w\in Y^*}$ sont triangulaires inférieurs et ils sont multihomogènes en poids.

Exemple 16. Pour $[\alpha] = 4$, on a : $M(Y_4) = \{y_4, y_3y_1, y_2^2, y_2y_1^2, y_1y_3, y_1y_2y_1, y_1^2y_2, y_1^4\}$.
(i) La matrice recherchée $N = (\langle \Pi_u \mid v\rangle)_{u,v\in M(Y_4)}$ est donnée par :

$$\begin{array}{r} \\ \Pi_{y_4} = \\ \Pi_{y_3y_1} = \\ \Pi_{y_2^2} = \\ \Pi_{y_2y_1^2} = \\ \Pi_{y_1y_3} = \\ \Pi_{y_1y_2y_1} = \\ \Pi_{y_1^2y_2} = \\ \Pi_{y_1^4} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} y_4 & y_3y_1 & y_2^2 & y_2y_1^2 & y_1y_3 & y_1y_2y_1 & y_1^2y_2 & y_1^4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \tag{3.56}$$

(ii) La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (\langle \Sigma_u \mid v \rangle)_{u,v \in M(Y_4)}$ est donnée par :

$$\begin{array}{rc} & \begin{array}{cccccccc} y_4 & y_3y_1 & y_2^2 & y_2y_1^2 & y_1y_3 & y_1y_2y_1 & y_1^2y_2 & y_1^4 \end{array} \\ \begin{array}{r} \Sigma_{y_4} = \\ \Sigma_{y_3y_1} = \\ \Sigma_{y_2^2} = \\ \Sigma_{y_2y_1^2} = \\ \Sigma_{y_1y_3} = \\ \Sigma_{y_1y_2y_1} = \\ \Sigma_{y_1^2y_2} = \\ \Sigma_{y_1^4} = \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{3.57}$$

Ces deux familles $(\Pi_w)_{w \in Y^*}$ et $(\Sigma_w)_{w \in Y^*}$ vérifient les hypothèses du théorème 6 page 40. Par conséquent,

$$\sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell \otimes \Pi_\ell). \tag{3.58}$$

Puisque $\sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \sum_{w \in Y^*} w \otimes w$, on peut aller plus loin et écrire

$$\sum_{w \in Y^*} w \otimes w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell \otimes \Pi_\ell). \tag{3.59}$$

Par conséquent, si $\mathcal{D}_Y$ désigne la série diagonale sur Y,

$$\mathcal{D}_Y = \sum_{w \in Y^*} w \otimes w. \tag{3.60}$$

– Factorisation de Schützenberger :

$$\sum_{w \in Y^*} \Sigma_w \otimes \Pi_w = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell \otimes \Pi_\ell). \tag{3.61}$$

– Factorisation de la série diagonale :

$$\mathcal{D}_Y = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell \otimes \Pi_\ell). \tag{3.62}$$

3.3.3 Exemple : cas de l'algèbre libre et de l'algèbre de $q-$stuffle

Soient $Y = \{y_i\}_{i\geqslant 1}$ un alphabet totalement ordonné par $>$ et q une variable.

Définition 18. *Soient $y_s, y_t \in Y$ et $u, v \in Y^*$, alors nous définissons le produit de $q-$stuffle $(\uplus_q)$ récursivement comme suit :*

$$\begin{cases} 1_{Y^*} \uplus_q u &= u \uplus_q 1_{Y^*} = u, \\ y_s u \uplus_q y_t v &= y_s(u \uplus_q y_t v) + y_t(y_s u \uplus_q v) + q y_{s+t}(u \uplus_q v). \end{cases} \tag{3.63}$$

Exemple 17. $y_2 \uplus_q y_3 y_1 = y_2 y_3 y_1 + y_3 y_2 y_1 + y_3 y_1 y_2 + q(y_3 y_3 + y_5 y_1)$.

Ce produit $(\uplus_q)$ est commutatif, associatif et avec unité (l'élément neutre étant le mot vide : 1_{Y^*}).
Il admet un coproduit dual qui est un morphisme et qui peut être défini comme suit : pour toute lettre $y_s \in Y$, on a :

$$\begin{cases} \Delta_{\uplus_q}(1_{Y^*}) &= 1_{Y^*} \otimes 1_{Y^*}, \\ \Delta_{\uplus_q}(y_s) &= y_s \otimes 1_{Y^*} + 1_{Y^*} \otimes y_s + q \displaystyle\sum_{s_1+s_2=s} y_{s_1} \otimes y_{s_2}. \end{cases} \tag{3.64}$$

et $\forall w = y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k} \in Y^+$, on a $[w] = s_1 + s_2 + \cdots + s_k$.

Rappelons que tout mot de Lyndon $\ell \in \mathcal{L}yn(Y)$ (avec $|\ \ell\ | \geqslant 2$) admet une factorisation standard $\sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2)$ (proposition 2 page 24) et tout mot $w \in Y^+$ admet aussi une factorisation unique en produit décroissant de mots de Lyndon ((2.4) page 25) :

$$w = \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k, \quad \ell_1, \ldots, \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y),\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}.$$

Ces deux factorisations permettent de définir une base $(\Pi_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ de l'algèbre libre $\mathbb{Q}[q]\langle Y\rangle$ comme suit :

Proposition 7. [Bam13, Mih13, Min13, Bui12] *Soit $\mathcal{D}_Y$ la série diagonale sur Y. Alors*
(i) $log(\mathcal{D}_Y) = \displaystyle\sum_{w\in Y^+} w \otimes \pi_1^{(q)}(w) = \sum_{w\in Y^+} (\pi_1^{(q)})^*(w) \otimes w$,
(ii) pour tout $w \in Y^+$, nous avons,

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \uplus_q \cdots \uplus_q v_k\rangle\ \pi_1^{(q)}(v_1)\pi_1^{(q)}(v_2)\cdots\pi_1^{(q)}(v_k) \\ &= \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k!} \sum_{v_1, v_2, \cdots, v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 v_2 \cdots v_k\rangle\ (\pi_1^{(q)})^*(v_1) \uplus_q \cdots \uplus_q (\pi_1^{(q)})^*(v_k). \end{aligned} \tag{3.65}$$

(iii) pour tout $w \in Y^+$*, nous avons*

$$\pi_1^{(q)}(w) = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{v_1,v_2,\cdots,v_k \in Y^+} \langle w \mid v_1 \uplus_q \cdots \uplus_q v_k \rangle \, v_1 v_2 \cdots v_k. \tag{3.66}$$

En particulier pour toute lettre $y_s \in Y^+$*, nous avons*

$$\pi_1^{(q)}(y_s) = y_s + \sum_{k\geqslant 2} \frac{(-q)^{k-1}}{k} \sum_{s_1+s_2+\cdots+s_k=s} y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k}. \tag{3.67}$$

On obtient (ii) à partir de (i) en identifiant dans le développement de $e^{log(\mathcal{D}_Y)}$ et $\mathcal{D}_Y$ et on obtient (iii) à partir de (i) en développant directement la série $log(\mathcal{D}_Y)$.

Exemple 18. $\pi_1^{(q)}(y_1) = y_1$.
$\pi_1^{(q)}(y_2) = y_2 - \frac{q}{2} y_1^2$.
$\pi_1^{(q)}(y_3) = y_3 - \frac{q}{2}(y_1 y_2 + y_2 y_1) + \frac{q^2}{3} y_1^3$.
$\pi_1^{(q)}(y_4) = y_4 - \frac{q}{2}(y_1 y_3 + y_2^2 + y_3 y_1) + \frac{q^2}{3}(y_1^2 y_2 + y_1 y_2 y_1 + y_2 y_1^2) - \frac{q^3}{4} y_1^4$.

Par conséquent, les éléments de la base $(\Pi_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ peuvent être construits récursivement comme suit [Bam13, Mih13, Min13, Bui12] :

$$\Pi_w^{(q)} = \begin{cases} \pi_1^{(q)}(y) & \text{si} \quad w = y \in Y \ ; \\ \left[\Pi_{\ell_1}^{(q)}, \Pi_{\ell_2}^{(q)}\right] & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(Y)\backslash Y \text{ et } (\ell_1,\ell_2) = \sigma(\ell) \ ; \\ (\Pi_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \dots (\Pi_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.68}$$

Cette base est en fait la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à la base $(\Pi_\ell^{(q)})_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}$ de l'algèbre de Lie libre $\mathcal{L}ie_{\mathbb{Q}[q]}\langle Y\rangle$.

On vérifie dans [Bam13, Mih13, Min13] que pour tout mot $w \in Y^*$, on a :

$$\Pi_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{w<v\in Y^* \\ [v]=[w]}} \langle \Pi_w^{(q)} \mid v \rangle \, v. \tag{3.69}$$

En d'autres termes, les éléments de la base $(\Pi_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ sont triangulaires supérieurs et ils sont multihomogènes en poids.

La multihomogénéité des $\Pi_w^{(q)}$, $w \in Y^*$ autorise la construction d'une base $(\Sigma_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ de $\mathbb{Q}[q]\langle Y\rangle$ satisfaisant $\langle \Sigma_u^{(q)} \mid \Pi_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in Y^*$. Cette famille vit dans

l'algèbre $\mathbb{Q}[q]\langle Y\rangle$.
Les éléments de la base $(\Sigma_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ peuvent être construits récursivement comme suit [Bam13, Mih13, Min13, Bui12] :

$$\Sigma_w^{(q)} = \begin{cases} y & \text{si} \quad w = y \in Y\ ; \\ \displaystyle\sum_{\substack{\{s'_1,\cdots,s'_i\}\subset\{s_1,\cdots,s_k\},\ell_1\geqslant\cdots\geqslant\ell_n\in\mathcal{L}yn(Y)\\ (y_{s_1}\cdots y_{s_k})\overset{*}{\Leftarrow}(y_{s'_1},\cdots,y_{s'_n},\ell_1,\cdots,\ell_n)}} \frac{q^{i-1}}{i!} y_{s'_1+\cdots+s'_i}\Sigma_{\ell_1\cdots\ell_n}^{(q)} & \text{si} \quad w = \ell = y_{s_1}\cdots y_{s_k} \in \mathcal{L}yn(Y)\ ; \\ \dfrac{(\Sigma_{\ell_1}^{(q)})^{\text{⧢}_q i_1} \text{⧢}_q \ldots \text{⧢}_q (\Sigma_{\ell_k}^{(q)})^{\text{⧢}_q i_k}}{i_1!\ldots i_k!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1}\ldots\ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(Y) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{3.70}$$

On vérifie [Bam13, Mih13, Min13] que pour tout mot $w \in Y^*$,

$$\Sigma_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{w>u\in Y^*\\ [w]=[u]}} \langle \Sigma_w^{(q)} \mid u\rangle\, u. \tag{3.71}$$

En d'autres termes, les éléments de la base $(\Sigma_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ sont triangulaires inférieurs et ils sont multihomogènes en poids.

Exemple 19. $\Pi_{y_1}^{(q)} = y_1$.
$\Pi_{y_2}^{(q)} = y_2 - \frac{q}{2}y_1^2$.
$\Pi_{y_2y_1}^{(q)} = y_2y_1 - y_1y_2$.

$\Pi_{y_3y_1y_2}^{(q)} = y_3y_1y_2 - \frac{q}{2}y_3y_1^3 - qy_2y_1^2y_2 + \frac{q^2}{4}y_2y_1^4 - y_1y_3y_2 + \frac{q}{2}y_1y_3y_1^2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2 - \frac{q^2}{2}y_1^2y_2y_1^2 - y_2y_3y_1 + \frac{q}{2}y_2^2y_1^2 + y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1^2y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1^3y_3 + \frac{q^2}{4}y_1^4y_2$.

$\Pi_{y_3y_1y_2y_1}^{(q)} = y_3y_1y_2y_1 - y_3y_1^2y_2 - \frac{q}{2}y_2y_1^2y_2y_1 - y_1y_3y_2y_1 + y_1y_3y_1y_2 + \frac{q}{2}y_1^2y_2^2y_1 - y_2y_1y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1^2y_2y_1y_2 + \frac{q}{2}y_2y_1y_2y_1^2 + y_2y_1^2y_3 + y_1y_2y_3y_1 - \frac{q}{2}y_1y_2^2y_1^2 - y_1y_2y_1y_3 + \frac{q}{2}y_1y_2y_1^2y_2$.

$\Sigma_{y_1}^{(q)} = y_1$.
$\Sigma_{y_2}^{(q)} = y_2$.

$\Sigma_{y_2y_1}^{(q)} = y_2y_1 + \frac{q}{2}y_3$.

$\Sigma_{y_3y_2y_1}^{(q)} = y_3y_2y_1 + y_3y_1y_2 + qy_3^2 + \frac{q}{2}y_4y_2 + \frac{q^3}{3}y_6 + \frac{q}{2}y_5y_1$.

$\Sigma_{y_3y_1y_2y_1}^{(q)} = y_3y_1y_2y_1 + 2y_3y_2y_1^2 + qy_3y_2^2 + \frac{3q}{2}y_3^2y_1 + \frac{q}{2}y_3y_1y_3 + \frac{q^2}{2}y_3y_4 + \frac{q}{2}y_4y_2y_1 + \frac{q^2}{4}y_4y_3 + qy_5y_1^2 + \frac{q^2}{2}y_5y_2 + \frac{q^2}{2}y_6y_1 + \frac{q^3}{8}y_7$.

Ces deux familles $(\Pi_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ et $(\Sigma_w^{(q)})_{w\in Y^*}$ vérifient les hypothèses du théorème 6 page 40. Par conséquent,

$$\sum_{w\in Y^*} \Sigma_w^{(q)} \otimes \Pi_w^{(q)} = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell^{(q)} \otimes \Pi_\ell^{(q)}). \tag{3.72}$$

Puisque $\sum_{w\in Y^*} \Sigma_w^{(q)} \otimes \Pi_w^{(q)} = \sum_{w\in Y^*} w \otimes w$, on peut aller plus loin et écrire

$$\sum_{w\in Y^*} w \otimes w = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell^{(q)} \otimes \Pi_\ell^{(q)}). \tag{3.73}$$

Par conséquent, si $\mathcal{D}_Y$ désigne la série diagonale sur Y,

$$\mathcal{D}_Y = \sum_{w\in Y^*} w \otimes w. \tag{3.74}$$

– Factorisation de Schützenberger :

$$\sum_{w\in Y^*} \Sigma_w^{(q)} \otimes \Pi_w^{(q)} = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell^{(q)} \otimes \Pi_\ell^{(q)}). \tag{3.75}$$

– Factorisation de la série diagonale :

$$\mathcal{D}_Y = \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(Y)}^{\searrow} \exp(\Sigma_\ell^{(q)} \otimes \Pi_\ell^{(q)}). \tag{3.76}$$

Deuxième partie

Interpolation entre la concaténation et le shuffle : $q-$shuffle

Chapitre 4

$q-$shuffle et groupe symétrique

Résumé : Le but de ce chapitre est de construire une paire de bases en dualité. Ce chapitre contient trois volets principaux : Dans le premier volet, nous donnons une construction des éléments de $(\mathfrak{S}_n)_m$ (Définition 20 page 63), dans un second volet, nous construisons une base $q-$analogue de la base duale de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$ ((4.39) page 81) et dans le troisième volet, la construction d'une base $q-$analogue de la base de Poincaré-Birkhoff-Witt-Lyndon $(P_w^{(q)})_{w\in X^*}$ ((4.52) page 86) telle que $\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)}\rangle = \delta_{uv}$, $\forall u, v \in X^*$.
Dans bien des cas, la construction d'une paire de bases en dualité passe par celle d'une base duale à partir d'une base dont on connaît certaines propriétés. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations. Nous illustrerons ces idées sur des exemples combinatoires en utilisant le produit de $q-$shuffle.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. le Théorème 7 page 64 donne une généralisation du Théorème 8 page 64 [Hum, Kas09].

2. le Théorème 9 page 78 donne une triangularisation des éléments $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$ ($\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$).

3. le Théorème 10 page 81 donne une construction récursive des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$.

4.1 Construction des éléments de $(\mathfrak{S}_n)_m$

Considérons un paramètre formel q.

Résumé : Dans cette partie, nous présentons une généralisation de la formule $\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} = [n]_q!$ (théorème 8 page 64). La statistique de permutation Inv est fréquemment utilisée pour obtenir des $q-$analogues de résultats classiques. En général, un $q-$analogue d'un objet a la propriété que par la spécialisation $q = 1$, on récupère l'objet original. Bien sûr, il y a beaucoup de $q-$analogues de n'importe quel objet donné, et il n'y a pas de critères objectifs pour avoir ce qui est considéré être un bon $q-$analogue. Ici, nous définissons quelques q-analogues standards et couramment utilisés dans cette thèse.

4.1.1 Définitions

Définition 19. *Soient* $n, m \in \mathbb{N}$.
- *On pose* $\{m, m+1, m+2, \cdots, n\} = [\![m, n]\!]$ *si* $n \geqslant m$.
- *Le* $q-$*analogue de* n*, noté* $[n]_q$*, est défini par*

$$[n]_q = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n-1} q^i. \tag{4.1}$$

- *Le* $q-$*analogue de* $n!$*, noté* $[n]_q!$*, est défini par*

$$[n]_q! = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} [i]_q = [1]_q[2]_q \cdots [n]_q. \tag{4.2}$$

- *Le* $q-$*analogue de la fonction exponentielle, noté* $\exp_q(z)$*, est défini par*

$$\exp_q(z) = \sum_{i \geqslant 0} \frac{z^i}{[i]_q!}. \tag{4.3}$$

4.1.2 Le groupe symétrique

Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. On note $[\![1, n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$. On rappelle qu'une permutation d'ordre n est une bijection de $[\![1, n]\!]$ vers $[\![1, n]\!]$. Traditionnellement, on présente une permutation σ sur deux lignes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & ... & i & ... & j & ... & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & ... & \sigma(i) & ... & \sigma(j) & ... & \sigma(n) \end{bmatrix}$$

Par convention, nous utilisons plutôt l'écriture en une seule ligne(comme un mot) :

$$\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\cdots\sigma(i)\cdots\sigma(j)\cdots\sigma(n). \tag{4.4}$$

Par exemple, la permutation

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

s'écrit tout simplement $\sigma = \sigma(1)\sigma(2)\sigma(3)\sigma(4)\sigma(5) = 23451$.

1. On note alors $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations d'ordre n (ou groupe symétrique d'ordre n). Les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sont appelés permutations. Le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ est $n!$.

2. Pour tous i, j éléments de $[\![1,n]\!] = \{1, 2, \cdots, n\}$ tels que $i < j$ et $\sigma(i) > \sigma(j)$; le couple (i,j) est appelé une inversion de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

3. L'ensemble des inversions de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, noté $\mathcal{S}(\sigma)$, est défini par
$$\mathcal{S}(\sigma) = \{(i,j) \mid i < j \qquad et \qquad \sigma(i) > \sigma(j)\}. \tag{4.5}$$

4. Le cardinal de $\mathcal{S}(\sigma)$, noté $Inv(\sigma)$, est défini par [1]
$$Inv(\sigma) = \#\mathcal{S}(\sigma). \tag{4.6}$$

Exemple 20.
$$\tau_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \tau_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}, \tau_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$
$Inv(\tau_1) = 4$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_1) = \{(1,5), (2,5), (3,5), (4,5)\}$,
$Inv(\tau_2) = 3$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_2) = \{(1,2), (1,3), (4,5)\}$ et
$Inv(\tau_3) = 1$ car l'ensemble des inversions est $\mathcal{S}(\tau_3) = \{(2,3)\}$.

Définition 20. *Soient $m, n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.*
On définit un sous-groupe $(\mathfrak{S}_n)_m$ de $\mathfrak{S}_{nm}$ isomorphe à $\mathfrak{S}_n$ comme l'image de $\mathfrak{S}_n$ par le morphisme $\mathcal{T}(\sigma) = \tau(1) \cdots \tau(nm)$ avec $\tau(m(p-1)+k) = m(\sigma(p)-1)+k$, $p \in [\![1,n]\!]$ et $k \in [\![1,m]\!]$.

Pour bien visualiser qu'il s'agit d'un morphisme injectif, il suffit d'écrire matriciellement les images $\mathcal{T}(\sigma)$:
$$\begin{bmatrix} \tau((n-1)m+1) & . & . & . & \tau(nm) \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ \tau(m+1) & . & . & . & \tau(2m) \\ \tau(1) & . & . & . & \tau(m) \end{bmatrix}.$$
On se rend compte que cette matrice est obtenue en permutant les lignes de la matrice
$$\begin{bmatrix} (n-1)m+1 & . & . & . & nm \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ m+1 & . & . & . & 2m \\ 1 & . & . & . & m \end{bmatrix}.$$

1. $Inv(\sigma)$ est le nombre des inversions de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Exemple 21. Soient $n = 3$ et $m = 2$. On a :
$\sigma_1 = 123 \longleftrightarrow \tau_1 = \mathcal{T}(\sigma_1) = 123456$,
$\sigma_2 = 132 \longleftrightarrow \tau_2 = \mathcal{T}(\sigma_2) = 125634$,
$\sigma_3 = 213 \longleftrightarrow \tau_3 = \mathcal{T}(\sigma_3) = 341256$,
$\sigma_4 = 231 \longleftrightarrow \tau_4 = \mathcal{T}(\sigma_4) = 345612$,
$\sigma_5 = 312 \longleftrightarrow \tau_5 = \mathcal{T}(\sigma_5) = 561234$ et
$\sigma_6 = 321 \longleftrightarrow \tau_6 = \mathcal{T}(\sigma_6) = 563412$.
Par conséquent :
$\sigma \in \mathfrak{S}_3 = \{123, 132, 213, 231, 312, 321\}$ et
$\tau \in (\mathfrak{S}_3)_2 = \{123456, 125634, 341256, 345612, 561234, 563412\}$.

Par conséquent, nous pouvons écrire le théorème suivant :

Théorème 7. *Soient $n, m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Alors*

$$\sum_{\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m} q^{Inv(\tau)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{m^2 Inv(\sigma)} = [1]_{q^{m^2}} \cdots [n]_{q^{m^2}} = [n]_{q^{m^2}}!. \tag{4.7}$$

Pour la preuve de ce théorème, nous allons écrire la proposition et le théorème suivant :

Proposition 8. *Soient $n, m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Alors*

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau \in \mathfrak{S}_{nm} \mid Inv(\tau) = m^2 Inv(\sigma) \qquad et \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}. \tag{4.8}$$

Preuve : Soient $n, m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. À partir de la définition 20 page 63, nous pouvons écrire que $\mathcal{S}(\tau) = \mathcal{S}(\mathcal{T}(\sigma))$ pour $\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. En effet, en remarquant que l'image d'une transposition élémentaire a exactement m^2 inversions [2], on trouve que le nombre des inversions de $\mathcal{T}(\sigma)$ est $m^2(\#\mathcal{S}(\sigma))$.
Par conséquent : $Inv(\tau) = \#\mathcal{S}(\tau) = \#\mathcal{S}(\mathcal{T}(\sigma)) = m^2 Inv(\sigma)$ pour $\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
□

Théorème 8. [*Hum*, *Kas09*] *Soit $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Alors*

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} = [1]_q [2]_q \cdots [n]_q = [n]_q!. \tag{4.9}$$

Comme observé dans [Hum, Kas09] : comme d'habitude en $p-$théorie, le coefficient $p-$multinomial est donné par

$$\frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_p!}{[c_1]_p! [c_2]_p! \cdots [c_n]_p!}. \tag{4.10}$$

2. Pour toute inversion (i, j) de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on a exactement m^2 inversions (I, J) de $\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m$ avec $I \in [\![(i-1)m + 1, im]\!]$ et $J \in [\![(j-1)m + 1, jm]\!]$

Et ici, on a la spécialisation $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$ et $p = q$. Par conséquent : $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{Inv(\sigma)} = \frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_q!}{[c_1]_q![c_2]_q! \cdots [c_n]_q!} = [n]_q!$.

Preuve du Théorème 7 page 64 : Elle se fait par statistique :
À partir de la définition 20 page 63 et la proposition 8 page 64, nous pouvons écrire que :

$$(\mathfrak{S}_n)_m = \{\tau \in \mathfrak{S}_{nm} \mid Inv(\tau) = m^2 Inv(\sigma) \qquad et \qquad \sigma \in \mathfrak{S}_n\}.$$

Comme observé dans [Hum, Kas09] : comme d'habitude en $p-$théorie, le coefficient $p-$multinomial est donné par

$$\frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_p!}{[c_1]_p![c_2]_p! \cdots [c_n]_p!}. \tag{4.11}$$

Et ici, on a la spécialisation $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 1$ et $p = q^{m^2}$. Par conséquent :

$$\sum_{\tau \in (\mathfrak{S}_n)_m} q^{Inv(\tau)} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (q^{m^2})^{Inv(\sigma)} = \frac{[c_1 + c_2 + \cdots + c_n]_{q^{m^2}}!}{[c_1]_{q^{m^2}}![c_2]_{q^{m^2}}! \cdots [c_n]_{q^{m^2}}!} = [n]_{q^{m^2}}!. \tag{4.12}$$

□

4.2 Le produit de $q-$shuffle

Considérons un paramètre formel q.

Résumé : Dans cette partie, nous donnons une définition formelle du produit de $q-$shuffle et de son coproduit. Enfin, nous mettons en évidence des liens existants entre le produit de shuffle et le produit de $q-$shuffle.

4.2.1 Définition et propriétés du produit de $q-$shuffle

Définition 21. *Soit $w = a_1 a_2 \cdots a_n \in X^*$ un mot de longueur $|w| = n$ et I un sous-ensemble de $\{1, 2, \cdots, n\} = [\![1, n]\!]$.*
Si $I = \varnothing$, on pose $w[I] = 1_{X^*}$; si $I = \{i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$, on pose $w[I] = a_{i_1} \cdots a_{i_k}$.

Remarque 8. Par définition, si l'on se donne une partition de $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire p ensembles disjoints $I_1, I_2, \cdots, I_p$ vérifiant $\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1, n]\!]$ et les mots $w[I_1], \cdots, w[I_p]$, on retrouve naturellement w et $|w| = n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ avec $|I_j| = n_j$, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$.

Exemple 22. Si $X = \{a, b, c\}$,
$I_1 = \{1, 3, 4\}$, $I_2 = \{2, 7, 9\}$, $I_3 = \{5, 6, 8\}$ avec $w[I_1] = abc$, $w[I_2] = bca$, $w[I_3] = cab$, alors, on retrouve $w = abbccacba$ et $|w| = |I_1| + |I_2| + |I_3| = 3 + 3 + 3 = 9$.

Si l'on se donne p mots de longueur n_j, $j \in [\![1, p]\!]$, on peut définir leur shuffle d'une manière pratique.
On marque $n_1 + n_2 + \cdots + n_p$ places sur une droite. On choisit d'abord n_1 places arbitrairement, on y place les lettres du mot u_1 de gauche à droite, c'est-à-dire les unes après les autres.
On fait de même pour u_2, u_3 jusqu'à u_p en utilisant les places restantes. On a donc construit un mot de longueur $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_p$, noté w et I_j désigne le sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ de places choisies pour situer les lettres du mot u_j.
À la ligne, en parcourant toutes les places possibles de cette façon et en effectuant la somme de tous les mots ainsi obtenus, on obtient ce que l'on appelle le produit de shuffle des mots $u_1, \cdots, u_p$.
Maintenant, on se donne la définition du produit de shuffle :

Définition 22. *(Le shuffle des mots : voir (3.33) page 47). Soient $u_1, \cdots, u_p \in X^*$ des mots de longueur $|u_j| = |I_j| = n_j$, $j \in [\![1, p]\!]$. Leur shuffle est un polynôme de $\mathbb{N}\langle X \rangle$ défini par*

$$u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p = \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ w \in X^*, w[I_j] = u_j}} w, \tag{4.13}$$

où $|w| = |u_1 u_2 \cdots u_p| = n$.

En insérant une puissance indéterminée q dans la définition du produit de shuffle ((4.13) page 66), on obtient une déformation intéressante, qui se révèle être un cas particulier d'une construction dans [Dkt97]. Nous pouvons écrire la définition suivante :

Définition 23. *(Le $q-$shuffle des mots). Soient $u_1, \cdots, u_p \in X^*$ des mots de longueur $|u_j| = |I_j| = n_j$, $j \in [\![1, p]\!]$. On définit un opérateur $p-$paire par*

$$\sqcup\!\sqcup_q{}^p(u_1, u_2, \cdots, u_p) = \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ w \in X^*, w[I_j] = u_j}} q^{Inv(I_1, \cdots, I_p)} w, \tag{4.14}$$

où $|w| = |u_1 u_2 \cdots u_p| = n$ et $I_1 I_2 \cdots I_p \in \mathfrak{S}_n$.

Définition 24. *Soient $a, b \in X$ et $w, u, v \in X^*$. Le produit de $q-$shuffle est défini récursivement par*

$$\begin{cases} 1_{X^*} \sqcup\!\sqcup_q w &= w \sqcup\!\sqcup_q 1_{X^*} = w; \\ au \sqcup\!\sqcup_q bv &= a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q v). \end{cases} \tag{4.15}$$

Proposition 9. *Soient $u_1, u_2 \in X^*$ des mots de longueur $|u_j| = |I_j| = n_j$, $j \in [\![1, 2]\!]$. Alors*

$$\sqcup\!\sqcup_q{}^2(u_1, u_2) = u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2. \tag{4.16}$$

Exemple 23. Soit $X = \{a, b, c, d\}$.
(i) Pour $u_1 = ab$ et $u_2 = cd$, on a :
$\sqcup\!\sqcup_q{}^2(u_1, u_2) = u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 = abcd + qacbd + q^2acdb + q^2cabd + q^3cadb + q^4cdab.$

(ii) Pour $u_1 = aab$ et $u_2 = ab$, on a :
$\sqcup\!\sqcup_q{}^2(u_1, u_2) = u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 = (1 + q^4 + q^5)aabab + (q + 2q^2 + 2q^3 + q^4)aaabb + q^6abaab.$

Remarque 9. Avec la notation précédente, la somme contient $\frac{n!}{n_1! \cdots n_p!}$ mots.

Cette opération ($\sqcup\!\sqcup_q$) interpole entre le produit de concaténation (pour $q = 0$) et le produit de shuffle (pour $q = 1$).

Proposition 10. *Si $|X| \geqslant 2$, alors le produit de $q-$shuffle ($\sqcup\!\sqcup_q$) est commutatif si et seulement si $q = 1$.*

Preuve : Soit $a, b \in X$. On a :
$a \sqcup\!\sqcup_q b - b \sqcup\!\sqcup_q a = (1 - q)(ab - ba).$
□

Proposition 11. *Le produit de $q-$shuffle ($\sqcup\!\sqcup_q$) est associatif.*

Preuve : On fait une démonstration par récurrence sur la somme des longueurs $| u |$, $| v |$ et $| w |$:
(i) $1_{X^*} \sqcup\!\sqcup_q u = u \sqcup\!\sqcup_q 1_{X^*} = u$ par définition.
(ii) Supposons que pour tous u, v et w de X^* tels que $| u | + | v | + | w | \leqslant n$, on ait $(u \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q w = u \sqcup\!\sqcup_q (v \sqcup\!\sqcup_q w)$.

(iii) Soient $u, v, w \in X^*$ tels que $\mid u \mid + \mid v \mid + \mid w \mid = n-1$ et soient $a, b, c \in X$. On a

$$
\begin{aligned}
(au \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q cw =& a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q cw + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q cw \\
&= a((u \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q cw) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&+ q^{|au|} b((au \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q cw) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup\!\sqcup_q (bv \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&+ q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q (v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup\!\sqcup_q b(v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup\!\sqcup_q c(bv \sqcup\!\sqcup_q w)) + q^{|au|+|bv|} c(a(u \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&+ q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q (v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{2|au|+|bv|} c(b(au \sqcup\!\sqcup_q v) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup\!\sqcup_q b(v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup\!\sqcup_q c(bv \sqcup\!\sqcup_q w)) + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q (v \sqcup\!\sqcup_q cw)) \\
&+ q^{|au|+|bv|} c((au \sqcup\!\sqcup_q bv) \sqcup\!\sqcup_q w) \\
&= a(u \sqcup\!\sqcup_q b(v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{|au|} b(au \sqcup\!\sqcup_q (v \sqcup\!\sqcup_q cw)) + q^{|bv|} a(u \sqcup\!\sqcup_q c(bv \sqcup\!\sqcup_q w)) \\
&+ q^{|au|+|bv|} c(au \sqcup\!\sqcup_q (bv \sqcup\!\sqcup_q w)) \\
&= au \sqcup\!\sqcup_q (bv \sqcup\!\sqcup_q cw).
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

□

À partir des propositions 9 page 67 et 11 page 67, nous pouvons écrire le corollaire suivant :

Corollaire 1. *Soient $u_1, u_2, \cdots, u_p \in X^*$ des mots de longueur $|u_j| = |I_j| = n_j$, $j \in [\![1, p]\!]$. Alors*

$$\sqcup\!\sqcup_q{}^p(u_1, u_2, \cdots, u_p) = u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p. \tag{4.18}$$

Le produit de $q-$shuffle peut être considéré comme une application bilinéaire sur $\mathbb{N}[q]\langle X\rangle$ ($\sqcup\!\sqcup_q : X^* \times X^* \longrightarrow \mathbb{N}[q]\langle X\rangle$). Grâce à la propriété universelle du produit tensoriel, on peut l'écrire comme $\sqcup\!\sqcup_q : \mathbb{N}[q]\langle X\rangle \otimes \mathbb{N}[q]\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{N}[q]\langle X\rangle$.

Corollaire 2. $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup_q, \mathbb{1}_{X^*})$ *est une algèbre non commutative (si $q \neq 1$ et $|X| \geqslant 2$) et associative avec unité.*

4.2.2 Définition et propriétés du coproduit de $\sqcup\!\sqcup_q$

Soit $\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}$ le coproduit dual du produit de $q-$shuffle ($\sqcup\!\sqcup_q$). Nous allons donner une description combinatoire de $\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}$.

Proposition 12. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(w) = \sum_{I+J=[\![1,|w|]\!]} q^{Inv(I.J)} w[I] \otimes w[J], \tag{4.19}$$

où $w[I]$ et $w[J]$ sont les sous-mots de $w \in X^*$ correspondant aux places données par I et J.

Comme dans (4.19) page 68, posons : $\Delta_{RHS}(w) = \sum_{I+J=[\![1,|w|]\!]} q^{Inv(I.J)} w[I] \otimes w[J]$ où $w \in X^*$. Pour montrer que les deux coproduits sont égaux, on va montrer que leurs produits associés sont égaux.

Lemme 6. *Soit $\star_{RHS}$ la loi duale de Δ_{RHS}.*
Alors

$$\begin{cases} 1_{X^*} \star_{RHS} w &= w \star_{RHS} 1_{X^*} = w, \\ au \star_{RHS} bv &= a(u \star_{RHS} bv) + q^{|au|} b(au \star_{RHS} v). \end{cases} \tag{4.20}$$

où $a, b \in X$ et $w, u, v \in X^*$.

Preuve : Soient $a, b \in X$ et $u, v \in X^*$. Nous pouvons écrire que :

$$\begin{aligned} w \star_{RHS} 1_{X^*} &= \sum_{u \in X^*} \langle w \star_{RHS} 1_{X^*} \mid u \rangle\, u \\ &= \sum_{u \in X^*} \langle w \otimes 1_{X^*} \mid \Delta_{RHS}(u) \rangle\, u \\ &= \sum_{u \in X^*} \langle \sum_{I+J=[\![1,|u|]\!]} q^{Inv(I.J)} u[I] \otimes u[J] \mid w \otimes 1_{X^*} \rangle\, u \\ &= \sum_{u \in X^*} \sum_{I+J=[\![1,|u|]\!]} q^{Inv(I.J)} \langle u[I] \otimes u[J] \mid w \otimes 1_{X^*} \rangle\, u \\ &= \sum_{u \in X^*} \sum_{I+J=[\![1,|u|]\!]} q^{Inv(I.J)} \langle u[I] \mid w \rangle \langle u[J] \mid 1_{X^*} \rangle\, u \\ &= \sum_{u=w \in X^*} \sum_{\substack{I=[\![1,|u|]\!] \\ J=\varnothing}} q^{Inv(I)} \langle w[I] \mid w \rangle \langle 1_{X^*} \mid 1_{X^*} \rangle\, w \\ &= w. \end{aligned}$$

De même $1_{X^*} \star_{RHS} w = w$
et

$$\begin{aligned}
au \star_{RHS} bv &= \sum_{w \in X^*} \langle au \star_{RHS} bv \mid w \rangle \, w \\
&= \sum_{w \in X^*} \langle au \otimes bv \mid \Delta_{RHS}(w) \rangle \, w \\
&= \sum_{w \in X^*} \langle \sum_{I+J=[\![1,|w|]\!]} q^{Inv(I.J)} w[I] \otimes w[J] \mid au \otimes bv \rangle \, w \\
&= \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in I}} q^{Inv(I.J)} \langle w[I] \otimes w[J] \mid au \otimes bv \rangle \, w \\
&+ \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in J}} q^{Inv(I.J)} \langle w[I] \otimes w[J] \mid au \otimes bv \rangle \, w \\
&= \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in I}} q^{Inv(I.J)} \langle w[I] \mid au \rangle \langle w[J] \mid bv \rangle \, w \\
&+ \sum_{w \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in J}} q^{Inv(I.J)} \langle w[I] \mid au \rangle \langle w[J] \mid bv \rangle \, w \\
&= \sum_{w' \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in I}} q^{Inv(I'.J)} \langle w'[I'] \mid u \rangle \langle w[J] \mid bv \rangle \, aw' \\
&+ \sum_{w' \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in J}} q^{|au|} q^{Inv(I.J')} \langle w[I] \mid au \rangle \langle w[J'] \mid v \rangle \, bw' \\
&= a \sum_{w' \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in I}} q^{Inv(I'.J)} \langle w'[I'] \otimes w[J] \mid u \otimes bv \rangle \, w' \\
&+ b \sum_{w' \in X^*} \sum_{\substack{I+J=[\![1,|w|]\!] \\ 1 \in J}} q^{|au|} q^{Inv(I.J')} \langle w[I] \otimes w[J'] \mid au \otimes v \rangle \, w' \\
&= a \sum_{w' \in X^*} \sum_{I+J=[\![1,|w|]\!]} q^{Inv(I'.J)} \langle w'[I'] \otimes w[J] \mid u \otimes bv \rangle \, w' \\
&+ q^{|au|} b \sum_{w' \in X^*} \sum_{I+J=[\![1,|w|]\!]} q^{Inv(I.J')} \langle w[I] \otimes w[J'] \mid au \otimes v \rangle \, w' \\
&= a(u \star_{RHS} bv) + q^{|au|} b(au \star_{RHS} v)
\end{aligned}$$

où $I' = I - \{1\}$ et $J' = J - \{1\}$.

□

Lemme 7. *Soient Δ_1 et Δ_2 deux lois et leurs lois duales respectives $\star_1$ et $\star_2$. Si $\star_1 = \star_2$, alors nous avons : $\Delta_1 = \Delta_2$.*

Preuve : Supposons $\star_1 = \star_2$ et montrons que $\Delta_1 = \Delta_2$. Soit $w \in X^*$, nous avons

$$\begin{aligned}\Delta_1(w) &= \sum_{u,v\in X^*} \langle \Delta_1(w) \mid u\otimes v\rangle\, u\otimes v \\ &= \sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u\star_1 v\rangle\, u\otimes v \\ &= \sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u\star_2 v\rangle\, u\otimes v \\ &= \sum_{u,v\in X^*} \langle \Delta_2(w) \mid u\otimes v\rangle\, u\otimes v \\ &= \Delta_2(w).\end{aligned} \tag{4.21}$$

□

Nous pouvons maintenant donner une preuve de la proposition 12 page 68.

Preuve de la Proposition 12 page 68 : Grâce au lemme 6 page 69 on montre que $\star_{RHS} = ⧢_q$ et grâce au lemme 7 page 70 on a $\Delta_{RHS} = \Delta_{⧢_q}$.

□

On applique la définition à 1_{X^*}, a et ab :

Soient $w, u, v \in X^*$, nous avons : $\langle \Delta_{⧢_q}(w) \mid u\otimes v\rangle = \langle w \mid u ⧢_q v\rangle$ et

$\Delta_{⧢_q}(w) = \displaystyle\sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u ⧢_q v\rangle u\otimes v.$

Exemple 24. On a :

(i) $\Delta_{⧢_q}(1_{X^*}) = 1_{X^*}\otimes 1_{X^*}$.

(ii) $\Delta_{⧢_q}(a) = a\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes a$.

(iii) $\Delta_{⧢_q}(ab) = ab\otimes 1_{X^*} + 1_{X^*}\otimes ab + a\otimes b + qb\otimes a$.

Voici l'expression combinatoire des itérés du coproduit du produit de $q-$shuffle : selon les conventions générales, appliquées à un coproduit quelconque on définit

$$\Delta^{(0)} = Id; \qquad \Delta^{(p+1)} = (\Delta\otimes Id^{\otimes p})\circ\Delta^{(p)}. \tag{4.22}$$

Nous pouvons écrire la proposition suivante :

Proposition 13. *Soient $w \in X^*$ et $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$, on a :*

$$\begin{aligned}\Delta_{⧢_q}^{(p-1)}(w) &= \sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p\in X^*} \langle w \mid u_1 ⧢_q u_2 ⧢_q \cdots ⧢_q u_p\rangle u_1\otimes\cdots\otimes u_p \\ &= \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ w\in X^*,\, w[I_j]=u_j}} q^{Inv(I_1,\cdots,I_p)}(w[I_1])\otimes(w[I_2])\otimes\cdots\otimes(w[I_p])\end{aligned} \tag{4.23}$$

avec $|u_j| = |I_j| = n_j,\ j \in [\![1,p]\!]$ *et* $n = |w| = |u_1u_2\cdots u_p|$.

Preuve : Soit $u_1, u_2, \cdots, u_p \in X^*$, on a :

$$u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p = \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ u\in X^*, u[I_j]=u_j}} q^{Inv(I_1.\cdots.I_p)}u.$$

Alors

$$\sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p\in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$$

$$= \sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p\in X^*} \langle w \mid \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ u\in X^*, u[I_j]=u_j}} q^{Inv(I_1.\cdots.I_p)}u\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$$

$$= \sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p\in X^*} \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ u\in X^*, u[I_j]=u_j}} q^{Inv(I_1.\cdots.I_p)}\langle w \mid u\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p\ .$$

Les sommes ci-dessus sont des sommes finies, ce qui explique que l'on puisse échanger l'ordre de sommation. Si tous les I_j sont fixés alors $\langle w \mid u\rangle \neq 0$ implique $u_j = w[I_j]$ pour tout $j \in [\![1,p]\!]$.

$$\sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p\in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$$

$$= \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ w\in X^*, w[I_j]=u_j}} q^{Inv(I_1.\cdots.I_p)}(w[I_1]) \otimes (w[I_2]) \otimes \cdots \otimes (w[I_p])$$

□

Corollaire 3. *Soient $w \in X^*$ et $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 2}$. Pour $q = 1$, on a :*

$$\begin{aligned}
\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{(p-1)}(w) &= \sum_{u_1,u_2,\cdots,u_p \in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p\rangle u_1 \otimes \cdots \otimes u_p \\
&= \sum_{\substack{\biguplus_{j=1}^{p} I_j = [\![1,n]\!] \\ w\in X^*, w[I_j]=u_j}} (w[I_1]) \otimes (w[I_2]) \otimes \cdots \otimes (w[I_p])
\end{aligned} \tag{4.24}$$

avec $|u_j| = |I_j| = n_j$, $j \in [\![1,p]\!]$ et $n = |w| = |u_1u_2\cdots u_p|$.

Exemple 25. Pour $p = 2$, nous avons :
$\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(abb) = abb \otimes 1_{X^*} + 1_{X^*} \otimes abb + (q+q^2) b \otimes ab + (1+q) ab \otimes b + a \otimes bb + q^2 bb \otimes a.$

On voit bien que dans cet exemple que le coefficient de $u \otimes v$ dans $\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(w)$ est égal au coefficient de $w = abb$ dans $u \sqcup\!\sqcup_q v$.

Proposition 14. $(\mathbb{Q}[q]\langle X\rangle, \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}, e)$ *est une co-algèbre associative avec unité (co-AAU) et $e(P) = \langle P \mid 1_{X^*}\rangle$.*

Preuve : Coassociativité de $\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}$:
Montrons que $(\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q} \otimes Id) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q} = (Id \otimes \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}$. Soit $w \in X^*$, nous avons

$$\begin{aligned}
(\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q} \otimes Id) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(w) &= \sum_{u,v\in X^*} (\Delta_{\sqcup\!\sqcup_q} \otimes Id)\langle w \mid u \sqcup\!\sqcup_q v\rangle u \otimes v \\
&= \sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u \sqcup\!\sqcup_q v\rangle \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(u) \otimes v \\
&= \sum_{u,v\in X^*} \langle w \mid u \sqcup\!\sqcup_q v\rangle \sum_{u_1,u_2\in X^*} \langle u \mid u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2\rangle u_1 \otimes u_2 \otimes v \\
&= \sum_{u_1,u_2,v\in X^*} \langle w \mid u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q v\rangle u_1 \otimes u_2 \otimes v.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

De même

$$(Id \otimes \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}) \circ \Delta_{\sqcup\!\sqcup_q}(w) = \sum_{u,v_1,v_2\in X^*} \langle w \mid u \sqcup\!\sqcup_q v_1 \sqcup\!\sqcup_q v_2\rangle u \otimes v_1 \otimes v_2.$$

C'est donc la même chose, aux indices muets de sommation près.

Counité de $\Delta_{ш_q}$. On a : $e : \mathbb{Q}[q]\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{Q}[q]$.
Montrons que $(Id \otimes e) \circ \Delta_{ш_q} = (e \otimes Id) \circ \Delta_{ш_q}$. Soit $w \in X^*$, nous avons

$$\begin{aligned}(Id \otimes e) \circ \Delta_{ш_q}(w) &= \sum_{u,v \in X^*} (Id \otimes e)\langle w \mid u ш_q v\rangle u \otimes v \\ &= \sum_{u,v \in X^*} \langle w \mid u ш_q v\rangle u \otimes e(v).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Posons

$$e(v) = \langle a \mid u ш_q v\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } v \neq 1_{X^*} \\ 1 \text{ si } v = 1_{X^*} \end{cases}$$

ainsi $e(P) = \langle P \mid 1_{X^*}\rangle$.
Donc les termes de la somme sont nuls si $v \neq 1_{X^*}$.

$$(Id \otimes e) \circ \Delta_{ш_q}(w) = \langle w \mid w\rangle w \otimes 1_{\mathbb{K}} = w \otimes 1_{\mathbb{K}}.$$

□
En effet c'est le dual (graduée pour le multidegré) de l'algèbre (AAU) $(\mathbb{Q}[q]\langle X\rangle, ш_q, \mathbb{1}_{X^*})$ comme il résulte de [Dtp10].

4.2.3 Relation entre ш et $ш_q$

Rappelons que le produit de $q-$shuffle ($ш_q$) est une interpolation entre le produit de concaténation (pour $q = 0$) et le produit de shuffle ш (pour $q = 1$). Le but de cette partie est de mettre en évidence des liens existants entre le ш et $ш_q$.

Dans tout le document, nous dirons qu'un mot w est un shuffle de u et de v si $w \in u ш v$ (c'est-à-dire $w \in supp(u ш v)$). Par exemple, on a :

$$ab ш ab = 2abab + 4aabb.$$

(i) $abab \in ab ш ab$: on dira que $abab$ est un shuffle de ab et de ab (ou $abab \in supp(ab ш ab)$).
(ii) $aabb \in ab ш ab$: on dira que $aabb$ est un shuffle de ab et de ab (ou $aabb \in supp(ab ш ab)$).

À partir des définitions 22 page 66 et 23 page 66, on peut écrire le lemme suivant :

Lemme 8. *Soit* $u_1, u_2, \cdots, u_p \in X^*$ *, où* $p \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$*. Alors*

$$supp(u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p) = supp(u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p), \tag{4.27}$$

où $\langle u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p \mid v\rangle \in \mathbb{N}[q]$, $\forall v \in X^*$.

Preuve : Posons :
$supp(u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p) = \{v \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p \mid v\rangle = \alpha_v(q) \neq 0\}$ et

$supp(u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p) = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p \mid u\rangle = \alpha_u(1) \neq 0\}$.

$\alpha_v(q) \in \mathbb{N}[q]$, alors on peut écrire que $\alpha_v(q) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant d} a_j q^j$ où $a_j \in \mathbb{N}$ pour $j \in [\![0, d]\!]$.

Il nous suffit de montrer que $\alpha_v(q) \neq 0$ si et seulement si $\alpha_v(1) \neq 0$.

(i) Supposons que $\alpha_v(1) \neq 0$ alors le polynôme $\alpha_v(q)$ n'est pas identiquement nul.

(ii) Supposons que $\alpha_v(q) \neq 0$, $\alpha_v(q) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant d} a_j q^j$, $a_j \geqslant 0$ et $a_d > 0$. Alors
$\alpha_v(1) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant d} a_j \geqslant a_d > 0$.

De plus, $supp(u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p) = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup\!\sqcup_q u_2 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_p \mid u\rangle \neq 0\} = \{u \in X^* \mid \langle u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p \mid u\rangle \neq 0\} = supp(u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_p)$.
□

À partir de l'exemple 21 page 21 et l'équation (4.4) page 62 , nous pouvons écrire la définition suivante :

Définition 25. *Notons* $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$ *le sous-espace de* $\mathbb{K}\langle X\rangle$ *engendré par les mots de longueur* $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$*. Une action à droite du groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ *sur* $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$*, est définie par*

$$(w_i)\sigma = w_{\sigma(i)} \qquad \textit{avec} \qquad w_i \in X \qquad \textit{et} \qquad i \in [\![1, n]\!] \tag{4.28}$$

pour tout mot w *de longueur* n*, où* w_i *représente la* i^{ieme} *lettre de* w*. De façon équivalente,* $w = w_1 w_2 \cdots w_n$*, nous avons*

$$(w)\sigma = (w_1 w_2 \cdots w_n)\sigma = w_{\sigma(1)} w_{\sigma(2)} \cdots w_{\sigma(n)}. \tag{4.29}$$

Cette action à droite de $\mathfrak{S}_n$ sur les mots de longueur n s'étend par linéarité à une action de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}\mathfrak{S}_n$ sur $\mathbb{K}\langle X\rangle_n$.

Exemple 26. Soient $v = a_1 a_2 a_3$ et $u = abab = a_1 a_2 a_3 a_4$.

(i) Pour $\sigma = 213$, on a : $(v)\sigma = (a_1a_2a_3)213 = a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)} = a_2a_1a_3$.

(ii) Pour $\sigma = 3124$, on a : $(u)\sigma = (abab)3124 = a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} = a_3a_1a_2a_4 = aabb$.
(iii) Pour $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$, on a :

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma \in 12 \sqcup\!\sqcup 34} (abab)\sigma &= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup\!\sqcup 34} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\ &= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_2a_4 + a_1a_3a_4a_2 \\ &+ a_3a_1a_2a_4 + a_3a_1a_4a_2 + a_3a_4a_1a_2 \\ &= abab + aabb + aabb \\ &+ aabb + aabb + abab \\ &= 2(ab)^2 + 4aabb.\end{aligned}$$

Dans la suite, on utilise le support mais dans ce cas, on considère l'algèbre du groupe symétrique comme un sous-espace d'un espace de polynômes sur des mots.

Définition 26. *Soient $m, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$.*
On définit le $k-$ième shuffle décalé de $[1...m]$ par

$$[1...m]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k} = (1...m) \sqcup\!\sqcup (m+1...2m) \sqcup\!\sqcup (2m+1...3m) \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup ((k-1)m+1...km), \quad (4.30)$$

où $supp([1...m]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k}) \in \mathfrak{S}_{km}$.

Exemple 27. $[12]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} 2} = (12) \sqcup\!\sqcup (34) = 12 \sqcup\!\sqcup 34 = 1234 + 1324 + 1342 + 3124 + 3142 + 3412$ et $supp([12]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} 2}) = \{1234, 1324, 1342, 3124, 3142, 3412\} \in \mathfrak{S}_4$.

Lemme 9. *Soient $m, k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Alors*

$$[1...m]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k} = \sum_{\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_m} \tau_1 + \sum_{\substack{\tau_2 \in [1\cdots m]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k} \\ \tau_2 \notin (\mathfrak{S}_k)_m}} \tau_2, \quad (4.31)$$

où $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_{km}$.

Preuve : Soient $u_1, u_2, \cdots, u_k \in X^+$ de longueurs respectives $n_1, n_2, \cdots, n_k$ et $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$. Le polynôme $u_1 \sqcup\!\sqcup u_2 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_k$ est la somme de $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!}$ mots de longueur n. Si $n_1 = n_2 = \cdots = n_k$, alors on a $n = n_1k$. On peut écrire que $\frac{n!}{n_1!\cdots n_k!} = \frac{(n_1k)!}{(n_1!)^k} \geqslant k!$ et le cardinal de $(\mathfrak{S}_k)_m$ est $k!$. On conclut en remarquant que $[1...m]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k}$ est sans multiplicités.
□

Lemme 10. *Soient $u, v \in X^+$. Alors*
(i) $u \sqcup\!\sqcup v = \displaystyle\sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} (uv)\sigma$.

(ii) $u \sqcup\!\sqcup_q v = \displaystyle\sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} q^{Inv(\sigma)}(uv)\sigma.$
où $\sigma \in \mathfrak{S}_{|u|+|v|}$.

Preuve : (i) Posons $uv = a_1a_2\cdots a_{|u|+|v|}$. À partir des définitions 22 page 66 et 25 page 75, nous pouvons écrire que :

$$u \sqcup\!\sqcup v = \sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} (uv)\sigma = \sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}\cdots a_{\sigma(|u|+|v|)}. \tag{4.32}$$

(ii) Posons $uv = a_1a_2\cdots a_{|u|+|v|}$. À partir de la définition 25 page 75 et du lemme 8 page 75, nous pouvons écrire que :

$$u \sqcup\!\sqcup_q v = \sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} q^{Inv(\sigma)}(uv)\sigma = \sum_{\sigma \in (1\cdots|u|) \sqcup\!\sqcup (|u|+1\cdots|u|+|v|)} q^{Inv(\sigma)}a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}\cdots a_{\sigma(|u|+|v|)}. \tag{4.33}$$

□

Exemple 28. $u = ab$, $v = ab$ et $uv = abab = a_1a_2a_3a_4$ (avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$).

$$\begin{aligned} u \sqcup\!\sqcup_q u &= ab \sqcup\!\sqcup_q ab \\ &= \sum_{\sigma \in (12) \sqcup\!\sqcup (34)} q^{Inv(\sigma)} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\ &= q^{Inv(1234)}a_1a_2a_3a_4 + q^{Inv(1324)}a_1a_3a_2a_4 + q^{Inv(1342)}a_1a_3a_4a_2 \\ &+ q^{Inv(3124)}a_3a_1a_2a_4 + q^{Inv(3142)}a_3a_1a_4a_2 + q^{Inv(3412)}a_3a_4a_1a_2 \\ &= abab + qaabb + q^2aabb \\ &+ q^2aabb + q^3aabb + q^4abab \\ &= (1+q^4)(ab)^2 + (q + 2q^2 + q^3)aabb. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Remarque 10. Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $X^\alpha = a_1^{\alpha_1}a_2^{\alpha_2}\cdots a_n^{\alpha_n}$ avec $a_1 < a_2 < \cdots a_n \in X$ et $n, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Alors

$$M(X^\alpha) = supp(a_1^{\alpha_1} \sqcup\!\sqcup a_2^{\alpha_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup a_n^{\alpha_n}). \tag{4.35}$$

Exemple 29. Soit $X^\alpha = a^2b^2$ avec $X = \{a < b\}$ et $\alpha = (2,2)$. Nous avons :
$a^2 \sqcup\!\sqcup b^2 = a^2b^2 + abab + ab^2a + ba^2b + baba + b^2a^2$.
$supp(a^2 \sqcup\!\sqcup b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$ et
$M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$.

4.3 Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Considérons un paramètre formel q.

Résumé : Dans cette partie, nous présentons une triangularisation des éléments $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$ ($\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$) et une construction récursive de la famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$. La famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$ est définie par la même relation de récurrence que la famille $(S_w)_{w\in X^*}$ que nous avons considéré plus haut (3.34) page 47 .

4.3.1 Triangularisation des éléments $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$ ($\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$)

Le théorème suivant montre que les éléments $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$ sont triangulaire par rapport à l'ordre lexicographique :

Théorème 9. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $\ell^k \in X^\alpha$. Alors*

$$\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k} = [k]_{q^{|\ell|^2}}!\ell^k + \sum_{\substack{u<\ell^k \\ u\in X^\alpha}} \beta_u(q)u, \tag{4.36}$$

où $\beta_u(q) = \langle \ell^{\sqcup\!\sqcup_q k} \mid u\rangle \in \mathbb{N}[q]$.

Pour la preuve de ce théorème, nous allons écrire la proposition suivante due à C. Reutenauer et G. Mélançon [Reu93, Mre89, Mela91] :

Proposition 15. [*Reu93*, *Mre89*, *Mela91*] *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $\ell^k \in X^\alpha$. Posons $\ell^{\sqcup\!\sqcup k} = (\ell)^{\sqcup\!\sqcup k} = \underbrace{\ell \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell}_{k \text{ fois}}$. Alors*

$$\ell^{\sqcup\!\sqcup k} = k!\ell^k + \sum_{\substack{u<\ell^k \\ u\in X^\alpha}} \beta_u(1)u, \tag{4.37}$$

où $\beta_u(1) = \langle \ell^{\sqcup\!\sqcup k} \mid u\rangle \in \mathbb{N}$.

Lemme 11. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $\ell^k \in X^\alpha$. Alors*

$$\ell^{\sqcup\!\sqcup k} = k!\ell^k + \sum_{\substack{\tau\in[1\cdots|\ell|]^{\sqcup\!\sqcup k} \\ \tau\notin(\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}}} (\ell^k)\tau, \tag{4.38}$$

où $\tau \in \mathfrak{S}_{k|\ell|}$.

Preuve : À partir de la définition 20 page 63, du lemme 10 page 76, théorème 7 page 64 et aux équations (4.30) page 76 et (4.31) page 76, nous pouvons écrire que :

$$[1...|\ell|]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k} = (1...|\ell|) \sqcup\!\sqcup (|\ell|+1...2|\ell|) \sqcup\!\sqcup (2|\ell|+1...3|\ell|) \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup ((k-1)|\ell|+1...k|\ell|),$$

$$\ell^{\sqcup\!\sqcup k} = \sum_{\tau \in [1\cdots|\ell|]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k}} (\ell^k)\tau = \sum_{\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}} (\ell^k)\tau_1 + \sum_{\substack{\tau_2 \in [1\cdots|\ell|]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k} \\ \tau_2 \notin (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}}} (\ell^k)\tau_2$$

avec $\tau_1, \tau_2 \in \mathfrak{S}_{k|\ell|}$ et $\ell^{\sqcup\!\sqcup k} = k!\ell^k + \sum_{\substack{u<\ell^k \\ u \in X^\alpha}} \beta_u(1)u$.

Sachant que le cardinal de $(\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}$ est $k!$, les seules permutations de $[1...|\ell|]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} k}$ laissant ℓ^k invariant sont celles de $(\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}$ (c'est-à-dire $(\ell^k)\tau_1 = \ell^k$ pour $\tau_1 \in (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}$).
□

Preuve du Théorème 9 page 78 :
D'après la proposition 15 page 78, on a $supp(\ell^{\sqcup\!\sqcup k}) \subset \{u \leqslant \ell^k \mid u \in X^\alpha\}$. Comme d'après le lemme 8 page 75, $supp(\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}) = supp(\ell^{\sqcup\!\sqcup k})$, il suffit donc de calculer le coefficient de ℓ^k dans le développement de $\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k}$. D'après les lemmes 10 page 76 et 11 page 78, ce coefficient est $\sum_{\tau \in (\mathfrak{S}_k)_{|\ell|}} q^{Inv(\tau)}$. On conclut en utilisant le théorème 7 page 64.
□

Exemple 30. (i) Pour $w = (\ell)^2 = (ab)^2 = abab = a_1a_2a_3a_4$ avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$, nous avons

$$\begin{aligned}
(ab)^{\sqcup\!\sqcup 2} &= \sum_{\sigma \in [12]^{\bar{\sqcup\!\sqcup} 2}} (abab)\sigma \\
&= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup\!\sqcup 34} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\
&= a_1a_2a_3a_4 + a_1a_3a_2a_4 + a_1a_3a_4a_2 \\
&+ a_3a_1a_2a_4 + a_3a_1a_4a_2 + a_3a_4a_1a_2 \\
&= abab + aabb + aabb \\
&+ aabb + aabb + abab \\
&= 2!(ab)^2 + 4aabb.
\end{aligned}$$

(ii) Pour $w = (\ell)^2 = (ab)^2 = abab = a_1a_2a_3a_4$ avec $a_1 = a_3 = a$ et $a_2 = a_4 = b$, nou avons

$$\begin{aligned}
(ab)^{\sqcup\!\sqcup_q 2} &= \sum_{\sigma \in [12]^{\tilde{\sqcup}2}} q^{Inv(\sigma)}(abab)\sigma \\
&= \sum_{\sigma \in 12 \sqcup\!\sqcup 34} q^{Inv(\sigma)} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)} \\
&= q^{Inv(1234)}a_1a_2a_3a_4 + q^{Inv(1324)}a_1a_3a_2a_4 + q^{Inv(1342)}a_1a_3a_4a_2 \\
&+ q^{Inv(3124)}a_3a_1a_2a_4 + q^{Inv(3142)}a_3a_1a_4a_2 + q^{Inv(3412)}a_3a_4a_1a_2 \\
&= abab + qaabb + q^2aabb \\
&+ q^2aabb + q^3aabb + q^4abab \\
&= (1+q^4)(ab)^2 + (q+2q^2+q^3)aabb \\
&= [2]_{q^4}!(ab)^2 + (q+2q^2+q^3)aabb.
\end{aligned}$$

(iii) Pour $w = (\ell)^2 = (aab)^2 = aabaab = a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ avec $a_1 = a_2 = a_4 = a_5 = a$ et $a_3 = a_6 = b$, nous avons

$$\begin{aligned}
(aab)^{\sqcup\!\sqcup_q 2} &= \sum_{\sigma \in [123]^{\tilde{\sqcup}2}} q^{Inv(\sigma)}(aabaab)\sigma \\
&= \sum_{\sigma \in 123 \sqcup\!\sqcup 456} q^{Inv(\sigma)} a_{\sigma(1)}a_{\sigma(2)}a_{\sigma(3)}a_{\sigma(4)}a_{\sigma(5)}a_{\sigma(6)} \\
&= [2]_{q^9}!(aab)^2 + (q^8+q^7+q^6+q^3+q^2+q)a^3bab \\
&+ (q^7+2q^6+3q^5+3q^4+2q^3+q^2)a^4b^2.
\end{aligned}$$

4.3.2 Construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

La construction des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$ est l'un des objectifs principaux de cette thèse. Ils sont, en fait, définis par la même relation de récurrence que les S_w, $w \in X^*$. Pour cela rappelons la construction des S_w, $w \in X^*$ (3.34) page 47 dans [Reu93, Mre89, Mela91] :

$$S_w = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1_{X^*} \; ; \\ aS_u & \text{si} \quad w = au \text{ et } w \in \mathcal{L}yn(X) \; ; \\ \dfrac{S_{\ell_1}^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup S_{\ell_k}^{\sqcup\!\sqcup i_k}}{i_1! \ldots i_k!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases}$$

La famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est un $q-$analogue de la famille $(S_w)_{w \in X^*}$. Le théorème suivant nous donne une construction récursive des $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$:

Théorème 10. *Soit* $w \in X^*$. *Alors*

$$S_w^{(q)} = \begin{cases} w & si \quad |w| = 1_{X^*} \ ; \\ aS_u^{(q)} & si \quad w = au \ et \ w \in \mathcal{L}yn(X) \ ; \\ \dfrac{(S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \ldots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} & si \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.39}$$

Pour la preuve de ce théorème, nous allons écrire la proposition suivante :

Proposition 16. *Soient* $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ *et* $w = \ell_1^{i_1}\ell_2^{i_2}\cdots\ell_k^{i_k} \in X^\alpha$ *avec* $\ell_1 > \ell_2 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)$, $k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. *Alors*

(i) $Q_w = \frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \ell_2^{\sqcup\!\sqcup i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell_k^{\sqcup\!\sqcup i_k}}{i_1! i_2! \cdots i_k!} = w + \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \beta_u(1) u,$

où $\beta_u(1) = \langle Q_w \mid u \rangle \in \mathbb{N}$.

(ii) $Q_w^{(q)} = \frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! [i_2]_{q^{|\ell_2|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} = w + \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \beta_u(q) u,$

où $\beta_u(q) = \langle Q_w^{(q)} \mid u \rangle \in \mathbb{Q}^+(q)$.

(iii) $supp(Q_w) = supp(Q_w^{(q)})$.

Preuve : *(i)* À partir de la proposition 15 page 78 , nous pouvons écrire que : pour tous $\ell_j \in \mathcal{L}yn(X)$, $j \in [\![1, k]\!]$ on a : $\ell_j^{\sqcup\!\sqcup i_j} = i_j!(\ell_j)^{i_j} + \sum_{v_j < (\ell_j)^{i_j}} c_{v_j}(1) v_j$ avec $c_{v_j}(1) = \langle \ell_j^{\sqcup\!\sqcup i_j} \mid v_j \rangle$.
Les coefficients du support du polynôme $\ell_1^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \ell_2^{\sqcup\!\sqcup i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell_k^{\sqcup\!\sqcup i_k}$ sont des entiers naturels tous divisibles par $i_1! i_2! \cdots i_k!$ et $\ell_1^{i_1}\ell_2^{i_2}\cdots\ell_k^{i_k}$ apparaît dans ce polynôme. De plus si $u_1 \ldots u_k \neq w$, $u_1 < \ell_1^{i_1}, \ldots, u_k < \ell_k^{i_k}$ et $|u_1| = |\ell_1^{i_1}|, \ldots, |u_k| = |\ell_k^{i_k}|$ alors $u_1 \cdots u_k < w$. Donc, on a :

$$\ell_1^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \ell_2^{\sqcup\!\sqcup i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell_k^{\sqcup\!\sqcup i_k} = i_1! i_2! \cdots i_k! . \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} + \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \theta_u(1) u. \tag{4.40}$$

De plus, en divisant (4.40) page 81 par $i_1! i_2! \cdots i_k!$, on obtient Q_w.
(ii) À partir du théorème 9 page 78, nous pouvons écrire que : pour tous $\ell_j \in \mathcal{L}yn(X)$, $j \in [\![1, k]\!]$ on a : $\ell_j^{\sqcup\!\sqcup_q i_j} = [i_j]_{q^{|\ell_j|^2}}!(\ell_j)^{i_j} + \sum_{v_j < (\ell_j)^{i_j}} c_{v_j}(q) v_j$ avec $c_{v_j}(q) = \langle \ell_j^{\sqcup\!\sqcup_q i_j} \mid v_j \rangle$ et $\langle \ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k} \mid \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} \rangle = [i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!$. De plus si $u_1 \ldots u_k \neq w$, $u_1 < \ell_1^{i_1}, \ldots, u_k < \ell_k^{i_k}$ et $|u_1| = |\ell_1^{i_1}|, \ldots, |u_k| = |\ell_k^{i_k}|$ alors $u_1 \cdots u_k < w$. Donc, on a :

$$\ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k} = [i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}! \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} + \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \theta_u(q) u. \tag{4.41}$$

De plus, en divisant (4.41) page 81 par $[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}!\cdots[i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!$, on obtient $Q_w^{(q)}$.
où $\theta_u(q)\in\mathbb{N}[q]$.

(iii) À partir du lemme 8 page 75 et le théorème 9 page 78, nous pouvons écrire que $supp(\ell_1^{ш i_1} ш \ell_2^{ш i_2} ш \cdots ш \ell_k^{ш i_k}) = supp(\ell_1^{ш_q i_1} ш_q \ell_2^{ш_q i_2} ш_q \cdots ш_q \ell_k^{ш_q i_k})$.
Par conséquent $supp(Q_w) = supp(Q_w^{(q)})$.
□

Preuve du Théorème 10 page 81 : La famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$ est un $q-$analogue de la famille $(S_w)_{w\in X^*}$. Les éléments $S_w^{(q)}$ sont, en fait, définis par la même relation de récurrence que les S_w, $w\in X^*$. Les propositions 15 page 78 et 16 page 81 et le théorème 9 page 78 justifient l'expression de la formule des $S_w^{(q)}$, $w\in X^*$.
□

Exemple 31. Soient $X=\{a<b\}$ et $M(X^\alpha)=\{aabb<abab<abba<baab<baba<bbaa\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha=(2,2)$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
S^{(q)}_{a^2b^2} &= a^2b^2 \ ;\\
S^{(q)}_{abab} &= \frac{S_{ab}^{ш_q 2}}{1+q^4}\\
&= \frac{1}{1+q^4}(ab ш_q ab) = abab + \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4}a^2b^2 \ ;\\
S^{(q)}_{ab^2a} &= ab^2 ш_q a\\
&= (q^2+q^3)a^2b^2 + ab^2a + qabab \ ;\\
S^{(q)}_{ba^2b} &= b ш_q a^2b\\
&= ba^2b + qabab + (q^2+q^3)a^2b^2 \ ;\\
S^{(q)}_{baba} &= b ш_q ab ш_q a\\
&= (q^5+2q^4+q^3)a^2b^2 + (q^2+2q^3)abab + (q+q^2)ba^2b + (q+q^2)ab^2a + baba \ ;\\
S^{(q)}_{b^2a^2} &= \frac{S_b^{ш_q 2}}{1+q} ш_q \frac{S_a^{ш_q 2}}{1+q}\\
&= b^2a^2 + q^4a^2b^2 + q^2ba^2b + q^2ab^2a + q^3abab + qbaba.
\end{aligned} \tag{4.42}$$

La matrice $N = (\langle S_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ recherchée est donc :

$$\begin{array}{c} \\ S^{(q)}_{a^2b^2} = \\ S^{(q)}_{abab} = \\ S^{(q)}_{ab^2a} = \\ S^{(q)}_{ba^2b} = \\ S^{(q)}_{baba} = \\ S^{(q)}_{b^2a^2} = \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 1 & 0 & 0 & 0 \\ q^2+q^3 & q & 0 & 1 & 0 & 0 \\ q^5+2q^4+q^3 & q^2+2q^3 & q+q^2 & q+q^2 & 1 & 0 \\ q^4 & q^3 & q^2 & q^2 & q & 1 \end{pmatrix} \end{array}. \tag{4.43}$$

4.3.3 Triangularité des éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le produit de $q-$shuffle ($\sqcup\!\sqcup_q$) est une interpolation entre le produit de shuffle ($\sqcup\!\sqcup$) (pour $q = 1$) et le produit de concaténation (pour $q = 0$).

La famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$ est un $q-$analogue de la famille $(S_w)_{w\in X^*}$.

Corollaire 4. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$S_w = S_w^{(1)}. \tag{4.44}$$

Lemme 12. *Soient $k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et $T_1^{(q)}, \ldots, T_k^{(q)}$ des polynômes homogènes à coefficients dans $\mathbb{N}[q]$. Alors*

$$supp(T_1^{(q)} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q T_k^{(q)}) = supp(T_1^{(1)} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup T_k^{(1)}) \tag{4.45}$$

avec $supp(T_i^{(q)}) = supp(T_i^{(1)})$ pour $i \in [\![1, k]\!]$.

Preuve : Soit $(T_1^{(q)}, \cdots, T_k^{(q)}) \in (\mathbb{N}[q]\langle X \rangle)^k$. En posant $T_i^{(q)} = \sum_{u_i\in X^*} \langle T_i^{(q)} \mid u_i \rangle u_i$, on calcule $T_1^{(q)} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q T_k^{(q)}$ par

$$T_1^{(q)} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q T_k^{(q)} = \sum_{u_1,\cdots,u_k\in X^*} \Big(\prod_{i=1}^{k} \langle T_i^{(q)} \mid u_i \rangle \Big) u_1 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_k$$

et $T_1^{(1)} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup T_k^{(1)}$ par

$$T_1^{(1)} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup T_k^{(1)} = \sum_{u_1,\cdots,u_k\in X^*} \Big(\prod_{i=1}^{k} \langle T_i^{(1)} \mid u_i \rangle \Big) u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_k.$$

On conclut la preuve en utilisant le lemme 8 page 75 : $supp(u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_k) = supp(u_1 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_k)$.

□

Lemme 13. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$supp(S_w) = supp(S_w^{(q)}). \tag{4.46}$$

Preuve : Soit $w = \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k}$ avec $\ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$. Rappelons que : $S_w = S_w^{(1)}$ et
$Q_w^{(1)} = \frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \ell_2^{\sqcup\!\sqcup i_2} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup \ell_k^{\sqcup\!\sqcup i_k}}{i_1! i_2! \cdots i_k!}$ et $Q_w^{(q)} = \frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! [i_2]_{q^{|\ell_2|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!}$.
Nous avons pu démontrer dans le lemme 8 page 75 et dans la proposition 16 page 81 que $supp(\ell^{\sqcup\!\sqcup k}) = supp(\ell^{\sqcup\!\sqcup_q k})$ pour $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et que $supp(Q_w^{(1)}) = supp(Q_w^{(q)})$ pour $w \in X^*$. Or dans [Reu93, Mre89, Mela91], nous pouvons écrire que : $S_{\ell_j}^{(1)} = \ell_j + \sum_{u_j < \ell_j} \beta_{u_j}(1) u_j$ pour $j \in [\![1, k]\!]$. Donc

$$S_w^{(1)} = \frac{(\ell_1 + \sum_{u_1 < \ell_1} \beta_{u_1}(1) u_1)^{\sqcup\!\sqcup i_1} \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup (\ell_k + \sum_{u_k < \ell_k} \beta_{u_k}(1) u_k)^{\sqcup\!\sqcup i_k}}{i_1! \cdots i_k!} = Q_w^{(1)} + Q_w'^{(1)}$$

où $Q_w'^{(1)} = \dfrac{\sum_{\substack{u_1, \cdots, u_k \in X^* \\ u_1 \cdots u_k \neq w}} \Big(\prod_{i=1}^{k} \langle S_{\ell_i}^{(1)} \mid u_i \rangle \Big) u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_k}{i_1! \dots i_k!}$. À partir du corollaire 4 page 83, nous pouvons écrire que :

$$S_w^{(q)} = \frac{(\ell_1 + \sum_{u_1 < \ell_1} \beta_{u_1}(q) u_1)^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (\ell_k + \sum_{u_k < \ell_k} \beta_{u_k}(q) u_k)^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \dots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} = Q_w^{(q)} + Q_w'^{(q)} \text{ et}$$

on obtient $Q_w'^{(q)} = \dfrac{\sum_{\substack{u_1, \cdots, u_k \in X^* \\ u_1 \cdots u_k \neq w}} \Big(\prod_{i=1}^{k} \langle S_{\ell_i}^{(q)} \mid u_i \rangle \Big) u_1 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_k}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \dots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!}$.

À partir du lemme 8 page 75, on a $supp(u_1 \sqcup\!\sqcup \cdots \sqcup\!\sqcup u_k) = supp(u_1 \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q u_k)$. Donc $supp(Q_w'^{(1)}) = supp(Q_w'^{(q)})$.
À partir du lemme 12 page 83, on a $supp(Q_w^{(1)} + Q_w'^{(1)}) = supp(Q_w^{(q)} + Q_w'^{(q)})$. Donc $supp(S_w^{(1)}) = supp(S_w^{(q)})$.
□

Proposition 17. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors, la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure :*

$$S_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{v < w \\ v \in X^\alpha}} \beta_v(q) v \quad \textit{avec} \quad \beta_v(q) = \langle S_w^{(q)} \mid v \rangle \in \mathbb{Q}^+(q). \tag{4.47}$$

Preuve : Un théorème dû a G.Mélançon et C.Reutenauer [Reu93, Mre89, Mela91] prouve que la famille $(S_w^{(1)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure :

$$S_w^{(1)} = w + \sum_{\substack{v<w \\ v \in X^\alpha}} \alpha_v(1) v \quad \text{avec} \quad \alpha_v(1) = \langle S_w^{(1)} \mid v \rangle \in \mathbb{N}$$

et le lemme 13 page 84 ($supp(S_w^{(1)}) = supp(S_w^{(q)})$) nous assurent que la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure.
□

Proposition 18. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors, la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ forme une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X \rangle_\alpha$ (voir page 43).*

Preuve : La famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure.
Il est facile de voir que $N = (\langle S_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}$ est inversible, nulpotente et finie par blocs.
□

4.4 Construction récursive des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Considérons un paramètre formel q.

Résumé : La construction donnée dans les paragraphes précédents montre que la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ est multihomogène et triangulaire inférieure, ce qui permet de considérer la famille duale, que nous désignons par $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Ces deux familles sont duales l'une de l'autre : $\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^*$. Par dualité, il est donc possible de construire la famille $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ qui est l'objectif principal de cette partie.

4.4.1 Construction des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et échange les caractères "inférieur" et "supérieur". On peut alors construire les éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$ comme suit :
Pour chaque multidegré $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, on construit la matrice N des coefficients des $S_w^{(q)}$, $w \in X^\alpha$ sur les mots :

$$N_{u,v} = \langle S_u^{(q)} \mid v \rangle, \qquad u, v \in X^\alpha. \tag{4.48}$$

La matrice des coefficients des $P_w^{(q)}$, $w \in X^\alpha$ sur les mots, est donnée par :

$$M = (\langle P_u^{(q)} \mid v \rangle)_{u,v \in X^\alpha}. \tag{4.49}$$

Il est facile de voir que N est inversible en tant que matrice de changement de base.

$$u = \sum_{w \in X^*} \langle S_w^{(q)} \mid u \rangle P_w^{(q)} \qquad et \qquad u = \sum_{w \in X^*} \langle P_w^{(q)} \mid u \rangle S_w^{(q)}, \tag{4.50}$$

de manière équivalente

$$\langle S_u^{(q)} \mid P_v^{(q)} \rangle = \delta_{uv}, \qquad \forall u, v \in X^*. \tag{4.51}$$

Les matrices N et M vérifient l'identité $M = ({}^t N)^{-1}$.
La construction présentée dans le lemme 5 page 45 est en fait plus générale, comme le montre ci-dessous.

Proposition 19. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77) . Alors*

$$P_{w_{m-j}}^{(q)} = w_{m-j} - \sum_{r=m-j+1}^{m} \langle S_{w_r}^{(q)} \mid w_{m-j} \rangle P_{w_r}^{(q)} \qquad \textit{avec} \qquad j \in [\![0, m-1]\!]. \tag{4.52}$$

Preuve : Voir le lemme 5 page 45.

□

Exemple 32. Soient $X = \{a < b\}$ et $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$.

$$\begin{aligned}
P_{b^2a^2}^{(q)} &= b^2a^2 \ ; \\
P_{baba}^{(q)} &= baba - qP_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= baba - qb^2a^2 \ ; \\
P_{ba^2b}^{(q)} &= ba^2b - (q+q^2)P_{baba}^{(q)} - q^2P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= ba^2b - (q+q^2)baba + q^3b^2a^2 \ ; \\
P_{ab^2a}^{(q)} &= ab^2a - (q+q^2)P_{baba}^{(q)} - q^2P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= ab^2a - (q+q^2)baba + q^3b^2a^2 \ ; \\
P_{abab}^{(q)} &= abab - qP_{ab^2a}^{(q)} - qP_{ba^2b}^{(q)} - (q^2+2q^3)P_{baba}^{(q)} - q^3P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= abab - qab^2a - qba^2b + q^2baba \ ; \\
P_{a^2b^2}^{(q)} &= a^2b^2 - \frac{q(q^2+2q+1)}{1+q^4}P_{abab}^{(q)} \\
&- (q^2+q^3)P_{ab^2a}^{(q)} - (q^2+q^3)P_{ba^2b}^{(q)} - (q^3+2q^4+q^5)P_{baba}^{(q)} - q^4P_{b^2a^2}^{(q)} \\
&= a^2b^2 - \frac{q(q^2+2q+1)}{1+q^4}abab - \frac{q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ab^2a \\
&- \frac{q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ba^2b + \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4}baba - q^6b^2a^2.
\end{aligned} \tag{4.53}$$

La matrice recherchée $M = ({}^tN)^{-1} = (\langle P_u^{(q)} \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{c} \\ P_{a^2b^2}^{(q)} = \\ P_{abab}^{(q)} = \\ P_{ab^2a}^{(q)} = \\ P_{ba^2b}^{(q)} = \\ P_{baba}^{(q)} = \\ P_{b^2a^2}^{(q)} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\ 0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -q-q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q-q^2 & q^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.54}$$

4.4.2 Caractérisation des éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Nous avons vu dans les paragraphes précédents que le produit de $q-$shuffle ($⧢_q$) est une interpolation entre le produit de shuffle (⧢) (pour $q = 1$) et le produit de concaténation (pour $q = 0$).
Les éléments $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$ sont caractérisés par :

Proposition 20. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors, la famille $(P_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire supérieure :*

$$P_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{w<v \\ v\in X^\alpha}} \beta_v(q)v \quad avec \quad \beta_v(q) = \langle P_w^{(q)} \mid v\rangle \in \mathbb{Q}(q). \tag{4.55}$$

Preuve : Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et échange les caractères "supérieur" et "inférieur". Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est triangulaire supérieure (voir lemme 4 page 45).
De plus, le mot $w \in X^\alpha$ est le plus petit mot par rapport à l'ordre lexicographique tel que $\langle P_w^{(q)} \mid v\rangle \neq 0, \forall v \in X^\alpha : w = min(supp(P_w^{(q)}))$.
□

Proposition 21. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors*

les polynômes $(P_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle_\alpha$ (lire page 43).

Preuve : Il est facile de voir que la matrice M est inversible (proposition 20 page 87). Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et échange les caractères "supérieur" et "inférieur". Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est une base triangulaire supérieure (voir lemme 4 page 45).
□

Proposition 22. *Soit $w \in X^*$. Alors*

$$P_w^{(1)} = P_w = \begin{cases} w & si \quad |w| \leqslant 1 \ ; \\ \left[P_{\ell_1}^{(1)}, P_{\ell_2}^{(1)}\right] & si \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X)\setminus X \ et \ (\ell_1, \ell_2) = \sigma(\ell) \ ; \\ (P_{\ell_1}^{(1)})^{i_1} \dots (P_{\ell_k}^{(1)})^{i_k} & si \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \dots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \dots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.56}$$

Définition 27. *Soient $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$ et $\sigma(\ell)$ sa factorisation standard.*
On définit le $q-$crochet de ℓ par

$$[\ell]_q = \begin{cases} \ell & si \quad |\ell| \leqslant 1 \ ; \\ [[\ell_1]_q, [\ell_2]_q]_{q^{|\ell|-1}} & si \quad \sigma(\ell) = (\ell_1, \ell_2) \ et \ \ell_1, \ell_2 \in \mathcal{L}yn(X). \end{cases} \tag{4.57}$$

Conjecture 1. *(Test numérique) Soit $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$. Si $supp(P_\ell^{(q)}) = supp(P_\ell^{(1)})$, alors*

$$P_\ell^{(q)} = [\ell]_q \tag{4.58}$$

jusqu'à l'ordre 11 (c'est-à-dire pour tous les mots de Lyndon de longueur inférieure ou égale à 11).

Exemple 33. *(i)* $P_{ab}^{(q)} = [ab]_q = [a, b]_q = ab - qba.$

(ii) $P_{abb}^{(q)} = [abb]_q = [[a, b]_q, b]_{q^2} = abb - (q + q^2)bab + q^3 bba.$

(iii) $P_{bbbc}^{(q)} = [bbbc]_q = [b, [b, [b, c]_q]_{q^2}]_{q^3} = bbbc - (q + q^2 + q^3)bbcb + (q^3 + q^4 + q^5)bcbb - q^6 cbbb.$

Proposition 23. *Soient $i, j \in \mathbb{N}$ et $X = \{a < b\}$. Alors*

$$P_{a^iba^j}^{(q)} = [a^ib]_q a^j. \tag{4.59}$$

Preuve : Montrons que $P_{a^iba^j}^{(q)} = [a^ib]_q a^j$ par récurrence sur i. En effet, nous pouvons calculer explicitement les $S_{a^iba^j}^{(q)} = \frac{1}{[j]_q!} S_{a^ib}^{(q)} \sqcup\!\sqcup_q a^{\sqcup\!\sqcup_q j} = S_{a^ib}^{(q)} \sqcup\!\sqcup_q a^j = \sum_{h=0}^{j} q^h \frac{[h+i]_q!}{[h]_q![i]_q!} a^{i+h} b a^{j-h}$.
On en déduit que

$$P_{a^iba^j}^{(q)} = a^iba^j - \sum_{h=0}^{i-1} \langle q^{i-h} S_{a^hba^{i+j-h}}^{(q)} | a^iba^j \rangle P_{a^hba^{i+j-h}}^{(q)} = a^iba^j - \sum_{h=0}^{i-1} q^{i-h} \frac{[i]_q!}{[i-h]_q![h]_q!} P_{a^hba^{i+j-h}}^{(q)}.$$

Si on suppose comme hypothèse de récurrence que $P_{a^hba^k}^{(q)} = [a^hb]_q a^k$ pour $h < i$, on en déduit que

$$P_{a^iba^j}^{(q)} = (a^ib - \sum_{h=0}^{i-1} q^{i-h} \frac{[i]_q!}{[i-h]_q![h]_q!} [a^hb]_q a^{i-h}) a^j.$$

Il ne reste plus qu'à prouver que $a^ib - \sum_{h=0}^{i-1} q^{i-h}\frac{[i]_q!}{[i-h]_q![h]_q!}[a^hb]_qa^{i-h} = [a^ib]_q$.
On vérifie que $[ab]_q = ab - qba$,
$[a^2b]_q = a^2b - q^2ba^2 - q(1+q)[ab]_qa$,
$[a^3b]_q = a^3b - q^3ba^3 - q^2(1+q+q^2)[ab]_qa^2 - q(1+q+q^2)[a^2b]_qa$.
Si on suppose comme hypothèse de récurrence que $[a^kb]_q = a^kb - \sum_{h=0}^{k-1} q^{k-h}\frac{[k]_q!}{[k-h]_q![h]_q!}[a^hb]_qa^{k-h}$ pour $k < i$, on en déduit que
$a^ib = \sum_{h=0}^{i} q^{i-h}\frac{[i]_q!}{[i-h]_q![h]_q!}[a^hb]_qa^{i-h} = \sum_{h=0}^{i-1} q^{i-h}\frac{[i]_q!}{[i-h]_q![h]_q!}[a^hb]_qa^{i-h} + [a^ib]_q$.

□

Exemple 34. $S_{ba^k}^{(q)} = b \sqcup\!\sqcup_q a^k = \sum_{i=0}^{k} q^ia^iba^{k-i}$.

$S_{aba^{k-1}}^{(q)} = ab \sqcup\!\sqcup_q a^{k-1} = aba^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-1} q^i(1+q+\cdots+q^i)a^{i+1}ba^{k-i-1}$.
Donc $P_{ba^k}^{(q)} = ba^k$.
$P_{aba^{k-1}}^{(q)} = aba^{k-1} - qba^k = [ab]_qa^{k-1}$.
$P_{a^2ba^{k-2}}^{(q)} = a^2ba^{k-2} - q^2P_{ba^k}^{(q)} - q(1+q)P_{aba^{k-1}}^{(q)} = a^2ba^{k-2} - q^2ba^k - q(1+q)[ab]_qa^{k-1} = [a^2b]_qa^{k-2}$

Définition 28. *Soit $w \in X^*$. Alors, nous définissons le polynôme $P_w'^{(q)}$ par :*

$$P_w'^{(q)} = \begin{cases} P_\ell^{(q)} & si \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X)\ ; \\ (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1}\ldots(P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & si \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1}\ldots\ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{4.60}$$

Nous remarquons que le polynôme $P_w'^{(q)}$ est le produit des $P_\ell^{(q)}$, $\ell \in \mathcal{L}n(X)$.

Proposition 24. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors, la famille $(P_w'^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire supérieure :*

$$P_w'^{(q)} = w + \sum_{\substack{w<v \\ v\in X^\alpha}} \beta_v(q)v \quad avec \quad \beta_v(q) = \langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle \in \mathbb{Q}(q). \tag{4.61}$$

Preuve : Le mot $w \in X^\alpha$ est le plus petit mot par rapport à l'ordre lexicographique tel que $\langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle \neq 0$, $\forall v \in X^\alpha$: $w = min(supp(P_w'^{(q)}))$.
□

Proposition 25. *Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Alors,*
les polynômes $P'^{(q)}_w$, $w \in X^\alpha$ forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle_\alpha$ (voir page 43).

Preuve : Les mots de multidegré α sont combinaisons linéaires de polynômes homogènes de multidegré α associés aux mots de Lyndon. Ainsi, les polynômes associés aux mots de Lyndon et les mots de multidegré α engendrent le même sous-espace $\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle_\alpha$, soit celui formé par des polynômes homogènes de multidegré α, qu'on note $(\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle)_\alpha$. On peut mettre les mots de multidegré α en bijection avec les polynômes homogènes de multidegré α. Les polynômes homogènes de multidegré α associés aux mots de Lyndon sont au même nombre que les mots de multidegré α. Or, les mots de multidegré α forment une base de $\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle_\alpha$; par conséquent, il en est de même pour les polynômes homogènes de multidegré α associés aux mots de Lyndon .
□

Exemple 35. Soient $X = \{a < b\}$, $X^\alpha = a^2b^2$ et $M(X^\alpha) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$.

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\
\begin{array}{r} P'^{(q)}_{a^2b^2} = \\ P'^{(q)}_{abab} = \\ P'^{(q)}_{ab^2a} = \\ P'^{(q)}_{ba^2b} = \\ P'^{(q)}_{baba} = \\ P'^{(q)}_{b^2a^2} = \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\
0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -q-q^2 & q^3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -q-q^2 & q^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{4.62}$$

4.4.3 Nouveau théorème $q-$analogue de Radford

Théorème 11. [Rad79] *Tout mot $w \in X^*$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire (finie) de produits de shuffle ($\sqcup\!\sqcup$) de mots de Lyndon à coefficients dans $\mathbb{Q}$.*

On pourra consulter avec profit [Ous01, Jop00]. Par conséquent, nous pouvons écrire le théorème suivant :

Théorème 12. *Tout mot $w \in X^*$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire (finie) de produits de $q-$shuffle ($\sqcup\!\sqcup_q$) de mots de Lyndon à coefficients dans $\mathbb{Q}(q)$.*

Preuve : Un $q-$shuffle décroissant de mots de Lyndon a le même support que le shuffle décroissant de mots de Lyndon correspondant. Les shuffles décroissants de mots de Lyndon sont triangulaires sur les mots, donc les $q-$shuffle aussi. Ces derniers forment donc une famille libre. Comme il y a autant de séquences de mots de Lyndon décroissants que de mots pour un multidegré fixé, la famille est maximale ; c'est donc une base.
□

Exemple 36. Elle se fait par la construction d'un système d'équations "triangulaire". Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$, et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 < w_3 < \cdots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré α.
Soit la factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon de $w = \ell_1^{i_1}\ell_2^{i_2}\cdots\ell_k^{i_k} \in M(X^\alpha)$. Alors on peut écrire que : $\frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} = w + \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \theta_u(q) u,$

où $\theta_u(q) \in \mathbb{Q}^+(q)$.

Cela implique que : $w = \frac{\ell_1^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \ell_2^{\sqcup\!\sqcup_q i_2} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q \ell_k^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} - \sum_{\substack{u<w \\ u \in X^\alpha}} \theta_u(q) u.$

Soit $X = \{a < b\}$. On va se contenter de montrer comment marche l'algorithme sur tous les mots comportant 2 occurences de la lettre $a \in X$ et 2 occurences de la lettre $b \in X$. Il y a donc six mots à considérer : $M(a^2b^2) = \{aabb < abab < abba < baab < baba < bbaa\}$. On va les examiner par ordre lexicographique.

1) $aabb \in \mathcal{L}yn(X)$. Il n'y a rien à faire.

2) $abab = ab.ab$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$ab \sqcup\!\sqcup_q ab = (1 + q^4)abab + (q + 2q^2 + q^3)aabb.$$

On en déduit

$$abab = \frac{ab \sqcup\!\sqcup_q ab - (q+2q^2+q^3)aabb}{1+q^4}.$$

Or ab et $aabb$ sont des mots de Lyndon, donc c'est fini.

3) $abba = abb.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$abb \sqcup\!\sqcup_q a = q^3 aabb + qabab + q^2 aabb + abba.$$

On en déduit

$$abba = abb \sqcup\!\sqcup_q a - (q^2 + q^3)aabb - qabab.$$

Or a, abb et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abab$ comme combinaisons linéaires de produits de $q-$shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

4) $baab = b.aab$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup\!\sqcup_q aab = baab + qabab + (q^2 + q^3)aabb.$$

On en déduit

$$baab = b \sqcup\!\sqcup_q aab - qabab - (q^2 + q^3)aabb.$$

Or b, aab et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abab$ comme combinaisons linéaires de produits de $q-$shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

5) $baba = b.ab.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup\!\sqcup ab \sqcup\!\sqcup_q a = baba + (q + q^2)baab + (q^2 + 2q^3)abab + (q^3 + 2q^4 + q^5)aabb + (q + q^2)abba.$$

On en déduit

$$baba = b \sqcup\!\sqcup_q ab \sqcup\!\sqcup_q a - (q + q^2)baab - (q^2 + 2q^3)abab - (q^3 + 2q^4 + q^5)aabb - (q + q^2)abba.$$

Or a, b, ab et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $abba$, $baab$ et $abab$ comme combinaisons linéaires de produits de $q-$shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

6) $bbaa = b.b.a.a$ (factorisation de Lyndon). On calcule :

$$b \sqcup\!\sqcup_q b \sqcup\!\sqcup_q a \sqcup\!\sqcup_q a = (1 + 2q + q^2)[bbaa + qbaba + q^2baab + q^4aabb + q^3abab + q^2abba].$$

On en déduit

$$bbaa = \tfrac{b \sqcup\!\sqcup_q b \sqcup\!\sqcup_q a \sqcup\!\sqcup_q a}{1+2q+q^2} - qbaba - q^2baab - q^4aabb - q^3abab - q^2abba.$$

Or a, b et $aabb$ sont des mots de Lyndon et l'on a déjà calculé $baba$, $abba$, $baab$ et $abba$ comme combinaisons linéaires de produits de $q-$shuffle de mots de Lyndon, donc c'est fini.

À partir de ce théorème, on peut écrire le corollaire suivant :

Corollaire 5. *(i)* $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, \mathbb{1}_{X^*}) \simeq_1 \mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(X)]$ *(isomorphisme d'algèbre).*

(ii) $(\mathbb{Q}(q)\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup_q, \mathbb{1}_{X^*}) \simeq_2 \mathbb{Q}(q)[\mathcal{L}yn(X)]$.
où $(\simeq_2)$ *est un isomorphisme d'espace vectoriel car on a en général* $\mathcal{L}yn(X)^{\sqcup\!\sqcup_q \alpha}\mathcal{L}yn(X)^{\sqcup\!\sqcup_q \beta} \neq \mathcal{L}yn(X)^{\sqcup\!\sqcup_q \alpha+\beta}$.

Exemple 37.

$$\begin{aligned} babab + 2ab^2ab + 2abab^2 &= \frac{1}{2} ab \sqcup\!\sqcup ab \sqcup\!\sqcup b - 2a^2b^2 \sqcup\!\sqcup b \in \mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(X)] \\ &= abab \sqcup\!\sqcup b \in \mathbb{Q}[\mathcal{L}yn(X)]. \end{aligned}$$

$\frac{4q^3+2q^2+q^4-q^5-2q^6-1-q^{10}-q^9-q^8}{1+q^4}aabbb + \frac{q+3q^5+1+2q^4+q^6-2q^7-q^{11}-q^3}{1+q^4}ababb + \frac{q^4(q+2q^2+q^3-1-2q^4-q^8)}{1+q^4}baabb$
$+(q^3 + q^2)abbab + q^4babab = \frac{1}{1+q^4}ab \sqcup\!\sqcup_q ab \sqcup\!\sqcup_q b - (1 + q^4)a^2b^2 \sqcup\!\sqcup_q b \in \mathbb{Q}(q)[\mathcal{L}yn(X)]$.

Chapitre 5

Étude de la multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Résumé : Le but de ce chapitre est d'étudier la multiplicativité des familles obtenues par dualité. Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous redonnons une construction d'une paire de bases en dualité dans le cas du $q-$shuffle décroissants de mots de Lyndon et dans le second volet, nous donnons une autre construction de paire de bases en dualité. Nous nous proposons donc d'étudier les conditions que doit satisfaire la base dont nous partons de sorte que la base duale permette l'écriture des factorisations.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

1. la Note 1 page 101 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(R_w^{(q)})_{w\in X^*}$ afin d'écrire des factorisations de $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

2. la Conjecture 2 page 102 (Test numérique) caractérise la multiplicativité de la famille $(P_w^{(q)})_{w\in X^*}$ afin d'écrire des factorisations de $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

5.1 Introduction

Soient $\mathbb{K}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre et $\mathcal{G}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie admettant une base linéaire ordonnée $[(P_{e_i})_{i\in I};(I,<)]$ (donc, $\mathcal{G}$ est libre en tant que $\mathbb{K}$-module).

Nous rappelons que, les éléments P'_α, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus par l'application du procédé de Poincaré-Birkhoff-Witt[1] (théorème 5 page 39) et les P_α, $\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}$ sont obtenus

1. obtenus par un procédé décroissant

par dualité (en particulier $P_{e_i} = P'_{e_i}$ et $P_{e_i} = P_i, i \in I$).

Par conséquent, nous pouvons écrire le théorème suivant :

Théorème 13. [*Mat12*] *Soient $\mathbb{K}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre et $\mathcal{G}$ une $\mathbb{K}$-algèbre de Lie admettant une base linéaire ordonnée $[(P_i)_{i\in I};(I,<)]$ (donc, $\mathcal{G}$ est libre en tant que $\mathbb{K}$-module).*
a) *Soit*

$$P'_\alpha = \prod_{i\in\mathrm{supp}(\alpha)}^{\searrow} P_i^{\alpha_i} \tag{5.1}$$

la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée et $(S_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ la famille duale. Ces formes linéaires coordonnées sont définies par

$$(\forall\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)})(\langle S_\beta \mid P'_\alpha\rangle = \delta_{\alpha\beta}). \tag{5.2}$$

Alors : **i)** $(\beta!S_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ *est multiplicative pour la convolution c'est-à-dire*

$$\alpha!S_\alpha \star \beta!S_\beta = (\alpha+\beta)!S_{\alpha+\beta}. \tag{5.3}$$

ii) *Les monômes de Poincaré-Birkhoff-Witt de longueur $\geqslant 2$ sont dans les noyaux communs des S_{e_i} (condition (5.4) page 94).*
b) *Réciproquement soit $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ une base de $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ indexée par un multiindice (à priori pas nécessairement une base de Poincaré-Birkhoff-Witt) et $(S_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ la famille duale (5.2) page 94. On suppose que $(\beta!S_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ soit multiplicative. Alors :*
i) *Les $(P_{e_i})_{i\in I}$ forment une base de $\mathcal{G}$.*
ii) *Une ordre total $(I,<)$ étant donné, alors $(P_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à $(P_{e_i})_{i\in I}$ si et seulement si les $(P_\alpha)_{|\alpha|\geqslant 2}$ sont dans les noyaux communs des S_{e_i} c'est-à-dire*

$$(\forall\beta\in\mathbb{N}^{(I)})(\forall i\in I)(|\beta|\geqslant 2 \Longrightarrow \langle S_{e_i} \mid P_\beta\rangle = 0). \tag{5.4}$$

Preuve :
a) i) La multiplicativité provient de ce que, les P_{e_i} étant primitifs, on a

$$\Delta(P'_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} P'_\beta \otimes P'_\gamma \tag{5.5}$$

d'où (voir (5.12) page 96)

$$S_\alpha \star S_\beta = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \star S_\beta \mid P'_\gamma\rangle S_\gamma = \sum_{\gamma\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \Delta(P'_\gamma)\rangle S_\gamma = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!} S_{\alpha+\beta} \tag{5.6}$$

et la formule (5.3) page 94 résulte directement de (5.5) page 94. Remarquons au passage que $S_0 = \epsilon$ car aucun $(P'_\alpha)_{\alpha\neq 0}$ n'a de terme constant.

a) ii) Immédiat puisque $\langle S_{e_i} \mid P'_\beta\rangle = \delta_{e_i\beta}$ est donc nul pour $|\beta| \neq 1$.
b) i) On a

$$\begin{aligned}\Delta(P_{e_i}) &= \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle\Delta(P_{e_i}) \mid S_\alpha \otimes S_\beta\rangle P_\alpha \otimes P_\beta = \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle P_{e_i} \mid S_\alpha \star S_\beta\rangle P_\alpha \otimes P_\beta \\ &= \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} \sum_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle P_{e_i} \mid S_{\alpha+\beta}\rangle P_\alpha \otimes P_\beta = \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\beta!} \sum_{\alpha+\beta=e_i} \langle P_{e_i} \mid S_{\alpha+\beta}\rangle P_\alpha \otimes P_\beta \\ &= P_{e_i} \otimes P_0 + P_0 \otimes P_{e_i} = P_{e_i} \otimes 1 + 1 \otimes P_{e_i}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Soit maintenant $g \in \mathcal{G}$, on a $g = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \mid g\rangle P_\alpha$. Remarquons tout de suite que pour $|\alpha| \neq 1$, on a $\langle S_\alpha \mid g\rangle = 0$. En effet, si $\alpha = 0$, $\langle S_0 \mid g\rangle = \epsilon(g) = 0$ et, si $|\alpha| \geqslant 2$, on peut écrire $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ avec $\alpha_i \neq 0$ alors

$$\langle S_\alpha \mid g\rangle = \langle S_{\alpha_1+\alpha_2} \mid g\rangle = \frac{\alpha_1!\alpha_2!}{(\alpha_1+\alpha_2)!}\langle S_{\alpha_1} \star S_{\alpha_2} \mid g\rangle = \lambda\langle S_{\alpha_1} \otimes S_{\alpha_2} \mid g \otimes 1 + 1 \otimes g\rangle = 0 \tag{5.8}$$

Ceci montre que

$$g = \sum_{i\in I} \langle S_{e_i} \mid g\rangle P_i \tag{5.9}$$

et termine la preuve de **b) i)**.
b) ii) Posons, pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{(I)}$

$$P'_\beta = \prod_{i\in supp(\beta)}^{\searrow} P_{e_i}^{\beta_i} \tag{5.10}$$

$(P_\beta)_{\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ est la base de Poincaré-Birkhoff-Witt associée à $(P_{e_i})_{i\in I}$ revient à dire $P'_\beta = P_\beta$ pour tout $\beta \in \mathbb{N}^{(I)}$. Dans le cas où la base est Poincaré-Birkhoff-Witt, le critère (5.4) page 94 est évidemment vérifié.
Supposons maintenant que les familles $(S_\alpha;\ P_\beta)_{\alpha,\beta\in\mathbb{N}^{(I)}}$ vérifient le critère (5.4) page 94 (la famille $(\alpha! S_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}}$ étant toujours supposée multiplicative).
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{(I)}$, calculons

$$\langle S_\alpha \mid P'_\beta\rangle = \frac{\alpha!}{|\alpha|!}\langle \star_{i\in supp(\alpha)} S_{e_i}^{\star\alpha_i} \mid P'_\beta\rangle = \frac{\alpha!}{|\alpha|!}\langle \otimes_{i\in supp(\alpha)} S_{e_i}^{\otimes\alpha_i} \mid \Delta^{|\alpha|-1}(P'_\beta)\rangle \tag{5.11}$$

Il y a trois cas

1. $|\alpha| > |\beta|$ tous les tenseurs apparaissant dans $\Delta^{|\alpha|-1}(P'_\beta)$ contiennent une constante dans leur écriture donc, comme $\langle S_{e_i} \mid 1\rangle = 0$ pour tout i, le résultat est nul.
2. $|\alpha| < |\beta|$ tous les tenseurs apparaissant dans $\Delta^{|\alpha|-1}(P'_\beta)$ contiennent dans leur écriture un produit $P_iP_j, i \geqslant j$ donc, en vertu du critère (5.4) page 94, le résultat est nul.

3. $|\alpha| = |\beta|$ en analysant les permutations des facteurs qui donnent une contribution non nulle on trouve 0 si $\alpha \neq \beta$ sinon $\langle \otimes_{i \in supp(\alpha)} S_{e_i}^{\otimes \alpha_i} \mid \Delta^{|\alpha|-1}(P'_\alpha) \rangle = \frac{|\alpha|!}{\alpha!}$, le résultat est donc 1 dans ce cas.

Ainsi, dans tous les cas, $\langle S_\alpha \mid P'_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$.
□
La preuve de ce théorème (théorème 13 page 94) repose, entre autres, sur la propriété suivante des éléments S_α :

$$\begin{aligned}
S_\alpha \star S_\beta &= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \star S_\beta \mid P'_\gamma \rangle S_\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \Delta(P'_\gamma) \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
&= \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{(I)}} \langle S_\alpha \otimes S_\beta \mid \sum_{\gamma_1+\gamma_2=\gamma} \frac{\gamma!}{\gamma_1!\,\gamma_2!} P'_{\gamma_1} \otimes P'_{\gamma_2} \rangle^{\otimes 2} S_\gamma \\
&= \frac{(\alpha+\beta)!}{\alpha!\,\beta!} S_{\alpha+\beta}.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Cette propriété permet d'établir, par récurrence, que $\dfrac{S_{e_{i_k}}^{\star \alpha_k}}{\alpha_k!} = S_{\alpha_k e_{i_k}}$ puis que

$$\frac{S_{e_{i_1}}^{\star \alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star \alpha_k}}{\alpha_1! \ldots \alpha_k!} = S_\alpha. \tag{5.13}$$

Par conséquent : soient $(S_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ (5.13) page 96 une base dans $\mathbb{K}\langle X \rangle$ et $(P_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}^{(I)}}$ la famille duale telle que $\langle S_\alpha \mid P_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$, $\forall (\alpha, \beta) \in (\mathbb{N}^{(I)})^2$.
Posons :

$$P'_\alpha = \prod_{i \in \mathrm{supp}(\alpha)}^{\searrow} P_{e_i}^{\alpha_i} = (P_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \cdots (P_{e_{i_k}})^{\alpha_k}. \tag{5.14}$$

Si $P'_\alpha = P_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I}^{\searrow} \exp(S_{e_i} \otimes P_{e_i}) &= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_k\\ \alpha_1,\cdots,\alpha_k}} \frac{(S_{e_{i_1}} \otimes P_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \cdots (S_{e_{i_k}} \otimes P_{e_{i_k}})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_k\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k} \otimes (P_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \dots (P_{e_{i_k}})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_k\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \otimes P'_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P'_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P_\alpha \\
&= \mathcal{D}_X.
\end{aligned} \tag{5.15}$$

Si $P'_\alpha \neq P_\alpha$, on a :

$$\begin{aligned}
\prod_{i\in I}^{\searrow} \exp(S_{e_i} \otimes P_{e_i}) &= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_k\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k} \otimes (P_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \dots (P_{e_{i_k}})^{\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \\
&= \sum_{k\geqslant 0} \sum_{\substack{i_1\geqslant\cdots\geqslant i_k\\ \alpha_1,\dots,\alpha_k}} \frac{S_{e_{i_1}}^{\star\alpha_1} \star \cdots \star S_{e_{i_k}}^{\star\alpha_k}}{\alpha_1! \dots \alpha_k!} \otimes P'_\alpha \\
&= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^{(I)}} S_\alpha \otimes P'_\alpha \\
&= \mathcal{D}_X + \Theta_X,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

où $\Theta_X = \sum_{\beta<\alpha<\gamma} \langle S_\alpha \mid \beta\rangle\, \beta \otimes \langle P'_\alpha \mid \gamma\rangle\, \gamma$.

Nous cherchons donc les conditions qui permettent d'écrire que :

$$P'_\alpha = (P_{e_{i_1}})^{\alpha_1} \cdots (P_{e_{i_k}})^{\alpha_k} = P_\alpha. \tag{5.17}$$

5.2 Exemple 1 : $q-$shuffle décroissants de mots de Lyndon

5.2.1 Objectif

Soit la famille $(T_w^{(q)})_{w\in X^*}$:

$$T_w^{(q)} = \begin{cases} \ell & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X) \ ; \\ \dfrac{(\ell_1)^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (\ell_k)^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \ldots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{5.18}$$

et sa famille duale $(R_w^{(q)})_{w\in X^*}$ telle que $\langle T_u^{(q)} \mid R_v^{(q)}\rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^*$. À partir de la définition 28 page 89 et (5.14) page 96, on définit [2] :

$$R_w'^{(q)} = \begin{cases} R_\ell^{(q)} & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X) \ ; \\ (R_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \ldots (R_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases} \tag{5.19}$$

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(T_w^{(q)})_{w\in X^*}$, a-t-on $R_w^{(q)} = R_w'^{(q)}$?.

5.2.2 Multiplicativité des $R_w^{(q)}$, $w \in X^*$

La famille $(T_w^{(q)})_{w\in X^*}$, est définie par la même relation de récurrence que la famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$, mais avec d'autres conditions initiales.
En fait, la formule (5.18) page 98 montre que les éléments de la famille $(T_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ correspondent à la famille de produits $\mathcal{L}yn(X)^{\sqcup\!\sqcup_q \alpha}$, $\alpha \in \mathbb{N}^{(\mathcal{L}yn(X))}$. La famille $(\mathcal{L}yn(X)^{\sqcup\!\sqcup_q \alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}^{(\mathcal{L}yn(X))}}$ est multihomogène et triangulaire inférieure. De plus, la proposition 16 page 81 prouve que la famille $(T_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ est multihomogène et triangulaire inférieure :

$$T_w^{(q)} = w + \sum_{\substack{u<w \\ u\in X^\alpha}} \langle T_w^{(q)} \mid u\rangle u. \tag{5.20}$$

Par dualité, il est donc possible de construire la famille duale $(R_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$: $\langle T_u^{(q)} \mid R_v^{(q)}\rangle = \delta_{uv}$ pour tous $u, v \in X^\alpha$.

Considérons par exemple un alphabet $X = \{a, b\}$ avec $a < b$.

2. $\{w = \ell_1^{\alpha_1} \cdots \ell_k^{\alpha_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)\} \longleftrightarrow \alpha = \alpha_1 e_{\ell_1} + \cdots + \alpha_k e_{\ell_k}$

Montrons que le mot de Lyndon $a^2b^2abab \in \mathcal{L}yn(X)$ figure dans le support du polynôme $R'^{(q)}_{a^2b^2a^2b^2}$.
La factorisation de Lyndon de $a^2b^2a^2b^2$ est $a^2b^2a^2b^2 = (a^2b^2)(a^2b^2) = (a^2b^2)^2$. Ainsi, $R'^{(q)}_{a^2b^2a^2b^2} = (R^{(q)}_{a^2b^2})^2$.
Calculons $R'^{(q)}_{a^2b^2}$ (noter que $R'^{(q)}_{a^2b^2} = R^{(q)}_{a^2b^2}$). Pour cela, calculons la matrice des coefficients $\langle T^{(q)}_u \mid v\rangle$ pour tous $u, v \in X^\alpha$. Nous avons $M(a^2b^2) = \{a^2b^2, abab, ab^2a, ba^2b, baba, b^2a^2\}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (2, 2)$. Nous avons successivement :

$$\begin{aligned}
T^{(q)}_{a^2b^2} &= a^2b^2 \ ;\\
T^{(q)}_{abab} &= \frac{T_{ab}^{\sqcup\!\sqcup_q 2}}{1+q^4}\\
&= \frac{1}{1+q^4}(ab \sqcup\!\sqcup_q ab) = abab + \frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4}a^2b^2 \ ;\\
T^{(q)}_{ab^2a} &= ab^2 \sqcup\!\sqcup_q a\\
&= (q^2+q^3)a^2b^2 + ab^2a + qabab \ ;\\
T^{(q)}_{ba^2b} &= b \sqcup\!\sqcup_q a^2b\\
&= ba^2b + qabab + (q^2+q^3)a^2b^2 \ ;\\
T^{(q)}_{baba} &= b \sqcup\!\sqcup_q ab \sqcup\!\sqcup_q a\\
&= (q^5+2q^4+q^3)a^2b^2 + (q^2+2q^3)abab + (q+q^2)ba^2b + (q+q^2)ab^2a + baba \ ;\\
T^{(q)}_{b^2a^2} &= \frac{T_b^{\sqcup\!\sqcup_q 2}}{1+q} \sqcup\!\sqcup_q \frac{T_a^{\sqcup\!\sqcup_q 2}}{1+q}\\
&= b^2a^2 + q^4a^2b^2 + q^2ba^2b + q^2ab^2a + q^3abab + qbaba.
\end{aligned} \tag{5.21}$$

La matrice $N = (\langle T^{(q)}_u \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ est donc :

$$\begin{array}{r c}
 & \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array}\\
\begin{array}{r} T^{(q)}_{a^2b^2} = \\ T^{(q)}_{abab} = \\ T^{(q)}_{ab^2a} = \\ T^{(q)}_{ba^2b} = \\ T^{(q)}_{baba} = \\ T^{(q)}_{b^2a^2} = \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
\frac{q+2q^2+q^3}{1+q^4} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
q^2+q^3 & q & 1 & 0 & 0 & 0\\
q^2+q^3 & q & 0 & 1 & 0 & 0\\
q^5+2q^4+q^3 & q^2+2q^3 & q+q^2 & q+q^2 & 1 & 0\\
q^4 & q^3 & q^2 & q^2 & q & 1
\end{pmatrix}
\end{array}. \tag{5.22}$$

La matrice $M = ({}^tN)^{-1} = (\langle R_u^{(q)} \mid v\rangle)_{u,v\in X^\alpha}$ est donnée par

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccccc} a^2b^2 & abab & ab^2a & ba^2b & baba & b^2a^2 \end{array} \\
\begin{array}{r} R_{a^2b^2}^{(q)} = \\ R_{abab}^{(q)} = \\ R_{ab^2a}^{(q)} = \\ R_{ba^2b}^{(q)} = \\ R_{baba}^{(q)} = \\ R_{b^2a^2}^{(q)} = \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4} & \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4} & -q^6 \\
0 & 1 & -q & -q & q^2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & -q-q^2 & q^3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -q-q^2 & q^3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\end{array} \tag{5.23}$$

$R_{a^2b^2}^{(q)} = a^2b^2 + \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4}abab + \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ab^2a + \frac{-q^3(q^4+q^3-q-1)}{1+q^4}ba^2b + \frac{q^7(q^2+2q+1)}{1+q^4}baba - q^6b^2a^2$.

Notre but est de voir si $R_w^{(q)} = R_w'^{(q)}$, pour tout $w \in X^*$: Vérifions si $\langle T_\ell^{(q)} \mid (R_l^{(q)})^n\rangle = 0$, pour tous $\ell, l \in \mathcal{L}yn(X)$ et $n \geqslant 2$:
Prenons $\ell = a^2b^2abab \in \mathcal{L}yn(X)$, $l = a^2b^2 \in \mathcal{L}yn(X)$ et $n = 2$.
D'après les calculs : $T_{a^2b^2abab}^{(q)} = a^2b^2abab \in \mathcal{L}yn(X)$ et

$\langle T_{a^2b^2abab}^{(q)} \mid R_{a^2b^2a^2b^2}'^{(q)}\rangle = \langle T_{a^2b^2abab}^{(q)} \mid (R_{a^2b^2}^{(q)})^2\rangle = \frac{-q(q^2+2q+1)}{1+q^4}$.

Ainsi, $R_{a^2b^2a^2b^2}'^{(q)} = (R_{a^2b^2}^{(q)})^2 \neq R_{a^2b^2a^2b^2}^{(q)}$.

Utilisons le critère de multiplicativité **b-ii)** que nous avons présenté dans le théorème 13 page 94 : puisqu'il existe un élément $R_w'^{(q)}$ avec $N_w \geqslant 2$ (précisement, $w = (a^2b^2)^2$ dont la factorisation en produit décroissant de mots de Lyndon comporte deux éléments, donc $N_w = 2$) dont le support contient un mot de Lyndon, la famille $(R_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$ n'est pas multiplicative.

Rappelons que si $w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k}$ avec $\ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on a $N_w = \sum_{1\leqslant s\leqslant k} i_s$.

Dans le cas du produit de shuffle ($q = 1$), on peut bien réécrire le théorème 13 page 94 : soit $w \in X^*$,

$$R_w^{(1)} = R_w'^{(1)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} T_w^{(1)} = \ell & \text{si} & w = \ell \in \mathcal{L}yn(X)\ ; \\ \langle T_\ell^{(1)} \mid (R_l^{(1)})^n\rangle = 0 & \text{avec} & \ell, l \in \mathcal{L}yn(X) \text{ et } n \geqslant 2. \end{array} \right. \tag{5.24}$$

De plus, un $q-$analoque de (5.24) page 100 serait la suivante : soit $w \in X^*$,

$$R_w^{(q)} = R_w'^{(q)} \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} T_w^{(q)} = \ell & \text{si} & w = \ell \in \mathcal{L}yn(X)\ ; \\ \langle T_\ell^{(q)} \mid (R_l^{(q)})^n\rangle = 0 & \text{avec} & \ell, l \in \mathcal{L}yn(X) \text{ et } n \geqslant 2. \end{array} \right. \tag{5.25}$$

Bien que le cas $q-$déformé, on n'ait plus les propriétés des éléments primitifs, on peut se demander si cet énoncé (5.25) page 100 peut s'adapter au cas (5.24) page 100 :

Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible en Annexe : Feuilles de calculs Maple. D'où la note suivante :

Note 1. *(Test numérique) Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :*

$$R_w^{(q)} = R_w'^{(q)}; \tag{5.26}$$

jusqu'à l'ordre 7 (c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 7), où le Test est éffectué de la façon suivante :

$$R_w^{(q)} - R_w'^{(q)} = 0 \qquad \forall w \in X^*, \tag{5.27}$$

et

$$\langle T_u^{(q)} \mid R_v'^{(q)} \rangle = 0 \qquad \textit{avec} \qquad u > v \in X^*. \tag{5.28}$$

Ceci exprime qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 8 et donc la réponse à la question posée dans 5.2.1 page 98 est non.

5.3 Exemple 2 : La famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$

5.3.1 Objectif

Soit la famille $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$:

$$S_w^{(q)} = \begin{cases} w & \text{si} \quad |w| = 1_{X^*} \ ; \\ aS_u^{(q)} & \text{si} \quad w = au \text{ et } w \in \mathcal{L}yn(X) \ ; \\ \dfrac{(S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \ldots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases}$$

À partir de la définition 28 page 89 et (5.14) page 96, nous pouvons écrire que [3] :

$$P_w'^{(q)} = \begin{cases} P_\ell^{(q)} & \text{si} \quad w = \ell \in \mathcal{L}yn(X) \ ; \\ (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \ldots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k} & \text{si} \quad w = \begin{cases} \ell_1^{i_1} \ldots \ell_k^{i_k} \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X) \\ k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}. \end{cases} \end{cases}$$

Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w\in X^*}$, a-t-on $P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}$?

3. $\{w = \ell_1^{\alpha_1} \cdots \ell_k^{\alpha_k},\ \ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)\} \longleftrightarrow \alpha = \alpha_1 e_{\ell_1} + \cdots + \alpha_k e_{\ell_k}$

5.3.2 Multiplicativité des $P_w^{(q)}$, $w \in X^*$

Nous allons écrire les propositions suivantes :

Proposition 26. *Soient $w \in X^*$ et $\ell \in \mathcal{L}yn(X)$. Alors,*

$$\langle S_w^{(q)} \mid P_\ell'^{(q)} \rangle = \delta_{w\ell}. \tag{5.29}$$

Preuve : À partir de la définition 28 page 89, nous pouvons écrire que $P_\ell'^{(q)} = P_\ell^{(q)}$. Donc $\langle S_w^{(q)} \mid P_\ell'^{(q)} \rangle = \langle S_w^{(q)} \mid P_\ell^{(q)} \rangle = \delta_{w\ell}$.
□

Proposition 27. *Soient $u, v \in X^*$. Alors,*

$$\langle S_u^{(q)} \mid P_v'^{(q)} \rangle = \begin{cases} 1 & si \quad u = v \ ; \\ 0 & si \quad u < v \end{cases} \tag{5.30}$$

Preuve : Soient $u, v \in X^*$. Alors
$S_u^{(q)} = u + \sum\limits_{\substack{w<u \\ w \in X^*}} \langle S_u^{(q)} \mid w \rangle w$ et $P_v^{(q)} = v + \sum\limits_{\substack{w>v \\ w \in X^*}} \langle P_v^{(q)} \mid w \rangle w$.
□
Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques ménées avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible en Annexe : Feuilles de calculs Maple. D'où la conjecture suivante :

Conjecture 2. *(Test numérique) Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :*

$$P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}; \tag{5.31}$$

jusqu'à l'ordre 11 (c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 11), où le Test est éffectué de la façon suivante :

$$P_w^{(q)} - P_w'^{(q)} = 0 \qquad \forall w \in X^*, \tag{5.32}$$

et

$$\langle S_u^{(q)} \mid P_v'^{(q)} \rangle = 0 \qquad avec \qquad u > v \in X^*. \tag{5.33}$$

Ceci exprime qu'il n'y a pas de contre-exemple de longueur plus petite que 12 et par contre on ne sait pas si $P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}$.

Chapitre 6

Factorisations associées

Résumé : Le but de ce chapitre est d'écrire des factorisations associées aux paires de bases obtenues en dualité. Ce chapitre comporte deux volets principaux : Dans un premier volet, nous donnons une écriture de la factorisation de la série diagonale. Enfin, nous donnons une écriture des factorisations tangentes à l'identité.
Les principaux résultats de ce chapitre sont :

Écriture des factorisations : $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

6.1 Factorisation de la série diagonale : $\mathcal{D}_X$

6.1.1 Objectif

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Posons que (voir (5.15) page 97, (5.16) page 97) :

$$\begin{aligned}\prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}} \otimes \cdot}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w'^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta \\ &= \mathcal{D}_X + \Theta_X,\end{aligned} \tag{6.1}$$

avec $\Theta_X = \sum_{u < w < v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u \rangle \, u \otimes \langle P_w'^{(q)} \mid v \rangle \, v.$
Dans les sections précédentes (voir (3.46) page 50, (3.62) page 53 et (3.76) page 57), nous avons vu que la série diagonale($\mathcal{D}_X$), considérée comme une série sur X^*, à coefficients

dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, ш, \mathbb{1}_{X^*})$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon pris dans l'ordre décroissant.
Dans le but d'étendre ces résultats (voir (3.46) page 50, (3.62) page 53 et (3.76) page 57) que nous avons entrepris nos travaux sur le produit de $q-$shuffle $(ш_q)$ en donnant une construction effective de paire de bases en dualité.
Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w\in X^\alpha}$, a-t-on $\Theta_X = \sum_{u<w<v\in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u\rangle\, u \otimes \langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle\, v = 0$?
Cette question est aussi motivée par la considération de ce qui est fait plus haut une construction où l'on considère une paire de bases en dualité.

6.1.2 Écriture de $\mathcal{D}_X$

Dans un premier temps, nous allons montrer que $\sum_{w\in M(X^\alpha)} w\otimes w = \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}$ par le théorème suivant :

Théorème 14. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77). Alors*

$$\sum_{w\in M(X^\alpha)} w\otimes w = \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}. \tag{6.2}$$

Preuve : Tout polynôme $P \in \mathbb{Q}\langle X\rangle_\alpha$ peut s'écrire : $P = \sum_{w\in M(X^\alpha)} \langle S_w^{(q)} \mid P\rangle P_w^{(q)}$. En particulier, pour tout mot v de $M(X^\alpha)$, on a :

$$v = \sum_{w\in M(X^\alpha)} \langle S_w^{(q)} \mid v\rangle P_w^{(q)}$$

et la série diagonale peut s'écrire :

$$\begin{aligned}
\sum_{v\in M(X^\alpha)} v\otimes v &= \sum_{v\in M(X^\alpha)} v\otimes \left(\sum_{w\in M(X^\alpha)} \langle S_w^{(q)} \mid v\rangle P_w^{(q)}\right)\\
&= \sum_{w\in M(X^\alpha)} \left(\sum_{v\in M(X^\alpha)} \langle S_w^{(q)} \mid v\rangle v\right) \otimes P_w^{(q)}\\
&= \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}\\
&= \sum_{v\in M(X^\alpha)} S_v^{(q)} \otimes P_v^{(q)}.
\end{aligned}$$

□

C'est un mécanisme général que l'on peut observer chez tous les espaces vectoriels gradués en dimension fini.

Le principe se comprend bien sur les espaces de dimension fini : On considère un espace de dimension fini E munit d'un produit scalaire. Si (B_v, C_v) est une base en dualité alors on définit $K := \sum_v B_v \otimes C_v$. On appelle un tel objet noyau reproducteur. En effet, si on considère $< a \otimes b|c >_1 :=< a|c > b$ et $< a \otimes b|c >_2 :=< b|c > a$, on a $< K|C_v >_1 = C_v$ et $< K|B_v >_2 = B_v$. De façon générale, on a alors $< K|P >_1 =< K|P >_2 = P$.

Si (D_v, F_v) sont deux autres bases en dualité. En réarrangeant les termes de la partie droite, on trouve $K = \sum_v D'_v \otimes F_v$ et donc $D'_v =< K|D_v >_2 = D_v$. D'où $K = \sum_v D_v \otimes F_v$.

Si on se trouve dans le cas d'un espace gradué en dimension fini, le noyau se définit comme la somme formelle de tous les espaces gradués et si on considère un produit scalaire pour lequel il existe une paire de bases homogènes en dualité, on peut appliquer le raisonnement ci-dessus sur chaque espace gradué.

Dans le cas du théorème 14 page 104 la base des mots est graduée de dimension finie dans $\mathbb{N}^{(X)}$ et $\mathcal{D}_X$ est le noyau reproducteur du produit scalaire défini par $< u|v >= \delta_{uv}$ lorsque $u, v \in X^*$ pour lequel les mots forment une base autoduale. Donc si on considère une autre paire de bases (multihomogènes) en dualité, $(S_w^{(q)}, P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ par exemple, on retrouve l'égalité (6.2) page 104.

Lemme 14. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77). Alors*

$$P_w^{(q)} = P_w'^{(q)} \Longleftrightarrow \Theta_X = 0, \forall w \in M(X^\alpha). \tag{6.3}$$

Preuve : En regardant (5.15) page 97 et (5.16) page 97, on a :

(i) Supposons que $P_w^{(q)} = P_w'^{(q)}$, $\forall w \in M(X^\alpha)$, alors, on a :

$$\prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}} \otimes \cdot}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \sum_{i \geqslant 0} \frac{S_\ell^{\sqcup\!\sqcup_q i} \otimes (P_\ell^{(q)})^i}{[i]_{q^{|\ell|^2}}!}$$

$$= \sum_{\substack{i_1, \cdots, i_k \geqslant 1 \\ \ell_1 > \cdots > \ell_k}} \frac{(S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_k} \otimes (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \cdots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!}$$

$$= \sum_{w \in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w'^{(q)}$$

$$= \sum_{w \in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} = \sum_{w \in M(X^\alpha)} w \otimes w.$$

(ii) Supposons que $\Theta_X = 0$, alors, on a : $\prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}} \otimes \cdot}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) = \mathcal{D}_X$ et $P_w^{(q)} =$

$P'^{(q)}_w$, $w \in M(X^\alpha)$.
□

Corollaire 6. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77). Alors, les bases $(P^{(q)}_w)_{w\in M(X^\alpha)}$ et $(P'^{(q)}_w)_{w\in M(X^\alpha)}$ coïncident si et seulement si la factorisation est exacte (c'est-à-dire $\Theta_X = 0$).*

Dans un second temps, nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques ménées avec les logiciels Sage et Maple. Les fonctions utilisées sont présentées dans la feuille de travail Maple disponible en Annexe : Feuilles de calculs Maple.
Nous pouvons écrire la factorisation de la série diagonale (voir (3.46) page 50, (3.62) page 53 et (3.76) page 57) comme suit :

Note 2. *Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :*

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w\in M(X^\alpha)} w \otimes w \equiv \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes.}(T^{(q)}_\ell \otimes R^{(q)}_\ell) modulo\ \mathfrak{M}_7; \tag{6.4}$$

c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 7 (avec $\mathfrak{M}_7 = \bigoplus_{n\geqslant 8} \mathbb{K}\langle X\rangle_n$), où le produit est calculé de la façon suivante :

$$\prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes.}(T^{(q)}_\ell \otimes R^{(q)}_\ell) = \sum_{\substack{\ell_1\geqslant\cdots\geqslant\ell_k \\ \ell_1,\cdots,\ell_k\in\mathcal{L}yn(X)}} T^{(q)}_{\ell_1\cdots\ell_k} \otimes R^{(q)}_{\ell_1}\cdots R^{(q)}_{\ell_k}. \tag{6.5}$$

Il s'agit d'une conséquence de la note 1 page 101 et que $\mathcal{D}_X$ est bien différent du produit.

Note 3. *Nous avons aussi vérifié, dans ce cadre, que l'on a bien :*

$$\mathcal{D}_X = \sum_{w\in M(X^\alpha)} w \otimes w \equiv \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes.}(S^{(q)}_\ell \otimes P^{(q)}_\ell) modulo\ \mathfrak{M}_{11}; \tag{6.6}$$

c'est-à-dire pour tous les mots de longueur inférieure ou égale à 11 (avec $\mathfrak{M}_{11} = \bigoplus_{n\geqslant 12} \mathbb{K}\langle X\rangle_n$), où le produit est calculé de la façon suivante :

$$\prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes.}(S^{(q)}_\ell \otimes P^{(q)}_\ell) = \sum_{\substack{\ell_1\geqslant\cdots\geqslant\ell_k \\ \ell_1,\cdots,\ell_k\in\mathcal{L}yn(X)}} S^{(q)}_{\ell_1\cdots\ell_k} \otimes P^{(q)}_{\ell_1}\cdots P^{(q)}_{\ell_k}. \tag{6.7}$$

Il s'agit d'une conséquence de la Conjecture 2 page 102 et par contre on ne sait pas si $\mathcal{D}_X$ est égal au produit.

6.2 Factorisations tangentes à l'identité : $\mathcal{D}_X^{(q)}$

6.2.1 Objectif

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$. Posons que (voir (5.15) page 97, (5.16) page 97) :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_X^{(q)} &= \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes .}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w'^{(q)} \\ &= \sum_{w \in X^\alpha} w \otimes w + \Theta_X \\ &= \mathcal{D}_X + \Theta_X,\end{aligned} \tag{6.8}$$

avec $\Theta_X = \sum_{u<w<v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u\rangle\, u \otimes \langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle\, v.$
Dans les sections précédentes (voir (3.46) page 50, (3.62) page 53 et (3.76) page 57), nous avons vu que la série diagonale $(\mathcal{D}_X)$, considérée comme une série sur X^*, à coefficients dans l'algèbre de shuffle $(\mathbb{Q}\langle X\rangle, \sqcup\!\sqcup, \mathbb{1}_{X^*})$, peut être factorisée en un produit infini d'exponentielles de Lie, indexées par les mots de Lyndon pris dans l'ordre décroissant.
Dans le but d'écrire des factorisations tangentes à l'identité, que nous avons entrepris nos travaux sur le produit de $q-$shuffle $(\sqcup\!\sqcup_q)$ en donnant une construction effective de paire de bases en dualité.
Nous nous attaquons maintenant au problème : partant de la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^\alpha}$, a-t-on $\Theta_X = \sum_{u<w<v \in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u\rangle\, u \otimes \langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle\, v \neq 0\,?$
Cette question est aussi motivée par la considération de ce qui est fait plus haut une construction où l'on considère une paire de bases en dualité.

6.2.2 Écriture de $\mathcal{D}_X^{(q)}$

Lemme 15. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77). Alors,*

$\Theta_X \neq 0$ si et seulement s'il existe au moins un mot $w \in M(X^\alpha)$ tel que $P_w^{(q)} \neq P_w'^{(q)}$.

Preuve : En regardant (5.15) page 97 et (5.16) page 97, on a :
(i) Supposons que $P_w^{(q)} \neq P_w'^{(q)}$, alors, on a :

$$\prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes .}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) = \prod_{\ell \in \mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \sum_{i \geqslant 0} \frac{S_\ell^{\sqcup\!\sqcup_q i} \otimes (P_\ell^{(q)})^i}{[i]_{q^{|\ell|^2}}!}$$

$$= \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\geqslant 1\\ \ell_1>\cdots>\ell_k}} \frac{(S_{\ell_1}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_1} \sqcup\!\sqcup_q \cdots \sqcup\!\sqcup_q (S_{\ell_k}^{(q)})^{\sqcup\!\sqcup_q i_k} \otimes (P_{\ell_1}^{(q)})^{i_1} \cdots (P_{\ell_k}^{(q)})^{i_k}}{[i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!}$$
$$= \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P'^{(q)}_w$$
$$= \sum_{w\in M(X^\alpha)} w \otimes w + \Theta_X = \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)} + \Theta_X.$$

(ii) Supposons que $\Theta_X \neq 0$, alors, on a : $\sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P'^{(q)}_w \neq \sum_{w\in M(X^\alpha)} S_w^{(q)} \otimes P_w^{(q)}$.

□

Corollaire 7. *Soient $\alpha \in \mathbb{N}^{(X)}$ et $M(X^\alpha) = \{w_1 < w_2 \cdots < w_m\}_{m\in\mathbb{N}_{\geqslant 1}}$ l'ensemble de tous les mots multihomogènes de multidegré $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ (Remarque 10 page 77). Alors,*

$$\mathcal{D}_X^{(q)} = \mathcal{D}_X + \Theta_X \tag{6.9}$$

si et seulement s'il existe au moins un mot $w \in M(X^\alpha)$ tel que $P_w^{(q)} \neq P'^{(q)}_w$.

Troisième partie

Conclusions, Perspectives

Chapitre 7

Conclusions, Perspectives

7.1 Conclusions

Les travaux réalisés dans ce mémoire prolongent des méthodes combinatoires et algorithmiques ayant déjà prouvé leur efficacité pour l'étude des factorisations de Schützenberger [Reu93, Mre89, Mela91, Bam13, Mih13, Min13].

1. Un $q-$ analogue du procédé de G.Mélançon et C.Reutenauer [Reu93, Mre89, Mela91] nous a permis de construire récursivement les éléments $S_w^{(q)}$, $w \in X^*$ à partir des S_w, $w \in X^*$. Des propriétés précisées dans le cas de la construction de la famille $(S_w)_{w \in X^*}$ s'avèrent encore vraies dans le cas de la construction de la famille $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$. En effet, cette méthode nous a permis de déterminer le coefficient $\lambda(w) = [i_1]_{q^{|\ell_1|^2}}![i_2]_{q^{|\ell_2|^2}}! \cdots [i_k]_{q^{|\ell_k|^2}}!$ pour tout $w = \ell_1^{i_1} \cdots \ell_k^{i_k} \in X^*$ (avec $\ell_1 > \cdots > \ell_k \in \mathcal{L}yn(X)$ et $k, i_1, i_2, \cdots, i_k \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$) qui assure l'unipotence de la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$ ainsi construite (par rapport à la base des mots). La dualisation nous a permis d'obtenir une base $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$ en dualité avec la base $(S_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Le processus de dualisation conserve les propriétés de multihomogénéité et échange les caractères "inférieur" et "supérieur". Par conséquent, la base duale d'une base triangulaire inférieure est une base triangulaire supérieure.

2. Nous avons étudier les propriétés de multiplicativité de certaines bases obtenues par dualité : $(R_w^{(q)})_{w \in X^*}$ et $(P_w^{(q)})_{w \in X^*}$. Cette question est intimement liée à la propriété de multiplicativité de certaines bases, ce qui nous a poussé à répondre à la question des conditions permettant d'affirmer qu'une base obtenue par dualité est multiplicative ((5.25) page 100, Note 1 page 101 et Conjecture 2 page 102 (Test numérique)) . Nous avons illustré ces questions en nous intéressant à des bases obtenues par dualité à partir des mots de Lyndon et montré que celles-ci ne satisfont pas les conditions requises pour l'écriture de $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106).

3. La famille duale d'une famille $(T_w^{(q)})_{w\in X^*}$ (5.18) page 98 n'est pas en général multiplicative (Note 1 page 101).

4. Enfin, dans le but de montrer que $\mathcal{D}_X \equiv \prod_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|\ell|^2}}\otimes\cdot}(S_\ell^{(q)} \otimes P_\ell^{(q)}) modulo\ \mathfrak{M}_\mu$ pour μ le plus élevé possible (et peut être l'égalité), nous nous sommes appuyés sur des expérimentations numériques ménées avec les logiciels Maple et Sage voir en Annexe : Feuilles de calculs Maple. Les expérimentations numériques ménées dans cette direction ont été jusque-la concluantes jusqu'à l'ordre 11. Par conséquent, il est donc nécessaire d'écrire des factorisations : $\mathcal{D}_X$ (Note 2 page 106, Note 3 page 106) et $\mathcal{D}_X^{(q)}$ (Corollaire 7 page 108).

7.2 Perspectives

1. Le cas des mots de Hall est particulièrement intéressant et nous nous proposons d'étudier à l'avenir, le lien entre les paires de bases en dualité : $(S_\ell^{(q)}, P_\ell^{(q)})_{\ell\in\mathcal{L}yn(X)}$ et $(S_h^{(q)}, P_h^{(q)})_{h\in\mathcal{H}all(X)}$. En particulier, nous essaierons de montrer que : $\mathcal{D}_X = \mathcal{D}_X^{(q)}$ où

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_X^{(q)} &= \prod_{h\in\mathcal{H}all(X)}^{\searrow} \exp_{\sqcup\!\sqcup_{q^{|h|^2}}\otimes\cdot}(S_h^{(q)} \otimes P_h^{(q)}) \\
&= \sum_{w\in X^\alpha} S_w^{(q)} \otimes P_w'^{(q)} \\
&= \sum_{w\in X^\alpha} w \otimes w + \Theta_X \\
&= \mathcal{D}_X + \Theta_X
\end{aligned}$$

avec $\Theta_X = \sum_{u<w<v\in X^\alpha} \langle S_w^{(q)} \mid u\rangle\, u \otimes \langle P_w'^{(q)} \mid v\rangle\, v$ et $\mathcal{H}all(X)$ est l'ensemble des mots de Hall sur X.

2. Par ailleurs, comme nous l'avons déjà mentionné, il est important de se demander si les travaux menés avec le produit de shuffle $\sqcup\!\sqcup$ dans le cas de l'algèbre libre se généralisent à ses déformations : (5.25) page 100.

3. Une autre façon de faire une $q-$déformation est de déformer le produit scalaire lui-même. Par exemple $\langle u \mid v\rangle_q = q^{|u|}\delta_{uv}$. Peut-on trouver d'autres bases intéressantes ? des factorisations de Schützenberger ?...

Quatrième partie

Annexe : Feuilles de calculs Maple

Voici un programme MAPLE qui affiche les Polynômes associés aux mots de Lyndon

```
> restart
> read "basesinduality_qShuffle5.txt";
> with(basesinduality);
```

[Compute_Ln, Compute_Rn, Compute_Xn, Compute_pi1, Compute_pi1_q, DeltaLetter, DeltaStuffle_q, Factori, FindDualBasis, GetMatrixDual, GetSigmaLyndon, IsPrimitive, ListLength, ListLessLength, ListOfStandarSequences, ListSameWeight, LyndonBasis, LyndonFact, LyndonLen, LyndonLex, MatrixPBWL, MatrixPBWL_L, MatrixPBWL_R, MatrixPBWL_Shuffle, MatrixPBWL_q, MatrixSShuffle_q, PBWL_wordShuff, PBWL_wordStuff, PBWL_wordStuff_q, PBWL_word_L, PBWL_word_R, PLynwordShuff, PLynwordShuff_q, PLynwordStuff, PLynwordStuff_q, P_qShuffle, ProductTensorPoly, S_qShuffle, ScalarProduct, SchutBasisShuff, SchutBasisStuff, SearchWords, SigmaOfWord, StandFact, TautologicNumber, TestOrthogonalShuffle, TestOrthogonal_q_Stuffle, WittFormula, concaproduct, conjClass, factor2expand, genword, greatLen, greatLex, homogeneousPart, init, isFactor, isLeftFactor, leftSubs, leftrem, lessLen, lessLex, letterOrder, mono_decompose, mono_melange, mono_mul, mono_weight, pbwlExp, pbwlExpand, pbwlLog, pbwlProduct, pbwl_poly_Mul, plog_melange, plog_word_compact, plog_word_root_simplify, plog_word_uncompact, poly2pbwl, poly_cat, q_ShuffleProduct, q_ShuffleTautologicNumber, q_StuffleProduct, rightrem, shuffleproduct, x_mono_ctuffle, x_mono_shuffle, x_mono_shuffle_q, x_mono_stuffle_q, x_poly_ctuffle, x_poly_shuffle, x_poly_shuffle_q, x_poly_stuffle_q, xcoeff, xcoeff_q, xcoeffs, xdegree, xexpand, xlcoeff, xpoly, xpower, xsort, xstar, xsubs, xtcoeff, xterm] **(1)**

```
>
```

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=2 sur l'alphabet X={a < b} .

```
> T := lyndon(2, "ab");
```

$$T := [ab] \qquad \textbf{(2)}$$

```
> for j from 1 to nops(T) do Polly(2, T[j], "ab", [1, 2], Y, q) end;
```

$$P^{q}[ab] = ab - q\,ba \qquad \textbf{(3)}$$

Calcul de tous les polynômes associés aux mots

de Lyndon de longueur n=3 sur l'alphabet X={a < b} .

```
> TA := lyndon(3, "ab");
```

$$TA := [aab, abb] \quad (4)$$

```
> for j from 1 to nops(TA) do Polly(3, TA[j], "ab", [1, 2], Y, q)end;
```

$$P^q[aab] = aab + (-q - q^2)\, aba + q^3\, baa$$

$$P^q[abb] = abb + (-q - q^2)\, bab + q^3\, bba \quad (5)$$

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=4 sur l'alphabet X={a < b} .

```
> TB := lyndon(4, "ab");
```

$$TB := [aaab, aabb, abbb] \quad (6)$$

```
> Polly(4, aaab, "ab", [1, 2], Y, q);
```

$$P^q[aaab] = aaab + \left(-q - q^2 - q^3\right) aaba + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) abaa - q^6\, baaa \quad (7)$$

```
> Polly(4, aabb, "ab", [1, 2], Y, q);
```

$$P^q[aabb] = aabb - \frac{q\left(2\,q + q^2 + 1\right) abab}{1 + q^4} - \frac{q^3\left(-1 - q + q^3 + q^4\right) abba}{1 + q^4} - \frac{q^3\left(-1 - q + q^3 + q^4\right) baab}{1 + q^4} + \frac{q^7\left(2\,q + q^2 + 1\right) baba}{1 + q^4} - q^6\, bbaa \quad (8)$$

```
> Polly(4, abbb, "ab", [1, 2], Y, q);
```

$$P^q[abbb] = abbb + \left(-q - q^2 - q^3\right) babb + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) bbab - q^6\, bbba \quad (9)$$

```
>
```

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=5 sur l'alphabet X={a < b} .

```
> TC := lyndon(5, "ab");
```

$$TC := [aaaab, aaabb, aabab, aabbb, ababb, abbbb] \quad \textbf{(10)}$$

> Polly(5, aaaab, "ab", [1, 2], Y, q);

$$P^q[aaaab] = aaaab + (-q - q^2 - q^3 - q^4)\, aaaba + (q^3 + q^4 + 2q^5 + q^6 + q^7)\, aabaa + (-q^6 - q^7 - q^8 - q^9)\, abaaa + q^{10}\, baaaa \quad \textbf{(11)}$$

> Polly(5, aaabb, "ab", [1, 2], Y, q);

$$P^q[aaabb] = aaabb - \frac{q(2q + q^2 + 1)\, aabab}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 + q^5 + q^4 + q^3)\, aabba}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4)\, abaab}{1 + q^4} + \frac{q^5(q^4 + 2q^2 + 2q + 1 + 2q^3)\, ababa}{1 + q^4} + \frac{q^6(q^5 - 1 - q - q^2)\, abbaa}{1 + q^4} + \frac{q^7(-1 - q + q^3 + q^4)\, baaba}{1 + q^4} - \frac{q^{11}(2q + q^2 + 1)\, babaa}{1 + q^4} + q^{10}\, bbaaa \quad \textbf{(12)}$$

> Polly(5, aabab, "ab", [1, 2], Y, q);

$$P^q[aabab] = aabab - q\, aabba + (-q - q^2 - q^6)\, abaab + (q^6 + q^5 + q + 1)\, q^2\, ababa - q^9\, abbaa + (q^3 + q^7)\, baaab - (q^5 + q^4 + 1)\, q^4\, baaba + q^{10}\, babaa \quad \textbf{(13)}$$

> Polly(5, aabbb, "ab", [1, 2], Y, q);

$$P^q[aabbb] = aabbb + (-q - q^2 - q^3)\, ababb + (q^7 + q^8 + q^9)\, abbab + (-q^8 + q^5 - q^9 - q^{10})\, abbba - (q^7 + 2q^6 + 2q^5 + q^4 - q^3 - 2q^2 - 2q - 1)\, q^4\, babab + (q^6 + 2q^5 + 2q^4 + q^3 - q^2 - q - 1)\, q^6\, babba + (q^6 + q^5 + q^4 - q^2 - q - 1)\, q^6\, bbaab - q^{11}(1 + q + q^2)\, bbaba + q^{10}\, bbbaa \quad \textbf{(14)}$$

> Polly(5, abaab, "ab", [1, 2], Y, q);

$$P^q[abaab] = abaab - q(1 + q)\, ababa + q^3\, abbaa - q\, baaab + (q^2 + q^3)\, baaba - q^4\, babaa \quad \textbf{(15)}$$

> $Polly(5, abbbb, "ab", [1, 2], Y, q);$

$$P^q[abbbb] = abbbb + \left(-q - q^2 - q^3 - q^4\right) babbb + \left(q^3 + q^4 + 2\,q^5 + q^6 + q^7\right) bbabb + \left(-q^6 - q^7 - q^8 - q^9\right) bbbab + q^{10}\, bbbba \tag{16}$$

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=3 sur l'alphabet X={a < b< c} .

> $TF := lyndon(3, "abc");$

$$TF := [aab, aac, abb, abc, acb, acc, bbc, bcc] \tag{17}$$

> **for** j **from** 1 **to** $nops(TF)$ **do** $Polly(3, TF[j], "abc", [1, 2, 3], Y, q)$**end**;

$$P^q[aab] = aab + \left(-q^2 - q\right) aba + q^3\, baa$$
$$P^q[aac] = aac + \left(-q^2 - q\right) aca + q^3\, caa$$
$$P^q[abb] = abb + \left(-q^2 - q\right) bab + q^3\, bba$$
$$P^q[abc] = abc - q\, acb + \left(q^3 - q\right) bac - q^4\, bca + q^3\, cba$$
$$P^q[acb] = acb - q^2\, bac + q^3\, bca - q\, cab$$
$$P^q[acc] = acc + \left(-q^2 - q\right) cac + q^3\, cca$$
$$P^q[bbc] = bbc + \left(-q^2 - q\right) bcb + q^3\, cbb$$
$$P^q[bcc] = bcc + \left(-q^2 - q\right) cbc + q^3\, ccb \tag{18}$$

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=4 sur l'alphabet X={a < b< c} .

> $TG := lyndon(4, "abc");$

$$TG := [aaab, aaac, aabb, aabc, aacb, aacc, abac, abbb, abbc, abcb, abcc, acbb, acbc, accb, accc, bbbc, bbcc, bccc] \tag{19}$$

> $Polly(4, TG[1], "abc", [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[aaab] = aaab + \left(-q - q^2 - q^3\right) aaba + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) abaa - q^6\, baaa \tag{20}$$

> $Polly(4, TG[2], "abc", [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[aaac] = aaac + \left(-q - q^2 - q^3\right) aaca + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) acaa - q^6\, caaa \tag{21}$$

> $Polly(4, TG[3], "abc", [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[aabb] = aabb - \frac{q(2q+q^2+1)\,abab}{1+q^4} - \frac{q^3(-1-q+q^3+q^4)\,abba}{1+q^4} - \frac{q^3(-1-q+q^3+q^4)\,baab}{1+q^4} + \frac{q^7(2q+q^2+1)\,baba}{1+q^4} - q^6\,bbaa \quad (22)$$

> *Polly*(4, *TG*[4], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[aabc] = aabc - q\,aacb + (q^3-q)\,abac + (-q^4-q^3)\,abca + (-q^7+q^5)\,acab + (q^8-q^6+q^4+q^3)\,acba + (-q^6+q^4)\,baca + q^7\,bcaa + (q^8-q^6)\,caab + (-q^9+q^7)\,caba - q^6\,cbaa \quad (23)$$

> *Polly*(4, *TG*[5], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[aacb] = aacb - q^2\,abac + q^3\,abca + (q^6-q^2-q)\,acab - q^7\,acba + q^5\,baca - q^6\,bcaa + (-q^7+q^3)\,caab + q^8\,caba \quad (24)$$

> *Polly*(4, *TG*[6], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[aacc] = aacc - \frac{q(2q+q^2+1)\,acac}{1+q^4} - \frac{q^3(-1-q+q^3+q^4)\,acca}{1+q^4} - \frac{q^3(-1-q+q^3+q^4)\,caac}{1+q^4} + \frac{q^7(2q+q^2+1)\,caca}{1+q^4} - q^6\,ccaa \quad (25)$$

> *Polly*(4, *TG*[7], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[abac] = abac - q\,abca - q^4\,acab + q^5\,acba - q\,baac + q^2\,baca + q^5\,caab - q^6\,caba \quad (26)$$

> *Polly*(4, *TG*[8], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[abbb] = abbb + (-q-q^2-q^3)\,babb + (q^5+q^4+q^3)\,bbab - q^6\,bbba \quad (27)$$

> *Polly*(4, *TG*[9], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[abbc] = abbc + (-q^2-q)\,abcb + q^3\,acbb + (q^4+q^5-q^2-q)\,babc + (-q^6-q^5+q^3+q^2)\,bacb + (q^8-q^6-q^5+q^3)\,bbac - q^9\,bbca + (q^8+q^7)\,bcba - q^6\,cbba \quad (28)$$

> *Polly*(4, *TG*[10], "abc", [1, 2, 3], *Y*, *q*);

$$P^q[abcb] = abcb - q\,acbb - q^3\,babc + (q^4+q^3-q)\,bacb + (-q^6 + q^4)\,bbac + q^7\,bbca - q^4\,bcab - q^6\,bcba + q^3\,cbab \tag{29}$$

> $Polly(4, TG[11], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[abcc] = abcc + (-q^2-q)\,acbc + q^3\,accb + (-q^6+q^4+q^3-q)\,bacc + (q^7+q^8-q^5-q^4)\,bcac - q^9\,bcca + (-q^6-q^7+q^4+q^3)\,cbac + (q^8+q^7)\,cbca - q^6\,ccba \tag{30}$$

> $Polly(4, TG[12], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[acbb] = acbb + (-q^3-q^2)\,bacb + q^5\,bbac - q^6\,bbca + q^3\,(1+q)\,bcab - q\,cabb \tag{31}$$

> $Polly(4, TG[13], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[acbc] = acbc - q\,accb + (q^4-q^2)\,bacc + (-q^5-q^6+q^3)\,bcac + q^7\,bcca - q\,cabc + q^2\,cacb + q^5\,cbac - q^6\,cbca \tag{32}$$

> $Polly(4, TG[14], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[accb] = accb - q^3\,bacc + q^4\,(1+q)\,bcac - q^6\,bcca + (-q^2-q)\,cacb + q^3\,ccab \tag{33}$$

> $Polly(4, TG[15], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[accc] = accc + (-q-q^2-q^3)\,cacc + (q^5+q^4+q^3)\,ccac - q^6\,ccca \tag{34}$$

> $Polly(4, TG[16], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[bbbc] = bbbc + (-q-q^2-q^3)\,bbcb + (q^5+q^4+q^3)\,bcbb - q^6\,cbbb \tag{35}$$

> $Polly(4, TG[17], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[bbcc] = bbcc - \frac{q\,(2q+q^2+1)\,bcbc}{1+q^4} - \frac{q^3\,(-1-q+q^3+q^4)\,bccb}{1+q^4} - \frac{q^3\,(-1-q+q^3+q^4)\,cbbc}{1+q^4} + \frac{q^7\,(2q+q^2+1)\,cbcb}{1+q^4} - q^6\,ccbb \tag{36}$$

> $Polly(4, TG[18], \text{"abc"}, [1, 2, 3], Y, q);$

$$P^q[bccc] = bccc + (-q-q^2-q^3)\,cbcc + (q^5+q^4+q^3)\,ccbc - q^6\,cccb \tag{37}$$

>

Calcul de tous les polynômes associés aux mots de Lyndon de longueur n=4 sur l'alphabet X={a <

b< c<d}.

> $TH := lyndon(4, \text{"abcd"});$

$$TH := [aaab, aaac, aaad, aabb, aabc, aabd, aacb, aacc, aacd, aadb, aadc, aadd, abac, abad, abbb, abbc, abbd, abcb, abcc, abcd, abdb, abdc, abdd, acad, acbb, acbc, acbd, accb, accc, accd, acdb, acdc, acdd, adbb, adbc, adbd, adcb, adcc, adcd, addb, addc, addd, bbbc, bbbd, bbcc, bbcd, bbdc, bbdd, bcbd, bccc, bccd, bcdc, bcdd, bdcc, bdcd, bddc, bddd, cccd, ccdd, cddd] \tag{38}$$

> $Polly(4, TH[1], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aaab] = aaab + \left(-q - q^2 - q^3\right) aaba + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) abaa - q^6\, baaa \tag{39}$$

> $Polly(4, TH[6], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aabd] = aabd - q\, aadb + \left(q^3 - q\right) abad + \left(-q^4 - q^3\right) abda + \left(-q^7 + q^5\right) adab + \left(q^8 - q^6 + q^4 + q^3\right) adba + \left(-q^6 + q^4\right) bada + q^7\, bdaa + \left(q^8 - q^6\right) daab + \left(-q^9 + q^7\right) daba - q^6\, dbaa \tag{40}$$

> $Polly(4, TH[7], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aacb] = aacb - q^2\, abac + q^3\, abca + \left(q^6 - q^2 - q\right) acab - q^7\, acba + q^5\, baca - q^6\, bcaa + \left(-q^7 + q^3\right) caab + q^8\, caba \tag{41}$$

> $Polly(4, TH[8], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aacc] = aacc - \frac{q\left(2q + q^2 + 1\right) acac}{1 + q^4} - \frac{q^3\left(-1 - q + q^3 + q^4\right) acca}{1 + q^4} - \frac{q^3\left(-1 - q + q^3 + q^4\right) caac}{1 + q^4} + \frac{q^7\left(2q + q^2 + 1\right) caca}{1 + q^4} - q^6\, ccaa \tag{42}$$

> $Polly(4, TH[10], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aadb] = aadb - q^2\, abad + q^3\, abda + \left(q^6 - q^2 - q\right) adab - q^7\, adba + q^5\, bada - q^6\, bdaa + \left(-q^7 + q^3\right) daab + q^8\, daba \tag{43}$$

> $Polly(4, TH[12], \text{"abcd"}, [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[aadd] = aadd - \frac{q\left(2q + q^2 + 1\right) adad}{1 + q^4} \tag{44}$$

$$-\frac{q^3\left(-1-q+q^3+q^4\right) adda}{1+q^4}-\frac{q^3\left(-1-q+q^3+q^4\right) daad}{1+q^4}+\frac{q^7\left(2q+q^2+1\right) dada}{1+q^4}-q^6\, ddaa$$

> Polly(4, TH[14], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[abad] = abad-q\,abda-q^4\,adab+q^5\,adba-q\,baad+q^2\,bada+q^5\,daab-q^6\,daba \tag{45}$$

> Polly(4, TH[16], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[abbc] = abbc+\left(-q^2-q\right) abcb+q^3\,acbb+\left(q^4+q^5-q^2-q\right) babc+\left(-q^6-q^5+q^3+q^2\right) bacb+\left(q^8-q^6-q^5+q^3\right) bbac-q^9\,bbca+\left(q^8+q^7\right) bcba-q^6\,cbba \tag{46}$$

> Polly(4, TH[18], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[abcb] = abcb-q\,acbb-q^3\,babc+\left(q^4+q^3-q\right) bacb+\left(-q^6+q^4\right) bbac+q^7\,bbca-q^4\,bcab-q^6\,bcba+q^3\,cbab \tag{47}$$

> Polly(4, TH[20], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[abcd] = abcd-q\,abdc+\left(q^3-q\right) acbd-q^4\,acdb+q^3\,adcb+\left(q^7-q^5+q^3-q\right) bacd+\left(q^2-q^6\right) badc+\left(q^6-q^4\right) bcad-q^9\,bcda+\left(-q^9+q^7\right) bdac+q^{10}\,bdca+\left(-q^5+q^3\right) cbad+q^7\,cdba+\left(q^8-q^6\right) dbac+\left(-q^9+q^7\right) dbca-q^6\,dcba \tag{48}$$

> Polly(4, TH[22], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[abdc] = abdc-q^2\,acbd+q^3\,acdb-q\,adbc-q^4\left(q^2-1\right) bacd+\left(q^3-q\right) badc+q^5\left(q^2-1\right) bcad+\left(q^8-q^4\right) bdac-q^9\,bdca-q^4\left(q^2-1\right) cbad+q^7\,cbda-q^6\,cdba+\left(-q^7+q^3\right) dbac+q^8\,dbca \tag{49}$$

> Polly(4, TH[24], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[acad] = acad-q\,acda-q^4\,adac+q^5\,adca-q\,caad+q^2\,cada+q^5\,daac-q^6\,daca \tag{50}$$

> Polly(4, TH[26], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);

$$P^q[acbc] = acbc-q\,accb+\left(q^4-q^2\right) bacc+\left(-q^5-q^6+q^3\right) bcac+q^7\,bcca-q\,cabc+q^2\,cacb+q^5\,cbac-q^6\,cbca \tag{51}$$

> $Polly(4, TH[28], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[accb] = accb - q^3\,bacc + q^4\,(1+q)\,bcac - q^6\,bcca + \left(-q^2 - q\right) cacb + q^3\,ccab \tag{52}$$

> $Polly(4, TH[30], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[accd] = accd + \left(-q^2 - q\right) acdc + q^3\,adcc + \left(q^4 + q^5 - q^2 - q\right) cacd + \left(-q^6 - q^5 + q^3 + q^2\right) cadc + \left(q^8 - q^6 - q^5 + q^3\right) ccad - q^9\,ccda + \left(q^8 + q^7\right) cdca - q^6\,dcca \tag{53}$$

> $Polly(4, TH[32], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[acdc] = acdc - q\,adcc - q^3\,cacd + \left(q^4 + q^3 - q\right) cadc + \left(-q^6 + q^4\right) ccad + q^7\,ccda - q^4\,cdac - q^6\,cdca + q^3\,dcac \tag{54}$$

> $Polly(4, TH[34], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[adbb] = adbb + \left(-q^3 - q^2\right) badb + q^5\,bbad - q^6\,bbda + q^3\,(1+q)\,bdab - q\,dabb \tag{55}$$

> $Polly(4, TH[36], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[adbd] = adbd - q\,addb + \left(q^4 - q^2\right) badd + \left(-q^5 - q^6 + q^3\right) bdad + q^7\,bdda - q\,dabd + q^2\,dadb + q^5\,dbad - q^6\,dbda \tag{56}$$

> $Polly(4, TH[38], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[adcc] = adcc + \left(-q^3 - q^2\right) cadc + q^5\,ccad - q^6\,ccda + q^3\,(1+q)\,cdac - q\,dacc \tag{57}$$

> $Polly(4, TH[40], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[addb] = addb - q^3\,badd + q^4\,(1+q)\,bdad - q^6\,bdda + \left(-q^2 - q\right) dadb + q^3\,ddab \tag{58}$$

> $Polly(4, TH[42], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[addd] = addd + \left(-q - q^2 - q^3\right) dadd + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) ddad - q^6\,ddda \tag{59}$$

> $Polly(4, TH[44], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[bbbd] = bbbd + \left(-q - q^2 - q^3\right) bbdb + \left(q^5 + q^4 + q^3\right) bdbb - q^6\,dbbb \tag{60}$$

> $Polly(4, TH[46], "abcd", [1, 2, 3, 4], Y, q);$

$$P^q[bbcd] = bbcd - q\,bbdc + \left(q^3 - q\right) bcbd + \left(-q^4 - q^3\right) bcdb + \left(-q^7\right. \tag{61}$$

$$+ q^5) \, bdbc + (q^8 - q^6 + q^4 + q^3) \, bdcb + (-q^6 + q^4) \, cbdb + q^7 \, cdbb + (q^8 - q^6) \, dbbc + (-q^9 + q^7) \, dbcb - q^6 \, dcbb$$

> *Polly*(4, *TH*[48], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[bbdd] = bbdd - \frac{q(2q + q^2 + 1) \, bdbd}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) \, bddb}{1 + q^4} - \frac{q^3(-1 - q + q^3 + q^4) \, dbbd}{1 + q^4} + \frac{q^7(2q + q^2 + 1) \, dbdb}{1 + q^4} - q^6 \, ddbb \quad (62)$$

> *Polly*(4, *TH*[50], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[bccc] = bccc + (-q - q^2 - q^3) \, cbcc + (q^5 + q^4 + q^3) \, ccbc - q^6 \, cccb \quad (63)$$

> *Polly*(4, *TH*[52], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[bcdc] = bcdc - q \, bdcc - q^3 \, cbcd + (q^4 + q^3 - q) \, cbdc + (-q^6 + q^4) \, ccbd + q^7 \, ccdb - q^4 \, cdbc - q^6 \, cdcb + q^3 \, dcbc \quad (64)$$

> *Polly*(4, *TH*[54], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[bdcc] = bdcc + (-q^3 - q^2) \, cbdc + q^5 \, ccbd - q^6 \, ccdb + q^3 (1 + q) \, cdbc - q \, dbcc \quad (65)$$

> *Polly*(4, *TH*[56], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[bddc] = bddc - q^3 \, cbdd + q^4 (1 + q) \, cdbd - q^6 \, cddb + (-q^2 - q) \, dbdc + q^3 \, ddbc \quad (66)$$

> *Polly*(4, *TH*[58], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[cccd] = cccd + (-q - q^2 - q^3) \, ccdc + (q^5 + q^4 + q^3) \, cdcc - q^6 \, dccc \quad (67)$$

> *Polly*(4, *TH*[60], "abcd", [1, 2, 3, 4], *Y*, *q*);

$$P^q[cddd] = cddd + (-q - q^2 - q^3) \, dcdd + (q^5 + q^4 + q^3) \, ddcd - q^6 \, dddc \quad (68)$$

>

>

Bibliographie

[Bam13] C. Bui, G. H. E. Duchamp, V. Hoang Ngoc Minh, *Schützenberger's factorization on the (completed) Hopf of $q-$stuffle product*, Journal of Algebra, Number Theory and Applications, Volume 30, Number 2, : $191-215$, 2013.

[Bir37] G. D. Birkhoff, *Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices,* Ann. of Math. (2), 38, : $526-532$, 1937.

[Bou] N. Bourbaki, Lie Groups and Lie Algebras, chapter 1-3, Springer.

[Bpe85] J. Berstel, D. Perrin. Theory of codes, *Academic Press* 1985.

[Bre84] J. Berstel and C. Reutenauer, *Rational series and their languages*, EATCS Monographs on Theoretical Computer Science, Springer-Verlag, 1984.

[Bui12] C. Bui, *Hopf of shuffle and quasi-shuffle : constructions of dual bases applications to polyzêtas*, Report of Stage, 2012.

[Bu111] Jean-Paul Bultel, *Déformations d'algèbres de Hopf combinatoires et inversion de Lagrange non commutative*, Doctorat de l'Université Paris - Est : Spécialité Informatique : 2011.

[Car01] P. Cartier, *Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents*, Sém BOURBAKI, 53éme , numero : 885, $2000-2001$.

[Cbi11] Pièrre Cartier, Philiphe Biane, *Algèbres de Hopf combinatoires*, Séminaire de Combinatoire Énumérative et Analytique, Institut Henry Poincaré, Année $2010-2011$.

[Cfl58] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, Free differential calculus, IV. The quotient groups of the lower central series, *Ann. of Math.*, : 68 8195, 1958.

[Cmh09] C. Costermans and Hoang Ngoc Minh, *Noncommutative algebra, multiple harmonic sums and applications in discrete probability*, Journal of Symbolic Computation, : $801-817$, 2009.

[Cost08] Christian Costermans, *Calcul symbolique non commutatif : analyse des constantes d'arbre de fouille*, Doctorat de l'Université des Sciences et Technologies de Lille : Spécialité Informatique : 2008.

[Dkt97] G. Duchamp, A. Klyachko, D. Krob and J-Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions III : Deformations of Cauchy and convolution algebras*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 1(2), : $159-216$, 1997.

[Dlm13] G. E. H. Duchamp, L. Kane, V. Hoang Ngoc Minh, C. Tollu, *Dual bases for non commutative symmetric and quasi-symmetric functions via monoidal factorization,* journals.academia.edu/ArXivMathematic ?page=40 ou arXiv.org/abs/1305.4447 .

[ladji2] L. Kane, G.H.E Duchamp, C. Tollu, *Combinatorics of $q-$deformed shuffle of the Poincaré-Birkhoff-Witt basis*, JP Journal of Algebra, Number Theory and Applications. 2014 Pushpa Publishing House, Allahabad, India. Volume 32, Number 1, 2014, Pages $19-48$. Published Online : May 2014. Available online at http ://pphmj.com/journals/jpanta.htm.

[ladji3] G.H.E Duchamp, L. Kane, V. Hoang Ngoc Minh, C. Tollu, *Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité*, The 4th International Conference on Complex System and Applications. Normandie University - Le Havre France.

[Dmt14] G. H. E. Duchamp, V. Minh, C. Tollu, C. Bui, H.N. Nguyen, *Combinatorics of deformed shuffle Hopf algebras* : $1-26$, 2014, $http://arxiv.org/pdf/1302.5391.pdf$.

[Dri90] V. Drinfel'd, *Quasi-Hopf Algebras, Len. Math*, J., 1, : $1419-1457$, 1990.

[Drin91] V. Drinfel'd, *On quasitriangular quasi-hopf algebra and a group closely connected with gal*$(\bar{q}/q)$, Leningrad, Math. J., 4, : $829-860$, 1991.

[Dtp10] Gérard H. E. Duchamp, Christophe Tollu, Karol A. Penson and Gleb A. Koshevoy, *Deformations of Algebras, Twisting and Perturbations*, Séminaire Lotharingien de Combinatoire, $B62e$, 2010.

[Emi12] J-Y. Enjalbert, Hoang Ngoc Minh, *Combinatorial study of Hurwitz colored polyzêtas*, Discrete Mathematics, 24, 312, : $3489-3497$, 2012.

[Gkl95] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V.S. Retakh, J.Y. Thibon, *Noncommutative symmetric functions*, Advances in Mathematics 112, : $218-348$, 1995,

[Gre89] A. Garsia and C. Reutenauer, *A decomposition of Solomon's descent algebra*, Adv. in Math. 77, : $189-262$, 1989.

[Gsc87] M. Gerstenhaber and D. Schack, *A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology*, J. Pure Appl. Alg. 48, : $229-247$, 1987.

[Hof00] M. Hoffman, *Quasi-shuffle products*, J. of Alg. Combinatorics, 11, : $49-68$, 2000, $http://arxiv.org/abs/math/9907173v1$.

[Hum] James E. Humphreys, *Reflexion groups and coxeter groups*, Cambridge studies in advanced mathematics.

[Jop00] G. Jacob, N. E. Oussous et M. Petitot, *Calcul formel*, Dea Informatique 7 novembre 2000, Université de Lille 1.

[Kas09] Anisse KASRAOUI, *Études combinatoires sur les permutations et partitions d'ensemble*, Doctorat de l'Université Claude Bernard Lyndon 1, 2009 : Spécialité Mathématique.

[Kms95] M. Kashiwara, T. Miwa and E. Stern, *Decomposition of $q-$deformed Fock spaces*, prepint, 1995.

[Lmu96] T. Q. T. Lê and J. Murakami, *Kontsevich's integral for Kauffman polynomial*, Nagoya Math, $39-65$, 1996.

[Lod89] J. L. Loday, *Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives*, Invent. Math. 96, : $205-230$, 1989.

[Lot83] M. Lothaire, Combinatorics on words, *Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass*, coll. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 17, 1983.

[Mat12] Mathieu Deneufchâtel, *Intégrales Itérées en Physique Combinatoire*, Doctorat de l'Université Paris 13, Sorbonne Paris cité : 2012.

[Mela91] G. Mélançon, *Réécriture dans l'algèbre de Lie libre, le groupe libre et l'algèbre associative libre,* Thèse Math., Univ. du Québec à Montréal, 1991.

[Mih13] Hoang Ngoc Minh, *Structure of polyzetas and Lyndon words,* Vietnam Journal Mathematics ISSN $2305-221X$, volume 41, Number 4, December 2013.

[Min03] Hoang Ngoc Minh, *Finite polyzêtas, Poly-Bernoulli numbers, identities of polyzêtas and noncommutative rational power series*, Proceedings of 4^{th} International Conference on Words : $232-250$, 2003.

[Min13] Hoang Ngoc Minh, *On a conjecture by Pierre Cartier about a Group of associators,* Acta Math Vietnam *DOI* $10.1007/s40306-013-0024-1$.

[Mph99] H. Ngoc Minh, M. Petitot and J. Van der Hoeven, *L'algèbre des polylogarithmes par les séries génératrices*, Proceedings of FPSAC'99, 1999.

[Mpl70] B. Mielnik and J. Plebanski, *Combinatorial approch to Baker-Campell-Hausdorff exponents*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Section A vol. 12, : $215-254$, 1970.

[Mre89] G. Mélançon and C. Reutenauer, Lyndon words, free algebras and shuffles, *Can. J.Math.* 41, : $577-591$, 1989.

[Mre95] C. Malvenuto and C. Reutenauer, *Duality between quasi-symmetric functions and the Solomon descent algebra*, J. of Alg 177, : $967-982$, 1995.

[Ous01] N. E. Oussous, *Contribution à l'identification de modèles par l'algèbre non commutative*, Habilitation à Diriger des Recherches, Université de Lille 1, N^0 d'ordre : H 317, 2001.

[Poi00] H. Poincaré, *Sur les groupes continus,* Trans. Cambr. Philos. Soc., 18, : $220-225$, 1900.

[Rad79] D.E. Radford, *A natural ring basis for shuffle algebra and an application to group schemes*, Journal of Algebra, 58, : $432-454$, 1979.

[Ree58] R. Ree, *Lie elements and an algebra associated with shuffles* Ann. Math 68 : $210-220$, 1958.

[Reu93] C. Reutenauer, Free Lie Algebras, *London Math. Soc. Monographs*, New Series 7, Oxford Science Publications, 1993.

[Sch58] M. P. Schützenberger, *Sur une propriété combinatoire des algèbres de Lie libres pouvant être utilisée dans un problème de Mathématiques appliquées*, Séminaire Dubreuil - Pisot année 1958 - 1959, Inst. Henri - Poincaré, Paris 1958.

[Sol76] L. Solomon, *A Mackey formula in the group ring of a Coxeter group*, J. Algebra 41, 255 – 268, 1976.

[Tev07] Lenny Tevlin, *Noncommutative Monomial Symmetric Functions, Formal Power Series and Algebraic Combinatorics*, Nankai University, Tianjin, China, 2007.

[Var93] A. Varchenko, *Bilinear form of real configuration of hyperplanes*, Adv. in Math. 97, : 110 – 144, 1993.

[Vien78] Viennot X. G., *Algèbre de Lie libres et monoïdes libres*, Lecture Notes in Mathematics 691. Springer - Verlag 1978.

[Wit37] E. Witt, *Treue Darstellung Liescher Ringe*, J. Reine Angew. Math., 177, : 152 – 160, 1937.

[Wmo65] John W. Milnor and John C. Moore, *On the structure of Hopf algebras,* Ann. of Math. (2) 81 , : 211 – 264, 1965.

[Zag94] D. Zagier, *Values of zeta functions and their applications*, in First European Congress of Mathematics Birkhâser, vol. 2 , : 497 – 512, 1994.

[Zag92] D. Zagier, *Realizability of a model in infinite statistics*, Commun. Math. Phys. 147, : 199 – 210, 1992.

Titre : Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité.

Résumé : La Combinatoire a permis de résoudre certains problèmes en Mathématiques, en Physique et en Informatique, en retour celles-ci inspirent des questions nouvelles à la Combinatoire. Ce mémoire de thèse intitulé "Combinatoire et algorithmique des factorisations tangentes à l'identité" regroupe plusieurs travaux sur la combinatoire des déformations du produit de shuffle.
L'objectif de cette thèse est d'écrire des factorisations dont le terme principal est l'identité à travers l'utilisation d'outils portant principalement sur la combinatoire des mots (ordres, graduations, etc.). Dans le cas classique, soit F une algèbre libre. En raison du fait que F est une algèbre enveloppante, on a une factorisation exacte de l'identité de

$$End(F) = F^{\star}\hat{\otimes}F$$

comme un produit infini d'exponentielles ($End(F)$ étant muni du produit de shuffle sur la gauche et de la concaténation sur la droite, une représentation fidèle du produit de convolution). La procédure est la suivante : premiérement on commence avec une base de Poincaré-Birkhoff-Witt, deuxièment on calcule la famille des formes coordonnées et alors les propriétés (combinatoires) non triviales de ces familles en dualité donne la factorisation. Si on part de l'autre côté, l'écriture pour le même produit ne donne exactement l'identité que sous des conditions très restrictives que nous précisons ici. Dans de nombreux autres cas (déformés), la construction explicite des paires de bases en dualité nécessite une étude combinatoire et algorithmique que nous fournissons dans ce mémoire.

Mots-clefs : Combinatoire algébrique, Produit de shuffle, Produit de $q-$shuffle, Produit de $q-$stuffle, Éléments de Lie, Algèbre de Lie libre, Base de Poincaré-Birkhoff-Witt, Base de Transcendance, Bases multiplicatives, Factorisations tangentes à l'identité.

Title : Combinatorics and algorithmics of factorizations tangent to the identity.

Abstract : Combinatorics and algorithmics of factorizations tangent to the identity

Abstract : Combinatorics has solved many problems in Mathematics, Physics and Computer Science, in return these domains inspire new questions to Combinatorics. This memoir entitled "Combinatorics and algorithmics of factorizations tangent to identity" includes several works on the combinatorial deformations of the shuffle product.
The aim of this thesis is to write factorizations which principal term is the identity through the use of tools relating mainly to combinatorics on the words (orderings, gradings etc.). In the classical case, let F be the free algebra. Due to the fact that F is an enveloping algebra, one has an exact factorization of the identity of

$$End(F) = F^{\star}\hat{\otimes}F$$

as an infinite product of exponentials ($End(F)$ being endowed with the shuffle product on the left and the concatenation on the right, a faithful representation of the convolution product) as follows : first one begins with a PBW basis, second one computes the family of coordinate forms and then non-trivial (combinatorial) properties of theses families in duality gives the factorization. Starting from the other side and writing the same product does give exactly identity only under very restrictive conditions that we clarify here. In many other (deformed) cases, the explicit construction of pairs of bases in duality requires combinatorial and algorithmic studies that we provide in this memoir.

Keywords : Algebraic combinatorics, Shuffle product, q-Shuffle product, q-Stuffle product, Lie elements, Free Lie algebra, Poincar-Birkhoff-Witt basis, Transcendence basis, Multiplicative bases, Factorizations tangent to the identity.