École doctorale Galilée

Laboratoire d'Analyse, Géométrie et Applications

Thèse

presenté par

Huan CHEN

le 15 septembre 2017

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : Mathématiques

Fonctorialité, Idéaux de congruence et Grande images de représentations galoisiennes associées aux familles de Hida

Directeur de thèse : **M. Jacques TILOUINE**

Membres du Jury

Mme. Anne-Marie AUBERT	Examinatrice
M. Pascal BOYER	Examinateur
M. Wushi GOLDRING	Rapporteur
M. Farid MOKRANE	Examninateur
M. Benoît STROH	Rapporteur
M. Jacques TILOUINE	Directeur de thse

Table des matières

Remerciements

Je veux d'accord remercier Hida Haruzo. Il a inventé la théorie de Hida qui est le sujet de cette thèse. Je lui remercie aussi pour sa générosité. Il a lu cette thèse soigneusement et donné beaucoup de commentaires inspirants.

Je tiens à exprimer chaleureusement ma gratitude à mon directeur de thèse, Jacques Tilouine. Je lui remercie pour son introduction à ce sujet intéressant, sa générosité à partager ses connaissances et idées mathématiques, sa patience pendant de nombreuses heures de discussions et son consistent encouragement.

Je remercie vivement Wushi Goldring et Benoît Stroh pour accepter cette lourde tache de rapporter ma thèse. Ils ont aussi signalé des erreurs dans ma thèse et donné des conseilles d'amélioration. J'ai l'honneur d'avoir aussi Anne-Marie Aubert, Pascal Boyer, Farid Mokrane dans le jury. Je les remercie également.

J'en profite l'occasion pour remercier les professeurs à l'ENS et à l'Université Paris 6,7,11. Ils ont donné les cours intéressants et variants. Je remercie autant mes professeurs à l'Université Tsinghua. Xuguang Lu m'a ouvert la porte aux mathématiques modernes. Zhiying Wen m'a encouragé à poursuivre mes études à l'ENS.

Je voudrais remercie l'équipe d'Arithmétique et Géométrie Algébrique du LAGA pour une ambiance de travail excellente. Je remercie Jaclyn Lang pour ses exposés de sa thèse et ses commentaires sur la mienne. Je remercie tous mes collègues et amis à Paris, en particulier Andrea Conti, Jie Lin et Shinan Liu.

J'exprime ma connaissance du fond du cœur à mes parents pour leur soutien constant et je remercie mon petit frère Qing Wang pour son encouragement dans les moments difficiles.

Introduction

Le but de ce travail est de généraliser des travaux de Hida [**H15**], J. Lang [**Lang16a**], Hida-Tilouine [**HT15**], Conti-Iovita-Tilouine[**CIT16**] et A. Conti [**Con16a**] sur l'image de la représentation galoisienne associée à une famille p-adique de Hida de formes automorphes. Hida et J. Lang ont montré que l'image d'une famille non CM de formes modulaires classiques ordinaires contient un sous-groupe de congruence de l'algèbre d'Iwasawa des poids et même d'une extension finie de cette algèbre, appelée anneau des self-twists. Dans le cas où la représentation résiduelle est l'induite d'un caractère d'un corps quadratique imaginaire, ils ont relié le niveau optimal du groupe de congruence à l'idéal de congruences entre la famile de Hida non CM et des familles CM. Dans [**HT15**], les auteurs ont généralisé le théorème d'existence d'un sous-groupe de congruence non trivial contenu dans l'image de Galois au cas d'une famille de Hida de formes de Siegel de genre 2 "générale" (ce qu'on peut traduire du côté galoisien en disant que la représentation adjointe sur $\mathfrak{sp}_4$ est irréductible). Dans le cas où la représentation résiduelle est induite d'une représentation dans GL_2 associée à une forme de Hilbert cohomologique p-ordinaire, ils ont aussi relié le niveau optimal à l'idéal de congruence entre la famille "générale" et les famille thêta lifts de familles de Hida de formes de Hilbert. Dans [**CIT16**] resp. [**Con16a**], ceci a été généralisé au cas de familles de pente finie de formes classiques, resp. de formes de Siegel de genre 2, la différence étant alors que l'on ne doit plus parler de sous-groupe de congruence mais de sous-algèbre de Lie de congruence.

Dans le présent travail, on a tenté de dégager la généralité maximale de ce genre de résultats dans le cas ordinaire, en suivant de près les idées de [**HT15**],[**Lang16b**] et [**Con16a**]. On considère donc deux groupes réductifs connexes G et H sur un corps de nombres totalement réel F dont le groupe déployé associé est un groupe de Chevalley. On suppose celui de G de groupe dérivé simple. On se donne un homomorphisme de transfert $r\colon {}^LH \to {}^LG$. On a besoin que la théorie de Hida soit établie pour ces groupes. On commence donc dans le chapitre 1 par établir cette théorie en toute généralité pour G compact à l'infini (elle est déjà connue pour $\mathrm{GL}_{2/F}$ [**H88**], $\mathrm{GSp}_{4/F}$ [**TU99**], pour $\mathrm{GSp}_{2g/\mathbb{Q}}$ [**H02**] et [**Pi12a**] et pour les groupes unitaires quasi-déployés [**H02**], voir aussi [**Hs14**] pour les groupes de type $U(r,1)$, ou [**Ge10**] pour les groupes totalement définis).

On rappelle dans le chapitre 2 la description conjecturale de la correspondance de Langlands globale, du transfert (en supposant qu'il est établi pour r), et de leur compatibilité avec la notion d'ordinarité.

Au chapitre 3, on suppose que l'action adjointe Ad de ${}^LG$ sur son algèbre de Lie est irréductible mais pas celle de $\mathrm{Ad} \circ r$. On suppose aussi que les représentations galoisiennes associées à des représentations algébriques régulières pour H et G sont construites (elles sont pour les groupes mentionnés ci-dessus). Sous certaines hypothèses techniques (dont l'une, la $\mathbb{Z}_p$-régularité, est cruciale), on montre alors que l'image de Galois d'une famille de Hida générale $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ pour G (au sens que l'adjointe de sa représentation galoisienne est irréductible) contient un sous groupe de congruence. Si de plus la représentation résiduelle $\overline{\rho}_\mu$ est de la forme $r \circ \overline{\rho}_{\mu'}$ pour une famille de Hida μ' sur H, on relie le niveau optimal d'un sous groupe de congruence avec l'idéal de congruences entre la famille μ et des images par le transfert par r de familles de Hida sur H. Cette théorie est développée de manière axiomatique sous un certain nombre d'hypothèses.

L'objet du dernier chapitre est de vérifier dans plusieurs cas de transfert ces hypothèses et d'obtenir ainsi des théorèmes du type décrit ci-dessus mais inconditionnellement. Il s'agit des cas de l'induction automorphe de GL_m à GL_n ($n = md$) pour une extension cyclique de corps réels de degré d, des puissances symétriques Sym^n pour $n \leq 8$ (dues à [**KS02a**],[**KS02b**] , [**RS06**] et [**CT15**]) , du transfert de GSp_4 à GL_4, du produit tensoriel de deux formes [**Ra00**], du carré extérieur de GL_4 à GL_6 [**Kim03**].

L'énoncé du Théorème principal de Chapitre 3 est le suivant. Soit $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida de Nebentypus hors de p au plus quadratique (cette hypothèse technique intervient dans l'étude ds self-twists). On suppose $\overline{\rho}_\mu$ absolument irréductible. Soit $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ la représentation galoisienne associée à μ. Soit $\mathbb{I}_0$ le sous-anneau fixé par le groupe Γ des self-twists (voir Section 1.4, Chapitre 3). Soit $H_0 = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{Ker}\, \eta_\sigma$ le sous-groupe ouvert distingué de Γ_F associé aux caractères des self-twists (voir Section 2.2, Chapitre 3). Soit $\rho = \rho_\mu|_{H_0}\colon H_0 \to {}^LG(\mathbb{I}_0)$. Notons $\widehat{G}'$ le groupe dérivé de $\widehat{G}$.

Théorème 1. *Supposons que :*

(0) $\overline{\rho}$ est absolument irréductible,

(1) Il existe un poids classique régulier λ tel qu'on ait $(IRRAD_{G,P_\lambda})$(voir Section 7, Chapitre 2),

(2) ρ est $\mathbb{Z}_p$-régulière,

(3) ρ est p-distinguée (voir Définition 4.2),

Alors il existe un idéal $\mathfrak{l}$ non-nul de $\mathbb{I}_0$ tel que l'image $\mathrm{Im}\,\rho$ *contienne l'idéal de congruence* $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l})$.

On devrait pouvoir se débarrasser de l'hypothèse déplaisante (0) avec plus de travail. L'hypothèse cruciale de $\mathbb{Z}_p$-régularité est définie dans les Hypothèses 5 de la Section 7, Chapitre 2. L'hypothèse (3) permet de formuler la condition d'ordinarité sans ambiguïté. Elle n'est peut-être pas indispensable.

Le second théorème principal relie le niveau galoisien $\mathfrak{l}_\mu$ à un idéal de congruences galoisien $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ (voir la Définition 7.2, Chapitre 2). On suppose que ρ_μ est congrue modulo l'idéal maximal à $r \circ \rho_{\mu_H}$ où $r\colon {}^LH \to {}^LG$ est un morphisme de transfert et μ_H est une famille de Hida sur H. On définit alors des idéaux de congruences entre ρ_μ et des transfert $r_1 \circ \rho_{H_1}$ pour tous les groupes réductifs connexes H_1 tels que ${}^LH_1$ s'insère entre ${}^LH$ et ${}^LG$ (voir Section 7.1, Chapitre 2). Notons $\widehat{H}'$ le groupe dérivé de $\widehat{H}$. On a alors

Théorème 2. *Soit $r\colon {}^LH \to {}^LG$ un morphisme de transfert strict effectif irréductible et tel que $(REDAD_H)$ (voir Section 7, Chapitre 2) soit vraie. Soit $\mu_H \to \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ telle que ρ_{μ_H} soit d'image résiduelle contenant $\widehat{H}'(k') \subset \mathrm{Im}\,\overline{\rho}_{\pi_H}$. On suppose que $\overline{\rho}_\mu = r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$.*

Avec les mêmes hypothèses et notations que le théorème avant. On a $V(\mathfrak{c}_{\mu,gal}[p^{-1}]) = V(\mathfrak{l}_\mu[p^{-1}])$. Autrement dit, $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ et $\mathfrak{l}_\mu$ contiennent les mêmes idéaux premiers autres que (ϖ).

Ce second théorème est facile : la détermination de la classe $\mathcal{C}$ des groupes réductifs intermédiaires H_1 de la Définition 7.1, Chapitre 2 donne sa valeur au résultat. Des conjectures plus précises sont proposées pour

-le calcul de l'idéal de congruences (voir Conjecture 0.10 du Chapitre 3)

-suivant une idée de J. Lang, un meilleur niveau galoisien $\mathfrak{l}'_\mu$ contenant $\mathfrak{l}_\mu$ (voir Remarque 8.1),

de sorte qu'on peut espérer comparer exactement $\mathfrak{l}'_\mu$ et $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$. D'autre part, les conjectures de Fontaine-Mazur pour les groupes H_1 pourraient permettre de relier $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ et $\mathfrak{c}_{\mu,aut}$.

Introduction (English)

The aim of this thesis is to generalize the work of Hida [**H15**], J. Lang [**Lang16a**], Hida-Tilouine [**HT15**], Conti-Iovita-Tilouine [**CIT16**] and A. Conti [**Con16a**] on the image of the Galois representation associated to a p-adic Hida family of automorphic forms. Hida et J. Lang have proved that the image of a non-CM family of ordinary classical modular forms contains a congruence subgroup of Iwasawa algebra of weights and also of a finite extension of this algebra, which is called the self-twist ring. In the case where the residual representation is induced from a character of a quadratic imaginary field, they have related the optimal level of congruence subgroups to the congruence ideal between the non-CM Hida family and CM families. In [**HT15**], the authors have generalized the theorem about the existence of non-trivial congruence subgroups contained in the image of the Galois representation to the case of a Hida family of "general" Siegel modular forms of genus 2 (here the term "general" means that on the Galois representation side, the adjoint representation of $\mathfrak{sp}_4$ is irreducible). In the case where the residual representation is induced from a representation of GL_2 associated to a p-ordinary cohomological Hilbert form, they have also related the optimal level to the congruence ideal between a "general" family and families which are theta lifts of the Hida families of Hilbert modular forms. In [**CIT16**] resp. [**Con16a**], similar results are established in the case of finite-slope families of classical forms, resp. of Siegel modular forms of genus 2. One difference here is that on considers congruence Lie sub-algebras instead of congruence subgroups.

In this work, following closely the ideas in [**HT15**],[**Lang16b**] and [**Con16a**], we try to establish the same type of results in the ordinary case in the maximal possible level of generality. Therefore we investigate two connected reductive groups G and H over a total real number field. We suppose that their associated split groups are Chevalley groups and that the split group associated to G has a simple derived group. We consider a transfer $r\colon {}^LH \to {}^LG$. We need Hida theory for these groups. So we begin with general Hida theory for groups compact at infinity in the Chapter 1 (it is already known for $\mathrm{GL}_{2/F}$ [**H88**], $\mathrm{GSp}_{4/F}$ [**TU99**], for $\mathrm{GSp}_{2g/\mathbb{Q}}$ [**H02**] and [**Pi12a**] and for quasi-split unitary groups [**H02**], see also [**Hs14**] for the groups of type $U(r,1)$, and [**Ge10**] for the totally definite groups).

In chapter 2, we recall conjectural descriptions of the global Langlands correspondence, of the transfers and of their compatibility with the ordinary conditions.

In chapter 3, we suppose that the adjoint action Ad of ${}^LG$ on its Lie-algebra is irreducible but false for $\mathrm{Ad}\circ r$. We suppose also that the Galois representations associated to algebraic regular representations of H and G are already constructed (these representations are already constructed for all the groups mentioned above). Under some technical hypotheses, among which $\mathbb{Z}_p$-regularity is crucial, we prove that the image of the Galois representation of a general Hida family $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ for G (here "general" means that the adjoint representation is irreducible) contains a congruence subgroup. If moreover the residual representation $\overline{\rho}_\mu$ is of type $r\circ\overline{\rho}_{\mu'}$ for some Hida family μ' over H, we relate the optimal level of the congruence subgroup to the congruence ideal between the family μ and the images under the transfer r of the Hida families over H. This theory will be developed axiomatically under several hypotheses.

The task of the last chapter is to verify these hypotheses for the concrete transfers and therefore to obtain unconditional theorems of the type discribed above. More precisely, we shall consider the automorphic induction form GL_m to GL_n ($n = md$) for a degree d cyclic extension of reel fields, symmetric powers Sym^n for $n \leq 8$ (due to [**KS02a**],[**KS02b**], [**RS06**] et [**CT15**]), the transfer from GSp_4 to GL_4,the tensor products of two forms [**Ra00**], the exterior-square $\bigwedge^2$ from GL_4 to GL_6 [**Kim03**].

The statement of the principal Theorem in chapter 3 is the following : let $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ be a Hida family with Nebentypus outside p at most quadratic (this technical hypothesis comes from the study of self-twists). We suppose that $\overline{\rho}_\mu$ is absolutely irreducible. Let $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I})$ be the Galois representation associated to μ, and $\mathbb{I}_0$ be the sub-ring fixed by the group of self-twists Γ (see Section1.4, Chapter 3). Let $H_0 = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{Ker}\ \eta_\sigma$ be the open normal subgroup of Γ_F associated to the characters of self-twists (see Section 2.2, Chapter 3) and we put $\rho = \rho_\mu|_{H_0}\colon H_0 \to {}^L G(\mathbb{I}_0)$. We note $\widehat{G}'$ the derived group of $\widehat{G}$.

THEOREM 0.1. *Suppose that :*
(0) $\overline{\rho}$ is absolutely irreducible,
(1) There is a classical regular weight λ such that we have $(IRRAD_{G,P_\lambda})$(see Section 7, Chapter 2),
(2) ρ is $\mathbb{Z}_p$-regular,
(3) ρ is p-distinguished (see Definition 4.2, Chapter 2),
Then there is a non-trivial ideal $\mathfrak{l}$ of $\mathbb{I}_0$ such that the image $\mathrm{Im}\,\rho$ *contains the congruence subgroup $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l})$.*

We should be able to get rid of the unpleasant hypothesis (0) with some more work. The crucial hypothesis "$\mathbb{Z}_p$-regular" is defined in the Hypothèses 5 in Section 7, Chapter 2. The hypothesis (3) allows us to formulate the ordinary condition without ambiguities but perhaps it is not indispensable.

The second principal theorem relates the Galois level $\mathfrak{l}_\mu$ to a Galois congruence ideal $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ (see the Definition 7.2, Chapter 2). We suppose that modulo the maximal ideal ρ_μ is congruent to $r \circ \rho_{\mu_H}$ where $r\colon {}^L H \to {}^L G$ is a transfer and μ_H is a Hida family over H. Then we define the congruence ideals between ρ_μ and the transfers $r_1 \circ \rho_{H_1}$ for the connected reductive groups H_1 such that ${}^L H_1$ is contained between ${}^L H$ and ${}^L G$ (see Section 7.1, Chapter 2). We note $\widehat{H}'$ the derived group of $\widehat{H}$. Then we have

THEOREM 0.2. *Let $r\colon {}^L H \to {}^L G$ be a irreducible strictly effective morphism of transfer and such that $(REDAD_H)$ (see Section 7, Chapter 2)is true. Let $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ be a Hida family such that $\widehat{H}'(k') \subset \mathrm{Im}\ \overline{\rho}_{\mu_H}$ where ρ_{μ_H} is the associated Galois representation. We suppose $\overline{\rho}_\mu = r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$.*

Let the hypotheses and notations be those of the Theorem 6. We have $V(\mathfrak{c}_{\mu,gal}[p^{-1}]) = V(\mathfrak{l}_\mu[p^{-1}])$. In other words, $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ and $\mathfrak{l}_\mu$ contain the same prime ideals outside p.

The second theorem is easy : the determination of the class $\mathcal{C}$ of intermediate reductive groups H_1 in the Definition 7.1 Chapter 2 realizes its value in the result. More precise conjectures are about

-the computation of congruence ideals (see Conjecture 0.10)

-following the ideals of J. Lang, a better Galois level $\mathfrak{l}'_\mu$ which contains $\mathfrak{l}_\mu$ (see Remark 8.1), such that we can expect to compare exactly $\mathfrak{l}'_\mu$ and $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$. The Fontaine-Mazur conjecture for the group H_1 should allow us to relate $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ and $\mathfrak{c}_{\mu,aut}$.

CHAPITRE 1

Théorie de Hida pour les groupes réductifs compacts à l'infini

1. Formes automorphes algébriques

Soit $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la complétion profinie de $\mathbb{Z}$. Soit $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}_f = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \widehat{\mathbb{Z}}$. L'anneau des adèles $\mathbb{Q}_{\mathbb{A}}$ se décompose en $\mathbb{Q}_{\mathbb{A}} = \mathbb{Q}_f \times \mathbb{Q}_\infty$. De même, pour tout corps de nombres F totalement réel l'anneau des adèles $F_{\mathbb{A}}$ de F se décompose en $F_{\mathbb{A}} = F_f \times F_\infty$ où $F_f = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_f$ et $F_\infty = F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\infty$. On pose $d = [F\colon \mathbb{Q}]$ le degré d'extension. Pour toute place finie v de F, on note F_v la complétion de F en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau de valuation.

Soit p un nombre premier. Pour simplifier les notations dans la suite, on supposera p non ramifié dans F (les résultats restent essentiellement valables sans cette hypothèse). Soit G un groupe réductif connexe sur F déployé en toutes les places v au-dessus de p. Soit T un tore maximal de G, $A \subset T$ un tore déployé maximal et $A_Z \subset A$ un tore déployé maximal dans le centre de G. Il existe un ensemble fini S de premiers de $\mathbb{Z}$ qui ne contient pas p et une extension finie K_0 de F non ramifiée hors de S et un schéma en groupes $\mathcal{G}$ réductif connexe déployé sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$, tels que $G \times_F K_0 \cong \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]} K_0$. On peut supposer que $T \times_F K_0 = \mathcal{T} \times K_0$. On note S_F, resp. $S_{F,p}$, l'ensemble des places de F au-dessus de S, resp. au-dessus de $S \cup \{p\}$. Soit n le rang semisimple de $\mathcal{G}$, c'est à dire le rang de son groupe dérivé. On note $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(\mathcal{G}/\mathbb{Z}[\frac{1}{S}])$ son algèbre de Lie et Φ, resp. $\Phi^\vee$ l'ensemble des racines, resp. coracines, de $\mathcal{G}$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle\colon X^*(\mathcal{T}) \times X_*(\mathcal{T}) \to \mathbb{Z}$ l'accouplement parfait entre caractères et cocaractères donné par $(\lambda, \mu) \mapsto \lambda \circ \mu \in X^*(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Z}$. Soit K un sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}_p$ contenant tous les plongements de K_0 dans $\overline{\mathbb{Q}}_p$. On note $\mathcal{O}$ son anneau de valuation et ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$. On fixe également pour toute place $v|p$ des isomorphismes

$$i_v\colon G \times_F F_v \cong \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]} F_v.$$

On note $\mathbb{K}_v = i_v^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{O}_v))$ le compact hyperspecial maximal de $G_v = G(F_v)$ associé à i_v.

Maintenant, on considère les groupes de restriction ${}_rG = \mathrm{Res_{F/\mathbb{Q}}G}$, et ${}_rA_Z = \mathrm{Res_{F/\mathbb{Q}}A_Z}$. ${}_rG_{\mathbf{A}} = {}_rG(\mathbb{Q}_{\mathbf{A}})$. On note ${}_rG_f = {}_rG(\mathbb{Q}_f)$, ${}_rG_v = {}_rG(\mathbb{Q}_v)$ et ${}_rG_\infty = {}_rG(\mathbb{R})$. Dans ce travail, on supposera que ${}_rG_\infty/{}_rA_{Z,\infty}$ est compact.

Comme exemples de cette situation, on peut prendre

– $G = D^\times$ où D est une algèbre de quaternions de centre F totalement définie
– G est un groupe unitaire sur le corps totalement réel F compact à l'infini
– G est une forme compacte à l'infini (modulo le centre) du groupe GSpin_n sur le corps totalement réel F

On rappelle [**Gr99**, Prop.1.4] (voir aussi [**PR94**, Corollaire 2 du Théoreme 4.11]) que

PROPOSITION 1.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*
– ${}_rG_\infty/{}_rA_{Z,\infty}$ *est compact*
– ${}_rG(\mathbb{Q})$ *est discret dans* ${}_rG_f$ *et* ${}_rG(\mathbb{Q})\backslash{}_rG_f$ *est compact*
– *pour toute représentation* V *de* ${}_rG$ *sur* $\mathbb{Q}$, *il existe un produit scalaire défini positif* $\langle\, ,\, \rangle_\infty$ *sur* V_∞ *préservé par* ${}_rG_\infty$ *à facteur de similitude près.*

On fixe des plongements $\iota_\infty\colon \overline{\mathbb{Q}} \to \mathbb{C}$ et $\iota_p\colon \overline{\mathbb{Q}} \to \overline{\mathbb{Q}}_p$. Les corps de nombres considérés sont des sous-corps de $\overline{\mathbb{Q}}$. Noter que $\iota_p(K_0) \subset K$. On fixe un triplet $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ où $\mathcal{B}$ est un sous-groupe de Borel, $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}$ est un tore déployé maximal. Soit $\Phi^+ \subset \Phi$ le sous-ensemble des racines positives pour le triplet $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ et $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ la base de racines simples associée. On note $\mathcal{N}$, resp. $\mathcal{N}^-$ le radical unipotent de $\mathcal{B}$, resp. du Borel opposé $\mathcal{B}^-$. Soit $\mathcal{Q} = \mathbb{Z}\Phi \subset X^*(\mathcal{T})$ le groupe engendré par les racines ; soit $X^*(\mathcal{T})_{\mathbb{Q}} = X^*(\mathcal{T}) \otimes \mathbb{Q}$ et $\mathcal{P} = \{\lambda \in X^*(\mathcal{T})_{\mathbb{Q}}; \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \in \mathbb{Z}\}$ le réseau des poids de $\mathcal{G}$; il contient $X^*(\mathcal{T})$: $\mathcal{Q} \subset X^*(\mathcal{T}) \subset \mathcal{P}$. Soit $\mathcal{P}^+ \subset X^*(\mathcal{T})$ le cône des poids dominants pour $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{N})$ donné par $\mathcal{P}^+ = \{\mu \in X^*(\mathcal{T}) : \text{pour tout}\, \alpha \in \Phi^+,\ \langle \mu, \alpha^\vee, \rangle \geq 0\}$.

Si $\mathcal{G}$ est semisimple simplement connexe, il est engendré par les poids fondamentaux $(\varpi_1, \ldots, \varpi_n) \in (\mathcal{P}^+)^n$ de $\mathcal{G}$ associés à $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ donnés par

$$\langle \varpi_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

En général, on considère l'élément $\rho \in 2^{-1} \cdot X^*(\mathcal{T}) \subset X^*(\mathcal{T})$ donné par

$$\rho = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Si $\mathcal{G}$ est semisimple simplement connexe, on a $\rho = \sum_{i=1,\ldots,n} \varpi_i \in X^*(\mathcal{T})$, Mais par exemple pour $\mathcal{G} = \mathrm{GL}_2$, $\rho = \frac{1}{2} \cdot (e_1 - e_2) \notin \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$.

On fixe également un épinglage $(X_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ du triplet $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ (voir [**SGA3III**, Exposé 23, Définition 1.1]) c'est à dire que pour tout $\alpha \in \Delta$, X_α désigne une base de l'espace propre $\mathfrak{g}_\alpha$. Ceci fournit un sous-groupe à un paramètre

$$U_\alpha\colon \mathbb{G}_a \to \mathcal{G}, t \mapsto \exp(tX_\alpha).$$

Soit $W_{\mathcal{G}} = N_{\mathcal{G}}(\mathcal{T})/\mathcal{T}$ le groupe de Weyl de $\mathcal{G}$ et w_0 son élément de plus grande longueur. Pour chaque $\lambda \in \mathcal{P}$, on note W_λ la représentation algébrique de $\mathcal{G}$ définie sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$ par l'induction

$$\mathrm{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}\, w_0\lambda/\mathbb{Z}[\frac{1}{S}] = \{f \in \mathbb{Z}[\frac{1}{S}][\mathcal{G}] : f(tng) = w_0\lambda(t)f(g), \forall \mathbb{Z}[\frac{1}{S}] \to A, g \in \mathcal{G}(A), b \in \mathcal{B}(A)\}$$

L'action de $\mathcal{G}$ est donnée par la translation à droite. La représentation W_λ de $\mathcal{G}$ est géométriquement irréductible en caractéristique zéro.

Soit $I_F = \mathrm{Hom}(F, \overline{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Hom}(F, K)$ l'ensemble des plongements de F. Pour tout $\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I_F} \in (\mathcal{P}^+)^{I_F}$, soit $W_\lambda = \bigotimes_{\sigma \in I_F} W_{\lambda_\sigma}$. C'est une représentation de ${}_rG \times K_0$ définie sur $\mathcal{O}_{K_0}[\frac{1}{S}]$ géométriquement irréductible en caractéristique zéro donnée par $g \mapsto (g^\sigma)_{\sigma \in I_F}$ vu dans $(\mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}[S^{-1}]} K_0)^{I_F}$. Soit U un sous-groupe compact ouvert de ${}_rG_f$. Pour $V = W_\lambda$ (considéré sur $\mathcal{O}_{K_0}[\frac{1}{S}]$) : on définit les espaces vectoriels suivants

Définition 1.2.

$$S_\lambda(U, K_0) = \{f\colon {}_rG_f \to V(K_0); f(\gamma g u) = \gamma \cdot f(g) \quad \text{pour tout}\, u \in U\,, \gamma \in {}_rG(\mathbb{Q})\}$$
$$S_\lambda(U, \mathbb{C}) = \{f'\colon {}_rG_{\mathbf{A}} \to V(\mathbb{C}); f'(\gamma g u) = u_\infty^{-1} \cdot f'(g) \quad \text{pour tout}\, u \in UG_\infty\,, \gamma \in {}_rG(\mathbb{Q})\}$$
$$S_\lambda(U, K) = \{f''\colon {}_rG_f \to V(K); f''(\gamma g u) = u_p^{-1} \cdot f''(g) \quad \text{pour tout}\, u \in U\,, \gamma \in {}_rG(\mathbb{Q})\}$$

Lemme 1.3. *L'espace $S_\lambda(U, K_0)$, resp. $S_\lambda(U, \mathbb{C})$, resp. $S_\lambda(U, K)$, est un K_0-vectoriel, resp. un $\mathbb{C}$-vectoriel, resp. un K-vectoriel, de dimension finie. On a des isomorphismes d'espaces vectoriels (sur $\mathbb{C}$ resp. sur K) :*

$$S_\lambda(U, K_0) \otimes_{K_0} \mathbb{C} \cong S_\lambda(U, \mathbb{C}), \quad S_\lambda(U, K_0) \otimes_{K_0} K \cong S_\lambda(U, K)$$

donnés par $f \mapsto f'$ avec $f'(g) = g_\infty^{-1} \cdot f(g)$, resp. $f \mapsto f''$ avec $f''(g) = g_p^{-1} f(g)$ La dimension commune de ces espaces est $h_U = \sharp\, (G(F) \backslash G_f / U)$.

Démonstration. On voit aisément que les applications définies ci-dessus envoient $S_\lambda(U,K_0)\otimes_{K_0} M$ dans $S_\lambda(U,M)$ pour $M=\mathbb{C},K$. Pour vérifier le deuxième isomorphisme par exemple, on pose, pour $f''\in S_\lambda(U,K)$, $f(g)=g_p\cdot f''(g)$. On voit facilement que l'application $f''\mapsto f$ envoie $S_\lambda(U,K)$ dans $S_\lambda(U,K_0)\otimes_{K_0} K$ et est réciproque de $f\mapsto f''$. $\square$

Les éléments de ces espaces sont appelés formes automorphes algébriques classiques de poids λ et de niveau U. On suppose désormais que pour tout v divisant p, U_v est contenu dans $i_v^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{O}_v))$. On peut alors définir un $\mathcal{O}$-réseau de $S_\lambda(U,K)$ par

$$S_\lambda(U,\mathcal{O})=\{f''\colon {}_rG_f\to V(\mathcal{O}); f''(\gamma gu)=u_p^{-1}\cdot f''(g)\quad \text{pour tout}\, u\in U\,,\gamma\in {}_rG(\mathbb{Q})\}$$

Soit (x_i) un système de représentants dans G_f de $G(F)\backslash G_f/U$. On dit que U est net, si $x_i^{-1}Ux_i\cap G(F)=\{1\}$ pour tout i. On montre, exactement comme dans [**CHT08**, Lemma 3.3.1]

Lemme 1.4. *Supposons U net, alors :*
1) l'application $f\mapsto (f(x_i))_i$ définit un isomorphisme

$$S_\lambda(U,\mathcal{O})\cong\bigoplus_{i=1}^{h_U} W_\lambda(\mathcal{O})$$

En particulier, $S_\lambda(U,\mathcal{O})$ est un $\mathcal{O}$-module libre de rang fini.
2) si $V\subset U$ est un sous-groupe ouvert distingué, le $\mathcal{O}[U/V]$-module $S_\lambda(V,\mathcal{O})$ est libre de rang fini et l'application $f\mapsto (\sum_{\overline{u}\in U/V} u_p\cdot f(x_iu)\otimes\overline{u}^{-1})_i$ définit un isomorphisme de $\mathcal{O}[U/V]$-modules

$$S_\lambda(V,\mathcal{O})\cong\bigoplus_{i=1}^{h_U} W_\lambda(\mathcal{O})\otimes\mathcal{O}[U/V].$$

3) la trace $Tr_{V/U}$ établit un isomorphisme entre les coinvariants $S_\lambda(V,\mathcal{O})_{U/V}$ de $S_\lambda(V,\mathcal{O})$ par le groupe fini U/V et $S_\lambda(U,\mathcal{O})$.

Pour tout $\mathcal{O}$-module A, on pose $S_\lambda(U,A)=S_\lambda(U,\mathcal{O})\otimes_{\mathcal{O}} A$. Par exemple, on prendra $A=\mathcal{O}/\varpi^m$, $\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O}$, $K/\mathcal{O}$.

2. Les sous-groupes compacts hyperspéciaux

Soit $S=S_{F,p}$ l'ensemble des places de F où K_0/F est ramifiée ou au-dessus de p. Le modèle entier $\mathcal{G}$ de $G\times K_0$ définit un schéma en groupes réductifs sur $\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]$.

Soit Δ le groupe de Galois de K_0/F. Ce groupe agit sans point fixe sur le $\mathcal{O}[S^{-1}]$-schéma en groupes affine $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}^{\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]}\mathcal{G}$. Soit $\mathcal{H}=(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}^{\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]}\mathcal{G})/\Delta$ le schéma en groupes quotient. Ce schéma est lisse et connexe sur $\mathcal{O}[S^{-1}]$ puisque $\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]/\mathcal{O}[S^{-1}]$ est étale. C'est donc un schéma en groupes réductifs sur $\mathcal{O}[S^{-1}]$. C'est aussi le groupe des invariants : $\mathcal{H}=(\mathrm{Res}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}^{\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]}\mathcal{G})^\Delta$. On peut donc voir $\mathcal{H}$ comme un sous groupe de $\mathrm{Res}_{\mathcal{O}[S^{-1}]}^{\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]}\mathcal{G}$. À partir du sous-groupe de Borel $\mathcal{B}\subset\mathcal{G}$ défini sur $\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]$, on définit un sous-groupe de Borel $\mathcal{B}_\mathcal{H}\subset\mathcal{H}$ en posant $\mathcal{B}_\mathcal{H}=\mathcal{B}\cap\mathcal{H}$; le groupe réductif connexe $\mathcal{H}$ est donc quasi-déployé. Posons $\mathcal{N}_\mathcal{H}=\mathcal{N}\cap\mathcal{H}$, c'est le radical unipotent de $\mathcal{B}_\mathcal{H}$; le quotient $\mathcal{B}_\mathcal{H}/\mathcal{N}_\mathcal{H}$ est un tore qui se relève dans $\mathcal{B}_\mathcal{H}$ en $\mathcal{T}_\mathcal{H}$. Notons que

$$\mathcal{T}_\mathcal{H}\times\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}]=\mathcal{T}\times_{\mathbb{Z}[S^{-1}]}\mathcal{O}_{K_0}[S^{-1}].$$

Soient $\underline{B}=\mathcal{B}_\mathcal{H}\times F$, $\underline{T}=\mathcal{T}_\mathcal{H}\times F$ et $\underline{T}=\mathcal{N}_\mathcal{H}\times F$. Notons que $\underline{T}$ n'est pas nécessairement déployé. Soit $\underline{A}$ un tore déployé sur F maximal de $\underline{T}$. Le centralisateur $Z(\underline{A})$ est égal à $\underline{T}$. Pour un usage futur, on introduit également $\underline{C}$ le cocentre déployé de G, c'est dire le plus grand tore déployé quotient de G sur F. Il est isogène au tore déployé maximal $\underline{A}_Z$

contenu dans le centre de G (on a nécessairement $\underline{A}_Z \subset \underline{A}$). Le morphisme de restriction $X^*(A) \to X^*(A_Z)$ possède un scindage sur $\mathbb{Q}$ donné par

$$X^*(\underline{A}_Z)_{\mathbb{Q}} = \{\psi \in X^*(\underline{A})_{\mathbb{Q}}; \langle \psi, \alpha_i^\vee \rangle = 0, i = 1, \dots, n\}$$

On voit donc que pour tout élément $\psi \in X^*(\underline{A})_{\mathbb{Q}}$ tel que $\langle \psi, \alpha_i^\vee \rangle = 0$ pour $i = 1, \dots, n$, il existe $m \geq 1$ tel que ψ^m se prolonge en un caractère $G \to \underline{C} \to \mathbb{G}_m$.

On a la décomposition de Levi $\underline{B} = \underline{T}\underline{N}$.

Soit $v \notin S_{F,p}$. Soit $w|v$ une place de K_0 au-dessus de v (elle est non ramifiée). Le groupe $G \times F_v$ est quasi-déployé non ramifié et admet un sous-groupe compact maximal hyperspécial naturel. Plus précisément, $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{K_{0,w}})$ est un compact hyperspécial de $G(K_{0,w})$. A l'aide du modèle $\mathcal{H}$ sur F de $\mathcal{G}$, on définit de même un sous-groupe compact hyperspécial $\mathbb{K}_v = \mathcal{H}(\mathcal{O}_v)$ de $G_v = G(F_v)$.

Soient $\mathcal{B}_v = \mathcal{B}_{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_v)$, $\mathcal{N}_v = \mathcal{N}_{\mathcal{H}}(\mathcal{O}_v)$ ainsi que $B_v = \mathcal{B}_{\mathcal{H}}(F_v)$, $T_v = \mathcal{T}_{\mathcal{H}}(F_v)$ et $N_v = \mathcal{N}_{\mathcal{H}}(F_v)$; Notons que $\underline{T}_v = \mathcal{T}_{\mathcal{H}} \times F_v$ n'est pas nécessairement déployé. Soit $A_v = \underline{A}_v$ un tore déployé maximal de $\underline{T}_v$. Le centralisateur $Z(\underline{A}_v)$ est égal à $\underline{T}_v$. On a la décomposition de Levi $B_v = T_v N_v$.

Avec ces définitions, on a la décomposition d'Iwasawa $G_v = \mathbb{K}_v B_v = B_v \mathbb{K}_v$.

3. Isomorphismes de Satake

On s'inspire des notations et résultats de [**Re10**, Chapitre V].

Soit $\mathcal{X}^*(\underline{T}_v) = \mathrm{Hom}_{F_v}(\underline{T}_v, \mathbb{G}_m) \subset X^*(\underline{T}_v) = \mathrm{Hom}_{K_{0,w}}(\underline{T}_v, \mathbb{G}_m)$ le groupe des caractères de $\underline{T}_v$ définis sur F_v. Soit $\mathcal{Y}_*(\underline{T}_v) = \mathrm{Hom}(\mathcal{X}^*(\underline{T}_v), \mathbb{Z})$ et $\mathcal{X}_*(\underline{T}_v) = \mathrm{Hom}_{F_v}(\mathbb{G}_m, \underline{T}_v) \subset X_*(\underline{T}_v) = \mathrm{Hom}_{K_{0,w}}(\mathbb{G}_m, T_v)$, resp. $\mathcal{X}_*(\underline{A}_v) = \mathrm{Hom}_{F_v}(\mathbb{G}_m, \underline{A}_v)$. On a $\mathcal{X}_*(\underline{A}_v) = \mathcal{X}_*(\underline{T}_v)$. On a deux accouplements parfaits de réseaux

$$\langle\ ,\ \rangle \colon X^*(\underline{T}_v) \times \mathcal{X}_*(\underline{T}_v) \to \mathbb{Z}$$

et

$$(\ ,\ ) : \mathcal{X}^*(\underline{T}_v) \times \mathcal{Y}_*(\underline{T}_v) \to \mathbb{Z}$$

Ils sont compatibles via l'injection naturelle (à conoyau fini)

$$\mathcal{X}_*(\underline{T}_v) \subset \mathcal{Y}_*(\underline{T}_v), \quad \mu \mapsto \langle -, \mu \rangle$$

Soit $\mathrm{ord}_v \colon F_v^\times \to \mathbb{Z}$ la valuation de F_v. Pour la suite, on introduit aussi le cardinal q_v du corps résiduel $\mathcal{O}_v/\pi_v\mathcal{O}_v$ et $|x|_v = q_v^{-\mathrm{ord}_v(x)}$ la valeur absolue normalisée de F_v. On note $\mathrm{ord}_{T_v} \colon T_v \to \mathcal{Y}_*(\underline{T}_v)$ l'homomorphisme donné pour tout $t \in T_v$ et tout $\chi \in \mathcal{X}^*(\underline{T}_v)$ par

$$\big(\chi, \mathrm{ord}_{\underline{T}_v}(t)\big) = \mathrm{ord}_v \langle \chi, t \rangle.$$

Son image Λ_v est égale à $\mathcal{X}_*(\underline{T}_v) = \mathcal{X}_*(\underline{A}_v)$. Soit π_v une uniformisante de F_v ; la donnée de π_v fournit une section

$$\mathcal{X}_*(\underline{T}_v) \hookrightarrow T_v$$

de ord_{T_v}. On la note $\mu \mapsto \mu(\pi_v)$.

Soit $\mathfrak{a} = \mathcal{X}_*(A_v) \otimes \mathbb{R} = \mathcal{X}_*(T_v) \otimes \mathbb{R}$. Soit $\Delta(B_v)$, resp. $\Phi(B_v)$ l'ensemble des racines simples, resp. positives, donnant l'action de A_v sur N_v. L'ensemble $\Delta(B_v)$ engendre un réseau de $\mathfrak{a}^*$. Considérons les semi-groupes

$$\mathcal{X}(\underline{T}_v)^+ = \{\lambda \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v); \text{pour tout}\, \alpha \in \Delta(B_v), \quad (\alpha, \lambda) \geq 0\}$$

et

$$\mathcal{X}(\underline{T}_v)^{++} = \{\lambda \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v); \text{pour tout}\, \alpha \in \Delta(B_v), \quad (\alpha, \lambda) > 0\}$$

ainsi que les semigroupes

$$T_v^+ = \mathrm{ord}_{T_v}^{-1}(\mathcal{X}_*(\underline{T}_v)^+)$$
$$T_v^{++} = \mathrm{ord}_{T_v}^{-1}(\mathcal{X}_*(\underline{T}_v)^{++}).$$

Soit $W_{G_v} = N_{G_v}(\underline{A}_v)/Z_{G_v}(\underline{A}_v)$ (où $Z_{G_v}(\underline{A}_v) = \underline{T}_v$). On a la décomposition de Bruhat

$$\mathbb{K}_v = \bigsqcup_{w \in W_{G_v}} \mathcal{B}_v w \mathcal{B}_v$$

et la décomposition de Cartan (cf. [**Re10**, Section V.4.8])

$$G_v = \bigsqcup_{\mu \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v)^+} \mathbb{K}_v \mu(\pi_v) \mathbb{K}_v.$$

De plus, pour tout $a \in A_v^{++}$, on a

$$N_v = \bigcup_{n \geq 1} a^{-n} \mathcal{N}_v a^n$$

et

$$\{1\} = \bigcap_{n \geq 1} a^n \mathcal{N}_v a^{-n}.$$

Soit $A_v = \underline{A}_v(F_v)$ et $A_v^0 = A_v \cap \mathbb{K}_v$. On fixe les mesures de Haar dg_v, dn_v sur les groupes unimodulaires G_v et N_v normalisées par $dg_v(\mathbb{K}_v) = 1$ et $dn_v(N_v \cap \mathbb{K}_v) = 1$. Soit $\mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{K}_v \backslash G_v / \mathbb{K}_v, \mathbb{Z}_p)$. Donc, c'est une $\mathbb{Z}_p$-algèbre pour la convolution. Soit $\mathcal{H}(A_v, A_v^0) = \mathcal{C}_c^\infty(A_v/A_v^0, \mathbb{Z}_p) = \mathbb{Z}_p[\Lambda_v]$. Ce sont les $\mathbb{Z}_p$-algèbres de Hecke sphériques pour G_v, resp. A_v, des fonctions à support compact et biinvariantes par $\mathbb{K}_v$, resp. A_v^0. Rappelons qu'on a posé $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha$. Considérons l'action naturelle de W_{G_v} sur Λ_v donnée par $(w \cdot \mu)(a) = \mu(w^{-1} a w)$,

On note $S_{A_v}^{G_v} \colon \widetilde{S}_A^G \colon \mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) \otimes Z_p[q_v^{1/2}] \to \mathcal{H}(A_v, A_v^0) \otimes Z_p[q_v^{1/2}]$ la transformation de Satake donnée par

$$S_{A_v}^{G_v} \ f(a) = e^{\rho(a)} \int_{\mathcal{N}_v} f(an) dn.$$

Proposition 3.1. *La transformation de Satake $S_{A_v}^{G_v}$ établit un isomorphisme de $\mathbb{Z}_p[q_v^{1/2}]$-algèbres*

$$S_{A_v}^{G_v} \colon \mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v)[q_v^{1/2}] \to \mathbb{Z}_p[q_v^{1/2}][\Lambda_v]^{W_{G_v}}$$

où dans le membre de droite, les invariants sont pris pour l'action naturelle.

Voir par exemple [**HR10**] ou [**Lana15**, Section 6].

4. Les sous-groupes d'Iwahori

Soient v une place finie de F et π_v une uniformisante de $\mathcal{O}_v$. On peut prendre comme tore maximal T_v de G_v le tore $T_v = \mathcal{T} \times \mathbb{F}_v$ où $\mathcal{T}$ est déployé sur $\mathcal{O}_v$. Soit $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \cap \mathcal{G}'$ le tore maximal du schéma en groupes dérivé $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{G}$ contenu dans $\mathcal{T}$. On fixe une décomposition

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \times \mathcal{T}''.$$

On définit alors les sous-groupes iwahoriques suivants :

– $\mathrm{Iw}(v)$ désigne le sous-groupe de $\mathbb{K}_v$ des élements qui sont dans $\mathcal{B}(\mathcal{O}_v)$ modulo π_v,
– $\mathrm{Iw}_1(v)$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ des élements qui sont dans $\mathcal{N}(\mathcal{O}_v)$ modulo π_v,
– $\mathrm{Iw}'(v)$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ des élements qui sont dans $\mathcal{T}''\mathcal{N}(\mathcal{O}_v)$ modulo π_v,
– Plus généralement, pour $0 \leq b \leq c$, $\mathrm{Iw}'(v^{b,c})$ désigne le sous-groupe de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ des élements qui sont dans $\mathcal{B}(\mathcal{O}_v)$ modulo π_v^c et dans $\mathcal{T}''\mathcal{N}(\mathcal{O}_v)$ modulo π_v^b. En particulier, $\mathrm{Iw}(v) = \mathrm{Iw}(v^{0,1})$, $\mathrm{Iw}_1 = \mathrm{Iw}(v^{1,1})$ et $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v) = \mathrm{Iw}(v^{0,0})$.

On définit le semi-groupe des éléments contractants de $\mathcal{T}(F_v)$

$$\mathcal{T}_v^- = \{t_v \in \mathcal{T}(F_v); \text{pour tout}\, \alpha \in \Phi^+, \mathrm{ord}_v(\alpha(t_v)) \geq 0\}$$

et le semi-groupe des éléments strictement contractants

$$\mathcal{T}_v^{--} = \{t_v \in \mathcal{T}(F_v); \text{pour tout}\, \alpha \in \Phi^+, \mathrm{ord}_v(\alpha(t_v)) > 0\}.$$

On dit qu'un cocaractère $\mu \in X_*(\mathcal{T})$ est dominant si $\langle \alpha, \mu \rangle \geq 0$ pour tout $\alpha \in \Phi^+$. On note $X_*(\mathcal{T})^+$ le semi-groupe de ces caractères. De manière équivalente, cela signifie que $\mu(\pi_v) \in \mathcal{T}_v^-$.

On rappelle

-la décomposition d'Iwasawa :

$$\mathcal{G}(F_v) = \coprod_{\mu \in X_*(\mathcal{T})^+} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)\mu(\pi_v)\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$$

-la décomposition de Bruhat affine :

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_v) = \coprod_{w \in W_{\mathcal{G}}} \mathcal{N}^-(\mathcal{O}_v) w \mathrm{Iw}(v^{0,c})$$

- la décomposition d'Iwahori, si $0 \leq b \leq c$, l'une des deux inégalités au moins étant stricte :

$$\mathrm{Iw}(v^{b,c}) = \mathcal{N}^-(\pi_v^c \mathcal{O}_v) \cdot \mathcal{T}_b \cdot \mathcal{N}^+(\mathcal{O}_v)$$

où pour tout $b \geq 0$, on note $\mathcal{T}_b = \mathrm{Ker}(\mathcal{T}(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{T}(\mathcal{O}_v/(\varpi^b)))$ et

$$\mathrm{Iw}'(v^{b,c}) = \mathcal{N}^-(\pi_v^c \mathcal{O}_v) \cdot \mathcal{T}_b' \mathcal{T}_0'' \cdot \mathcal{N}^+(\mathcal{O}_v)$$

où pour tout $b \geq 0$, on note $\mathcal{T}_b' = \mathrm{Ker}(\mathcal{T}'(\mathcal{O}_v) \to \mathcal{T}'(\mathcal{O}_v/(\varpi^b)))$.

Pour $c > 0$ et $c \geq b$, soit $\mathcal{H}(G_v, \mathrm{Iw}(v^{b,c}))^-$ l'algèbre de Hecke abstraite de niveau (b,c)-Iwahorique contractante. Un calcul facile montre

Proposition 4.1. *L'application* $t \in \mathcal{T}_v^- \mapsto [\mathrm{Iw}(v^{b,c}) t\, \mathrm{Iw}(v^{b,c})]$ *est un morphisme de semigroupes et induit des isomorphismes (compatibles pour* b, c *variables) de* $\mathbb{Z}_p$*-algèbres*

$$\mathbb{Z}_p[\mathcal{T}_v^-/\mathcal{T}_b] \to \mathcal{H}(G_v, \mathrm{Iw}(v^{b,c}))^-$$

Notons que si $t \in \mathcal{T}_v^-$, on a $t^{-1}\mathrm{Iw}(v^{b,c})t \subset \mathrm{Iw}(v^{b,c})\mathcal{N}(F_v)$. En effet, par la décomposition d'Iwahori, il suffit de montrer que $t^{-1}\mathcal{N}(\pi_v^c)t \subset \mathcal{N}(\pi_v^c)$. Comme $\mathcal{N}^-$ est engendré par les groupes à un paramètre $\mathcal{U}_{-\alpha} \colon \mathbb{G}_a \to \mathcal{N}^-$, $x \mapsto w_0 \exp(xX_\alpha) w_0^{-1}$, il suffit de noter que $t^{-1}\mathcal{U}_{-\alpha}(x)t = \mathcal{U}_{-\alpha}(\alpha^{-1}(t^{-1})x) = \mathcal{U}_{-\alpha}(\alpha(t)x)$ et qu'on a $\mathrm{ord}_v(\alpha(t)x) \geq \mathrm{ord}_v(x)$.

Désormais, au lieu de $i_v^{-1}(\mathrm{Iw}(v^{b,c})) \subset \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$, on notera $\mathrm{Iw}(v^{b,c}) \subset \mathbb{K}_v$ pour alléger l'écriture.

Soit $U = \prod_v U_v$ un sous-groupe compact ouvert de $G(F_f)$ tel que $U_v = \mathbb{K}_v$ en toutes les places finies v en lesquelles G est déployé. Alors, on note

$$U^{b,c} = U^p \times \prod_{v|p} \mathrm{Iw}\prime(v^{b,c}).$$

5. Algèbres de Hecke

Pour $g \in G_f$ et $f \colon G_f \to W_\lambda(K)$, on pose $(g \bullet f)(h) = g_p \cdot f(hg)$. Cette action ne préserve pas l'intégralité en général, mais c'est le cas par exemple si $g_p = 1$.

Soient $V, V' \subset G(F_f^p) \times \prod_{v|p} \mathrm{Iw}(v^{b,c})$ deux sous-groupes compacts ouverts. Soit λ un poids dominant de G. Alors pour chaque $g \in G(F_f^p) \times \prod_{v|p} \mathrm{Iw}(v^{b,c})$, on définit l'opérateur

$$[V'gV]_\lambda \colon S_\lambda(V, K) \to S_\lambda(V', K)$$

comme suit. Le quotient $g^{-1}V'gV/V \cong g^{-1}V'g/(g^{-1}V'g \cap V)$ est fini. Il existe donc un ensemble fini $(g^{-1}u_ig)$ où $u_i \in V'$ tel que $g^{-1}V'gV = \coprod_i g^{-1}u_igV$. En posant $g_i = u_ig$, on peut donc écrire $VgV' = \coprod_i g_iV$. On définit alors $[V'gV]_\lambda f = \sum_i g_i \bullet f$ pour $f \in S_\lambda(V, K)$. Cet opérateur ne dépend pas du choix des g_i et prend ses valeurs dans $S_\lambda(V', K)$.

On définit trois types d'opérateurs de Hecke sur $S_\lambda(U^{b,c}, A)$:

– Les opérateurs en les places déployés en dehors de p

Soit v une place finie en dehors de p et de S où U est non ramifié. On utilise les notations de la Section 2. Pour tout cocaractère dominant $\mu \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v)^+$, on définit

$$T_{v,\mu} = [\mathbb{K}_v\mu(\pi_v)\mathbb{K}_v \times (U^{b,c})^v]_\lambda.$$

Ces opérateurs sont compatibles lorsqu'on passe de (b, c)à (b', c') avec $0 \leq b \leq b'$ et $0 < c \leq c'$. Ils respectent l'intégralité et définissent donc des endomorphismes de $S_\lambda(U^{b,c}, A)$

– Les opérateurs U en les places au-dessus de p

Soit v une place finie divisant p. Pour tout cocaractère dominant $\mu \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v)^+$, On note $T_{v,\mu} = T_{v,\widehat{\varpi}} = [U^{b,c}\mu(\pi_v)U^{b,c}]_\lambda$, (si nécessaire, on note aussi $T_{\lambda,v,\mu}$ pour insister sur l'action sur les formes de poids λ). Ces opérateurs sont compatibles lorsqu'on passe de (b, c)à (b', c') avec $0 \leq b \leq b'$ et $0 < c \leq c'$.

On définit alors

$$U_{\lambda,v,\mu} = (w_0\lambda)(\mu(\pi_v))^{-1}T_{\lambda,v,\mu}.$$

La multiplication par $(w_0\lambda)(\widehat{\varpi}_i(\pi_v))^{-1}$ assure l'intégralité optimale de l'action de $U_{\lambda,v,\mu}$ sur $S_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O})$. La démonstration de [**Ge10**, Lemme 2.2.2 et Définition 2.3.2] se transpose sans changement du cas du groupe unitaire au cas d'un groupe réductif connexe G déployé en p.

– Les opérateurs diamants en les places au-dessus de p

Soient v une place finie divisant p, $u \in \mathcal{T}'(\mathcal{O}_p) = \prod_{v|p} \mathcal{T}'(\mathcal{O}_v)$. On définit les opérateurs (qui préservent l'intégralité)

$$\langle u\rangle_\lambda = [U^{b,c}uU^{b,c}]_\lambda.$$

Notons que $U^{0,c}$ normalise $U^{b,c}$ et que $U^{0,c}/U^{b,c} = \mathcal{T}'(\mathcal{O}_p/p^b) = \prod_{v|p} \mathcal{T}'(\mathcal{O}_v/\pi_v^b)$. L'action de $\langle u\rangle_\lambda$ coïncide avec l'action normale de $U^{0,c}$ sur $S_\lambda(U^{b,c}, A)$.

Remark 5.1. *Soient* $0 \leq b \leq c$ *avec* $c > 0$, λ *un poids dominant de* G, *les opérateurs* $T_{\lambda,\mu}, U_{\lambda,v,i}, \langle u\rangle_\lambda$ *commutent deux à deux. De plus, si* $b \leq b'$ *et* $c \leq c'$, *alors pour tout* $\mathcal{O}$-*module* A, *l'inclusion*

$$S_\lambda(U^{b,c}, A) \hookrightarrow S_\lambda(U^{b',c'}, A)$$

est équivariante pour tous ces opérateurs.

Rappelons qu'on a fixé dans la Section4 une décomposition du tore maximal $\mathcal{T}$ de $\mathcal{G}$ en la partie semisimple et un supplémentaire :

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \times \mathcal{T}''.$$

Remarque 5.2. *Désormais, lorsqu'on considérera les modules* $S_\lambda(U^{b,c}, A)$, *on supposera toujours que*

-le poids dominant $\lambda \in \mathcal{P}^+$ *est dans le sous groupe* $X^*(\mathcal{T}') \subset X^*(\mathcal{T})$, *c'est à dire qu'il est trivial sur* $\mathcal{T}''$. *Le* $\mathbb{Z}$-*module* $X^*(\mathcal{T}')$ *est de rang* $n = \mathrm{rg}(\mathcal{G}')$ *alors que* $X^*(\mathcal{T}) = \mathrm{rg}(\mathcal{G})$ *;*

- les groupes de niveau $U^{b,c}$ *sont de la forme* $U^{b,c} = U^p \times \prod_{v|p} \mathrm{Iw}\prime(v^{b,c})$.

Définition 5.3. *Avec les notations ci-dessus, on note* $\mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O}) \subset \mathrm{End}(S_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O}))$, *l'algèbre engendrée par les images des opérateurs* $T_{v,\mu}, (\mu \in \mathcal{X}_*(\underline{T}_v)), U_{\lambda,v,\mu}, \langle u\rangle_\lambda$. *On l'appelle l'algèbre de Hecke de poids* λ *et niveau* $U^{b,c}$.

Notons que cette algèbre est isomorphe à l'algèbre engendrée sur $\mathcal{O}$ par les mêmes opérateurs de Hecke agissant sur $S_\lambda(U^{b,c}, K/\mathcal{O})$).

La sous-algèbre de l'algébre de Hecke (resp. le sous-module des formes automorphes) sur lequel les opérateurs $U_{\lambda,v,\mu}$, (pour tout $v|p$ et tout cocaractère dominant μ) sont inversibles l'algèbre de Hecke ordinaire (resp. le module des formes automorphes ordinaires).

Plus précisement, $\mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O})$ est une algébre finie sur $\mathcal{O}$. Par la propriété de Hensel, elle est donc semi-locale et produit cartésien de ses localisées aux idéaux maximaux

$$\mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O}) = \prod_{\mathfrak{m}} \mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}$$

où $\mathfrak{m}$ parcourt les idéaux maximaux. On dit qu'un idéal maximal $\mathfrak{m}$ est ordinaire, s'il ne contient aucun $U_{\lambda,v,\mu}$. On pose

$$\mathbf{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,c}, \mathcal{O}) = \prod_{\mathfrak{m}\,\mathrm{ord.}} \mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O})_{\mathfrak{m}}.$$

Soit $\mu \in X_*(T)^{++}$ un cocaractère strictement dominant, *i.e.* tel que $\langle \mu, \alpha_i \rangle > 0$ pour tout i. On voit facilement que la suite $(U(\mu)^{r!})_r$ converge dans $\mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O})$ vers un idempotent e indépendant de μ. On a

$$e \cdot \mathbf{T}_\lambda(U^{b,c}, \mathcal{O}) = \mathbf{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,c}, \mathcal{O}).$$

Définition 5.4. *Avec les notations ci-dessus, on définit la partie ordinaire de $S_\lambda(U^{b,c}, A)$:*

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,c}, A) := e \cdot S_\lambda(U^{b,c}, A) = \oplus_{\mathfrak{m}\,\mathrm{ord}} S_\lambda(U^{b,c}, A)_{\mathfrak{m}}.$$

Définition 5.5 (Grandes algèbres de Hecke).

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), K/\mathcal{O}) := \varinjlim_{c>0} S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{c,c}, K/\mathcal{O});$$

$$\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \mathcal{O}) := \varprojlim_{c>0} T_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{c,c}, \mathcal{O}).$$

Soit

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \mathcal{O}) = \varprojlim_{m} \varinjlim_{c>0} S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{p^{c,c}}, \mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$$

Notons que $\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \mathcal{O})$ agit fidèlement sur $S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \mathcal{O})$.

5.1. Théorème du contrôle vertical.

Theorem 5.6. *Soit A un $\mathcal{O}$-module quelconque. Soient $b \geq 1$ et $c \geq b$, l'inclusion naturelle*

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,b}, A) \to S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,c}, A)$$

est un isomorphisme.

De même, pour $c \geq 1$, l'inclusion

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{0,1}, A) \to S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{0,c}, A)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Soit $1 \leq b \leq c$. Soit $\mu \in X_*(T)^{++}$ un cocaractère strictement dominant. Posons $t_p = (\mu(\pi_v))_{v|p} \in G(F_p)$. Pour montrer le premier énoncé du théorème, il suffit de montrer que si $b < c$, on a

$$(*) \quad U^{b,c} t_p U^{b,c} = U^{b,c-1} t_p U^{b,c}.$$

En effet, si ceci est vrai, en notant $U(\mu)$ l'endomorphisme de $S_\lambda(U^{b,c}, A)$ donné par $[U^{b,c} t_p U^{b,c}]$, $U'(\mu)$ l'homomorphisme de $S_\lambda(U^{b,c}, A)$ à $S_\lambda(U^{b,c-1}, A)$ donné par $[U^{b,c-1} t_p U^{b,c}]$

et i_p l'inclusion de $S_\lambda(U^{b,c-1}, A)$ dans $S_\lambda(U^{b,c}, A)$, on voit que le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} S_\lambda(U^{b,c}, A) & \overset{U(\mu)}{\to} & S_\lambda(U^{b,c}, A) \\ \downarrow U'(\mu) & & \uparrow i_p \\ S_\lambda(U^{b,c-1}, A) & = & S_\lambda(U^{b,c-1}, A) \end{array}$$

En passant aux parties ordinaires, l'endomorphisme $U(\mu)$ devient un isomorphisme, donc on en déduit que i_p est un isomorphisme et donc, en itérant, que l'inclusion

$$S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,b}, A) \to S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{b,c}, A)$$

est un isomorphisme.

Maintenant, on montre $(*)$. On écrit

$$U^{b,c} t_p U^{b,c} = \coprod \epsilon_i t_p U^{b,c},$$

$$U^{b,c-1} t_p U^{b,c} = \coprod \theta_i t_p U^{b,c},$$

où ϵ_i parcourt un ensemble des représentants de $U^{b,c}/U^{b,c} \cap t_p U^{b,c} t_p^{-1}$, et θ_i parcourt un ensemble des représentants de $U^{b,c-1}/U^{b,c-1} \cap t_p U^{b,c} t_p^{-1}$. Rappelons la décomposition d'Iwahori

$$\mathrm{Iw}_v^{b,c} = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_{-\alpha}(\pi_v^c \mathcal{O}_v) \mathcal{T}_b \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha(\mathcal{O}_v).$$

On utilise que pour tout $\alpha \in \Phi$:

$$\widehat{\varpi}_i(\pi_v) U_\alpha(x) \widehat{\varpi}_i(\pi_v)^{-1} = U_\alpha(\pi_v^{\langle \alpha, \widehat{\varpi}_i \rangle} x).$$

Soit $g_p = (g_v)_{v|p} \in U_p^{b,c}$; on peut écrire pour tout $v|p$ $g_v = \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_{-\alpha}(\pi_v^c y_{v,\alpha}) \tau_{b,v} \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha(x_{v,\alpha})$ avec $x_{v,\alpha}$ et $y_{v,\alpha} \in \mathcal{O}$. On voit que pour chaque $v|p$, la v-composante de $t_p g_p t_p^{-1}$ est de la forme

$$\prod_{\alpha \in \Phi^+} U_{-\alpha}(\pi_v^{c - \langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle} y_{v,\alpha}) \tau_{b,v} \prod_{\alpha \in \Phi^+} U_\alpha(\pi_v^{\langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle} x_v).$$

On voit donc que

$$U_p^{b,c}/U_p^{b,c} \cap t_p U_p^{b,c} t_p^{-1} \cong \prod_{v|p, \alpha \in \Phi^+} U_\alpha(\mathcal{O}_v/\pi_v^{\langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle} \mathcal{O}_v).$$

Pour calculer $U_p^{b,c-1} \cap t_p U_p^{b,c} t_p^{-1}$, on note que pour tout $\alpha \in \Phi^+$, $\langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle > 0$. Ceci entraîne que pour tout $\alpha \in \Phi^+$, on a

$$U_{-\alpha}(\pi_v^{c-1} \mathcal{O}_v) \subset U_{-\alpha}(\pi_v^{c - \langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle} \mathcal{O}_v)$$

et donc qu'on a encore l'égalité

$$U_p^{b,c-1}/U_p^{b,c} \cap t_p U_p^{b,c} t_p^{-1} \cong \prod_{v|p, \alpha \in \Phi^+} U_\alpha(\mathcal{O}_v/\pi_v^{\langle \alpha, \widehat{\varpi} \rangle} \mathcal{O}_v)$$

On peut donc prendre le même système de représentants $\epsilon_i = \eta_i$ pour les deux ensembles. Par définition des actions, on en déduit $i_p \circ U'(\mu) = U(\mu)$.

Le deuxième énoncé est établi de la même manière, en montrant que $U^{0,c} t_p U^{0,c} = U^{0,c-1} t_p U^{0,c}$ pour importe quel $c \geq 2$.

□

5.2. Indépendance du poids. Le choix d'un sous-groupe Borel $\mathcal{B}$ de $\mathcal{G}$ fournit un ordre partiel sur $X^*(\mathcal{T})$: pour $\lambda, \mu \in X^*(\mathcal{T})$, $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in \sum_{\alpha \in \Phi^+} \alpha,$.

LEMME 5.7. *Soit λ un poids dominant pour $\mathcal{G}$, alors comme une représentation de $\mathcal{T}/\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$, on a une décomposition*

$$W_\lambda = \oplus_\mu (W_\lambda)_\mu.$$

Ici, μ parcourt un ensemble fini des caractères de $\mathcal{T}$. Les μ pour lesquels $(W_\lambda)_\mu$ n'est pas nul satisfont $w_0\lambda \leq \mu \leq \lambda$. Les sous-espaces $(W_\lambda)_\lambda$ et $(W_\lambda)_{w_0\lambda}$ sont libres de rang 1 sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$.

Soit $\lambda = (\lambda_\sigma)_{\sigma \in I_F} \in (\mathcal{P}^+)^{I_F}$. On va montrer que les espaces $S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^\infty), A)$ ($A = \mathcal{O}/\varpi^m$, $\varpi^{-m}\mathcal{O}/\mathcal{O}$, $K/\mathcal{O}$, $\mathcal{O}$) sont indépendants du poids. Pour comparer $S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^\infty), A)$ et $S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^\infty), A)$, on va utiliser la projection vers le sous-espace de poids le plus bas dans la décomposition ci-dessus. Plus précisement, soit $w_0 = (w_{0,\sigma})_{\sigma \in I_F} \in W_{\mathcal{G}}^{I_F}$ donné par l'élément de plus grande longueur pour chaque $\sigma \in I_F$. Considérons le morphisme naturel

$$\epsilon_\lambda \colon W_\lambda \to (w_0\lambda)$$

donné par $\epsilon_\lambda = \bigotimes_{\sigma \in I_F} \epsilon_{\lambda_\sigma}$ où pour chaque $\sigma \in I_F$

$$\epsilon_{\lambda_\sigma} \colon \operatorname{Ind}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{G}}(w_0\lambda)_{/\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]} \to (w_{0,\sigma}\lambda)_{/\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]}$$

est donné par $f \mapsto f(1)$. Suivant Hida, on va exploiter le fait que chaque $\epsilon_{\lambda_\sigma}$ est $\mathcal{B}$-équivariant :

$$\epsilon_{\lambda_\sigma}(b \cdot f) = f(b) = w_0\lambda_\sigma(b)\epsilon_{\lambda_\sigma}(f).$$

THEOREM 5.8. *Soit $\lambda \in (\mathcal{P}^+ \cap X^*(\mathcal{T}'))^{I_F}$ un poids dominant pour le groupe G. Pour tout $c \geq m > 0$, il y a un système d'isomorphismes*

$$\epsilon^{c,m}_{\lambda,*} \colon S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U^{c,c}, \mathcal{O}/(\varpi^m)) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{ord}}_0(U^{c,c}, \mathcal{O}/(\varpi^m))$$

compatibles pour $c' \geq c \geq m$, qui sont
- *équivariants pour l'action des opérateurs de Hecke hors de S, p et* $\mathrm{Ram}(U)$ *;*
- *tels que pour tout $v|p$, et pour tout cocaractère dominant ν de T_G, l'opérateur $U_{v,\nu}$ sur l'espace $S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U^{c,c}, \mathcal{O}/(\varpi^m))$ correspond à l'opérateur $U_{v,\nu}$ défini sur l'espace $S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^{c,c}), \mathcal{O}/(\varpi^m))$*
- *satisfont $\epsilon^{c,m}_{\lambda,*}(\langle u\rangle_\lambda f) = (w_0\lambda)(u)\langle u\rangle_0 \epsilon^{c,m}_{\lambda,*}(f)$ pour tout $u \in \mathcal{T}'(\mathcal{O}_p)$*

En prenant la limite inductive sur les couples $c \geq m > 0$, on obtient un isomorphisme

$$\epsilon_{\lambda,*} \colon S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^\infty), K/\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^\infty), K/\mathcal{O}),$$

qui vérifie les mêmes trois propriétés.

De même, en prenant la limite inductive sur c puis la limite projective sur m, on obtient

$$\epsilon_{\lambda,*} \colon S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^\infty), \mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^\infty), \mathcal{O}),$$

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$W_\lambda = \otimes_{\tau \in I_F} W_{\lambda_\tau} = \otimes_{\tau \in I_F}(\oplus_{w_0\lambda_\tau \leq \mu \leq \lambda_\tau}(W_{\lambda_\tau})_\mu).$$

On définit la projection vers le sous-espace de poids plus bas :

$$\epsilon_\lambda \colon W_\lambda = \otimes_{\tau \in I_F} W_{\lambda_\tau} \to \otimes_{\tau \in I_F}(W_{\lambda_\tau})_{w_0\lambda_\tau} = \otimes_{\tau \in I_F}\mathcal{O}(w_0\lambda_\tau).$$

Ce morphisme est $\mathcal{B}$-équivariant. En tensorisant par $\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}$, on obtient un morphisme :

$$\epsilon_\lambda \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}} \colon W_\lambda(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}) = W_\lambda \otimes \mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O} \to W_0(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}) = W_0 \otimes \mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}.$$

Pour alléger l'écriture, on le note encore par ϵ_λ. Comme les corps F_v sont tous contenus dans le corps p-adique K, toutes les uniformisantes choisies π_v de F_v sont divisibles par l'uniformisante ϖ de K. Par conséquent, si $c \geq m$, l'action de $\mathrm{Iw}_v^{b,c}$ sur $W_\lambda(\mathcal{O}/(\varpi^m)$ passe par l'action du groupe de Borel $\mathcal{B}(\mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$. On a ainsi un morphisme de $U^{c,c}$-modules $W_\lambda(\mathcal{O}/(\varpi^m) \to W_0(\mathcal{O}/(\varpi^m))$. On définit le morphisme $\epsilon^{c,m}_{\lambda,*}$ par :

$$\epsilon^{c,,m}_{\lambda,*} \colon S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U^{c,c}, \mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O}) \to S^{\mathrm{ord}}_0(U^{c,c}, \mathcal{O}/\varpi^m\mathcal{O})$$

$$s \mapsto (g \mapsto \epsilon_\lambda(s(g)).$$

Vérifions qu'il est équivariant pour les opérateurs de Hecke. Si $v \notin S \cup S_p$, notons $\mathbb{K}\mu(\pi_v)\mathbb{K} = \bigsqcup_i \mu_{v,i}\mathbb{K}$; on a

$$T_{v,\mu}f(g) = \sum_i \mu_{v,i} \bullet f(g) = \sum_i \mu_{v,i,p} \cdot f(g\mu_{v,i})$$

et

$$T_{v,\mu}\epsilon_\lambda(f(g)) = \sum_i \mu_{v,i} \bullet \epsilon_\lambda(f(g)) = \sum_i \epsilon_\lambda(f(g\mu_{v,i})),$$

puisque $\mu_{v,i,p} = 1$, on voit que $\epsilon_{\lambda,*}(T_{v,\mu}f) = T_{v,\mu}\epsilon_{\lambda,*}(f)$. De même, en notant $f(g;h)$ la fonction qui à $g \in G\backslash G_f$ associe la fonction $f(g;-) \in \mathrm{Ind}_B^G w_0\lambda(A)$, on a pour tout $u \in T_0$, $\langle u\rangle_\lambda f(g;h) = u_p \cdot f(gu;h) = f(gu;hu_p)$; donc

$$\epsilon_{\lambda,*}(\langle u\rangle_\lambda f)(g) = f(gu;u_p) = w_0\lambda(u_p)f(gu;1).$$

D'autre part, $\langle u\rangle_0\epsilon_{\lambda,*}(f)(g) = f(gu,1)$. On a donc

$$\epsilon_{\lambda,*}(\langle u\rangle_\lambda f) = w_0\lambda(u_p) \cdot \langle u\rangle_0\epsilon_{\lambda,*}(f)$$

Enfin, pour $v \in S_p$, posons $\widehat{\varpi}_i(\pi_v) = \alpha_{v,i}$ et choisissons des représentants $\alpha_{v,i}(x)$ de $U^{b,c}\alpha_{v,i}U^{b,c}/U^{b,c}$:

$$U^{b,c}\alpha_{v,i}U^{b,c} = \bigsqcup_x \alpha_{v,i}(x)U^{b,c}.$$

On a

$$U_{\lambda,v,i}f = w_0\lambda^{-1}(\alpha_{v,i})\sum_x \alpha_{v,i}(x) \bullet f.$$

On a donc

$$\epsilon_{\lambda,*}(U_{\lambda,v,i}f)(g;h) = w_0\lambda^{-1}(\alpha_{v,i})\sum_v \epsilon_\lambda \circ f(g\alpha_{v,i}(x);h\alpha_{v,i}(x))) = w_0\lambda^{-1}(\alpha_{v,i})\sum_x \circ f(g\alpha_{v,i}(x);\alpha_{v,i}(x)) =$$

$$= w_0\lambda^{-1}(\alpha_{v,i})w_0\lambda(\alpha_{v,i})\sum_x \epsilon_\lambda \circ f(g\alpha_{v,i}(x);1) = U_{0,v,i}\epsilon_{\lambda,*}(f)(g;h).$$

Pour montrer que $\epsilon_{\lambda,*}$ est un isomorphisme, on construit son inverse

$$\phi \colon S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^\infty), A) \to S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^\infty), A).$$

Comme dans la démonstration du théorème du contrôle vertical, on fixe $\mu \in X_*(T)^{++}$ et on considère $U_?(\mu)$ pour $? = 0, \lambda$. Soit $\alpha = \prod_{v|p}\mu(\pi_v)$. Fixons des représentants x_j de $U(p^{c,c})/(U(p^{c,c} \cap \alpha^m U(p^{c,c})\alpha^{-m})$. On a une décomposition en somme disjointe

$$U(p^{c,c})\alpha^m U(p^{c,c}) = \bigsqcup_j x_j\alpha^m U(p^{c,c}).$$

On fixe un vecteur v_λ de $W_\lambda(\mathcal{O})$ qui engendre $W_\lambda(\mathcal{O})_{w_0\lambda}$ sur $\mathcal{O}$. Alors ϕ est défini comme suit :

$$\phi \colon S^{\mathrm{ord}}_0(U(p^{c,c}), A) \to S^{\mathrm{ord}}_\lambda(U(p^{c,c}), A)$$

$$F \mapsto \{g \mapsto \sum_j \frac{x_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gx_j\alpha^m)\}.$$

Il est clair que ϕ est bien défini. Montrons qu' il prend ses valeurs dans $S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^{c,c}),A)$; il s'agit de voir que pour tout $u \in U(p^{c,c})$, on a $u_p \cdot \phi(F)(gu) = \phi(F)$. Or, $ux_j = x_{\sigma(j)}u'_j$ ($u'_j \in U(p^{c,c} \cap \alpha^m U(p^{c,c})\alpha^{-m})$ pour une permutation σ des j, de sorte que

$$\sum_j \frac{ux_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gux_j\alpha^m) = \sum_j \frac{x_{\sigma(j)}u'_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gx_{\sigma(j)}u'_j\alpha^m) =$$

$$= \sum_j \frac{x_{\sigma(j)}\alpha^m u''_j}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gx_{\sigma(j)}\alpha^m u''_j),$$

où $u''_j \in U(p^{c,c})$. On a pour tout h, $F(hu''_j) = F(h)$ et, comme $c \geq m$: $u''_j v_\lambda = v_\lambda$. Donc la dernière expression est égale à

$$\sum_j \frac{x_{\sigma(j)}\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gx_{\sigma(j)}\alpha^m) = \phi(F)(g).$$

On voit alors que $\epsilon_{\lambda,*} \circ \phi = U_0(\mu)^m$ en effet,

$$\epsilon_\lambda(\sum_j \frac{x_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes F(gx_j\alpha^m)) =$$

$$= \sum_j \frac{x_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} \epsilon_\lambda(v_\lambda) \cdot F(gx_j\alpha^m) =$$

$$= \sum_j F(gx_j\alpha^m) = U_0(\mu)^m(F).$$

Montrons $\phi \circ \epsilon_{\lambda,*} = U_\lambda(\mu)^m$. Soit $f \in S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{c,c}),A)$, alors

$$\phi \circ \epsilon_{\lambda,*}(f)(g) = \sum_j \frac{x_j\alpha^m}{w_0\lambda(\alpha^m)} v_\lambda \otimes \epsilon_\lambda(f(gx_j\alpha^m)).$$

D'un autre côté,

$$U_\lambda(\mu)^m f(g) = w_0\lambda(\alpha^m)^{-1} \sum_j ((x_j\alpha^m) \bullet f)(g) = w_0\lambda(\alpha^m)^{-1} \sum_j (x_j\alpha^m) \cdot f(gx_j\alpha^m).$$

Mais

$$(*) \quad f(gx_j\alpha^m) = v_\lambda \otimes \epsilon_\lambda(f(gx_j\alpha^m)) + \sum_{\mu \neq w_0\lambda} v_\mu \otimes \xi_{\mu,j,m},$$

où $\xi_{\mu,jm} \in \mathcal{O}/(\varpi^m)$. On a pour tout poids $\mu w_0\lambda$ de W_λ

$$w_0\lambda^{-1}(\alpha^m)\mu(\alpha^m) \equiv 0 \pmod{\varpi^m}.$$

Donc, en appliquant $w_0\lambda(\alpha^m)^{-1}\alpha^m$ à l'égalité $(*)$, on obtient pour tout j :

$$w_0\lambda(\alpha^m)^{-1}\alpha^m f(gx_j\alpha^m) = w_0\lambda(\alpha^m)^{-1}\alpha^m v_\lambda \otimes \epsilon(f(gx_j\alpha^m)).$$

Mais sur le sous-espace ordinaire, les opérateurs $U_?(\mu)$ sont inversible. Donc, $\epsilon_{\lambda,*}$ est bien un isomorphisme. Les derniers énoncés en résultent en prenant la limite inductive sur c puis la limite inductive, resp. projective sur m. □

La compatibilité de l'isomorphisme $\epsilon_{\lambda,*}$ avec les opérateurs de Hecke fournit le corollaire suivant :

Corollaire 1. On a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres

$$\epsilon_\lambda^*\colon \mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),\mathcal{O}) \xrightarrow{\cong} \mathbb{T}_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),\mathcal{O})$$

qui envoie $T_{\lambda,v,i}$ ($v\notin S\cup S_p$), resp. $U_{\lambda,v,i}$ ($v\in S_p$) sur $T_{0,v,i}$, resp. $U_{0,v,i}$ et tel que pour tout $t\in T_0$,

$$\epsilon_\lambda^*(\langle t\rangle_0) = w_0\lambda(t)^{-1}\cdot\langle t\rangle_\lambda$$

6. Théorème de spécialisation

Soit $M_0 = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O}),K/\mathcal{O})$, le dual de Pontryagin de $S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O})$, qu'on peut identifier par 5.8 à $S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O})$ pour tout $\lambda\in(\mathcal{P}^+\cap X^*(\mathcal{T}'))^{I_F}$. Le module discret $S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O})$ est muni d'une action continue du groupe compact $\mathcal{T}_0=\mathcal{T}'(\mathcal{O}_p)$ par les diamants de poids 0 ; le $\mathcal{O}$-module compact M_0 est donc muni d'une action continue de $\mathcal{T}_0'$.

Pour chaque $b\geq 1$. On note $\mathcal{T}_b'$ le sous-groupe de $\mathcal{T}_0'=\mathcal{T}'(\mathcal{O}_p)$ défini par la suite exacte

$$0\to\mathcal{T}_b'\to\mathcal{T}_0'\to\mathcal{T}'(\mathcal{O}_p/p^b)\to 0.$$

Grâce à l'hypothèse que p est non ramifié dans F, on peut relever canoniquement $\mathcal{T}'(\mathcal{O}_p/p\mathcal{O}_p)$ en un sous-groupe Δ d'ordre premier à p de $\mathcal{T}_0'$ et ainsi décomposer $T_0'=\Delta\times\mathcal{T}_1'$. Définissons l'algébre de groupes complétée

$$\Lambda' := \mathcal{O}[[\mathcal{T}_1']] = \varprojlim_{b\geq 1}\mathcal{O}[\mathcal{T}_1'/\mathcal{T}_b'].$$

On a donc $\mathcal{O}[[\mathcal{T}_0']]=\Lambda'[\Delta]$.

On a un isomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres locales

$$\Lambda' \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}[[X_1,\cdots,X_{nd}]],$$

où $d=[F\colon\mathbb{Q}]$. C'est un anneau local, noetherien, complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}=(\pi,X_1,\cdots,X_{nd})$.

L'homomorphisme continu $\mathcal{T}_0'\to\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(M_0)$ se prolonge par linéarité et continuité en un homomorphisme continu de $\mathcal{O}$-algèbres

$$\Lambda'[\Delta]\to\mathrm{End}_{\mathcal{O}}M_0.$$

Soit $I_c=\mathrm{Ker}\,\mathcal{O}[[\mathcal{T}_1']]\to\mathcal{O}[\mathcal{T}'(\mathcal{O}/p^c)]$. Soit $M_{0,c}=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(S_0^{\mathrm{ord}}(U^{c,c},K/\mathcal{O}),K/\mathcal{O})$

Theorem 6.1. *1) On a pour tout $c>0$, $M_0/I_cM_0\cong M_{0,c}$,*
2) le module M_0 est libre de rang fini sur Λ'.

Démonstration. 1) en prenant les duaux de Pontryagin, on est ramenéà montrer que l'injection

$$S_0^{\mathrm{ord}}(U^{c,c},K/\mathcal{O})\subset S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O})^{\mathcal{T}_c'}.$$

est une égalité. Par définition, on a

$$S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty),K/\mathcal{O})^{\mathcal{T}_c'} = \varinjlim_d S_0^{\mathrm{ord}}(U^{c,d},K/\mathcal{O}).$$

Mais par le Théorème 5.6, on a

$$\varinjlim_d S_0^{\mathrm{ord}}(U^{c,d},K/\mathcal{O}) = S_0^{\mathrm{ord}}(U^{c,c},K/\mathcal{O}).$$

2) On déduit de 1) que $M_0/I_1M_0=M_{0,1}$ est libre sur $\mathcal{O}$. Par le lemme de Nakayama, il existe donc un homomorphisme Λ'-linéaire surjectif $\Psi\colon(\Lambda')^s\to M_0$. Soit $N=\mathrm{Ker}\,\Psi$. Pour tout $c\geq 1$, on a

$$N/I_cN\to(\Lambda'/I_c)^s\to M_{0,c}\to 0.$$

On sait que $M_{0,c}$ est libre de rang s sur Λ'/I_c (voir par exemple [**CHT08**, Lemma 3.3.1]). Ceci entraîne que $N \subset \bigcap_c I_c \cdot (\Lambda')^s = 0$. $\square$

En envoyant $u \in \mathcal{T}_1'$ vers $\langle u\rangle_0$, on définit une structure de Λ'-algèbre sur $\mathbb{T} = \mathbb{T}_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \mathcal{O})$. Il y a aussi une action de Δ sur $\mathbb{T}$ donnée par $\delta \mapsto \langle \delta\rangle_0$. On peut donc décomposer l'algèbre $\mathbb{T}$ en un produit d'algèbres $\mathbb{T}_\psi$ où ψ parcourt l'ensemble des caractères de Δ et $\langle\delta\rangle_0 = \psi(\delta)$ dans $\mathbb{T}_\psi$ pour tout $\delta \in \Delta$.

Corollaire 2. Il résulte directement du théorème 6.1 que $\mathbb{T}$ est une Λ'-algèbre finie et sans torsion.

Soit $\lambda = (\lambda_\tau)_{\tau \in I_F}$ un d-uplet de poids dominants de $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \mathcal{T})$ triviaux sur $\mathcal{T}''$ et $\epsilon\colon \mathcal{T}_1' \to \overline{\mathbb{Q}}_p^*$ un caractère d'ordre fini. Le caractère ϵ se factorise en un caractère de $\mathcal{T}_1'/\mathcal{T}_r' = \mathcal{T}'(\mathcal{O}_p/(p^r))$. D'autre part, on peut considérer λ comme un caractère de $\mathcal{T}_0'$. Par la décomposition $\mathcal{T}_0 = \Delta \times \mathcal{T}_1'$, il se décompose en $\lambda = \lambda_\Delta \otimes \lambda_1$.

L'idéal premier $\mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}$ de Λ' noyau de l'homomorphisme

$$\phi_{\lambda_1,\epsilon}\colon \Lambda' \to \overline{\mathbb{Q}}_p$$

induit par $\langle u\rangle_0 \mapsto w_0\lambda^{-1}(u)\epsilon(u)$ pour $u \in \mathcal{T}_1'$ s'appelle l'idéal premier arithmétique de poids λ et caractère ϵ.

Soit K' le corps des fractions de $\Lambda'/\mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}$, et $\mathcal{O}'$ son anneau de valuation. Notons que K' est fini sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, \mathcal{O})$ le sous-module maximal de $S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{r,r}), \mathcal{O})$ sur lequel on a $\langle t\rangle_\lambda = \epsilon(u)$ pour tous les $t \in \mathcal{T}'(\mathcal{O}_p/(p^r)) = U(p^{0,r})/U(p^{r,r})$, et $\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, \mathcal{O})$ l'image de $\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{r,r}), \mathcal{O})$ dans $\mathrm{End} S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, \mathcal{O})$.

Theorem 6.2. *Soit $\psi_\Delta = w_0\lambda_\Delta^{-1}$. On a une surjection*

$$\mathbb{T}_{\psi_\Delta} \otimes_{\Lambda', \phi_{\lambda_1,\epsilon}} \mathcal{O}' \to \mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, \mathcal{O}').$$

et le noyau de cet homomorphisme est nilpotent.

Démonstration. Soit $M_0 = S_0^{\mathrm{ord}}(U(p^\infty), \psi_\Delta, K/\mathcal{O})^*$ le dual de Pontryagin de $S_0^{\mathrm{ord}})^{\Delta=\psi_\Delta}$. C'est un Λ'-module libre de rang fini par le Théorème 6.1. En utilisant le Théorème 6.1 (et l'indépendance du poids), on voit facilement que

$$M_0/\mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}M_0 \xrightarrow{\cong} M_\lambda(\epsilon).$$

Ici $M_\lambda(\epsilon)$ désigne le dual de Pontryagin de $S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, K/\mathcal{O})$. Comme par définition $\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, \mathcal{O})$ est l'image de $\mathbb{T}$ dans $\mathrm{End}\, S_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,r}), \epsilon, K/\mathcal{O})$, on a une surjection de $\mathbb{T}$ vers $\mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{r,r}), \epsilon, \mathcal{O})$ qui se factorise par $\mathbb{T}_{\psi_\Delta}/\mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}\mathbb{T}_{\psi_\Delta}$.
Il reste à montrer que cette surjection a un noyau nilpotent. En prenant une base de M_0, on suppose que $M_0 = \oplus_{i=1}^r \Lambda\theta_i$. Soit $T \in \mathbb{T}$, on suppose que $T\theta_i = \sum_{i=1}^r a_{i,j}\theta_j$. Comme $\mathbb{T}$ agit fidèlement sur M_0, si T est envoyé vers 0, on a $a_{ij} \in \mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}$. Mais T est annulé par $\det(X \cdot 1_r - (a_{ij}))$. Ceci implique $T^r \in \mathfrak{p}_{\lambda,\epsilon}$. Le noyau est donc nilpotent. $\square$

7. Les familles de Hida

Définition 7.1. *Une famille de Hida est un morphisme surjectif de Λ' algèbre $\mu\colon \mathbb{T} \to \mathbb{I}$ òu $\mathbb{I}$ est une Λ'-algèbre intègre finie sans torsion.*

Les familles de Hida correspondent bijectivement aux idéaux premiers minimaux de $\mathbb{T}$ (ce sont les idéaux au-dessus de l'idéal (0) de Λ'). Soit $\alpha\colon \Delta \to \mathcal{O}^\times$ un caractère de Δ.

Définition 7.2. *Un système de valeurs propres de Hecke (en abrégé, SVPH) classique pour G (hors de S) de poids λ et niveau Iwahorique en p est un homomorphisme de $\mathcal{O}$-algèbres*

$$\mu_\lambda^{0,1} \colon \mathbf{T}_\lambda(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}'$$

pour un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}'$ fini sur $\mathcal{O}$. Il est dit ordinaire si pour tout $i = 1, \ldots, n$, on a $\mu(U_{v,i}) \in (\mathcal{O}')^\times$. Ceci équivaut à dire que μ se factorise à travers le quotient $\mathbf{T}_\lambda(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O}) \to \mathbf{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O})$.

Par le lemme du Going Down en algèbre commutative, on peut interpoler un tel homomorphisme par une famille de Hida.

Proposition 7.3. *Tout SVPH classique pour G (hors de $S \cup S_p$) de poids λ et niveau Iwahorique en p ordinaire*

$$\mu_\lambda^{0,1} \colon \mathbf{T}_\lambda(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}'$$

se relève en une famille de Hida $\mu \colon \mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha} \to \mathbb{I}$. C'est à dire qu'il existe une telle famille et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{I}$ au-dessus de $\mathfrak{p}_\lambda$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha}/\mathfrak{p}_\lambda \mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha} & \to & \mathbf{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O}) \\ \downarrow \mu_\mathfrak{p} & & \downarrow \mu_\lambda^{0,1} \\ \mathbb{I}/\mathfrak{p} & \hookrightarrow & \mathcal{O}' \end{array}$$

commute (on a posé $\mu_\mathfrak{p} = \mu \pmod{\mathfrak{p}}$).

Démonstration. En composant $\mu_\lambda^{0,1} \colon T_\lambda^{\mathrm{ord}}(U^{0,1}, \alpha, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}'$, avec la surjection donnée par le théorème de spécialisation

$$\mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha} \otimes_\lambda \mathcal{O}' \to \mathbb{T}_\lambda^{\mathrm{ord}}(U(p^{0,1}), \alpha, \mathcal{O}')$$

on obtient un homomorphisme $\theta_0 \colon \mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha} \to \mathcal{O}'$. On est donc ramené à trouver un idéal premier $\mathfrak{Q}$ de $\mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha}$ au-dessus de (0), tel que le morphisme θ_0 se factorise par $\mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha}/\mathfrak{Q}$. L'idéal premier $\mathfrak{P} = \mathrm{Ker}\, \theta_0$ est au-dessus de $\phi_{\lambda,1}$. Il s'agit de trouver un idéal premier $\mathfrak{Q}$ contenu dans l'idéal premier $\mathfrak{P}$ et au-dessus de l'idéal premier (0). C'est assuré par le lemme du Going Down. On pose alors $\mathbb{I} = \mathbb{T}_{\psi_\Delta \alpha}/\mathfrak{Q}$ et $\mathfrak{p} = \mathrm{Im}(\mathfrak{P} \to \mathbb{I})$. $\square$

CHAPITRE 2

Le formalisme de la fonctorialité

1. L-groupes

Formons (suivant [**Spr79**]) le groupe dual $\widehat{G}$ du groupe réductif connexe déployé $G_{K_0} = G \times_F K_0$. C'est un groupe réductif connexe déployé sur K_0. On le considère comme défini sur un corps p-adique K contenant tous les plongements de K_0. Le triplet $(G_{K_0}, B_{K_0}, T_{K_0})$ induit un triplet dual $(\widehat{G}, \widehat{B}, \widehat{T})$ défini sur K_0. Le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K_0/F)$ agit par automorphismes extérieurs sur $\widehat{G}$. Soit $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G/K_0)$; la donnée du triplet $(G_{K_0}, B_{K_0}, T_{K_0})$ et d'un épinglage $(X_\alpha)_{\alpha\in\Phi}$), c'est à dire d'une base de $\mathfrak{g}_\alpha$ pour toute racine $\alpha \in \Phi$, fournit un relèvement

$$\psi\colon \mathrm{Out}(\widehat{G}) \to \mathrm{Aut}(\widehat{G})$$

du groupe des automorphismes extérieurs de $\widehat{G}$ en un un groupe d'automorphismes (voir Sect.2 de [**Spr79**]). On peut donc former le produit semi-direct

$${}^L G = \widehat{G} \rtimes \mathrm{Gal}(K_0/F).$$

C'est le L-groupe de G. On a ${}^L G^\circ = \widehat{G}$. Lorsque G est déployé sur F, ${}^L G$ est un produit direct. Il est muni d'une projection ${}^L G \to \mathrm{Gal}(K_0/F)$.

Etant donnés deux groupes réductifs connexes G, H définis sur F, un morphisme de L-groupes est un homomorphisme de groupes algébriques

$$\begin{array}{ccc} {}^L G & \xrightarrow{\varphi} & {}^L H \\ \searrow & & \swarrow \\ & \mathrm{Gal}(K_0/F) & \end{array}$$

qui commute avec les projections sur $\mathrm{Gal}(K_0/F)$.

Soit $v \notin S$. le groupe $G_v = G \times_F F_v$ est quasi déployé. Pour un groupe de décomposition $D_v = \mathrm{Gal}(K_{0,w}/F_v) \subset \mathrm{Gal}(K_0/F)$, on note ${}^L G_v = \widehat{G} \rtimes D_v$ le L groupe de G_v. Il est défini sur $K_{0,w}$ donc sur K. C'est un sous-groupe de ${}^L G$.

Pour toute représentation algébrique $r\colon {}^L G \to GL_N$, on note $r_v\colon {}^L G_v \to GL_N$ le morphisme défini par restriction.

2. Représentations galoisiennes

Les conjectures concernant l'existence de représentations galoisiennes associées à des représentations cuspidales algébriques ont été formulées par Langlands [**La79**], [**Gr99**, Chapter IV],[**Clo90**, Section 4], [**BG13**, Sect.2.4 et 3.1] qui développent des idées de Langlands et Borel, et de [**GK15**, Section 2.3]. Soit $v \notin S$. Le groupe $G_v = G \times_F F_v$ est quasi déployé non ramifié. Pour un groupe de décomposition $D_v = \mathrm{Gal}(K_{0,w}/F_v) \subset \mathrm{Gal}(K_0/F)$, on note ${}^L G_v = \widehat{G} \rtimes D_v$ le L-groupe de G_v il est défini sur $K_{0,w}$ donc sur K. C'est un sous-groupe de ${}^L G$.

Dans ce qui suit on se place sur $\overline{K} = \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soit $\overline{K}[{}^L G_v]$ l'algèbre des fonctions rationnelles sur ${}^L G_v$ définies sur $\overline{K}$ et $R({}^L G_v)$ la sous-algèbre de $\overline{K}[{}^L G_v]$ engendrée par les caractères $\mathrm{Tr}(r_v)$ pour toutes les représentations algébriques r de ${}^L G$. C'est une algèbre de fonctions invariantes par l'action par conjugaison de ${}^LG_v^\circ$. Soit $R^{\rm ss}({}^LG_v)$ la $\overline{K}$-algèbre quotient de $R({}^LG_v)$ obtenue en restreignant les fonctions aux classes de ${}^LG_v^\circ$-conjugaison des éléments semisimples de ${}^LG_v$. Par [**Bo79**, Proposition 6.7], on a avec les notations de la Section 3, Chap.1 :

$$R^{\rm ss}({}^LG_v) = \overline{K}[\Lambda_v]^{W_{G_v}},$$

où l'action de W_{G_v} est l'action non tordue. de sorte que pour tout $v \notin S \cup S_p$, on peut interpréter la Proposition 3.1 du Chapitre 1 comme un isomorphisme de Satake de l'algèbre de Hecke sphérique $\mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) \otimes \overline{K}$ avec $R^{\rm ss}({}^LG_v)$:

$$S_{A_v}^{G_v} \colon \mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) \otimes \overline{K} \cong R^{\rm ss}({}^LG_v).$$

Notons que cet isomorphisme fournit une bijection entre les classes de ${}^LG_v^\circ$-conjugaison d'éléments semi-simples de ${}^LG_v$ sur $\overline{K}$ et l'ensemble des $\overline{K}$-caractères de $\mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v)$.

Rappelons enfin l'isomorphisme d'Harish-Chandra. Soit W_∞ le groupe de Weyl du groupe complexe $G(\mathbb{C})$. L'isomorphisme d'Harish-Chandra

$$\gamma_\infty \colon \mathfrak{Z}\mathfrak{g}_\infty^{\mathbb{C}} \cong \mathrm{Sym}^\bullet \mathfrak{t}_\infty^W, \quad z = \theta + \nu^+ \mapsto \theta - \rho(\theta) \cdot 1$$

(où $\theta \in \mathrm{Sym}^\bullet\, \mathfrak{t}_\infty$) identifie le centre $\mathfrak{Z}\mathfrak{g}$ de l'algèbre enveloppante complexe de $\mathfrak{g}_\infty = \mathrm{Lie}(G_\infty)$ avec l'algèbre des W_∞-invariants de l'algèbre symétrique de la $\mathbb{C}$-algèbre de Cartan $\mathfrak{t}_\infty^{\mathbb{C}} = \mathrm{Lie}\, T_{\mathbb{C}}$ de $\mathfrak{g}_\infty^{\mathbb{C}}$. Le système d'isomorphismes $((S_{A_v}^{G_v})_{v \notin S \cup S_p}, \gamma_\infty)$ permet aussi de définir conjecturalement la representation galoisienne associée à une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière.

Soit $\pi' = \pi'_f \otimes \pi'_\infty$ une représentation automorphe cuspidale de G non ramifiée hors de $S \cup S_p$. On suppose π' C-algébrique. Cela signifie qu'il existe un caractère algébrique régulier $\lambda' \in X^*(T_{\mathbb{C}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^\times)$ tel que le caractère infinitésimal $\chi_{\pi'_\infty} : \mathfrak{Z}\mathfrak{g}_\infty \mapsto \mathbb{C}$ de π'_∞ peut s'écrire $\chi_{\pi'_\infty} = \chi_{\lambda',\vee}$ où $\chi_{\lambda',\vee}$ est le contragrédient du caractère infinitésimal $\chi_{\lambda'} \colon : \mathfrak{Z}\mathfrak{g} \to \mathbb{C}$ d'une représentation algébrique irréductible de $G(\mathbb{C})$ de plus haut poids λ' (pour le triplet $(G_{\mathbb{C}}, B_{\mathbb{C}}, T_{\mathbb{C}})$ fixé au début du chapitre 1). Noter que $\chi_{\lambda'} = (\lambda + \rho) \circ \gamma$ où pour tout caractère $\mu \colon \mathfrak{t}_\infty \to \mathbb{C}$, on note encore $\mu \colon \mathrm{Sym}^\bullet\, \mathfrak{t}_\infty^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$. son prolongement à $\mathrm{Sym}^\bullet\, \mathfrak{t}_\infty^{\mathbb{C}}$.

On fait désormais l'hypothèse d'intégralité

Hypothèse : Il existe $\psi \in X^*(T)_{\mathbb{Q}}$ invariant par Γ_F et tel que $< \psi, \alpha_i^\vee >= 0$ et tel que $\eta = \rho + \psi \in X^*(T)$.

Le caractère η est souvent appelé un caractère de Gross [**Gr99**, Chapter IV (13.5)] mais nous réserverons cette terminologie pour le caractère ψ.

Commentaires :

1) Soit w_0 l'élément de plus grande longueur de W_G, $c \in \mathrm{Gal}(K_0/F)$ la conjugaison complexe (qui peut être égale à l'identité) et $\theta = w_0 \times c$ agissant par conjugaison tordue sur $\mathcal{T} \times K_0$. Soit $\underline{A}_Z \subset \underline{A} \subset \underline{T}$ et C le tore F-déployé maximal du cocentre $G/G\prime$ (l'application naturelle $A_Z \to C$ est une isogénie définie sur F). Rappelons que $X_*(A_Z) = X_*(T)^{\theta=1}$ et $X^*(C) = X^*(T)^{\theta=1}$ (voir [**Gr99**, Proposition 2.2]).

2) L'ensemble des (quasi) caractères ψ est un espace principal homogène sous $\mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_m) = X^*(C)$. En effet si ψ et ψ' sont deux tels (quasi) caractères, on a $\psi - \psi' \in X^*(T)$ et ce caractère est fixe par l'automorphisme θ de [**Gr99**, Chapter IV] ; il fournit donc un caractère du cocentre F-rationnel C.

3) Soit $\psi \in X^*(T)_{\mathbb{Q}}$ invariant par Galois et tel que $< \psi, \alpha_i^\vee >= 0$ et tel que $\eta = \rho + \psi \in X^*(T)$; le caractère ψ^2 est invariant par θ. Il se prolonge donc en un caractère $|\psi^2| \colon G \to \mathbb{G}_m$. Soit

$$\nu_\psi = |\psi^2|^{-1/2}.$$

On pose alors $\pi = \pi'(\psi) = \pi' \otimes \nu_\psi$. Cette représentation est L-algébrique régulière de poids $\lambda + \eta$ (au sens de [**BG13**]). Elle est conjecturalement L-arithmétique au sens de [**BG13**, Definition 3.1.4 et Conjecture 3.1.6]. Notons que le twist par ν_ψ généralise le twist de Clozel $\pi'\otimes|\det|^{-\frac{n-1}{2}}$ pour π' sur (une forme compacte à l'infini de) GL_n [**Clo90**]. Plus précisément, dans ce cas on a $\rho = ((n-1)/2, (n-3)/2, \ldots, -(n-3)/2, -(n-1)/2)$, et on peut prendre $\psi = ((n-1)/2, (n-3)/2, \ldots, (n-1)/2)$ et $\eta = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$.

Comme dans [**Gr99**, Section 13] :

Définition 2.1. *On suppose l'existence d'un élément $\psi \in X^*(T)_{\mathbb{Q}}$ invariant par Γ_F. On appelle un tel élément un caractère de Gross. On en déduit l'existence d'un caractère $\eta = \rho + \psi \in X^*(T)$ comme ci-dessus.*

Le nombre premier p a été fixé ainsi qu'un plongement $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Rappelons la définition du paramètre de Satake $\bar{t}_{\pi,\iota}$ d'une représentation irréductible lisse admissible non ramifiée $\pi = \mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v} e^\rho \chi$ (induite normalisée). On a $\iota\circ\chi \in \mathrm{Hom}(T_v, \overline{\mathbb{Q}}_p^\times) = \mathrm{Hom}(F_v^\times/\mathcal{O}_v^\times, \widehat{T}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p))$. Le paramètre de Satake $\bar{t}_{\pi,\iota}$ est alors la classe de W_{G_v}-conjugaison de $\chi(\varpi_v)$.

Pour tout $v \notin S \cup S_p$, on note $J(\pi) = J{A_v}^{G_v}(\pi)$ le module des N_v-coinvariants de π, donné par le quotient $V_\pi / \sum_{n\in N_v}(\pi(n)-1)V_{\pi'_v}$, muni de l'action normalisée de $A_v \subset T_v$ donnée par

$$a \cdot \overline{x} = e^{-\rho(a)} \cdot \overline{\pi'_v(a)x}$$

la projection canonique

$$J_{A_v}^{G_v}\colon \pi'_v \to J(\pi_v)$$

induit un isomorphisme [**Cas95**, Th.3.3.3] et [**Cas88**, Prop.2.4]

$$J_{A_v}^{G_v}\colon (\pi'_v)^{\mathrm{Iw}(v)} \cong J(\pi'_v)^{T_{\mathcal{H},v}}$$

Si π'_v est une induite normalisée $i_{B_v}^{G_v}\chi = \mathrm{Ind}_{B_v}^{G_v} e^\rho\chi$, on a une décomposition de A_v/A_v^0-modules

$$J(\pi'_v)^{T_{\mathcal{H},v}} = \bigoplus_{w\in W} \chi^w$$

En outre, la restriction au sous-espace $(\pi'_v)^{\mathbb{K}_v} \subset (\pi'_v)^{\mathrm{Iw}(v)}$ induit une injection

$$J_{A_v}^{G_v}\colon (\pi'_v)^{\mathbb{K}_v} \hookrightarrow J(\pi'_v)^{T_{\mathcal{H},v}}$$

compatible avec l'isomorphisme de Satake :

$$S_{A_v}^{G_v}(h) \cdot J_{A_v}^{G_v}(x) = J_{A_v}^{G_v}(h \cdot x).$$

L'action des opérateurs de Hecke en v sur la droite des $\mathbb{K}_v$-invariants de $\pi_v = \pi'(\psi)_v$ fournit un caractère $\mu_{\pi_v}\colon \mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ de l'algèbre de Hecke sphérique en v appeé le paramètre de Hecke de π_v. Ce paramètre est rationnel. On peut le relier avec le paramètre de Satake par la formule $\mu_{\pi_v}([\mathbb{K}_v\mu(\varpi_v)\mathbb{K}_v]) = S_{A_v}^{G_v}([\mathbb{K}_v\mu(\varpi_v)\mathbb{K}_v])(t_{\pi_v,\iota})$.

Par exemple soit f une forme modulaire classique de poids $k \geq 2$ et de niveau N provenant par la correspondance de Jacquet-Langlands d'un corps de quaternions sur $\mathbb{Q}$; soit q est un nombre premier, premier à N et a_q la valeur propre de T_q et que $X^2 - a_qX + q^{k-1} = (X-\alpha_q)(X-\beta_q)$.

Si T_q désigne la fonction caractéristique de $\mathbb{K}_q \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{K}_q$, on a

$$S_A^G(T_q) = q^{1/2}(\begin{bmatrix} q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix}).$$

Si l'on pose $\nu_\psi = |\det|_{\mathbf{A}}^{-1/2}$, on a $\nu_\psi(\mathrm{diag}(q,1)) = q^{1/2}$. Soit π'_f la représentation automorphe C-algébrique associée à f intervenant dans le groupe de cohomologie $H^1(X, V_{k-2})$ de la courbe modulaire, pour le système local associé à la représentation $\mathrm{Sym}^{k-2}\mathrm{St}_2$ de GL_2. En posant $\pi_f = \pi'_f(\psi)$, on a $\mu_{\pi_{f,q}}(T_q) = \alpha_q + \beta_q = a_q$.

Soit $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ le groupe de Galois absolu du corps de nombres F. Pour toute place finie v de F et pour tout caractère $\mu = (\mu_\sigma)_{\sigma\in I_F}$ de $\mathcal{T} \times F$, on note $\mu_v = (\mu_\sigma)_{\sigma\in I_{F_v}}$ le caractère de $\mathcal{T} \times F_v$ associé.

Définition 2.2. *Soit $v \in S_p$ et $\mu_v \in X^*(T_v)$. On dit que l'homomorphisme continu $\rho\colon \Gamma_{F_v} \to {}^LG_v(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est de de Rham, de poids de Hodge-Tate μ_v si pour toute représentation algébrique $\varphi\colon {}^LG \to \mathrm{GL}_N$, la représentation $\varphi \circ \rho\colon \Gamma_{F_v} \to \mathrm{GL}_N(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ est de de Rham de poids de Hodge-Tate $\varphi \circ \mu_v$, où l'on identifie le caractère $\mu_v \in X^*(T_v)$ avec le cocaractère $\mu_v \in X_*(\widehat{T}_v)$.*

On note $\eta = (\eta_\sigma)_{\sigma\in I_F} \in (\mathcal{P}^+)^{I_F}$ le poids de $\mathcal{G} \times F$ donné par $\eta_\sigma = \rho_\sigma + \psi_\sigma$ pour chaque $\sigma \in I_F$. On a vu ci-dessus qu'à une représentation π' cuspidale de $G(\mathbf{A}_F)$, algébrique régulière de poids cohomologique $\lambda' \in (\mathcal{P}^+)^{I_F}$ correspond une représentation $\pi = \pi'(\psi)$ qui est C-algébrique régulière de poids $\lambda'+\psi$. Rappelons qu'on a fixé un plongement $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$.

Conjecture 2.3. *À une représentation π' cuspidale de $G(\mathbf{A}_F)$, C-algébrique régulière de poids cohomologique λ', on peut associer une représentation galoisienne, c'est à dire un homomorphisme continu*

$$\rho_{\pi',\psi,\iota}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

1) non ramifié hors de $S \cup S_p$ et tel que pour toute place finie $v \notin S \cup S_p$ de F, la classe de conjugaison de $\rho_{\pi',\psi,\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)$ soit égale au paramètre de Satake $t_{\pi'_v(\psi),\iota}$,

2) pour tout $v \in S_p$, $\rho_{\pi',\psi,\iota}|_{\Gamma_{F_v}}$ est de de Rham, de poids de Hodge-Tate $\lambda'_v + \eta_v$ où $\eta = \rho + \psi$. Si de plus π' est non ramifiée en p, pour tout $v \in S_p$, $\rho_{\pi',\psi,\iota}|_{\Gamma_{F_v}}$ est cristalline.

3) Il existe un anneau de valuation $\mathcal{O}$ fini et plat sur $\mathbb{Z}_p$ tel que

$$\rho_{\pi',\psi,\iota}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathcal{O})$$

à conjugaison près dans $\widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$.

4) Si ψ et ψ' sont deux caractères de Gross de T, on a $\chi = \psi' - \psi$ est un caractère de G. On peut donc le considérer comme un cocaractère de $\widehat{G}$. On forme le composé $\chi^{gal}\colon \Gamma_F \to \mathbb{Z}_p^\times \to \widehat{G}$ du caractère cyclotomique p-adique $\chi_{cyc}\colon \Gamma_F \to \mathbb{Z}_p^\times$, $\mathrm{Frob}_v \mapsto q_v^{-1}$ et de $\chi\colon \mathbb{G}_m \to \widehat{G}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$. On a alors

$$\rho_{\pi,\psi',\iota} = \rho_{\pi,\psi,\iota} \otimes \chi^{gal}.$$

Remarque 2.4. *1) La relation 4) entraîne que la question de grande image pour $\rho_{\pi,\psi',\iota}$ ne dépend pas du choix de ψ.*

2a) Lorsque G est une forme compacte de GL_N (ou en composant $\rho_{\pi',\psi,\iota}$ avec une représentation algébrique $r\colon {}^LG \to \mathrm{GL}_N$ pour laquelle le transfert est établi), on peut donner une interprétation plus concrète de la propriété 1) en termes des polynômes caractéristiques des Frobenius (voir l'exemple ci-dessous).

2b) En toute généralité, on peut caractériser $\rho_{\pi',\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)$ en donnant la trace $r_\mu \circ \rho_{\pi',\psi,\iota}$ pour les représentations linéaires semisimples pour tout cocaractère dominant F-rationnel $\mu \in X^*(A)^+$ et pour $r_\mu\colon \widehat{G} \to \mathrm{GL}(V_\mu)$ la représentation irréductible de plus haut poids μ de $\widehat{G}$ associée. Plus précisément, on peut donner deux formules pour $\mathrm{Tr}(r_\mu \circ \rho_{\pi',\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v))$ pour tout $v \notin S_{F,p}$. La première est en termes des paramètres de Satake :

$$\mathrm{Tr}(r_\mu \circ \rho_{\pi',\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)) = \mathrm{Tr}(r_\mu(t_{\pi'(\psi),\iota})) = \sum_{w_0\mu\leq\nu\leq\mu} \dim V_\mu(\nu) \cdot \nu(t_{\pi'(\psi)_v,\iota})$$

où l'on note que

$$r_\mu(t_{\pi'(\psi)_v,\iota}) = r_\mu(t_{\pi',\iota}) q_v^{\langle\psi,\mu\rangle}.$$

La seconde en termes des paramètres de Hecke (à l'aide de la formule [**Gr98**, (3.12)]*) :*

$$\mathrm{Tr}(r_\mu \circ \rho_{\pi',\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)) = q_v^{-\langle\rho,\mu\rangle}\mu_{\pi'(\psi)_v}([\mathbb{K}_v\mu(\varpi_v)\mathbb{K}_v] + \sum_{\nu<\mu} d_\mu(\nu)\cdot[\mathbb{K}_v\nu(\varpi_v)\mathbb{K}_v])$$

pour des coefficients $d_\mu(\nu) \in \mathbb{Z}$ déterminés dans [**Gr98**, Proposition 4.4]*. Le paramètre de Hecke associé à π',$\widetilde{\mu}_{\pi'_v,\iota}\colon h \mapsto S_{A_v}^{G_v}(h)(t_{\pi',\iota})$ est donné par*

$$\widetilde{\mu}_{\pi'_v,\iota}\colon [\mathbb{K}_v\mu(\varpi_v)\mathbb{K}_v] \mapsto q_v^{-\langle\psi,\mu\rangle}\mu_{\pi'(\psi)_v}([\mathbb{K}_v\mu(\varpi_v)\mathbb{K}_v]).$$

Cette égalité est bien définie parce que ψ est invariant par W_G ; elle ne contient pas d'irrationalité et ne dépend pas de ψ.

3) Il n'y a pas de choix optimal de ψ en général, même si on impose que $\lambda(\mathcal{T}'') = 1$ car cette condition ne peut en général être imposée à ψ : pour $G = B^\times$ une algèbre de quaternions ramifiée à l'infini, on peut prendre comme tore T la restriction des scalaires de $K^\times$ pour un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}$. Si $T' = G' \cap T$, on a $T' = K^{\times,1}$. Si on étend les scalaires à K, on a $T \times K \cong \{\begin{pmatrix} t_1 & 0 \\ 0 & t_2\end{pmatrix}; t_1, t_2 \in \mathbb{G}_m\}$ et $T' \times K \cong \{\begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}; t \in \mathbb{G}_m\}$, mais il n'y a pas de modèle $\mathbb{Q}$-rationnel $T'' \in G$ du supplémentaire $T'' = \{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_2\end{pmatrix}; t_2 \in \mathbb{G}_m\}$ de T'. On ne peut donc trouver de quasi caractère $\mathbb{Q}$-rationnel ψ qui s'annule sur T''.

4) Pour les groupes unitaires ([**Ko92**], [**Clo91**], [**HL04**], [**Lab09**], [**Shin11**], [**ChH13**]*) et symplectiques (*[**Ta91**],[**Lau05**],[**We05**],[**KrSh16**]*), la correspondance de Langlands est essentiellement établie.*

5) Nous rencontrerons des cas où l'hypothèse d'existence d'un caractère de Gross n'est pas satisfaite. Par exemple lorsque G est une forme compacte à l'infini de $U(n)$. Dans ce cas, par [**BG13**, Sect.5.2]*, il existe une extension centrale $\widetilde{G}$ de G par $\mathbb{G}_m$ qui admet un caractère de Gross. Soit ${}^CG = {}^L\widetilde{G}$. En composant une représentation cuspidale algébrique π de G avec $\widetilde{G} \to G$, on obtient une représentation cuspidale algébrique et la conjecture est qu'il existe une représentation galoisienne*

$$\rho_{\pi,\psi,\iota}\colon \Gamma_\mathbb{Q} \to {}^CG(\overline{\mathbb{Q}}_p).$$

Exemple 2.1. Prenons $G = GU(h)$ le groupe des similitudes d'une forme hermitienne non dégénérée de rang n associée à une extension quadratique CM E/F du corps totalement réel F, définie positive à l'infini. Son C-groupe est $\mathcal{G}_n = (\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_1) \rtimes \{1, j\}$ avec j d'ordre 2 tel que $j(g,\mu)j^{-1} = ({}^tg^{-1}\mu, \mu)$. Il est muni d'une projection $\mathcal{G}_n \to \{1, j\}$. L'existence de la représentation galoisienne $\rho_{\pi,\psi,\iota}$ a été établie par les travaux de Kottwitz, Clozel, Labesse, Harris, Taylor, Chenevier-Harris, S.-W. Shin. Pour $v \notin S$ et décomposée de F dans K, G_v est déployé et l'énoncé 1) concerne un paramètre de Hecke $t_{\pi(\psi)_v,\iota} \in \mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ caractérisé par son polynôme caractéristique (appelé polynôme de Hecke) :

$$P_{\pi(\psi),v}(X) = \sum_{i=0}^n (-1)^i Nv^{\frac{i(i-1)}{2}}\mu_{\pi'\psi)_v}(T_{v,i})X^{n-i},$$

où $\mu_{\pi(\psi)_v}\colon \mathcal{H}(G_v, \mathbb{K}_v) \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ est l'homomorphisme de l'algèbre de Hecke sphérique associé au paramètre de Satake $\bar{t}_{\pi(\psi)_v,\iota}$ comme ci-dessus.

Si par contre v est inerte dans K, G_v n'est pas déployé mais ${}^LG_v$ possède une représentation fidèle de degré $2n$: $\varphi\colon \mathcal{G}_n \to \mathrm{GL}_{2n}$ donnée par

$$(g,\mu) \to \begin{pmatrix} g\mu & 0 \\ 0 & {}^tg^{-1}\mu\end{pmatrix}$$

et
$$\varphi(j) = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}.$$
La condition 1) en v s'exprime alors en disant que le polynôme caractéristique de $\varphi \circ \rho_{\pi,\psi,\iota}(\mathrm{Frob}_v)$ doit être égal à celui de $\varphi(t_{\pi(\psi)_v,\iota})$.

3. Systèmes de valeurs propres de Hecke ordinaires

Considérons maintenant un SVPH non ramifié hors de S (donc non ramifié en p)
$$\mu_\lambda \colon \mathbb{T}_\lambda(U,\mathcal{O}) \to \mathcal{O}'.$$
Soit π' une repésentation automorphe cuspidale C-algébrique de poids λ dont le SVPH est donné par μ_λ. Pour tout v divisant p, on note $\bar{t}_{\mu_\lambda,\psi,v} = \bar{t}_{\pi'(\psi)_v,\iota}$ le paramètre de Hecke de $\pi'(\psi)_v$.

Soit
$$\mathrm{ord}_{\widehat{T}} \colon \widehat{T}(\overline{\mathbb{Q}}_p) \to X_*(\widehat{T}) \otimes \mathbb{Q}[I_{F_v}],$$
où $\mathrm{ord}_{\widehat{T}}(t)$ est caractérisé par $\langle \chi, \mathrm{ord}_{\widehat{T}(t)} \rangle = \mathrm{ord}_p\, \chi(t)$ pour tout $\chi \in X^*(\widehat{T}) \otimes \mathbb{Z}[I_{F_v}]$.

Pour tout $\mu_v = (\mu_\sigma)_{\sigma \in I_{F_v}} \in X^*(T)[I_{F_v}]$, on note encore μ_v l'élément qu'il définit dans $X_*(\widehat{T}) \otimes \mathbb{Z}[I_{F_v}]$.

On a la Proposition-Définition

Définition 3.1. *On dit qu'un SVPH μ_λ non ramifié en p est ordinaire en p si pour chaque $v|p$, il existe un représentant (nécessairement unique)*
$$\mathrm{ord}_{\widehat{T}}(t_{\mu_\lambda,\psi,v}) = w_0(\lambda_v + \eta_v).$$
L'élément $\theta_{\mu_\lambda,v} = w_0(\lambda_v + \eta_v)(\pi_v)^{-1} t_{\mu_\lambda,\psi,v} \in \widehat{T}(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ ne dépend pas de ψ.

Le représentant $t_{\mu_\lambda,\psi,v}$ est nécessairement unique puisque la condition $\theta_{\mu_\lambda,v} \in \widehat{T}(\overline{\mathbb{Z}}_p)$ entraîne que pour tout $\alpha \in \Phi^+$, on a $\mathrm{ord}_p\, \alpha(t_{\lambda,\psi,v}) > 0$. On voit que $\theta_{\mu_\lambda,v}$ ne dépend pas de ψ puisque dans toute représentation algébrique $r_\mu \colon {}^L G \to \mathrm{GL}_N$, on a $r_\mu(t_{\mu_\lambda,\psi,v}) = q_v^{\langle\psi,\mu\rangle} r_\mu(t_{\mu_\lambda,v})$ et $r_\mu \circ \psi(\pi_v) = q_v^{\langle\psi,\mu\rangle}$.
Commentaire : Supposons pour simplifier le groupe dérivé de G déployé et simplement connexe sur F ; sans l'hypothèse d'ordinarité, il existe alors un représentant $t_{\mu_\lambda,\psi,v}$ (non nécessairement unique) tel que pour tout copoids dominant $\widehat{\varpi}$ de G, on ait
$$\mathrm{ord}_p\, \widehat{\varpi}(t_{\lambda,\psi,v}) \geq \langle \widehat{\varpi}, w_0(\lambda_v + \eta_v) \rangle.$$

Exemple 3.1. Soit f une forme cuspidale classique propre de poids $k \geq 2$ et niveau N, et soit p un nombre premier ne divisant pas N. Le polynôme de Hecke $X^2 - a_p X + p^{k-1} = (X-\alpha)(X-\beta)$ fournit le paramètre de Hecke
$$\bar{t}_{\pi_f,\psi,p} = \{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \}.$$
Si $a_p \in \overline{\mathbb{Z}}_p^\times$ (c'est la définition classique de l'ordinarité de f en p), on peut supposer $\mathrm{ord}_p\, \alpha = 0$ et $\mathrm{ord}_p\, \beta = k-1$. Par ailleurs,
$$(\lambda + \eta)(p) = \begin{pmatrix} p^{k-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
On peut donc prendre
$$\theta_{\pi_f,p} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta/p^{k-1} \end{pmatrix}.$$
On voit aussi que les deux définitions sont équivalentes.

Si f correspond à une courbe elliptique supersingulière en p, on a $\alpha = \sqrt{-p}$ et $\beta = -\sqrt{-p}$, $w_0(\lambda_p + \eta_p) = (0,1)$, et pour $\widehat{\varpi}_1 = e_1$ et $\widehat{\varpi}_2 = e_1 + e_2$ on a $\mathrm{ord}_p\, \widehat{\varpi}_1(t_{\pi_f,\psi,p}) = \mathrm{ord}_p\, \alpha = \frac{1}{2} \geq 0 = \langle e_1, (0,1)\rangle$ et

$$\mathrm{ord}_p\, \widehat{\varpi}_2(t_{\pi_f,\psi,p}) = \mathrm{ord}_p\, \alpha + \mathrm{ord}_p\, \beta = 1 \geq 1 = \langle \widehat{\varpi}_2, (0,1)\rangle.$$

A un tel SVPH μ_λ non ramifié en p ordinaire, on peut associer un unique SVPH $\mu_\lambda^{0,1}$ de niveau iwahorique ordinaire de la manière suivante.

Soit π une représentation cuspidale algébrique régulière ordinaire de poids λ non ramifiée hors de S dont le SVPH non ramifié en p associé est égal à μ_λ.

Lemme 3.2. *Pour chaque place $v|p$, le sous-espace W de $\iota(\pi_v(\psi))^{\mathrm{Iw}'(v)}$ sur lequel les opérateurs de Hecke $U_{\lambda,v,\nu}$ (définis pour tout cocaractère dominant ν dans Chap.I, Sect.5) agissent par $\nu(\theta_{\mu_\lambda,v})$ est non nul.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration du Lemme 2.7.5 de [**Ge10**], en remplaçant le triplet $\mathrm{GL}_n, B_n, T_n)$ par le triplet (G_v, B_v, T_v). On écrit π_v comme l'induite non ramifiée $\mathrm{Ind}_{B_v(F_v}^{G_v(F_v)}\underline{\chi}$, c'est à dire l'induite lisse de $e^{\rho_v}\underline{\chi}$ pour le caractère non ramifié $\underline{\chi}\colon T_v(F_v) \to \mathbb{C}^\times$ (qu'on voit à valeurs dans $\overline{\mathbb{Q}}_p^\times$). Par l'identification

$$\widehat{T}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p) = \mathrm{Hom}(F_v^\times, \widehat{T}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p)) = \mathrm{Hom}(T_v(F_v), \overline{\mathbb{Q}}_p^\times).$$

le paramètre de Langlands $t_{\pi(\psi),v} \in \widehat{T}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p)/W_{G_v}$ coïncide avec $e^{-\psi_v}\underline{\chi}(\pi_v)$ modulo l'action naturelle de W_{G_v}.

Soit π_{v,N_v} le T_v-module des N_v-coïnvariants de π_v. L'application de quotient fournit (voir par exemple [**BC09**, Proposition 6.4.3]) un isomorphisme

$$\pi_v^{\mathrm{Iw}(v)} \cong \pi_{v,N_v}^{T_v(\mathcal{O}_v)}.$$

En posant $\alpha = \nu(\pi_v) \in T(\overline{\mathbb{Q}}_p)$, on voit donc que dans l'isomorphisme ci-dessus, l'opérateur $U_{\lambda,v,\nu}$ agit sur $\pi_v^{\mathrm{Iw}'(v)}$ comme $w_0(\lambda)^{-1}(\alpha)\alpha$ agit sur $\pi_{v,N_v}^{T_v(\mathcal{O}_v)}$. Rappelons que $w_0\rho = -\rho$ et $w\psi = \psi$. Par [**Cas95**, Théorème 6.5.3], on a donc un isomorphisme de T_v-modules :

$$\pi(\psi)_{v,N_v}^{\mathrm{ss}} \cong \bigoplus_{w \in W_{G_v}} e^{-w_0\eta_v} \cdot (e^{-\psi_v}\underline{\chi})^w.$$

Il existe donc $w \in W_{G_v}$ et un sous-espace propre $0 \neq W \subset \pi_v^{\mathrm{Iw}'(v)}$ pour les $U_{\lambda,v,\nu}$ de valeurs propres $w_0(\lambda_v + \eta_v)^{-1}(\alpha) \cdot (e^{-\psi_v}\underline{\chi})^w(\alpha)$.

Quitte à permuter les w, on peut supposer $e^{-\psi_v}\underline{\chi}(\alpha) = t_{\pi(\psi)_v,\iota}$. Par hypothèse on a

$$\mathrm{ord}_p\, \nu(t_{\psi)(\text{-}v,\iota)}) = \langle w_0(\lambda_v + \eta_v), \nu\rangle$$

et pour tout $w \neq 1$,

$$\mathrm{ord}_p\, \nu(t^w_{\pi(\psi)_v,\iota}) \neq \langle w_0(\lambda_v + \eta_v), \nu\rangle.$$

Le sous espace $W \neq 0$ est l'image inverse de la droite donnée par le caractère χ.

On peut alors définir

$$\mu_\lambda^{0,1}\colon \mathbb{T}(U^{0,1}, \mathcal{O}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$$

par action de $\mathbb{T}(U^{0,1}, \mathcal{O})$ sur le sous-espace $W \neq 0$. On a $\mu_\lambda^{0,1}(T_{v,i}) = \mu_\lambda(T_{v,i})$ pour $v \notin S \cup S_p$ et $i = 1, \ldots, n$, et $\mu_\lambda^{0,1}(U_{\lambda,v,\nu}) = \nu(\theta_{\mu_{\lambda,v}})$ pour toute place $v \in S_p$ et tout cocaractère dominant ν. $\square$

EXEMPLE 3.2. Prenons $F = \mathbb{Q}$, $G = \mathrm{GL}_3$, $n = 2$, $\lambda = (a_3, a_2, 0)$: $\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3) \mapsto t_1^{a_3} t_2^{a_2}$, avec $a_3 \geq a_2 \geq 0$. Si π est cuspidale de poids λ, ordinaire en p, on a

$$(\lambda + \eta)(p) = \begin{pmatrix} p^{a_3+2} & & \\ 0 & p^{a_2+1} & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_{\pi,\psi,p} = \begin{pmatrix} \alpha & & \\ & \beta & \\ 0 & & \gamma \end{pmatrix} \}$$

avec $\mathrm{ord}_p\, \alpha = 0$, $\mathrm{ord}_p\, \beta = a_2 + 1$ et $\mathrm{ord}_p\, \gamma = a_3 + 2$ On a donc

$$\theta_{\pi,p} = \{ \begin{pmatrix} \alpha & & \\ 0 & \beta/p^{a_2+1} & \\ & & \gamma/p^{a_3+2} \end{pmatrix}.$$

et $\widehat{\varpi}_i$: $\mathrm{diag}(t_1, t_2, t_3) \mapsto t_1 \dots t_i$ pour $i = 1, 2$. On a donc

$$\widehat{\varpi}_1(\theta_{\pi,p}) = \alpha$$

et

$$\widehat{\varpi}_2(\theta_{\pi,p}) = \frac{\alpha\beta}{p^{a_2+1}}$$

et on considère le sous-espace de $\pi_p^{\mathrm{Iw}'(p)}$ où $U_{p,1} = \alpha$ et $U_{p,2} = \alpha\beta/p^{a_2+1}$.

Rappelons que pour toute place v de F au-dessus de p on a fixé un triplet (G_v, B_v, T_v) défini sur $\mathcal{O}_v$ ce qui détermine un triplet dual $(\widehat{G}_v, \widehat{B}_v, \widehat{T}_v)$.

DÉFINITION 3.3. *Un homomorphisme continu*

$$\rho\colon \Gamma_F \to {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est dit ordinaire en p si pour toute place v de F divisant p il existe $g_v \in {}^L G_v^\circ(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ tel que

$$\mathrm{Im}\, \rho_v \subset g_v \widehat{B}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p) g_v^{-1}$$

où $\rho_v = \rho|_{\Gamma_{F_v}}$. On peut alors former -l'homomorphisme

$$\delta_{\rho, g_v} = g_v^{-1} \rho_v g_v \pmod{N_v}\colon \Gamma_{F_v} \to \widehat{T}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p).$$

On peut alors énoncer

CONJECTURE 3.4. *Soit π une représentation cuspidale de G sur F non ramifiée hors de $S \cup S_p$ algébrique régulière de poids λ et niveau iwahorique* $\mathrm{Iw}'(p)$ *en p. On suppose que π est ordinaire en p. Soit $\mu_\lambda^{1,0}\colon \mathbb{T}(U^{1,0}, \mathcal{O}) \to \overline{\mathbb{Z}}_p$ le système de valeurs propres de Hecke iwahorique associé à $(\pi(\psi), \iota)$; il est non ramifié hors de $S \cup S_p$ ordinaire de niveau iwahorique. La représentation galoisienne*

$$\rho_{\mu_\lambda^{1,0}} = \rho_{\pi,\psi,\iota}\colon \mathrm{Gal}_F \to {}^L G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$$

est ordinaire en p et il existe $g_v \in \widehat{G}_v(\overline{\mathbb{Q}}_p)$

$$\delta_{\mu_\lambda^{1,0}, g_v}([\pi_v, F_v \mathbb{Q}_p]) = \theta_{\mu_\lambda, v}$$

et

$$\delta_{\mu_\lambda^{1,0}, g_v}|_{I_v} = w_0(\lambda_v + \eta_v)^{-1}.$$

Ce résultat est connu pour (les formes intérieures de) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, $\mathrm{GL}_2(F)$, F totalement réel [**H89**, Theorem 2], $\mathrm{GSp}_4(\mathbb{Q})$ [**Ur05**], [**GeT05**, Prop.4.3.4] , $\mathrm{GSp}_4(F)$, F totalement réel, pour G une forme compacte à l'infini d'un groupe unitaire sur un corps totalement réel [**Ge10**, Cor.2.7.8]. Notons aussi que

PROPOSITION 3.5. *Si les transferts $r\colon {}^LG \to GL_N$ sont établis et si pour tout copoids dominant ν de $\widehat{G}$ la représentation irréductible $r_\nu\colon {}^LG \to \mathrm{GL}_N$ de plus haut poids ν telle que $r_\nu(\widehat{B}) \subset \widehat{B}_N$ satisfait*

(**Eff**) *pour toute racine positive α de $(\mathrm{GL}_N, \widehat{B}_N)$, $\alpha \circ r_\nu$ est une somme de racines positives de $\widehat{G}$,*

la conjecture est vraie pour toute représentation π de G de poids λ suffisamment régulier.

Dans tous les exemples traités au Chapitre 4, la condition d'effectivité (**Eff**) est satisfaite. Il semble que pour G classique, pour tout ν, le foncteur de Schur S_ν de [**LaTo79**]de poids ν satisfasse cette condition.

DÉMONSTRATION. Pour établir la conjecture, il suffit de démontrer pour un ensemble fini de cocaractères dominants ν les formules

$$\nu \circ \delta_{\mu_\lambda^{1,0}, g_v}([\pi_v, F_v])) = \nu(\theta_{\mu_\lambda, v})$$

et

$$\nu \circ \delta_{\mu_\lambda^{1,0}, g_v}|_{I_v} = \nu \circ w_0(\lambda_v + \eta_v)^{-1}.$$

Le cocaractère dominant ν peut être vu comme élément de $X^*(\widetilde{T})$. On considère la représentation $r_\nu\colon {}^LG \to \mathrm{GL}_N$ de plus haut poids $\nu \in X^*(\widehat{T})^+$.

On suppose le transfert établi pour r_ν, on forme donc la représentation automorphe $\Pi_\nu = (r_\nu)_*\pi$ sur $U(N)$. On a supposé que pour toute racine positive de GL_N, $\alpha \circ r_\nu$ est une (somme de) racines positives de $\widehat{G}$. Ceci entraîne que $r_\nu(\lambda + \rho_G)$ est dominant. Comme λ est suffisamment régulier et que ν parcourt un ensemble fini, on peut supposer que Π est algébrique de poids $\lambda_\nu \in X^*(T_N)$ régulier tel que $\lambda_\nu + \rho_N$ soit dominant et tel que :

$$w_N(\lambda_\nu + \rho_N) = r_\nu w_G(\lambda + \eta_G)$$

où w_G, resp. w_N est l'élément de plus grande longueur du groupe de Weyl de $\widehat{G}$ resp. de GL_N. Soit V l'espace de r_ν ; soit $e \in V$ un vecteur de plus haut poids. On a

$$V = \bigoplus_{i=1}^N V_{\mu_i}$$

avec $V_{\mu_1} = V_\nu = \langle e \rangle$ et $V_{\mu_N} = \langle w_N e \rangle$. On note $\widehat{T}_N$ le tore de GL_N donné par cette décomposition et $\widehat{B}_N$ le Borel qui stabilise le drapeau $(\bigoplus_{i=1}^k V_{\mu_k})_k$. Notons que $r_\nu(\widehat{B}) \subset \widehat{B}_N$. Soit $\widehat{\varpi}_1$ le copoids fondamental de GL_N associé à V_{μ_1}. Il résulte du Lemme 3.2 que pour tout $v \in S_p$, l'opérateur de Hecke $U_{\lambda_\nu, v, \widehat{\varpi}_1}$ de $U(N)$ agit par l'unité $\widehat{\varpi}_1(\theta_{\lambda_\nu, v})$ sur un sous-espace non nul de $\Pi_v^{\mathrm{Iw}_N(v)}$. Mais on a

$$\widehat{\varpi}_1(\theta_{\lambda_\nu, v}) = \widehat{\varpi}_1(w_N(\lambda_\nu + \eta_N)^{-1}(\pi_v) t_{\Pi(\psi_N)_v, \iota}) =$$

$$\widehat{\varpi}_1(w_N(\lambda_\nu + \eta_N)^{-1}(\pi_v) r_\nu(t_{\Pi(\psi_N)_v, \iota}) = \widehat{\varpi}_1(w_N(\lambda_\nu + \rho_N)^{-1}(\pi_v) r_\nu(t_{\pi_v, \iota}) =$$

$$\widehat{\varpi}_1 \circ r_\nu(w_G(\lambda + \rho_G)(\pi_v)^{-1} \cdot t_{\pi_v, \iota}) = \nu(\theta_{\lambda, v})$$

Par ailleurs, par [**Ge10**, Cor.2.7.8] on a en posant $\delta = r \circ \delta_{\mu_\lambda^{0,1}, g_v}$:

$$\widehat{\varpi}_1 \circ \delta([\pi_v, F_v]) = \widehat{\varpi}_1(\theta_{\lambda_\nu, v}),$$

et, pour tout $x \in \mathcal{O}_v^\times$,

$$\widehat{\varpi}_1 \circ \delta([x, F_v]) = \widehat{\varpi}_1 \circ w_N(\lambda + \eta_G)(x)^{-1}.$$

Comme $\widehat{\varpi}_1 \circ r = \nu$ et $\widehat{\varpi}_1(\theta_{\lambda_\nu, v}) = \nu(\theta_{\lambda, v})$, on obtient le résultat. $\square$

4. Familles de représentations galoisiennes et Ordinarité

Soit S un ensemble fini de places finies de F contenant les places où G n'est pas quasi-déployé non ramifié. Soit S_p l'ensemble des places de F au dessus de p. On suppose que G est déployé en tout $v \in S_p$. On a donc $S \cap S_p = \emptyset$. Rappelons qu'on a fixé une décomposition $\mathcal{T} = \mathcal{T}' \times \mathcal{T}''$ (Section 4). Ceci permet de définir pour tout $v \in S^p$ les sous-groupes d'Iwahori $\mathrm{Iw}'(v^{b,c})$ et $\mathrm{Iw}(v^{b,c})$ comme dans la Section 4. Soit U un sous-groupe compact ouvert de G_f déployé et non ramifié hors de S. Pour tout $n \geq 1$, on pose $U(p^n) = U^{S_p} \times \mathrm{Iw}'(p^n)$. On définit dans la Section 6 le module de Hida. $M(G) = eS^{\mathrm{ord}}(U'(p^\infty), K/\mathcal{O})^*$ C'est un module libre de type fini sur $\Lambda'_G = \mathcal{O}[[\mathcal{T}'_1]]$ Il est indépendant du poids, mais sa structure de Λ'_G-module utilise l'action des diamants de poids 0. On a

$$\mathcal{T}'_1 \cong \prod_{v \in S_p} (1 + \pi_v \mathcal{O}_v)^n.$$

On fixe des $\mathbb{Z}_p$-bases $(e_{v,i})_{i=1,\dots,d_v}$ de $(1 + \pi_v \mathcal{O}_v)^\times$. On note $(T^G_{v,i,j})_{v \in S_p, 1 \leq i \leq d_v, 1 \leq j \leq n}$ les variables de Λ'_G adaptées à cette décomposition :

$$\Lambda'_G = \mathcal{O}[[T^G_{v,i,j}\ v \in S_p, 1 \leq i \leq d_v, 1 \leq j \leq n]].$$

On définit l'algèbre de Hecke Hida $\mathbb{T}_G$ comme la sous-Λ'_G-algèbre de $\mathrm{End} M(G)$, engendrée par les opérateurs de Hecke hors de S et par ceux en p. La décomposition $\mathcal{T}'_0 = \Delta \times \mathcal{T}'_1$ permet de décomposer

$$\mathbb{T}_G = \prod_{\psi \in \widehat{\Delta}} \mathbb{T}_G(\psi).$$

Soit $\mathbb{I}$ une extension finie intègre de Λ'_G munie d'un homomorphisme surjectif de Λ'_G-algèbre $\mu \colon \mathbb{T}'_G(\psi) \to \mathbb{I}$, autrement dit, une famille de Hida. Avec les notations de 6, pour chaque poids λ tel que $w_0 \lambda_\Delta^{-1} = \psi$, on considère l'idéal premier arithmétique $P_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}\, \phi_{\lambda_1}$ de Λ'_G associé à la spécialisation ϕ_{λ_1}. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_{λ_1} et soit $\mathcal{O}'$ un anneau de valuation fini sur $\mathbb{Z}_p$ contenant $\mathbb{I}/\mathfrak{P}$. D'après le Théorème 6.2, la réduction modulo P_{λ_1}, resp. $\mathfrak{P}$ fournit un homomorphisme de $\mathcal{O}'$-algèbres

$$\mu_\lambda^{0,1} \colon e\mathbb{T}_\lambda(U^{0,1}, \mathcal{O}') \to \mathcal{O}'.$$

A chaque tel homomorphisme, la conjecture 2.3 associe une représentation

$$\rho_{\mu_\lambda^{0,1}} \colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathcal{O}').$$

Rappelons que pour cela, on a fixé une fois pour toutes un caractère de Gross ψ. La Proposition 3.4 fournit alors l'ordinarité de la représentation galoisienne. Remarque : On sait que pour λ assez régulier, $\mu_{\lambda^{0,1}}$ provient d'une représentation cuspidale non ramifée au-dessus de p (pour GL_N, voir [**CHT08**, Lemma 3.1.5]).

On utilise alors la théorie des ${}^L G$-pseudo-représentations de V. Lafforgue. Une ${}^L G$-pseudo-représentation de Γ_F définie sur une $\mathcal{O}$-algèbre A est un un système $\Xi = (\Xi_n)_n$ d'applications

$$\Xi_n \colon \mathcal{O}(({}^L G)^n)^{\widehat{G}} \to \mathcal{C}(\Gamma_F^n, A)$$

satisfaisant les conditions de la Définition-Proposition 11.3 de [**Laff16**]. On peut recoller les ${}^LG$-pseudo-représentations $\Xi_{\mu_\lambda^{0,1}}$ associées aux homomorphismes $\rho_{\mu_\lambda^{0,1}}$ en une ${}^LG$-pseudo-représentation Ξ_μ à valeurs dans $\mathbb{I} \subset \prod_{\lambda, w_0\lambda_\Delta^{-1}=\psi} \mathcal{O}'_\lambda$. Il résulte alors de la Proposition [**Laff16**, Prop.11.7] que cette ${}^LG$-pseudo-représentation provient d'un homomorphisme continu

$$\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^LG(\overline{\mathrm{Frac}(\mathbb{I})}).$$

Rappelons quelques faits prouvés dans [**BHT17**, Chapter 4]. Dans cet article, le groupe G est supposé déployé, mais c'est inutile pour le Chapitre 4. Soit $k = \mathbb{I}/\mathfrak{m}_\mathbb{I}$. Par la théorie des immeubles de Bruhat-Tits (voir [**BHT17**, Proposition 4.8]), on peut définir la représentation résiduelle

$$\overline{\rho}_{\mu_\lambda^{0,1}} \colon \Gamma_F \to {}^LG(k).$$

On dit qu'elle est absolument irréductible au sens que son image n'est contenue dans aucun parabolique propre $\widehat{P}$ de $\widehat{G}$ et si son centralisateur dans $\widehat{G}^{ad}$ est schématiquement trivial. Sous cette hypothèse, il résulte de [**BHT17**, Theorem 4.10] que pour tout poids λ' et tout SVPH $\mu' \colon \mathbb{T}_{\lambda'}(U^{0,1}, \mathcal{O}) \to \mathcal{O}'$ congru à $\mu_{\lambda'}$ modulo p, la représentation $\rho_{\mu'} \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathrm{Frac}(\mathcal{O}'))$ est définie sur $\mathcal{O}'$: il existe $\rho_{\mu',\mathcal{O}'} \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathcal{O}')$ tel que $\rho_{\mu',\mathcal{O}'} \otimes_{\mathcal{O}'} \mathrm{Frac}(\mathcal{O}') = \rho_{\mu'}$.

PROPOSITION 4.1. *Supposons $\overline{\rho}_{\mu_\lambda^{0,1}}$ absolument irréductible. Soit $\mathfrak{m} = \mathrm{Ker}(\overline{\mu} \colon \mathbb{T}_G \to k)$.*

1) Il existe une représentation

$$\rho_\mathfrak{m} \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}})$$

continue relevant $\overline{\rho}_\mu$ et dont l'image

$$\mu'_*\rho_\mathfrak{m} \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathcal{O}')$$

par $\mu' \colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}} \to \mathcal{O}'$, pour tout SVPH μ' arithmétique de poids λ', est conjuguée à $\rho_{\mu',\mathcal{O}'}$ dans $\widehat{G}(\mathcal{O}')$.

2) En particulier, si $\overline{\rho}_{\mu_\lambda^{0,1}}$ absolument irréductible, la représentation ρ_μ est définie sur $\mathbb{I}$:

$$\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$$

DÉMONSTRATION. Les deux énoncés résultent de [**BHT17**, Theorem 4.10] (généralisé au L-groupe d'un groupe non nécessairement déployé, ce qui ne requiert pas de modification de la démonstration, en reprenant la définition des pseudo-représentations de Vincent Lafforgue [**Laff16**, Définition-Proposition 11.3] qui est valable pour tout L-groupe). □

Notons que l'existence d'un $\mathbb{I}$-réseau stable était connue pour $G = \mathrm{GL}_N$ (Carayol) ou $G = \mathrm{GSp}_4$ (sous une hypothèse de grande image [**GeT05**, Lemme 4.2.1]).

Notons que $\overline{\rho}_\mu$ est ordinaire, c'està dire que pour tout $v \in S_p$, il existe $\overline{g}_v \in \widehat{G}(k)$ tel que

$$\overline{g}_v \overline{\rho}_\mu(\Gamma_{F_v})\overline{g}_v^{-1} \subset \widehat{B}(k)$$

Soit

$$\overline{\delta}_{\mu,\overline{g}_v} = \overline{g}_v \cdot \overline{\rho}_\mu|_{\Gamma_{F_v}} \cdot \overline{g}_v^{-1} \pmod{\widehat{N}(k)}.$$

on suppose désormais l'hypothèse de p-distinction

HYPOTHÈSE 4.2. **(p-Dist)** *Pour chaque $v \in S_p$, pour toute racine α de $\widehat{G}$, on a*

$$\alpha \circ \overline{\delta}_{\mu,\overline{g}_v} \neq 1.$$

LEMME 4.3. *Sous l'hypothèse* **(p-Dist)**, *les représentations* $\rho_{\mathfrak{m}}$ *et* ρ_μ *sont ordinaires : pour* $A = \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}$ *ou* $\mathbb{I}$, *pour tout* $v \in S_p$, *il existe* $g_v \in \widehat{G}(A)$ *relevant* $\overline{g}_v$ *tel que*

$$g_v \rho_\mu(\Gamma_{F_v}) g_v^{-1} \subset \widehat{B}(A)$$

Si l'on pose

$$\delta^A_{\mu,g_v} = g_v \cdot \overline{\rho}_\mu|_{\Gamma_{F_v}} \cdot g_v^{-1} \pmod{\widehat{N}(A)}$$

on a

$$\delta^A_{\mu,g_v} \pmod{\mathfrak{m}_A} = \overline{\delta}_{\mu,\overline{g}_v}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration est la même que celle de la [**Ti96**, Proposition 6.2]. □

Pour chaque $v \in S_p$, on décompose $\mathcal{O}^\times_{F_v} = \Delta_v \times (1 + p\mathcal{O}_{F_v})$ et on note $x = (x_{\Delta_v}, x_{v,1})$, Si $t_v \in \mathcal{T}'(\mathcal{O}_{F_v})$, on écrit de même sa décomposition sous la forme $t_v = (t_{\Delta_v}, t_{v,1})$.

Soit $\mu\colon \mathbb{T}_G(\psi_\Delta) \to \mathbb{I}$ une famille de Hida de caractère $\psi_\Delta = w_G\lambda_\Delta^{-1}$ au sens du Théorème 6.2. Le caractère tautologique

$$\mathcal{T}'(\mathcal{O}_{F_v}) \to (\Lambda'_G)^\times, \quad t_v = (t_{\Delta_v}, t_{v,1}) \mapsto \psi_\Delta(t_{\Delta_v}) \cdot [t_{v,1}]$$

fournit par l'identification

$$\mathrm{Hom}(T(\mathcal{O}_{F_v}), (\Lambda'_G)^\times) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^\times_{F_v}, \widehat{T}(\Lambda'_G))$$

un cocaractère

$$\tau_v\colon \mathcal{O}^\times_{F_v} \to \widehat{T}(\Lambda'_G).$$

On forme alors

$$\Theta_v\colon \mathcal{O}^\times_{F_v} \to \widehat{T}(\Lambda'_G), \quad x \mapsto \cdot(w_G\eta_v)^{-1}(x_{v,1}) \cdot \tau_v(x)$$

On peut considérer ce caractère comme un élément de

$$\mathrm{Hom}(T(\mathcal{O}_{F_v}), \mathbb{I}^\times) = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}^\times_{F_v}, \widehat{T}(\mathbb{I}))$$

PROPOSITION 4.4. *Soit* $\rho_m u\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ *la représentation galoisienne associée à* μ. *On suppose qu'elle satisfait l'hypothèse* **(p-Dist)** *et la Conjecture 3.4. On a pour tout* $x \in \mathcal{O}^\times_{F_v}$,

$$\delta^{\mathbb{I}}_{\mu,g_v}([x, F_v]) = \Theta_v(x).$$

DÉMONSTRATION. Cela résulte immédiatement de la Conjecture 3.4 par spécialisation en les poids réguliers λ tels que $\psi_\Delta = w_G\lambda_\Delta^{-1}$. On obtient pour tout $x \in \mathcal{O}^\times_{F_v}$: $\Theta_v(x) \pmod{P_\lambda} = (w_G\lambda \cdot w_G\eta)^{-1}(x)$. □

5. Correspondance de Langlands et Homomorphismes de transfert

La conjecture générale de correspondance de Langlands globale entraîne la conjecture suivante

CONJECTURE 5.1. *Supposons que* G *admette un caractère de Gross. L'application* $(\pi, \psi) \mapsto \rho_{\pi,\psi,\iota}$ *de l'ensemble des couples* (π, ψ) *où* π *parcourt l'ensemble des classes d'isomorphismes des représentations cuspidales algébriques régulières de* $G(\mathbf{A}_F)$ *non ramifiées hors de* $S \cup S_p$ *et* ψ *parcourt l'ensemble des caractèes de Gross, vers l'ensemble des* ${}^LG^\circ$*-classes de conjugaison d'homomorphismes continus* $\rho\colon \Gamma_F \to {}^LG(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ *non ramifiés hors de* $S \cup S_p$ *et de de Rham en* p *à poids de Hodge-Tate réguliers est surjective sur les* ρ *"irréductibles" (c'est à dire ceux dont l'image n'est pas contenue dans un sous-groupe parabolique de* ${}^LG^\circ$*). Pour* ψ *fixé, les fibres s'appellent les L-paquets. Ce sont des ensembles finis.*

Soient G, H deux groupes réductifs connexes définis sur F. Supposons qu'on a un morphisme de L-groupes $r\colon {}^LH \to {}^LG$. On suppose aussi que ces groupes admettent des caractères de Gross ψ_H et ψ_G compatibles, c'est à dire tels qu'en identifiant $X^*(T_H) = X_*(\widehat{T}_H)$ et $X^*(T_G) = X_*(\widehat{T}_G)$ on ait

$$r_*(\psi_H) = \psi_G.$$

Cette hypothèse est souvent, mais pas toujours satisfaite. On traitera un tel cas dans le chapitre 4 (c'est le cas de $\bigwedge^2\colon \mathrm{GL}_4 \to \mathrm{GL}_6$) .

Avec cette hypothèse, la conjecture de fonctorialité de Langlands peut s'énoncer comme suit

Conjecture 5.2. *1) Il existe pour chaque place v de F, finie ou infinie, une application $r_{v,*}$ de transfert local envoyant l'ensemble des paquets locaux $\{\pi_v\}$ de représentations lisses irréductibles de $H(F_v)$ vers les paquets $\{\Pi_v\}$ de représentations lisses irréductibles de $G(F_v)$, compatible avec les correspondances locales de Langlands $\{\pi_v\} \mapsto \rho_{\{\pi_v\},\psi_H}\colon {}'W_{F_v} \to {}^LH(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ et $\{\Pi_v\} \mapsto \rho_{\{\Pi_v\}}\colon {}'W_{F_v} \to {}^LG(\overline{\mathbb{Q}}_p)$:*

$$\rho_{r_{v,*}\{\pi_v\},\psi_G} = r \circ \rho_{\{\pi_v\},\psi_H}.$$

2) Il existe une application r_* de transfert global, compatible avec les applications de transfert locales, de l'ensemble des paquets globaux de représentations cuspidales algébriques régulières pour $H(\mathbf{A}_F)$ non ramifiées hors de S, vers l'ensemble des paquets globaux de représentations automorphes algébriques (non nécessairement régulières) sur $G(\mathbf{A}_F)$ (on considère $\lambda \in X^*(T_H) = X_*(\widehat{T}_H)$ comme un cocaractère de $\widehat{H}$, ce qui permet de former $r \circ \lambda \in X_*(\widehat{T}_G) = X^*(T_G)$). De plus, r_* est compatible avec la correspondance globale de Langlands :

$$\rho_{r_*\pi,\psi_G,\iota} = r \circ \rho_{\pi,\psi_H,\iota}$$

Si la condition $r_*(\psi_H) = \psi_G$ n'est pas satisfaite, on a seulement

$$\rho_{r_*\pi,\psi_G,\iota} = r \circ \rho_{\pi,\psi_H,\iota} \otimes \chi^{gal}$$

où $\chi \in X_*(\widehat{T}) = X^*(T)$ est donné par

$$\chi = \eta_G - r \circ \eta_H$$

et χ^{gal} est le composé de χ et du caractère cyclotomique $\Gamma_F \to \mathbb{Z}_p^\times$.

Noter qu'on ne prétend pas que l'image d'un paquet cuspidal soit cuspidale, Cependant, cela se produit souvent. Sous l'hypothèse (Eff) dans la remarque suivante, si r est de noyau central (on dira alors qu'elle est essentiellement injective), il résulte de la compatibilité du transfert global avec le transfert aux places archimédiennes que r_* envoie les représentations algébriques suffisamment régulières de poids λ sur des représentations algébriques de poids λ_r dominant régulier. En effet, par compatibilité avec le transfert aux places archimédiennes, si le caractère infinitésimal de π_∞ satisfait $\chi_{\pi_\infty} = \chi_{\lambda^\vee}$, on a $\chi_{r_*\pi_\infty} = \chi_{(\lambda_r)^\vee}$ où λ_r est défini comme suit. Soit $\lambda_0 = r(\lambda + \rho_H) - \rho_G$. Par hypothèse, le poids λ_0 est hors des murs des chambres de Weyl de G. Il existe donc un unique $w \in W_G$ tel que $\lambda_r = w\bullet\lambda_0 = w(\lambda+\rho_G)-\rho_G$ soit dominant régulier comme poids de G.

Remark 5.3. *1) Notons que sous les hypothèses*

(Eff) *Pour toute racine $\widehat{\alpha}$ positive de $\widehat{T}$ dans $\widehat{G}$, $\widehat{\alpha}\circ r$ est une somme de racines positives de $\widehat{H}$,*

et $r \circ \rho_H = \rho_G$,

pour tout poids dominant λ, le poids $\lambda_r = r \circ \lambda$ est dominant.

2) On verra au Chapitre 4 que l'existence de r_* a été établie dans certains cas.

6. Transfert et ordinarité

Soit F un corps totalement réel . Soient H et G des groupes réductifs connexes définis sur F et $r\colon {}^LH \to {}^LG$ un homomorphisme de transfert. Soit p un nombre premier non ramifié dans F. Soit S_p l'ensemble des places de F au-dessus de p. On suppose que Get H sont déployés aux places de S_p. Soit S un ensemble fini de places finies disjoint de S_p en dehors duquel G et H sont non ramifiés quasi-déployés. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique "assez grand". Soient $\mathcal{H}_G^- = \bigotimes_{v\notin S\cup S_p}\mathcal{H}(G_v,\mathbb{K}_{G_v})\otimes\bigotimes_{v\in S_p}\mathcal{H}(G_v,w_G(v))^-$, resp. $\mathcal{H}_H^- = \bigotimes_{v\notin S\cup S_p}\mathcal{H}(H_v,\mathbb{K}_{H_v})\otimes\bigotimes_{v\in S_p}\mathcal{H}(H_v,\mathrm{Iw}_H(v))^-$, les $\mathcal{O}$-algèbre de Hecke abstraites hors de S sphériques hors de $S\cup S_p$ et Iwahoriques en $v\in S_p$. Considérons le morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres

$$r^*\colon \mathcal{H}_G^- \to \mathcal{H}_H^-$$

donné par $r^* = \bigotimes_{v\notin S} r_v^*$ où

-pour chaque $v\notin S\cup S_p$, r_v^* est donné par la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}(G_v,\mathbb{K}_{G_v}) & \to & R({}^LG_v)\\ r_v^*\downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{H}(H_v,\mathbb{K}_{H_v}) & \to & R({}^LH_v)\end{array}$$

où les applications horizontales sont les transformées de Satake définies dans la Section 2 et l'application verticale de droite est le pull-back par $r_v\colon {}^LH_v \to {}^LG_v$, et

-pour $v\in S_p$, r_v^* est donné par la commutation du diagramme

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{H}(G_v,\mathrm{Iw}_G(v))^- & \to & \mathcal{O}[X_*(T_{G_v})^+]\\ r_v^*\downarrow & & \downarrow\\ \mathcal{H}(H_v,\mathrm{Iw}_H(v))^- & \to & \mathcal{O}[X^*(T_{H_v})^+]\end{array}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes entre les algèbres de Hecke iwahoriques contractantes et les algèbres des semigroupes $X_*(\mathcal{T}_{G_v})^+$ et $X_*(\mathcal{T}_{H_v})^+$ qui sont définis dans la Proposition 4.1 et où l'application verticale de droite est le pull-back par r_v^*.

On suppose donnés des triplets (H,T_H,B_H) et (G,T_G,B_G) qui définissent les racines positives pour ces groupes. On a donc des triplets duaux $(\widehat{H},\widehat{T}_H,\widehat{B}_H)$ et $(\widehat{G},\widehat{T}_G,\widehat{B}_G)$. Soit w_G resp. w_H l'élément de plus grande longueur de W_G resp. W_H. On a $w_H=-1$ sur $\widehat{T}_H$, resp. $w_G=-1$ sur $\widehat{T}_G$ de sorte que sur $\widehat{T}_H$, on a :

$$w_G\circ r = r\circ w_H.$$

Définition 6.1. *Un homomorphisme de transfert $r\colon {}^LH\to {}^LG$ est dit effectif s'il est est à noyau central, s'il envoie le Borel $B_{\widehat{H}}$ associé à (H,T_H,B_H) dans le Borel $B_{\widehat{G}}$ associé à (G,T_G,B_G) et*

(Eff) *pour toute racine $\widehat{\alpha}$ positive de $\widehat{G}$, $\widehat{\alpha}\circ r$ est soit nulle, soit est une somme de racines positives de $\widehat{H}$.*

Notons que pour toute racine positive $\widehat{\beta}$ de $\widehat{H}$, il existe $k\geq 1$ tel que $k\widehat{\beta}$ soit de la forme $\widehat{\alpha}\circ r$ pour une racine positive $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{G}$. Mais la condition (Eff) n'est pas évidente en général.

Il semble que toutes les représentations linéaires associées aux foncteurs de Schur

$$S\colon GL(V)\to GL(S(V))$$

(voir Chap.15 de [**FH91**] et [**To79**]) satisfont ces conditions. Nous la vérifierons dans tous les exemples du Chapitre 4.

Soit r un transfert effectif de H à G ; on suppose que la fonctorialité r_* (locale et globale) est établie, ainsi que la théorie de Hida pour H et G en p. Soit U_H un sous groupe ouvert compact de H_f hyperspécial en toute place $v\notin S$. Pour $v\in S_p$, on fixe des décompositions

$T_{H,v} = T'_{H,v} \times T''_{H,v}$ et $T_{G,v} = T'_{G,v} \times T''_{G,v}$ en tores maximaux des groupes dérivés H' et G' et partie non semisimples. On peut supposer que ces décompositions sont compatibles pour r_* :

$$r_*\colon X^*(T''_{H,v}) \to X^*(T''_{G,v})$$

Ceci permet de définir les groupes d'Iwahori $\mathrm{Iw}'_H(v^{b,c})$, resp. $\mathrm{Iw}'_G(v^{b,c})$ comme dans la Section 4. soit $U_H(p^n) = U_H^{S_p} \times \mathrm{Iw}'_H(p^n)$. On choisit U_G compact ouvert dans G_f hyperspécial hors de S et tel que pour tout $v \in S$, si $\pi_v^{U_{H,v}} \neq 0$, $r_*\pi_v^{U_{G,v}} \neq 0$. On forme de même

$$U_G(p^n) = U_G^{S_p} \times \mathrm{Iw}'_G(p^n).$$

Considérons les modules de Hida $M(G) = eS^{\mathrm{ord}}(U_G(p^\infty), K/\mathcal{O})^*$ resp. $M(H) = eS^{\mathrm{ord}}(U_H(p^\infty), K/\mathcal{O})^*$ (avec les notations de 6.1). Ce sont des Λ'_G, resp. Λ'_H-modules compacts (on utilise la notation de la Section 6). On définit l'algèbre de Hecke Hida $\mathbb{T}_G$, resp. $\mathbb{T}_H$, comme la Λ'_G-algèbre, resp. la Λ'_H-algèbre, engendrée par l'image de $\mathcal{H}_G^-$ resp. de $\mathcal{H}_H^-$, dans $\mathrm{End}M(G)$ resp. $\mathrm{End}M(H)$.

Proposition 6.2. *Supposons que r est effectif. Pour tout poids λ de H dominant suffisamment régulier, le morphisme composé de $r^*\colon \mathcal{H}_G^- \to \mathcal{H}_H^-$ et de $\mathcal{H}_H^- \to \mathbb{T}_\lambda(U_H(p), \mathcal{O})$ se factorise en un morphisme de $\mathcal{O}$-algèbres :*

$$r_\lambda^*\colon e\mathbb{T}_{\lambda_r}(U_G(p), \mathcal{O}) \to e\mathbb{T}_\lambda(U_H(p), \mathcal{O})$$

Plus précisément, pour tout cocaractère $\nu_G \in X_*(T_G)$ dominant, on a

$$r^*(U^G_{\lambda_r, v, \nu_G}) = U^H_{\lambda, v, \nu_G \circ r}$$

qui est inversible dans $e\mathbb{T}_\lambda(U_H(p), \mathcal{O})$.

Rappelons que puisque r est effectif, on a $\lambda_r + \rho_G = r(\lambda + \rho_H)$. L'existence du transfert r_* montre que pour tout π cuspidale de poids λ sur H et pour tout $v \notin S \cup S_p$, les opérateurs de Hecke $T^G_{v,\nu}$ agissent sur $\pi_a st\pi$ par leur image dans $\mathrm{End}_K S_{\lambda_r}(U_G(p), K)$. Pour $v \in S_p$, on rappelle que par le Lemme 3.2, pour toute représentation π cuspidale d'un groupe G, non ramifiée en p, algébrique de poids λ et p-ordinaire, le SVPH $\mu_\pi^{0,1}$ de π satisfait

$$\mu_\pi^{0,1}(U^G_{\lambda,v,\nu}) = \nu(\theta^\pi_{\lambda,v}).$$

Si l'on sait donc que $\nu \circ r(\theta^\pi_{\lambda,v}) = \nu(\theta^\Pi_{\lambda_r,v})$. Comme l'algèbre $\mathbb{T}_H(U^{0,1}(p), \mathcal{O})$ est réduite donc s'injecte dans $\prod_\pi K_\pi$, le produit étant sur les représentations cuspidales de poids λ telles que $\pi_v^{Iw'(v)} \neq 0$, on en déduira

$$r^*(U^G_{\lambda_r,v,\nu}) = U^H_{\lambda,v,\nu\circ r}.$$

La proposition résultera donc du

Lemme 6.3. *Pour toute représentation π cuspidale algébrique de poids λ dominant suffisamment régulier. Alors si π est p-ordinaire, $r_*\pi$ est p-ordinaire de poids $\lambda_r = r(\lambda + \rho_H) - \rho_G$. Plus précisément, posons*

$$\theta^\Pi_{\lambda_r} = w_G(\lambda_{r,v} + \eta_{G,v})^{-1}(\pi_v) \cdot t_{\Pi(\psi_G)_v, \iota}$$

et

$$\theta^\pi_{\lambda,v} = w_H(\lambda_{H,v} + \eta_{H,v})^{-1}(\pi_v) \cdot t_{\pi(\psi_H)_v, \iota}$$

on a alors pour tout copoids dominant ν de H

$$\theta^\Pi_{\lambda_r,v} = r(\theta^\pi_{\lambda,v}) \in \widehat{T}_G(\overline{Z}_p)$$

Démonstration. Notons que $w_G(\lambda_{r,v}+\rho_{G,v}) = r(w_H(\lambda_v+\rho_{H,v})$ car $w_G\circ r = r\circ w_H$ et $\lambda_{r,v}+\rho_{G,v} = r(\lambda_v+\rho_{H,v})$.

On a $w_H(\lambda_{H,v}+\eta_{H,v})^{-1}(\pi_v)\cdot t_{\pi(\psi_H)_v,\iota} = w_H(\lambda_{H,v}+\rho_{H,v})^{-1}(\pi_v)\cdot t_{\pi_v,\iota}$ et $r(t_{\pi_v,\iota}) = t_{\Pi_v,\iota}$. La formule en résulte. $\square$

On va en déduire

Corollaire 3. Le morphisme $r^*\colon \mathcal{H}_G^- \to \mathcal{H}_H^- \to \mathbb{T}_H$ se factorise en un morphisme de$\mathcal{O}$-algèbres :

$$r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$$

La restriction de r^* à Λ'_G induit un morphisme $r^*\colon \Lambda'_G \to \Lambda'_H$ et un morphisme entre les espaces de poids

$$r_*\colon \operatorname{Spec}\Lambda'_H \to \operatorname{Spec}\Lambda'_G$$

qui applique l'idéal arithmétique de poids λ sur H sur l'idéal arithmétique de poids λ_r sur G.

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{T}_G$, resp. $\mathbb{T}_H$, opère fidèlement sur $M(G)$ resp. $M(H)$. Par le Théorème de spécialisation 6.2, il suffit pour démontrer le Corollaire de vérifier pour toute spécialisation en poids dominant suffisamment régulier qu'on a $r^*_\lambda(U_{r\circ\lambda,v,\nu}) = U_{\lambda,v,\nu\circ r}$ pour l'action sur $S_\lambda(U_H^{0,1}(p),K)$. Cette formule résulte de la Proposition 6.2. La formule sur les poids résulte également du Lemme 6.3. $\square$

7. Transfert et idéaux de congruences

Soit $r\colon {}^LH \to {}^LG$ un morphisme de transfert effectif 6.1. On le suppose irréductible, c'est à dire tel que son image n'est contenue dans aucun parabolique propre $\widehat{P}\subset\widehat{G}$. On suppose aussi que la fonctorialité r_* est établie. On a donc par le Corollaire 3 un morphisme $r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ entre les algèbres de Hecke-Hida qui induit un morphisme $r^*\colon \Lambda'_G \to \Lambda'_H$ entre les algèbres d'Iwasawa. Soit $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida, c'est à dire un morphisme surjectif deΛ'_G-algèbres pour une extension finie intègre $\mathbb{I}$ de Λ'_G.

On suppose que μ ne se factorise pas par r^*. On dira que μ n'est pas de type H. Pour éviter de supposer connue la classification des représentations automorphes de G, on fera en fait les hypothèses plus fortes suivantes

$(IRRAD_{G,\lambda})$ Soit $\operatorname{Ad}\rho_\mu\colon \Gamma_F \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}')$. On suppose qu'il existe un point poids classique régulier étale P_λ tel que pour tout idéal $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_λ, $\operatorname{Ad}\rho_{\mathfrak{P}} = \operatorname{Ad}\rho_\mu \pmod{\mathfrak{P}}$ soit irréductible (i.e. l'image n'est contenue dans aucun parabolique propre) Cela signifie qu'on a $(IRRAD_{G,\lambda})$ pour tout $\mathfrak{P}$ au-dessus de P_λ.

$(REDAD_H)$ On suppose que

$$\operatorname{Ad} r\colon {}^LH \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}')$$

n'est pas irréductible

On suppose de plus que μ est résiduellement de type H. C'est à dire qu'il existe une famille de Hida $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ telle que $\mu \cong \mu_H\circ r^* \pmod{\mathfrak{m}_{\mathbb{T}_G}}$ et telle que Im $\overline{\rho}_{\mu_H}$ contienne $r(\widehat{H}'(k'))$ où $\widehat{H}'$ désigne le groupe semsisimple dérivé de $\widehat{H}$ et $k'\subset k_H = \mathbb{I}_H/\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_H}$. L'irréductibilité de r et cette condition permettetn conjecturalement de garantir que $\mu_H\circ n r^*$ est une famille cuspidale, c'est à dire telle que toutes les spécialisations en poids dominants admissibles sont cuspidales. Comme ce n'est pas connu en général, on fait cette hypothèse :

Hypothèse : La famille $\mu_H\circ r^*$ est une famille cuspidale.

Soit $\rho_{\mathfrak{m}}\colon \Gamma_F \to {}^L(\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}})$ la représentation définie Proposition 4.1, et $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ la représentation associée à $\mu\colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}} \to \mathbb{I}$. Notons qu'on a $\overline{\rho}_\mu = r\circ\overline{\rho}_{\mu_H}$, de sorte qu'on peut aussi définir l'idéal maximal de $\mathbb{T}_H$ noyau de $\overline{\mu}_H$ et la représentation $\rho_{\mathfrak{m}_H}\colon \Gamma_F \to {}^LH(\mathbb{T}_{H,\mathfrak{m}_H})$.

Définition 7.1. *On introduit la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) constitués d' un groupe réductif connexe H_1 défini sur F de groupe dérivé simple et de morphismes de transfert $r_1 \colon {}^L H_1 \to {}^L G$ avec $\widehat{G}' \not\subset r_1({}^L H_1)$, et $s_1 \colon {}^L H \to {}^L H_1$ tels que $r_1 \circ s_1 = r$. On suppose s_1 à noyau fini et r_1 injectif.*

On définit d'abord des idéaux de congruences galoisiens.

Définition 7.2. *1) Soit $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$. On définit l'idéal $\mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},gal}$ de $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}$ comme l'intersection de tous les idéaux $\mathfrak{c}_{\rho_{H_1}} \subset \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}$ tels qu'il existe une représentation continue ρ_{H_1}*

$$\rho_{H_1} \colon \Gamma_F \to {}^L H_1(\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}/\mathfrak{c}_{\rho_{H_1}})$$

telle que $\rho_{\mathfrak{m}} \pmod{\mathfrak{c}_{\rho_{H_1}}} = r_1 \circ \rho_{H_1}$. On a donc

$$\mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},gal} = \bigcap_{\rho_{H_1}} \mathfrak{c}_{\rho_{H_1}}$$

2) On forme

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{m},gal} = \bigcap_{(H_1,r_1,s_1)\in\mathcal{C}} \mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},gal}$$

3) On pose $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mu(\mathfrak{c}_{gal})$.

Supposons que pour tout $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$, la théorie de Hida et le transfert soient établis pour $r_1 \colon {}^L H_1 \to {}^L G$. On a donc des morphismes $r_1^* \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_{H_1}$. Il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}_{H_1}$ de $\mathbb{T}_{H_1}$ d'image inverse $\mathfrak{m}$ par r_1^*. Le morphisme r_1^* se factorise en $r_1^* \colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}} \to \mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}}$. On peut alors définir les idéaux de congruences automorphes

Définition 7.3. *1) On définit l'idéal de H_1-congruences automorphes $\mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},aut}$ de $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}$ comme* Ker r_1^*.

2) On définit l'idéal de congruence automorphes $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m},aut}$ comme

$$\mathfrak{c}_{\mathfrak{m},aut} = \bigcap_{(H_1,r_1,s_1)\in\mathcal{C}} \mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},aut}$$

3) On définit alors l'idéal de congruences automorphes de $\mathbb{I}$ par $\mathfrak{c}_\mu = \mu(\mathrm{Ker}\ r^*)$.

Ces idéaux sont non nuls par hypothèse. Notons que comme les algèbres $\mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}}$ sont réduites, on a

$$\mathfrak{c}^{H_1}_{\mathfrak{m},aut} = \bigcap_{\mu'} \mathrm{Ker}(\mu' \circ r_1^*)$$

où μ' parcourt les familles de Hida de $\mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}}$.

Soit $\mathbb{I}(H_1) = \mathbb{I} \otimes_{\Lambda'_G} \Lambda'_{H_1}$ et $\mathfrak{P}_{H_1} \subset \mathbb{I}(H_1)$ un idéal premier minimal. Soit $\mathbb{I}(\mathfrak{P}_{H_1}) = \mathbb{I}(H_1)/\mathfrak{P}_{H_1}$. Soit

$$\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) = \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}} \otimes_{\Lambda'_{H_1}} \Lambda'_{H_1}$$

Posons

$$r^*(H_1) \colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) \to \mathbb{T}_{H_1}$$

et

$$\mu(\mathfrak{P}_{H_1}) \colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) \to \mathbb{I}(\mathfrak{P}_{H_1})$$

L'image $\mathfrak{c}^{H_1}_\mu(\mathfrak{P}_{H_1})$ de $\mathfrak{c}^{H_1}_{\mu,aut}$ dans $\mathbb{I}(\mathfrak{P}_{H_1})$ est non nulle. On peut aussi l'écrire comme

$$\mathfrak{c}(\mathfrak{P}_{H_1}) = \mu(\mathfrak{P}_H)(\mathrm{Ker}\, r^*(H_1))$$

Remarque 7.4. *Notons que dans la situation générale où nous sommes, il n'est pas clair que l'anneau* $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1)$ *soit réduit comme le montre l'exemple* $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}} = \mathbb{Z}_p[[X,Y,Z]]/(Z^2-Y)$, $\Lambda'_G = \mathbb{Z}_p[[X,Y]]$, $\Lambda'_H = \mathbb{Z}_p[[X]]$ *et*

$$r^*\colon \mathbb{Z}_p[[X,Y]] \to \mathbb{Z}_p[[X]], \quad X \mapsto X, Y \mapsto 0$$

On a $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) = \mathbb{Z}_p[[X,Z]]/(Z^2)$.

Si $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1)$ *n'est pas réduit, le morphisme de* Λ'_{H_1}*-algèbres*

$$(\mu(H_1), r^*(H_1)\colon \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) \to \mathbb{I}(\mathfrak{P}_{H_1}) \times \mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}}$$

n'est pas injectif ce qui ne permet pas d'écrire

$$\operatorname{Ker} r^*(H_1) = \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}(H_1) \cap (\mathbb{I}(\mathfrak{P}_{H_1}) \times \{0\})$$

comme dans la définition classique des idéaux de congruences.

On voit facilement

Lemme 7.5. *Soit* $\mathfrak{c}$ *un idéal de* $\mathbb{I}$*, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}_{\mu,aut}$*,*

(2) il existe $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$ *et un morphisme de* Λ'_{H_1}*-algèbres* $\alpha\colon \mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}} \to \mathbb{I}/\mathfrak{c}$ *tel que* $\mu \pmod{\mathfrak{c}} = \alpha \circ r_1^*$.

Si de plus $\mathfrak{c} = \mathfrak{p}$ *est premier, il existe une famille de Hida de* $\mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}}$*,* $\mu'_{H_1}\colon \mathbb{T}_{H_1,\mathfrak{m}_{H_1}} \to \mathbb{I}'_{H_1}$ *et un morphisme de* Λ'_{H_1}*-algèbres* $\beta\colon \mathbb{I}'_{H_1} \to \mathbb{I}/\mathfrak{p}$ *tel que* $\mu \pmod{\mathfrak{p}} = \beta \circ \mu'_{H_1} \circ r_1^*$.

Le second point résulte du Lemme de going-down.

On a $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m},gal} \subset \mathfrak{c}_{\mathfrak{m},aut}$ et donc $\mathfrak{c}_{H_1,gal} \subset \mathfrak{c}_{H_1}$. En effet, soit $\mu'\colon \mathbb{T}_{H_1} \to \mathbb{I}'_{H_1}$. On forme $\rho_{H_1} = \rho_{\mu'}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I}'_{H_1})$. On a $\mathfrak{c}_{\rho_{H_1}} = \operatorname{Ker}(\mu' r_1^*)$ et $\rho_{\mathfrak{m}} \pmod{\mathfrak{c}_{\rho_{H_1}}} = r_1 \circ \rho_{\mu'}$ donc $\mathfrak{c}_{\mathfrak{m},gal} \subset \bigcap_{\mu'} \operatorname{Ker}(\mu' \circ r_1^*)$.

La question de l'inclusion réciproque revient à montrer qu'une représentation ρ_{H_1} est (p-adiquement) automorphe pour H_1 si $r \circ \rho_{H_1}$ est (p-adiquement) automorphe pour G. Autrement dit, à trouver un homomorphisme $\mu_{\mathfrak{c}}\colon \mathbb{T}_{H_1} \to \mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}/\mathfrak{c}$ de Λ'_{H_1}-algèbres tel que $\rho_{H_1} = \rho_{\mu_{\mathfrak{c}}}$ (noter que $\mathbb{T}_{G,\mathfrak{m}}/\mathfrak{c}$ est une Λ'_{H_1}-algèbre). Ceci pose la question de la fonctorialité de la conjecture de Fontaine-Mazur. Ce problème a été résolu (en pente finie) pour Sym^3 dans [**Con16b**]. Dans le cas ordinaire, nous le résoudrons dans d'autres cas.

CHAPITRE 3

Théorie générale du niveau galoisien et idéal de congruence pour les groupes réductifs

Ce chapitre est la partie principale de cette thèse. On résume les résultats principaux à établir dans ce chapitre.

Soit F un corps de nombres. Soit G, H deux groupes réductifs connexes définis sur F déployés sur toutes les places v au-dessus de p. Il existe un ensemble fini S de premiers de $\mathbb{Z}$ qui ne contient pas p et une extension finie K_0 de F non-ramifiée en dehors de S. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ deux schémas en groupes réductifs connexes déployés sur $\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]$ tels que $G \times_F K_0 \cong \mathcal{G} \times_{\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]} K_0$ et $H \times_F K_0 \cong \mathcal{H} \times_{\mathbb{Z}[\frac{1}{S}]} K_0$. Supposons que les rangs semi-simple de $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont n et m avec $m \leq n$. Les algèbres de Hecke $\mathbb{T}_G$ et $\mathbb{T}_H$ sont les algèbres finies sans torsion sur $\Lambda'_G = \Lambda'_{nd}$ et $\Lambda'_H = \Lambda'_{md}$ respectivement. Soit $\mu \colon \mathbb{T}_G \twoheadrightarrow \mathbb{I}$ une famille de Hida.

Soit $r \colon {}^L H \to {}^L G$ un morphisme de transfert. On dit qu'il est strict si $\widehat{G}' \not\subset r({}^L H)$. On dit qu'il est absolument irréductible si $r({}^L H)$ n'est contenu dans aucun parabolique propre de $\widehat{G}$ et que le centralisateur de r est trivial dans $\widehat{G^{ad}}$. On suppose que r est effectif (voir (Eff) dans la Section 5). On suppose que le transfert r_* est établi. On a donc par le Corollaire 3 un morphisme $r^* \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ entre les algèbres de Hecke-Hida qui induit un morphisme $r^* \colon \Lambda'_G \to \Lambda'_H$ entre les algèbres d'Iwasawa. Soit $\mu \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida, c'est à dire un morphisme surjectif deΛ'_G-algèbres pour une extension finie intègre $\mathbb{I}$ de Λ'_G.

On suppose que μ n'est pas de type H, mais qu'il existe une famille de Hida $\mu_H \colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ telle que $\mu \cong \mu_H \circ r^* \pmod{\mathfrak{m}_{\mathbb{T}_G}}$ et telle que

$(GRANDIMRES_{\mu_H})$ le groupe Im $\overline{\rho}_{\mu_H}$ contienne $r(\widehat{H}'(k'))$ où $\widehat{H}'$ désigne le groupe semsisimple dérivé de $\widehat{H}$ et $k' \subset k_H = \mathbb{I}_H/\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_H}$.

Hypothèse 0.6. $(PLATSURJ)$ *de l'Hypothèse*

1) On suppose que le transfert r est effectif, strict, absolument irréductible, de noyau central et tel que

$(PLATSURJ)$ *On a $r(Z({}^L H)) \subset Z({}^L G)$ et la restriction $r \colon Z({}^L H) \to Z({}^L G)$ est plate et surjective,*

2) On suppose $(IRRAD_{G,\mathfrak{P}})$ et $(REDAD_H)$

3) On suppose que la famille $\mu_H \circ r^*$ est une famille cuspidale

4) $r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ est p-distinguée (au sens de l'hypothèse 4.2) dans le chapitre 2.

Par la Section 4, on a une représentation galoisienne $\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I})$ associée à μ. Par le Lemme 4.3, elle est p-distinguée.

On va renforcer cette condition en une hypothèse cruciale pour tout ce travail, dite de $\mathbb{Z}_p$-régularité :

$(\mathbb{Z}_p - REG)$ Il existe $d \in \mathrm{Im}\ \rho$ tel que $d \in \widehat{G}(\mathbb{Z}_p)$ et pour toute racine $\widehat{\alpha}$ de $\widehat{G}$, $\widehat{\alpha}(d) \not\equiv 1 \pmod{p}$. Si de plus $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n$, soit

$$R \colon \widehat{G} \to \mathrm{GL}_{2n}, \quad g \mapsto \mathrm{diag}(g, {}^t g)$$

alors pour toute racine $\widehat{\alpha}$ de GL_{2n}, $\widehat{\alpha}(R(d)) \not\equiv 1 \pmod p$. Soit $\mathbb{I}_0$ une sous Λ'_G-algèbre de $\mathbb{I}$. Pour tout idéal non nul $\mathfrak{l}_0$ de $\mathbb{I}_0$, on note $\Gamma(\mathfrak{l}_0) \subset \widehat{G}'(\mathbb{I}_0)$ le sous-groupe de congruence du groupe dérivé $\widehat{G}'$ sur $\mathbb{I}_0$.

Définition 0.7. *On dit que ρ_μ est d'image $\mathbb{I}_0$-pleine dans ${}^LG(\mathbb{I})$ s'il existe $g \in \widehat{G}(\mathbb{I})$ et un idéal non nul $\mathfrak{l}_0 \subset \mathbb{I}_0$ tels que $g \cdot \mathrm{Im}\,\rho_\mu \cdot g^{-1}$ contienne le sous-groupe de congruence $\Gamma(\mathfrak{l}_0)$ de niveau $\mathfrak{l}_0$ de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0)$.*

Notre but est d'établir sous les hypothèses précédentes que ρ_μ est $\mathbb{I}_0$-pleine pour une Λ'_G-sous-algèbre $\mathbb{I}_0$ explicite appelée anneau des self-twists.

Définition 0.8. *Un élément maximal de l'ensemble des idéaux avec cette propriété est noté $\mathfrak{l}_\mu$. On l'appelle un niveau galoisien de ρ_μ.*

Lemme 0.9. *Si $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ n'est pas $\mathfrak{m}_{\mathbb{I}}$-primaire, on a les inclusions*

$$\mathfrak{l}_\mu\mathbb{I} \subset \mathfrak{c}_{\mu,gal} \subset \mathfrak{c}_\mu.$$

Démonstration. On a vu que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} \subset \mathfrak{c}_\mu$. Pour montrer $\mathfrak{l}_\mu\mathbb{I} \subset \mathfrak{c}_{\mu,gal}$, on observe que $\rho_\mu \pmod{\mathfrak{c}_{mu,gal}}$ prend ses valeurs dans $r_1({}^LH_1(\mathbb{I}/\mathfrak{c}_{mu,gal})$ pour un $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$. Comme r_1 est strict, la clôture de Zariski du groupe $r_1({}^LH_1)$ ne contient pas $\widehat{G}'$. Si $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ n'est pas $\mathfrak{m}_{\mathbb{I}}$-primaire, l'anneau $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ est infini. Par conséquent, tout sous-groupe de congruence non trivial de $\widehat{G}'(\mathbb{I}/\mathfrak{c})$ est Zariski dense, et le seul sous-groupe de congruence de $\widehat{G}'(\mathbb{I}/\mathfrak{c})$ contenu dans l'image de $\rho_\mu \pmod{\mathfrak{c}_{\mu,gal}}$ est le groupe trivial. On a donc $\mathfrak{l}_\mu\mathbb{I} \subset \mathfrak{c}_{\mu,gal}$. $\square$

On peut donner une description conjecturale de $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$.

Soit $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$ et $r_1^a \colon \mathcal{O}_{{}^LG} \to \mathcal{O}_{{}^LH_1}$ le comorphisme de $r_1 \colon {}^LH_1 \to {}^LG$ soit $\mathcal{I} = \bigcap_{(H_1,r_1,s_1)\in\mathcal{C}} \mathrm{Ker}\, r_1^a$. Pour tout $\gamma \in \Gamma_F$, le point $\rho_\mu(\gamma)$ définit un morphisme $\rho_\mu(\gamma) \colon \mathrm{Spec}\,\mathbb{I} \to {}^LG$. On considère l'idéal $\mathfrak{c}_\mu^{gal}$ de $\mathbb{I}$ engendré par les $\rho_\mu(\gamma)^a(\mathcal{I})$ pour tout $\gamma \in \Gamma_F$.

Conjecture 0.10. *On a $\mathfrak{c}_\mu^{gal} = \mathfrak{c}_{\mu,gal}$.*

Dans le cas de $G = \mathrm{GL}_2$ et de $H = K^\times$ pour K corps imaginaire quadratique, cette conjecture est connue.

Maintenant, on est prêt pour énoncer notre résultat principal. Soit $\mu \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida de représentation galoisienne résiduelle absolument irréductible. Soit $\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ la représentation galoisienne associée. Soit $\mathbb{I}_0 \subset \mathbb{I}$ le sous-anneau des self-twists de ρ_μ (défini en 1.4). Soit H_0 le sous groupe de Γ_F de la Définition 2.2.

Théorème 3. *1) Supposons que $\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ satisfasse $(\mathbb{Z}_p - REG)$, $(p - Dist)$, $(IRRAD_\lambda)$ pour un poids régulier étale. Spposons que la restriction $\rho_\mu|_{H_0}$ soit absolument irréductible.*

Alors, il existe un niveau galoisien $\mathfrak{l}_0$, idéal non nul de $\mathbb{I}_0$.

2) Fixons un transfert $r \colon {}^LH \to {}^LG$ strict effectif satisfaisant les conditions $(H1)$ et $(H2)$ et tel que $\overline{\rho}_\mu = r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ pour une famille μ_H satisfaisant $(GRANDIMRES_{\mu_H})$. Soit $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ l'idéal de congruences 7.3 associé. Alors, les idéaux $\mathfrak{l}_\mu$ et $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ ont les mêmes facteurs premiers autres que (ϖ) : un idéal premier $\mathfrak{P} \neq (\varpi)$ contient $\mathfrak{l}_\mu$ si et seulement s'il contient $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$.

L'hypothèse que $\rho_\mu|_{H_0}$ soit absolument irréductible devrait pouvoir être supprimée avec plus de travail Les hypothèses $(\mathbb{Z}_p - REG)$ et $(IRRAD_\lambda$ sont cruciales dans notre approche. Il est important de comparer $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ et $\mathfrak{c}_{\mu,aut}$ au moins dans certains cas de transfert connu du Chapitre 4 à l'aide de théorème de relèvements pro-automorphes d'une représentation résiduelle automorphe.

1. Les self-twists d'une représentation galoisienne

Soient R une $\mathcal{O}$-algèbre intègre, $Q(R)$ son corps de fraction et $\rho\colon \Gamma_F \to {}^L G(R)$ une repésentation galoisienne. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(R)$ un automorphisme. On considère une nouvelle représentation $\rho^\sigma\colon \Gamma_F \to {}^L G(R)$.

Soit S un sous-anneau de R. On dit que un morphisme $\sigma \in \mathrm{Hom}(R,R)$ est un homomorphisme de R sur S, si $\sigma|_S = \mathrm{id}_S$. La définition suivante est inspirée par [**Ri76**, Section 3].

Définition 1.1. *Soit $\rho\colon \Gamma_F \to {}^L G(R)$ une représentation. Soit $Z({}^L G(R))$ le centre de ${}^L G(R)$. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(R)$ un automorphisme de R sur S. On dit que σ est un self-twist de ρ sur S s'il existe un caractère d'ordre fini $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^L G(R))$ tel qu'on a un isomorphisme des représentations sur R :*

$$\rho^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho. \tag{1.1}$$

Voici une liste des propriétés élémentaires des self-twists.

Proposition 1.2. *Soit $\rho\colon \Gamma_F \to {}^L G(R)$ une représentation.*
(1) Les self-twists pour ρ sur S forment un groupe
(2) Si R est finie sur S, alors le groupe des self-twists de ρ sur S est aussi fini
(3) L'identité est un self-twist de ρ sur S. Supposons que le caractère associé à l'identité est unique. Alors pour tout self-twist σ, le caractère η_σ associé est aussi unique.
(4) Sous l'hypothèse de (3), l'association $\sigma \mapsto \eta_\sigma$ donne un cocycle du groupe des self-twists avec valeurs dans $Z({}^L G)(R)$.

Démonstration. (1) L'identité de R est un self-twist de ρ sur S avec le caractère trivial. C'est l'élément neutre. Soient σ, σ' deux self-twists et $\eta_\sigma, \eta_{\sigma'}$ deux caractères qui satisfont l'isomorphisme (1.1) pour σ, σ' respectivement. Alors, on a une suite des équivalences suivante :

$$\rho^{\sigma'\circ\sigma} = (\rho^\sigma)^{\sigma'} \cong (\eta_\sigma \cdot \rho)^{\sigma'}$$

$$= \eta_\sigma^{\sigma'} \cdot \rho^{\sigma'} \cong \eta_\sigma^{\sigma'} \eta_{\sigma'} \cdot \rho.$$

Donc par définition, $\sigma' \circ \sigma$ est aussi un self-twist de ρ sur S, avec un caractère d'ordre fini associé $\eta_\sigma^{\sigma'}\eta_{\sigma'}$.

Soit σ un self-twist de ρ sur S de caractère η_σ. Par définition, on a l'isomorphisme $\rho^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho$. En appliquant σ^{-1} des deux côtés, on obtient $\rho \cong \sigma^{-1}(\eta_\sigma) \cdot \rho^{\sigma^{-1}}$. Ceci implique $\rho^{\sigma^{-1}} \cong (\sigma^{-1}(\eta_\sigma))^{-1} \cdot \rho^{\sigma^{-1}}$. Donc σ^{-1} est aussi un self-twist de ρ sur S. C'est l'inverse de σ.

Les self-twists de ρ sur S forment un groupe.

(2) Tout self-twist σ s'étend à un automorphisme de $Q(R)$ sur $Q(S)$. Puisque R est fini sur S, $Q(R)$ est aussi fini sur $Q(S)$. En particulier, il n'y a qu'un nombre fini des automorphismes distincts de $Q(R)$ sur $Q(S)$. Donc, le nombre des self-twists est aussi fini.

(3) Soit σ un self-twist. Supposons qu'on a deux caratères d'ordre fini $\eta_\sigma, \eta'_\sigma$ satisfaisant $\rho^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho \cong \eta'_\sigma \cdot \rho$. Donc on a $\rho \cong \eta_\sigma(\eta'_\sigma)^{-1} \cdot \rho$. Par l'hypothèse, $\eta_\sigma(\eta'_\sigma)^{-1} = 1$, donc $\eta_\sigma = \eta'_\sigma$.

(4) Par (3), l'application $\phi\colon \sigma \mapsto \eta_\sigma$ est bien définie. Par les calculs de (1), on voit que $\phi(\sigma' \circ \sigma) = [\sigma' \cdot \phi(\sigma)]\phi(\sigma)$. Donc, l'application ϕ est bien un cocycle des groupe de self-twists avec valeurs dans les caractères d'ordre fini.

$\square$

On note $\Gamma_{\rho,S}$ le groupe des self-twists sur S pour de la représentation $\rho\colon \Gamma_F \to {}^LG(R)$. Soit $\mathrm{Ad}\rho$ la composée de ρ avec l'action adjointe de ${}^LG$ sur le R-module libre de type fini $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathrm{Lie}(\widehat{G})$. Soit $S[\mathrm{TrAd}\rho]$ le sous-anneau engendré sur S par la famille $\{\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\rho))\}_{g\in\Gamma_F}$.

Proposition 1.3. *On a une inclusion* $S[\mathrm{TrAd}\rho] \subset R^{\Gamma_{\rho,S}}$.

Démonstration. Soit σ un élément quelconque dans $\Gamma_{\rho,S}$. Par définition, il existe un caractère d'ordre fini $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^LG(R))$ tel qu'on a un isomorphisme $\rho^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho$. En passant à la représentation adjointe, on a un isomorphisme $\mathrm{Ad}\rho^\sigma \cong \mathrm{Ad}\rho$. Donc les traces de ces deux représentations sont les mêmes. C'est-à-dire que σ fixe $\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\rho)(g)$ pour tout $g \in \Gamma_F$. Comme σ fixe S pardéfinition, σ fixe $S[\mathrm{TrAd}\rho]$. Le groupe $\Gamma_{\rho,S}$ agit trivialement sur le sous-anneau $S[\mathrm{TrAd}\rho]$. $\square$

Soit $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida, comme précédemment. Il résulte de la Remarque 2 suivant la Conjecture 2.3 que tout self twist de ρ_μ pour $\mathrm{Frac}(\mathbb{I})$ au-dessus de $\mathrm{Frac}(\Lambda'_G)$ laisse stable $\mathbb{I}$ et définit donc un self-twist de $\mathbb{I}$ au-dessus e Λ'_G.

Définition 1.4. *Soit* Γ *le groupe de self-twists de* ρ_μ *sur* Λ'_G*. On note* $\mathbb{I}_0 = (\mathbb{I})^\Gamma$*, le sous-anneau fixé par* Γ*. C'est une* Λ'_G*-algèbre finie.*

2. Idéal de congruence et self-twists

On va montrer que $\mathfrak{c}_{\mu,aut}$ et $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ sont engendrés par les éléments invariants sous l'action du groupe de self-twists.

Proposition 2.1. *On suppose le morphisme de* $\mathcal{O}$*-schémas*

$$r\colon Z({}^LH) \to Z({}^LG)$$

est plat et surjectif. Soit $\mathfrak{c}_{\mu,0} = \mathfrak{c}_\mu \cap \mathbb{I}_0$ *resp.* $\mathfrak{c}_{\mu,gal,0} = \mathfrak{c}_{\mu,gal} \cap \mathbb{I}_0$*. On a* $\mathfrak{c}_\mu = \mathfrak{c}_{\mu,0} \cdot \mathbb{I}$ *et* $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}_{\mu,gal,0} \cdot \mathbb{I}$*.*

Démonstration. On fait la démonstration pour $\mathfrak{c}_\mu$. Elle est identique pour $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$. Par hypothèse, il existe un homomorphisme de Λ'_H-algèbres $\alpha\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}/\mathfrak{c}_\mu$ tel que $\mu \pmod{\mathfrak{c}_\mu} = \alpha \circ r^*$. Posons $\rho_{\mathfrak{c}_\mu} = \rho_\mu \pmod{\mathfrak{c}_\mu}$ et

$$\rho_\alpha\colon \Gamma_F \to {}^LH(\mathbb{I}/\mathfrak{c}_\mu)$$

définie comme la composée de $\rho_{\mathfrak{m}_H}\colon \Gamma_F \to {}^LH(\mathbb{T}_{H,\mathfrak{m}_H})$ avec α. On a alors

$$\rho_{\mathfrak{c}_\mu} = r \circ \rho_\alpha$$

Soient σ un self-twist et $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^LG(\mathbb{I}))$ le caractère d'ordre fini associé. Soit $\mathfrak{c}_\mu^\sigma = \sigma(\mathfrak{c}^\mu)$. Comme σ est un automorphisme de $\mathbb{I}$, il induit un isomorphisme $\mathbb{I}/\mathfrak{c}_\mu \cong \mathbb{I}/\mathfrak{c}_\mu^\sigma$. On note $\alpha^\sigma = \sigma \circ \alpha$. On a $\mu^\sigma \pmod{\mathfrak{c}_\mu^\sigma} = \alpha^\sigma \circ r^*$. Donc

$$\rho^\sigma_{\mathfrak{c}_\mu^\sigma} = r \circ \rho_{\alpha^\sigma}$$

Or, on sait que $\rho^\sigma_{\mathfrak{c}_\mu^\sigma} = \eta_\sigma \cdot \rho_{\mathfrak{c}_\mu^\sigma}$. On a donc

$$r \circ \rho_{\alpha^\sigma} = \eta_\sigma \cdot \rho_{\mathfrak{c}_\mu^\sigma}$$

On suppose le morphisme de $\mathcal{O}$-schémas

$$r\colon Z({}^LH) \to Z({}^LG)$$

est plat et surjectif. Pour toute $\mathcal{O}$-algèbre A et pour tout tout $\zeta \in Z({}^LG)(A)$, il existe donc une A-algèbre plate B et $\zeta_B \in Z({}^LH)(B)$ tels que $r(\zeta_B) = \zeta_A$. En particulier, il existe une extension B de $A = \mathbb{I}/\mathfrak{c}_\mu^\sigma$ et un relèvement $\widetilde{\eta}_\sigma\colon \Gamma_F \to {}^LH(B)$ de $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)(A)$. On peut alors écrire

$$\rho_{\mathfrak{c}_\mu^\sigma} = r \circ (\widetilde{\eta}_\sigma^{-1} \rho_{\alpha^\sigma})$$

Par définition de l'idéal de H-congruences automorphe, on en conclut que $\mathfrak{c}_\mu \subset \mathfrak{c}_\mu^\sigma$. L'inclusion réciproque s'obtient en remplaçant σ par son inverse dans l'argument ci-dessus. □

On appelle encore $\mathfrak{c}_{\mu,0}$, resp. $\mathfrak{c}_{\mu,gal,0}$, l'idéal de H-congruences automorphe, resp. galoisien, de μ. Ce sont des idéaux non nuls de $\mathbb{I}_0$.

Définition 2.2. *On introduit la notation*

$$H_0 = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{Ker}\ \eta_\sigma, H = H_0 \cap \mathrm{Ker}\,\overline{\rho}_\mu$$

On montrera sous certaines hypothèses ($\mathbb{Z}_p$-régularité) la

Proposition 2.3. *Il existe $g \in \widehat{G}(\mathbb{I})$ tel que*

$$g \cdot \rho_\mu|_{H_0} \cdot g^{-1} \subset {}^LG(\mathbb{I}_0)$$

Soit $\rho_{H_0} = g \cdot \rho_\mu|_{H_0} \cdot g^{-1}$. Pour un idéal $\mathfrak{c}_0$ de $\mathbb{I}_0$, on note $\rho_{H_0,\mathfrak{c}_0}\colon H_0 \to G(\mathbb{I}_0/\mathfrak{c}_0)$ la réduction de ρ_{H_0} modulo $\mathfrak{c}_0$. L'idéal $\mathfrak{c}_{\mu,0}$ a une caratérisation analogue de celles de $\mathfrak{c}_\mu$.

Proposition 2.4. *Soit $\mathfrak{c}_0$ un idéal de $\mathbb{I}_0$. Considérons les énoncés*
(1) $\mathfrak{c}_0 \supset \mathfrak{c}_{\mu,0}$
(2) il existe un homomorphisme $\alpha\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}/\mathfrak{c}_0\mathbb{I}$ et une représentation $\rho_\alpha\colon \Gamma_F \to {}^LH((\mathbb{I}/\mathfrak{c})$ telle que

$$\rho_\mu \pmod{\mathfrak{c}_0\mathbb{I}} = r \circ \rho_\alpha$$

(1gal) $\mathfrak{c}_0 \supset \mathfrak{c}_{\mu,gal,0}$
(2gal) il existe une une représentation $\rho^H\colon \Gamma_F \to {}^LH(\mathbb{I}/\mathfrak{c}_0\mathbb{I})$ telle que

$$\rho_{H_0} \pmod{\mathfrak{c}_0} = r \circ \rho^H|_{H_0}$$

(4) il existe un représentation $\rho^H_{H_0}\colon H_0 \to {}^LH(\mathbb{I}_0/\mathfrak{c}_0)$ telle que $\rho_{H_0} \pmod{\mathfrak{c}_0} \cong r \circ \rho^H_{H_0}$.
On sait que (1) équivaut à (2), que (1gal) équivaut à (2gal) et que (1) entraîne (1gal). On a (2gal) entraîne (3) et (3) entraîne (4) . Si $r({}^LH)$ est son propre normalisateur dans ${}^LG$, (4) entraîne (2gal).

Démonstration. D'abord, on montre que (1) implique (2),(3),(4). Si $\mathfrak{c}_0 \supset \mathfrak{c}_{\mu,0}$, alors $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}_0\mathbb{I} \supset \mathfrak{c}_\mu$. Il existe donc un homomorphisme $\alpha\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}/\mathfrak{c}$ tel que $\rho_\mu \pmod{\mathfrak{c}} = r \circ \rho_\alpha$ d'où (2). Par restriction à H_0, on a (3) :

$$\rho_{H_0} \pmod{\mathfrak{c}_0} = r \circ \rho_\alpha|_{H_0}$$

et donc (4).

On sait déjà que (2) entraîne (1).

Si (4) est vraie, alors l'image de $\rho_{H_0,\mathfrak{c}_0}$ est dans $r \circ {}^LH(\mathbb{I}_0/\mathfrak{c}_0)$. Puisque $\rho_{H_0,P_0} = \rho_{P_0\mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}}|_{H_0}$, et que $r({}^LH)$ est son propre normalisateur dans ${}^LG$ l'image de $\rho_{\mu,\mathfrak{c}}$ est dans $r({}^LH(\mathbb{I}/\mathfrak{c}_0\mathbb{I}))$. Ceci montre $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}_{\mu,gal}$. □

3. Relèvements des self-twists

On commence par expliquer le problème à étudier dans cette section. Soient $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida et $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ la représentation galoisienne associée. Soit $P_\lambda \in \Lambda'_G$ un idéal premier arithmétique de Λ'_G au-dessus duquel $\mathbb{I}$ est étale (c'est le cas pour presque tout λ). La réduction modulo P_λ donne une représentation $\rho_{P_\lambda}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I}/P_\lambda\mathbb{I})$. Soit σ un self-twist de ρ_μ sur Λ'_G et $\eta\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)(\mathbb{I})$ un caractère associé. En passant au quotient, on obtient un automorphisme $\sigma_{P_\lambda}\colon \mathbb{I}/P_\lambda\mathbb{I}\to\mathbb{I}/P_\lambda\mathbb{I}$ et un caractère $\eta_{P_\lambda}\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)(\mathbb{I}/P_\lambda\mathbb{I})$. L'isomorphisme $\rho_\mu^\sigma \cong \eta\cdot\rho_\mu$ donne un isomorphisme des représentations sur $\mathbb{I}/P_\lambda\mathbb{I}$:

$$\rho_{P_\lambda}^{\sigma_{P_\lambda}} \cong \eta_{P_\lambda}\cdot\rho_{P_\lambda}.$$

Comme $\mathbb{I}$ est étale sur P_λ, P_λ se décompose en l'intersection d'idéaux premiers distincts de $\mathbb{I}$: $P_\lambda\mathbb{I} = \bigcap_{i=1}^r \mathfrak{P}_i$. Rappelons que σ_{P_λ} est un morphisme de $\mathrm{Frac}(\mathbb{I}/P_\lambda)\mathbb{I} \cong \prod_{i=1}^r \mathrm{Frac}(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i)$. Donc, il existe une permutation s de l'ensemble $\{1,2,\cdots,d\}$ et des isomorphismes

$$\sigma_{\mathfrak{P}_i}\colon \mathrm{Frac}(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i)\cong\mathrm{Frac}(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_{s(i)}),\quad \text{pour } i=1,2\cdots,d$$

tels que $\sigma|_{\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i}$ se factorise par $\sigma_{\mathfrak{P}_i}$. Le caractère η_{σ,P_λ} s'écrit aussi comme un produit $\prod_{i=1}^d \eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}$, avec les caractères $\eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}\colon \Gamma_F\to Z({}^LG)(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_{s(i)})$ et on a des isomorphsimes

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\sigma_{\mathfrak{P}_i}} \cong \eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}\cdot\rho_{\mathfrak{P}_{s(i)}}.$$

La question est la réciproque. On a la proposition suivante :

Proposition 3.1. *Soit $i,j\in\{1,2,\cdots,d\}$. Soient $\sigma_{\mathfrak{P}_i}\colon \mathbb{I}/\mathfrak{P}_i\to\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$ un isomorphisme et $\eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}\colon\Gamma_F\to Z({}^LG)(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)$ le caractère satisfaisant*

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\sigma_{\mathfrak{P}_i}} \cong \eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}\cdot\rho_{\mathfrak{P}_j}.$$

Alors, il existe $\sigma\in\Gamma$ avec un caractère associé $\eta_\sigma\colon\Gamma_F\to Z({}^LG)(\mathbb{I})$ tel que par la construction précédente, on ait

$$s(i)=j,\quad \sigma_{\mathfrak{P}_i}=\sigma \pmod{\mathfrak{P}_i},\quad \eta_{\sigma_{\mathfrak{P}_i}}=\eta_\sigma \pmod{\mathfrak{P}_i}$$

Avant de faire la démonstration, on donne un corollaire. Avec les notations précédentes, soit $\mathfrak{P}\in\{\mathfrak{P}_1,\mathfrak{P}_2,\cdots,\mathfrak{P}_d\}$, et $\rho_{\mathfrak{P}}\colon\Gamma_F\to G(\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ la réduction de ρ_μ modulo $\mathfrak{P}$. Soit $\Gamma_{\mathfrak{P}}$ le groupe de self-twists de $\rho_{\mathfrak{P}}$ sur Λ'_G/P_λ ; considérons le sous-groupe $\Gamma(\mathfrak{P})=\{\sigma\in\Gamma|\sigma(\mathfrak{P})=\mathfrak{P}\}$ de Γ. Soient $\sigma\in\Gamma$ et $\eta_\sigma\colon\Gamma_F\to Z({}^LG)(\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ le caractère associé à σ. Par réduction modulo $\mathfrak{P}$, on obtient un automorphisme $\sigma_{\mathfrak{P}}$ de $\mathbb{I}/\mathfrak{P}$, un caractère $\eta_{\sigma_{\mathfrak{P}}}\colon\Gamma_F\to Z({}^LG)(\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ et un isomorphisme $\rho_{\mathfrak{P}}^{\sigma_{\mathfrak{P}}}\cong\eta_{\sigma_{\mathfrak{P}}}\cdot\rho_{\mathfrak{P}}$. Donc $\sigma_{\mathfrak{P}}$ est un élément du groupe $\Gamma_{\mathfrak{P}}$. Évidemment, l'application $\Gamma(\mathfrak{P})\to\Gamma_{\mathfrak{P}}$ définie par $\sigma\mapsto\sigma_{\mathfrak{P}}$ est un morphisme des groupes. De plus, on a

Corollary 3.2. *Le morphisme $\Gamma(\mathfrak{P})\to\Gamma_{\mathfrak{P}}$ est surjectif.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition en prenant $\mathfrak{P}_i=\mathfrak{P}_j=\mathfrak{P}$. □

Notre stratégie suit celle de [**Lang16b**, Section 3] et [**Con16a**, Section 4.4] :
(1) on rélève σ en un automorphisme Σ de l'anneau de déformations de $\overline{\rho}$;
(2) on montre que Σ desscend à $\mathbb{I}$ en un self-twist de ρ_μ.

3.1. Déformations. Ici, on fait un rappel sur la représentabilité du problème de déformations de pour les groupes réductifs. La référence qu'on utilise dans cette section est [**Ti96**].

Soient k un corps fini de caractéristique p et W son anneau des vecteurs de Witt. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique, totalement ramifié fini et plat sur W. Soient S_p l'ensemble des places de F au-dessus de p, S_∞ l'ensemble des place archimédiennes et S un ensemble fini des places contenant $S_\infty\cup S_p$. Soit F_S l'extension maximale de F non-ramifiée en dehors de S dans une clôture algébrique de F. On note par $\Gamma_{F,S}$ le groupe de Galois de F_S/F.

Soient ${}^LG$ un schéma en groupes réductif sur $\mathcal{O}$ et $Z({}^LG)$ son centre. Soit $CNL_{\mathcal{O}}$ la catégorie des $\mathcal{O}$-algèbres A locales, noeth'eriennes, complètes avec un morphisme local surjective $\phi\colon A\to k$. Soit $\hat{G}(A)=\ker(\phi\colon G(A)\to G(k)$. Soit $\overline{\rho}\colon\Gamma_F\to{}^LG(k)$ une représentation continue. On considère le foncteur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\colon \quad & CNL_{\mathcal{O}} \to Ens \\ & (A,\phi) \mapsto \{\rho\colon \Gamma_{F,S} \to {}^LG(A) | \phi\circ\rho = \overline{\rho}\}/\sim \end{aligned}$$

où la relation d'équivalence est la conjugaison par le groupe $({}^LG)^\circ_f(A)$ des A-points du groupe formel associé à la composante neutre $({}^LG)^\circ$ de ${}^LG$.

Théorème 4. [**Ti96**, Theorem 3.3] *Avec les notations précédentes, si $Z({}^LG)$ est lisse sur $\mathcal{O}$ et si la composante connexe du centralisateur de $\overline{\rho}$ est contenue dans $Z({}^LG)(k)$, alors le foncteur $\mathcal{F}$ est représentable. On note par $(R_{\overline{\rho}}, \rho^{\mathrm{univ}})$ le couple universel associé.*

Dans la démonstration de [**Ti96**, Theorem 3.3], le groupe ${}^LG$ est supposé connexe, mais la démonstration dans le cas non connexe est identique.

3.2. Relèvement des self-twists à l'anneau de déformations. Soit $j\colon Z_G \to G$ le sous-tore central maximal de G et $\pi\colon G \to C_G$ le tore quotient maximal de G. On sait que $\widehat{Z_G}$ est le tore quotient maximal de $\widehat{G}$ et que $\widehat{C_G}$ est le sous-tore central maximal de $\widehat{G}$. L'injection $j\colon Z_G \to G$ induit un morphisme surjectif $\widehat{j}\colon \widehat{G} \to \widehat{Z_G}$ et la composée fournit un morphisme de tores $\widehat{j}\circ\widehat{\pi}\colon \widehat{C_G} \to \widehat{Z_G}$. On a $Z({}^LG) \subset \widehat{C_G}$.
(H1) Le groupe $\mathrm{Ker}(\widehat{j}\circ\widehat{\pi})^\circ$ des composantes connexes de $\mathrm{Ker}(\widehat{j}\circ\widehat{\pi})$ est d'ordre divisant $p-1$ et la restriction

$$\nu = \widehat{j}\circ\widehat{\pi}_{Z({}^LG)}\colon Z({}^LG) \to \widehat{Z_G}$$

est une isogénie (de degré divisant $p-1$).

De plus on forme ${}^L(Z_G)$ et le prolongement ${}^Lj\colon {}^LG \to {}^L(Z_G)$ de $\widehat{j}$. Soit $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$. Soit $\Lambda_{G,\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[[\mathcal{T}_1']] \subset \Lambda_G = \mathcal{O}[[\mathcal{T}_1']]$. On fait l'hypothèse que
(H2) La représentation ${}^Lj\circ\rho_\mu$ est à valeurs dans $\widehat{Z_G}(\Lambda_{G,\mathbb{Z}_p})$.

On vérifiera ces deux hypothèses sur nos exemples. (H2) est une généralisation de l'hypothèse que le Nebentypus ψ_Δ de μ est trivial.

L'utilité de ces hypothèses est la suivante. Si σ est un self twist de ρ_μ de caractère η, si on applique ${}^Lj$ à l'égalité

$$\rho_\mu^\sigma \cong \eta\cdot\rho_\mu$$

on trouve par (H2) :

$${}^Lj\circ\rho_\mu = {}^Lj\circ\rho_\mu^\sigma = {}^Lj\circ\eta\cdot{}^Lj\circ\rho_\mu$$

donc

$$\mathrm{Im}\,\eta \subset \mathrm{Ker}\,{}^Lj$$

ou encore, par (H1) :

$$\mathrm{Im}\,\eta \subset \mathrm{Ker}\,\widehat{j}_{Z({}^LG)}(\mathbb{Z}_p)$$

Sur nos exemples, ceci entraînera η quadratique. En particulier ceci permet de définir un relèvement canonique η_A de $\overline{\eta}$ à toute W-algèbre A.

Soit $k = \mathbb{I}/\mathfrak{m}_{\mathbb{I}}$ le corps résiduel de $\mathbb{I}$. Soit $\overline{\rho} = \rho_\mu \pmod{\mathfrak{m}_{\mathbb{I}}}$. Soit W l'anneau des vecteurs de Witt de k. Rappelons qu'on a fixé un corps p-adique K d'anneau de valuation $\mathcal{O}$ et que $\mathbb{I}$ est une $\mathcal{O}$-algèbre. Le corps résiduel de $\mathcal{O}$ est k, donc $\mathcal{O}$ et $\mathbb{I}$ sont des W-algèbres de corps résiduel k.

Comme $\sigma\colon \mathbb{I}/\mathfrak{P}_i \to \mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$ est un isomorphisme, il envoie l'idéal maximal de $\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i$ sur l'idéal maximal de $\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$. En particulier, σ induit un automorphisme $\overline{\sigma}$ du corps résiduel k. Soit $\overline{\eta}_\sigma\colon \Gamma_F Z({}^LG)(k)$ la réduction de η_σ modulo $\mathfrak{m}_{\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j}$.

Par le foncteur de Witt, $\overline{\sigma}$ se relève en un automorphisme $W(\overline{\sigma})$ de W. Soit A une W-algèbre commutative, on pose $A^{\overline{\sigma}} = A\otimes_{W,W(\overline{\sigma})} W$, où W est vu comme une W-algèbre par le morphisme $W(\overline{\sigma})\colon W \to W$. On note par $\iota(\overline{\sigma}, A)\colon A \to A^{\overline{\sigma}}$ le morphisme défini par

$\iota(\overline{\sigma}, A)(a) = a \otimes 1$ pour $a \in A$. C'est un isomorphisme de W-algèbres à gauche mais pas à droite. Son l'inverse est donné par $\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A^{\overline{\sigma}})\colon A^{\overline{\sigma}} \to A$, $a \otimes w \mapsto \sigma^{-1}(w)a$.
Les représentations $\overline{\rho}, \overline{\rho}^{\overline{\sigma}}$ et $\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho}$ sont toutes absolument irréductibles. Par le Théorème 4 appliqué au foncteur $\mathcal{F}$ sur la catégorie CNL_W, les couples universels pour ces trois représentations existent. On les note respectivement par $(R_{\overline{\rho}}, \overline{\rho}^{\mathrm{univ}})$, $(R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}, \overline{\rho}^{\overline{\sigma},\mathrm{univ}})$ et

$$(R_{\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho}}, (\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho})^{\mathrm{univ}})$$

Soit $r\colon \Gamma_F \to {}^LG(A)$ une déformation de $\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}$. Soit $\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A)\colon A \to A^{\overline{\sigma}^{-1}}$. La composée

$$\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A) \circ r$$

fournit une déformation de $\overline{\rho}$. On suit les calculs de [**Lang16a**, Lemma 3.2.2]. Par propriété universelle on a donc un unique morphisme de W-algèbres à droite $\alpha(\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A) \circ r)\colon R_{\overline{\rho}} \to A^{\overline{\sigma}^{-1}}$ qui envoie ρ^{univ} sur $\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A) \circ r$. En tensorisant à droite par W au-dessus de $W(\overline{\sigma})$, on obtient un morphisme de W-algèbres à droite

$$\alpha(\iota(\overline{\sigma}^{-1}, A) \circ r) \otimes 1\colon R_{\overline{\rho}}^{\overline{\sigma}} \to A$$

Si l'on prend $A = R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}$, et $r = (\overline{\rho}^{\overline{\sigma}})^{\mathrm{univ}}$, on obtient un isomorphisme de W-algèbres à droite

$$\phi = \alpha(\iota(\overline{\sigma}^{-1}, R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}) \circ r) \otimes 1\colon R_{\overline{\rho}}^{\overline{\sigma}} \to R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}$$

tel que

$$\phi \circ \iota(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) \circ \rho^{\mathrm{univ}} = r$$

L'équivalence $\overline{\rho}^{\overline{\sigma}} \cong \overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho}$ induit un isomorphisme

$$(R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}, \overline{\rho}^{\overline{\sigma},\mathrm{univ}}) \cong (R_{\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho}}, (\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho})^{\mathrm{univ}})$$

On obtient ainsi par propriété universelle le lemme suivant, semblable au [**Lang16b**, Lemme 3.2] en remplaçant GL_2 par un groupe réductif quelconque.

Lemme 3.3. [**Lang16b**, Lemme 3.2]
(1) Il y a un isomorphisme canonique $\phi\colon R_{\overline{\rho}}^{\overline{\sigma}} \to R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}$ de W-algèbres à droite tel que :

$$(\overline{\rho}^{\overline{\sigma}})^{\mathrm{univ}} \cong \phi \circ \iota(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$$

comme représentations de $\Gamma_F \to {}^LG(R^{\overline{\sigma}_\rho})$.
(2) Considérons η_σ comme un caractère $\Gamma_{F,S} \to Z({}^LG)(R_{\overline{\rho}})$ via $W \to R_{\overline{\rho}}$. Le twist par η_σ fournit un morphisme de W-algèbres $\psi\colon R_{\overline{\eta}_\sigma \cdot \overline{\rho}} \to R_{\overline{\rho}}$ caractérisé par l'isomorphisme de $R_{\overline{\rho}}$-représentations :

$$\eta_\sigma \cdot \overline{\rho}^{\mathrm{univ}} \cong \psi \circ (\overline{\eta} \cdot \overline{\rho})^{\mathrm{univ}}$$

Pour montrer que l'automorphisme $\overline{\sigma}$ de k peut se relever en un automorphisme Σ de W-algèbre $R_{\overline{\rho}}$, on a besoin d'une étape intermdiaire. Définissons un isomorphisme $m(\overline{\sigma}, k)\colon k^{\overline{\sigma}} \to k$ par $m(\overline{\sigma}, k)(x \otimes y) = \overline{\sigma}(x)y$. Soit $\phi\colon R^{\overline{\sigma}_{\overline{\rho}}} \to R_{\overline{\rho}^{\overline{\sigma}}}$ et $\psi\colon R_{\overline{\eta}_{\overline{\sigma}} \cdot \overline{\rho}} \to R_{\overline{\rho}}$ les morphismes d'anneaux donnés par le Lemme 3.3. Définissons un morphisme d'anneaux

$$m(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}})\colon R_{\overline{\rho}}^{\overline{\sigma}} \to R_{\overline{\rho}}$$

par $m(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) = \psi \circ \phi$.

Lemme 3.4. [**Lang16b**, Lemme 3.3] *Le morphisme $m(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}})$ est un relèvement de $m(\overline{\sigma}, k)$.*

Démonstration. On suit la démonstration de [**Lang16b**, Lemme 3.3].

Soient $\overline{\phi}\colon k \otimes_{\overline{\sigma}} k \to k$ et $\overline{\psi}\colon k \to k$ les morphismes des corps résiduels induits par ψ et ϕ. On a $\overline{\psi} = 1$. Comme $m(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}})$ induit $\overline{\psi} \circ \overline{\phi}$ sur les corps résiduels, il suffit de montrer que $\overline{\phi} = m(\overline{\sigma}, k)$.
Par la définition de ϕ, il y a un isomorphisme $(\rho^{\overline{\sigma}})^{\mathrm{univ}} \cong \phi \circ \iota(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$. Par réduction modulo l'idéal maximal de $R_{\overline{\rho}}^{\overline{\sigma}}$, on obtient $\overline{\rho}^{\sigma} \cong \overline{\phi} \circ \overline{\iota}(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) \circ \overline{\rho}$ et donc $\overline{\sigma} = \overline{\phi} \circ \overline{\iota}(\overline{\sigma}, k)$. Comme $\overline{\sigma} = m(\overline{\sigma}, k) \circ \iota(\overline{\sigma}, k)$ et $\iota(\overline{\sigma}, k)$ est un isomorphisme, on déduit que $\overline{\phi} = m(\overline{\sigma}, k)$.

□

Définissons un automorphisme $\Sigma\colon R_{\overline{\rho}} \to R_{\overline{\rho}}$ par $\Sigma = m(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}}) \circ \iota(\overline{\sigma}, R_{\overline{\rho}})$. On a par le calcul ci-dessus

Corollaire 4. Le morphisme Σ induit $\overline{\sigma}$ par réduction par l'idéal maximal de $R_{\overline{\rho}}$.

On montre alors en suivant [**Lang16a**, Proposition 3.4] :

Proposition 3.5. *(1) L'automorphisme Σ de $R_{\overline{\rho}}$ satisfait $\Sigma \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}} = \eta \cdot \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$.*
(2) L'automorphisme Σ de $R_{\overline{\rho}}$ est un relèvement de sigma: $\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i \to \mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$.

Démonstration. (1) Par définition de ψ, il y a un isomorphisme $\psi \circ (\overline{\eta} \cdot \overline{\rho})^{\mathrm{univ}} \cong \eta \otimes \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$. On en déduit que $\Sigma \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}} \cong \eta \cdot \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$.
(2) Soit $\alpha\colon R_{\overline{\rho}} \to \mathbb{I}$ le morphisme unique de W-algèbres satisfaisant $\rho_\mu \cong \alpha \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$. Soit $\pi_{\mathfrak{P}_i}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}/\mathfrak{P}_i$ et $\pi_{\mathfrak{P}_j}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$ les morphismes de quotient. Par l'isomorphisme $\rho_\mu^\sigma \cong \eta \cdot \rho_\mu$ et les remarques précédentes, on voit que

$$\sigma \circ \pi_{\mathfrak{P}_i} \circ \alpha \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}} \cong \eta \cdot (\pi_{\mathfrak{P}_j} \circ \alpha \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}) \cong \pi_{\mathfrak{P}_j} \circ \alpha \circ (\eta \cdot \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}) \cong \pi_{\mathfrak{P}_j} \circ \alpha \circ \Sigma \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}.$$

Par la propriété universelle de $\overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$, on a que $\sigma \circ \pi_{\mathfrak{P}_i} \circ \alpha \cong \pi_{\mathfrak{P}_j} \circ \alpha \circ \Sigma$, ce qui signifie que Σ est un relèvement de σ.

□

Plus généralement, soit A un objet de CLN_W et $\tau\colon \Gamma_F \to {}^LG(A)$ une déformation de $\overline{\rho}$. Soit $\alpha_\tau\colon R_{\overline{\rho}} \to A$ le morphisme de W-algèbres locales associé à τ par la propriété universelle. On définit une représentation $\tau^\Sigma\colon \Gamma_F \to {}^LG(A)$ par $\tau^\Sigma = \alpha_\tau \circ \Sigma \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}$. Le corollaire suivant est une conséquence de la Proposition 3.5.

Corollaire 5. Il y a un isomorphisme $\tau^\Sigma \cong \eta \cdot \tau$.

Démonstration. On a

$$\tau^\Sigma = \alpha_\tau \circ \Sigma \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}} \cong \alpha_\tau \circ (\eta \cdot \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}) \cong \eta \cdot (\alpha_\tau \circ \overline{\rho}^{\mathrm{univ}}) = \eta \cdot \tau.$$

□

3.3. Descente à un self-twist d'une famille. On va démontrer que l'automorphisme Σ de $R_{\overline{\rho}}$ défini dans la sous-section précédente induit un self-twist pour ρ_μ. Ceci achèvera la démonstration de la Proposition 3.1. Nous suivons l'argument de [**Lang16b**, Theorem 3.1] et [**Con16a**, Section 4.5] qui utilise l'existence de la famille de Hida twist d'une famille de Hida par un caractère et le caractère étale du morphisme de poids aux points arithmétiques génériques. Notons que la relation $\rho_\mu^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho_\mu$ entraîne que le cocaractère η_σ est non ramifié hors de $S \cup S_p$ et est non ramifié en p. En effet si $v \in S_p$, on a par ordinarité
$eta \cdot \delta_v = \delta_v^\sigma$ pour un élément $w \in W_G$. On a donc pour tout poids λ régulier $(\lambda_v \eta_v)^\sigma = \eta \cdot (\lambda_v \eta_v)^w$ pour un élément $w \in W_G$. Il existe un cocaractère dominant ν de T tel que $\nu \circ \lambda_v \eta_v$ soit non ramifié. On a aussi $\nu \circ (\lambda_v \eta_v)^\sigma$. Si $\nu \circ (\lambda_v \eta_v)^w$ est ramifié, il est d'image infine sur l'inertie, ce qui est impossible car η est d'ordre fini. On peut donc écrire η comme le quotient de deux caractères non ramifés en v. Le conducteur $C(\eta)$ est donc à support dans S.

Par dualité de Langlands, le caractère quadratique $\eta_\sigma \colon \Gamma_{F,S} \to {}^LG(\mathbb{I})$ définit un caractère $\eta \colon G(F)\backslash G(\mathbf{A}_F) \to \mathbb{I}^\times$. On voit facilement le

Lemme 3.6. *Pour toute représentation cuspidale algébrique de poids régulier λ sur G de niveau N, $\eta \otimes \pi$ est une représentation automorphe cuspidale algébrique de poids régulier λ sur G de niveau N_η multiple de N et divisant une puissance de N.*

Ceci permet de tordre la famille $\mu \colon \mathbb{T}_G(N) \to \mathbb{I}$ de niveau auxiliaire N en une famille $\mu_\eta \colon \mathbb{T}_G(N_\eta) \to \mathbb{J}$ de niveau auxiliaire N_η multiple de N et de même support Notons que le Nebentypus de μ_η est trivial car $j_{Z({}^LG)} \circ \eta = 1$.

Proposition 3.7. *Sous l'hypothèse que la compatibilité de la correspondance globale avec la correspondance locale est établie pour G, la famille $\mu_\eta \colon \mathbb{T}_G(N_\eta) \to \mathbb{J}$ se factorise par le morphisme surjectif de Λ'_G-algèbres $\mathbb{T}_G(N_\eta) \to \mathbb{T}_G(N)$.*

Démonstration. On procède comme dans la démonstration de [**Lang16a**, Proposition 3.2.4] : le conducteur auxiliaire de μ_η est constant pour toute spécialisation en poids régulier et, par la correspondance locale, il se lit du côté galoisien. On sait que $\sigma \circ \mu \pmod{\mathfrak{P}_i} = \mu_\eta \pmod{\mathfrak{P}_j}$ pour $\sigma\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i \to \mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$ avec $\mathfrak{P}_i, \mathfrak{P}_j | P_\lambda$. Comme le membre de gauche est de conducteur divisant N, le membre de droite aussi. $\square$

Démonstration. Pour démontrer la Proposition 3.1, on peut donc considérer les deux familles μ et μ_η sur $\mathbb{T}_G(N)$. Considérons le morphisme universel $\alpha_\mathbb{I} \colon R_{\overline{\rho}} \to \mathbb{I}$, resp. $\alpha_\mathbb{J} \colon R_{\overline{\rho}} \to \mathbb{J}$, associé à la représentation ρ_μ, resp. $\rho_{\mu_\eta} \cdot \eta^{-1}$. Notons d'abord que

$$\pi_{\mathfrak{P}_1} \circ \alpha_\mathbb{I} \circ \rho^{\mathrm{univ}} = \pi_{\mathfrak{P}'_1} \circ \alpha_\mathbb{J} \circ \rho^{\mathrm{univ}}$$

pour un premier $\mathfrak{P}'_1$ de $\mathbb{J}$ au-dessus de P_λ, ou encore

$$\pi_{\mathfrak{P}_1} \circ \alpha_\mathbb{I} = \pi_{\mathfrak{P}'_1} \circ \alpha_\mathbb{J}$$

Comme $\Lambda'_G \to \mathbb{T}_G$ est étale au-dessus de P_λ, ceci entraîne $\mathbb{I} = \mathbb{J}$.

On sait que $\Sigma \circ \rho^{\mathrm{univ}} = \eta \cdot \rho^{\mathrm{univ}}$. On a donc $\alpha_\mathbb{I} \circ \rho^{\mathrm{univ}} = \rho_\mu$ et $\alpha_\mathbb{J} \circ \Sigma \circ \rho^{\mathrm{univ}} = \rho_{\mu_\eta}$ (avec $\mathbb{J} = \mathbb{I}$). Par conséquent,

$$\sigma \circ \pi_{\mathfrak{P}_1} \circ \alpha_\mathbb{I} \circ \rho^{\mathrm{univ}} = \pi_{\mathfrak{P}_2} \circ \alpha_\mathbb{I} \circ \Sigma \circ \rho^{\mathrm{univ}}$$

ou encore

$$\sigma \circ \pi_{\mathfrak{P}_1} \circ \alpha_\mathbb{I} = \pi_{\mathfrak{P}_2} \circ \alpha_\mathbb{I} \circ \Sigma$$

Ceci entraîne que $\Sigma^*(\operatorname{Spec} \mathbb{I}) = \operatorname{Spec} \mathbb{I}$. Il existe donc un automorphisme $\Sigma_\mathbb{I}$ de $\mathbb{I}$ tel que

$$\Sigma_\mathbb{I} \circ \alpha_\mathbb{I} = \alpha_\mathbb{I}^\Sigma$$

Il satisfait

$$\Sigma \circ \rho_\mu = \eta \cdot \rho_\mu.$$

$\square$

4. Les anneaux de self-twists pour les représentations associées aux SVPH classiques

4.1. Isomorphismes de sous-groupes de congruences. Soit p premier. Soit $\widehat{G}$ un schéma en groupes réductifs connexes de Chevalley sur $\mathbb{Z}_p$, On suppose que son schéma en groupes dérivé $\widehat{G}'$ est absolument simple ; on note $\widehat{G}^{ad}$ son schéma en groupes adjoint. Soit $\widehat{\mathfrak{g}}'$ la $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Lie de $\widehat{G}'$. On a Soit $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers d'un corps p-adique E. On a

$$\widehat{G}^{ad}(\mathcal{O}_E) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathcal{O}_E))$$

Le sous-groupe $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}}') \subset \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}')$ des automorphismes de l'algèbre de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}'$ s'écrit

$$\mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}}') = \mathrm{Ad}(\widehat{G}^{ad}) \rtimes \Phi$$

où Φ désigne le groupe fini des automorphismes extérieurs de $\widehat{\mathfrak{g}}'$. C'est aussi le groupe des automorphismes du diagramme de Dynkin de $\widehat{G}$. On suppose la conjecture suivante.

Conjecture 4.1. *Soient Δ, Δ_1 deux sous-groupes de $\widehat{G}^{ad}(\mathcal{O}_E)$ contenant des sous-groupes de congruences principaux :*

$$\Gamma_{\widehat{G}^{ad}}(\mathfrak{a}) \subset \Delta, \quad \Gamma_{\widehat{G}^{ad}}(\mathfrak{a}_1) \subset \Delta_1$$

pour deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de $\mathcal{O}_E$. Soit $\Theta\colon \Delta \to \Delta_1$ un isomorphisme de groupes.

Il existe alors un automorphisme τ de E, un élément $\gamma \in \widehat{G}(E)$ et un automorphisme extérieur $\varphi \in \Phi$ tels que pour tout $\delta \in \Delta$,

$$\Theta(\delta) = \mathrm{Ad}(\gamma) \circ \varphi(\delta^\tau)$$

Cette conjecture est établie pour certains groupes de Chevalley : pour $\widehat{G} = \mathrm{GL}_2$ (voir [**Me73**, Theorem]), pour $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n$ avec $n \geq 3$ (voir [**OMZ69**, Main Theorem]) et pour $\widehat{G} = \mathrm{GSp}_{2n}$ (voir [**OM78**, Theorem 5.6.4]). Ces cas couvrent tous les exemples que nous avons en vue dans le Chapitre 4.

Le groupe Φ des automorphismes extérieurs se relève en un groupe d'automorphismes de $\widehat{G}$; soit ${}^LG = \widehat{G} \rtimes \Phi$ (ce sera le L-groupe d'un groupe G dans les exemples considérés au Chapitre 4). Notons que $({}^LG)^{ad} = \widehat{G}^{ad} \rtimes \Phi = \mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}}')$. La conjecture entraîne immédiatement le

Corollaire 6. Soient Δ, Δ_1 deux sous-groupes de ${}^LG(\mathcal{O}_E)$ contenant des sous-groupes de congruences principaux :

$$\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}) \subset \Delta, \quad \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}_1) \subset \Delta_1$$

pour deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}_1$ de $\mathcal{O}_E$. Soit $\Theta\colon \Delta \to \Delta_1$ un isomorphisme de groupes.

Il existe alors un automorphisme τ de E, un élément $\gamma \in {}^LG(E)$ et un homomorphisme $\chi\colon \Delta \to Z({}^LG)(\mathcal{O}_E)$ tels que pour tout $\delta \in \Delta$,

$$\Theta(\delta) = \chi(\delta) \cdot \mathrm{Ad}(\gamma)(\delta^\tau)$$

Notons qu'on peut avoir $\gamma \in {}^LG(E) \backslash \widehat{G}(E)$. Comme $\widehat{G}$ est un groupe classique déployé, le groupe Φ des automorphismes de son diagramme de Dynkin est d'ordre au plus 2 sauf pour SO_8 où il est d'ordre 6.

4.2. Grande image sur l'anneau des self-twists. Soit $\mu_\lambda\colon e\mathbb{T}_\lambda(U, \mathcal{O}) \longrightarrow \mathcal{O}$ un SVPH classique ordinaire de poids λ et $\rho = \rho_{\mu_\lambda}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathcal{O})$ la représentation galoisienne associée.

Soit $K = \mathrm{Frac}(\mathcal{O})$. Soit Γ le groupe de self-twists de ρ sur $\mathbb{Z}_p$ et soit $\mathcal{O}^\Gamma$ le sous-anneau des éléments de $\mathcal{O}$ fixé par Γ. Soit $\widehat{\mathfrak{g}}$ l'algèbre de Lie de $\widehat{G}$ et $\mathrm{Ad}\colon {}^LG \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}(K))$ la représentation adjointe. Soit E le sous-corps de K engendré par l'ensemble $\{\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}(\rho(g)))\}_{g \in \Gamma_F}$ sur $\mathbb{Q}_p$. Soit $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E.

Théorème 5. *On suppose* $\mathrm{Ad}\rho$ *absolument irréductible. On suppose de plus la condition* ($\mathbb{Z}_p - REG$) *. Alors,*

1) $\mathcal{O}^\Gamma = \mathcal{O}_E$

2) Il existe un idéal non nul $\mathfrak{a}$ de $\mathcal{O}_E$ et un élément $\gamma \in {}^LG(\mathcal{O}_K)$ tels que

$$\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}) \subset \gamma \cdot \mathrm{Im}\, \rho \cdot \gamma^{-1}.$$

Soit $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K)) \subset \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ le sous-groupe des automorphismes des Lie-algèbres. Soit π_{Ad} la projection naturelle ${}^LG(\mathcal{O}) \to ({}^LG)^{ad}(\mathcal{O})$ et soit $Ad\colon ({}^LG)^{ad}(\mathcal{O}) \hookrightarrow \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ le morphisme injectif donné par la représentation adjointe. Son image est le sous-groupe des automorphismes intérieurs.

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}^\Gamma$ résulte directement de la Proposition 1.3 et de la normalité de $\mathcal{O}^\Gamma$
Pour l'autre inclusion, il suffit, par normalité, de montrer que tout automorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}_E$ fixe $\mathcal{O}_K^\Gamma$. Soit σ un automorphisme de $\mathcal{O}$ sur $\mathcal{O}_E$. On a $(\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\rho)(g))^\sigma = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\rho)(g)$ pour tout $g \in \Gamma_F$. On a $\mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\rho^\sigma(g)) = \mathrm{Tr}(\mathrm{Ad}\rho(g))$. On sait que ρ est absolument irréductible. Ceci entraîne que $\mathrm{Ad}\,\rho$ est semisimple car si son image est contenue dans un parabolique propre, il en est de même pour celle de ρ^{ad} et donc pour celle de ρ ce qui est absurde. Comme les traces sont égales, il existe donc un isomorphisme entre les deux représentations semisimples $\mathrm{Ad}\rho, \mathrm{Ad}\rho^\sigma\colon \Gamma_F \to \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}')$:

$$\mathrm{Ad}\rho^\sigma \cong \mathrm{Ad}\rho.$$

Ceci implique qu'il existe un endomorphisme $\phi \in \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ satisfaisant

$$(**) \quad \mathrm{Ad}\rho^\sigma = \phi \circ \mathrm{Ad}\rho \circ \phi^{-1}.$$

La représentation adjointe Ad induit un isomorphisme $\pi_{\mathrm{Ad}}(\mathrm{Im}\,\rho) \cong \mathrm{Im}\,\mathrm{Ad}\rho$. Pour chaque $x \in \mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$, on note par Θ_x l'automorphisme de $\mathrm{GL}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ donné par la conjugaison par x. En particulier, on peux écrire l'équation $(**)$), $\mathrm{Ad}\rho^\sigma = \Theta_\phi(\mathrm{Ad}\rho)$. On va montrer qu'on peut remplacer ϕ par un élément $\phi' \in \mathrm{Aut}_{Lie}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ et on a $\mathrm{Ad}\rho^\sigma = \Theta_{\phi'}(\mathrm{Ad}\rho(\phi'))$.

Par l'inclusion $\mathcal{O}_E \subset \mathcal{O}^\Gamma$, on identifie $\widehat{G}'(\mathcal{O}_E)$ avec un sous-groupe de $\widehat{G}'(\mathcal{O}^\Gamma)$. Considérons le sous-groupe $\Delta = (\pi_{\mathrm{Ad}}\,\mathrm{Im}\,\rho) \cap \widehat{G}'(\mathcal{O}_E) \rtimes \Phi$ et son image $\mathrm{Ad}(\Delta) \subset \widehat{G}^{ad}(K)$. Le groupe compact $\mathrm{Ad}(\Delta) \subset \widehat{G}^{ad}(K)$ est absolument irréductible. On procède comme dans [**Con16a**, Proposition 3.11.8] : par l'hypothèse de $\mathbb{Z}_p$-régularité, le Théorème 07 de [**Pink98**] entraîne que $\mathrm{Ad}(\Delta)$ contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_{\widehat{G}^{ad}}(\mathfrak{a})$ de $\widehat{G}^{ad}(\mathcal{O}_E)$ pour un certain niveau non nul $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_E$. En effet, la forme H du groupe $\widehat{G}^{ad}$ telle que $\mathrm{Ad}(\Delta)$ soit ouvert dans $H(E)$ contient le tore normalisateur de l'élément $\mathbb{Z}_p$-régulier et est donc déployée sur E. On a donc $H = \widehat{G}^{ad}$. On a donc $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}) \subset \Delta$. Comme $\mathrm{Ad}\rho^\sigma = \Theta_\phi(\mathrm{Ad}\rho)$, on a l'égalité $(\mathrm{Ad}(\Delta))^\sigma = \Theta_\phi(\mathrm{Ad}(\Delta))$ des sous-groupes de $G'(\mathcal{O}_E)$. De plus σ agit trivialement sur $G'(\mathcal{O}_E)$, donc on a pour tout $\delta \in \Delta$:

$$(***) \quad \mathrm{Ad}(\delta) = \Theta_\phi(\mathrm{Ad}(\delta))$$

Par la conjecture 4.1, il existe un automorphisme τ de K, un élément $\gamma \in {}^LG(K)$ tel que

$$\Theta_\phi(\delta) = \mathrm{Ad}(\gamma)(\delta^\tau)$$

pour tout $\delta \in \Delta$. Par l'équation $(***)$, τ est trivial. On en déduit que $\Theta_\phi(y) = \Theta_{\mathrm{Ad}(\gamma)}(y)$ pour tout $y \in \mathrm{Ad}(\Delta)$. Par K-linéarité, on peut prolonger Θ_ϕ et $\Theta_{\mathrm{Ad}(\gamma)}$ au même automorphisme du sous-espace de $\mathrm{End}(\widehat{\mathfrak{g}}'(K))$ engendré par $\mathrm{Ad}(\Delta)$. Comme Δ contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_{\widehat{G}^{ad}}(\mathfrak{a})$, le K-sous-espace qu'il engendre contient $\mathrm{Ad}(\widehat{G})(K))$; en particulier il contient l'image de $\mathrm{Ad}\rho$. Donc Θ_ϕ et $\Theta_{\mathrm{Ad}(\gamma)}$ coïncident sur $\mathrm{Ad}\rho$, donc l'équation $(***)$) implique

$$\mathrm{Ad}\rho^\sigma = \Theta_{\mathrm{Ad}(\gamma)}(\mathrm{Ad}\rho).$$

Par la définition de $\Theta_{\mathrm{Ad}(\gamma)}$, on

$$\mathrm{Ad}\rho^\sigma = \mathrm{Ad}(\gamma) \circ \mathrm{Ad}\rho \circ (\mathrm{Ad}(\gamma))^{-1} = \mathrm{Ad}(\gamma\rho\gamma^{-1}).$$

Ceci entraîne l'existence d'un homomorphisme $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)(\mathcal{O}_K)$ tel que $\rho^\sigma \cong \eta_\sigma \cdot \rho$, et $\sigma \in \Gamma$. $\square$

REMARQUE 4.2. *Soit* $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ *une famille de Hida et* $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ *la représentation galoisienne associée à* μ*. On peut définir un anneau* $\Lambda'_G[\mathrm{TrAd}\rho_\mu]$ *analogue à l'anneau* $\mathcal{O}_E$ *dfini ci-dessus. Par la Proposition 1.3, on a l'inclusion facile* $\Lambda'_G[\mathrm{TrAd}\rho] \subset \mathbb{I}_0$*. Mais la démonstration de l'inclusion* $\mathcal{O}_K^\Gamma \subset \mathcal{O}_E$ *dans la proposition dépend du fait que* $\mathrm{Im}\,\rho$ *contient un sous-groupe de congruence de* $\widehat{G}'(\mathcal{O}_E)$*. Comme on ne sait pas si on a un analogue dans cette situation, on ne sait pas s'il a y encore l'égalité entre les normalisations de* $\Lambda'_G[\mathrm{TrAd}\rho]$ *et* $\mathbb{I}_0$*.*

Pour une représentation associée à un SVPH classique μ_λ, le Théorème 5 donne le résultat d'image pleine pour l'anneau $\mathcal{O}_E = \mathcal{O}^{\Gamma_{\mu_\lambda}}$ fixé par les self-twists. On peut lier l'anneau quotient $\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}$ aux anneaux $(\mathbb{I}/\mathfrak{P})^{\Gamma_\mathfrak{P}}$ pour les points classiques $\mathfrak{P}$.

Soit P_λ un premier arithmétique (dominant régulier admissible). Soit $\mathfrak{P}$ un premier de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_λ. Soit $\mu_\lambda^{0,1}\colon e\mathbb{T}_\lambda(U^{0,1},\mathcal{O}) \to \mathcal{O} = \mathbb{I}/\mathfrak{P}$ le SVPH classique associé à $\mathfrak{P}$. Posons $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathbb{I}_0$.

PROPOSITION 4.3. *On a une inclusion* $\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}_0 \subset \mathcal{O}^\Gamma$*.*

DÉMONSTRATION. Soit $\Gamma_\mathfrak{P}$ le groupe des self-twists de $\mathbb{I}/\mathfrak{P}$. Soit $\sigma \in \Gamma_\mathfrak{P}$ et $\eta_\sigma\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)((\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ le caractère associé à σ. Par le Corollaire 3.2, il existe un self-twist $\tilde\sigma\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ avec un caractère associé $\eta_{\tilde\sigma}\colon \Gamma_F \to Z({}^LG)((\mathbb{I})$ tel que $\mathfrak{P}$ est fixé par $\tilde\sigma$, $\tilde\sigma_\mathfrak{P} = \sigma$ et $\eta_{\tilde\sigma,\mathfrak{P}} = \eta_\sigma$. Comme $\tilde\sigma \in \Gamma$ et $\mathbb{I}_0 = (\mathbb{I})^\Gamma$, on a $\mathbb{I}_0 \subset (\mathbb{I})^{\langle\tilde\sigma\rangle}$, où les indices supérieurs signifient les invariants. Puisque $\tilde\sigma$ fixe $\mathfrak{P}$, on peut prendre la réduction modulo $\mathfrak{P}$ de l'inclusion précédente $\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}_0 \subset (\mathbb{I})^{\langle\tilde\sigma\rangle}/\mathfrak{P}$. Comme $\tilde\sigma$ fixe $\mathfrak{P}$ et que modulo $\mathfrak{P}$ $\tilde\sigma$ devient σ, on a $\mathbb{I}^{\langle\tilde\sigma\rangle}/\mathfrak{P} = (\mathbb{I}/\mathfrak{P})^{\langle\sigma\rangle}$, donc $\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}_0 \subset (\mathbb{I}/\mathfrak{P})^{\langle\sigma\rangle}$. Comme c'est vrai pour tous les σ, on a $\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}_0 \subset (\mathbb{I}/\mathfrak{P})^{\Gamma_\mathfrak{P}}$. $\square$

En résumé, on a le corollaire suivant :

COROLLAIRE 7. Soit $\rho = \rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ telle que $\overline{\rho}_\mu$ soit absolument irréductible et qu'on ait les conditions :

$(IRRAD_{G,\mathfrak{P}})$ pour un idéal $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{I}$ au-dessus d'un poids classique régulier, pour tout $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_λ, la représentation $\mathrm{Ad}\,\rho_\mu \pmod{\mathfrak{P}}$ est irréductible,

$(\mathbb{Z}_p{-}REG))$ pour tout $v \in S_p$ Im $rho_\mu(\Gamma_{F_v})$ contient un élément $\mathbb{Z}_p$-régulier $d_v = \rho\mu(\delta_v)$

et soit $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P} \cap \mathbb{I}_0^\circ$. Alors, l'image de $\rho_\mathfrak{P}\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ contient un sous-groupe de congruence de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{P}_0)$.

DÉMONSTRATION. Comme précédemment, soit $\mathcal{O}_E$ la clôture intégrale de $\mathbb{Z}_p[\mathrm{TrAd}\rho_\mathfrak{P}]$. Par le Théorème 5, l'image de $\rho_\mathfrak{P}$ contient un sous-groupe de congruence de $\widehat{G}'(\mathcal{O}_E)$. En combinant avec la Proposition 4.3, on a $\mathbb{I}_0^\circ/\mathfrak{P}_0 \subset \mathcal{O}_E$. Du coup, on a montré ce corollaire. $\square$

REMARQUE 4.4. *Dans* [**Lang16b**]*, où les images de Galois pour les familles de* GL_2 *formes sont étudiées, l'utilisation du Théorème 07 de* [**Pink98**] *n'est pas nécessaire. En fait, le résultat de pleine image pour les représentations associées aux* GL_2*-formes propres est dû à Ribet et Momose (voir* [**Ri76**, Theorem 3.1] *et* [**Mom81**]*) ; il est valable sur l'anneau fixé par les self-twists de la représentation.*

5. Un argument d'approximation

Dans cette section, on généralise un résultat d'approximation de [**HT15**, Lemme 4.5]. Soit $\widehat{G}$ un schéma en groupes réductifs déployé sur $\mathbb{Z}_p$. On fixe un tore maximal déployé $\widehat{T}$ et un Borel $\widehat{B} = \widehat{T}\widehat{N}$; ce choix induit une partition de l'ensemble des racines $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$

où Φ^+ désigne l'ensemble des racines positives de $\widehat{G}$. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on note $U^\alpha\colon \mathbb{G}_a \to \widehat{G}$ le groupe à un paramètre associé à α.

On dit qu'un élément $\delta \in \widehat{T}(A)$ est A-régulier, si pour toute racine $\alpha \in \Phi$ $\alpha(\delta) \not\equiv 1 \mod \mathfrak{m}_A$.

PROPOSITION 5.1. *Soit A un anneau local profini de corps résiduel fini de caractéristique p. Soit H un sous-groupe fermé contenu dans le sous-groupe de congruence principal de niveau p, $\Gamma_{\widehat{G}}(p)$ de $\widehat{G}(A)$. Supposons que le groupe H est normalisé par un élément A-régulier dans le tore $\widehat{T}(A)$.*

Pour tout idéal Q de A, posons $\pi_Q\colon \widehat{G}(A) \to \widehat{G}(A/Q)$ la projection naturelle. Pour tout $\alpha \in \Phi$, on a

$$\pi_Q(H) \cap U^\alpha(A/Q) = \pi_Q(H \cap U^\alpha(A)).$$

L'inclusion $\pi_Q(H \cap U^\alpha(A)) \subset \pi_Q(H) \cap U^\alpha(A/Q)$ est évidente, Il s'agit de montrer que tout élément de $\pi_Q(H) \cap U^\alpha(A/Q)$ se relève dans $H \cap U^\alpha(A)$. Dans notre application, H sera associé à l'image d'une repésentation continue d'un certain groupe de Galois dans un L-groupe dont $\widehat{G}$ sera la composante neutre.

DÉMONSTRATION. Les sous-groupes unipotents U^α et $U^{-\alpha}$ engendrent un sous-groupe de $\widehat{G}(A)$ qui est isomorphe à $\mathrm{SL}_2(A)$. On le note par $\mathrm{SL}_2^\alpha(A)$. On note aussi $\Gamma_\alpha(p)$ le sous-groupe de congruence principal de niveau p de $\mathrm{SL}_2^\alpha(A)$. Désormais, on va considérer les groupes $U^{\pm\alpha}$ omme des sous-groupes de $\mathrm{SL}_2^\alpha(A)$. On pose $\widehat{T}^\alpha = \widehat{T} \cap \mathrm{SL}_2^\alpha$ et $\widehat{B}^{\pm\alpha} = \widehat{T}^\alpha U^{\pm\alpha}$. On note $\mathfrak{sl}_2^\alpha, \mathfrak{u}^{\pm\alpha}, \mathfrak{t}^\alpha, \mathfrak{b}^{\pm\alpha}$ les algèbres de Lie des sous-groupes correspondants dans SL_2^α. Soit j un entier positif, on définit π_{Q^j} la projection $\widehat{G}(A) \to \widehat{G}(A/Q^j)$. On utilise π_{Q^j} aussi pour sa restriction : $\mathrm{SL}_2^\alpha(A) \to \mathrm{SL}_2^\alpha(A/Q^j)$. On définit les sous-groupes de congruence de SL_2^α de niveau pQ^j par

$$\begin{aligned}
\Gamma_\alpha(Q^j) &= \{x \in \Gamma_\alpha(p) | \pi_{Q^j} x = \mathrm{Id} \in \mathrm{SL}_2^\alpha(A/Q^j)\},\\
\Gamma_{U^\alpha}(Q^j) &= \{x \in \Gamma_\alpha(p) | \pi_{Q^j} x \in U^\alpha(A/Q^j)\},\\
\Gamma_{\widehat{B}^\alpha}(Q^j) &= \{x \in \Gamma_\alpha(p) | \pi_{Q^j} x \in \widehat{B}^\alpha(A/Q^j)\}.
\end{aligned}$$

Notons bien que le niveau en p est implicite : tous les groupes considérés ici deviennent triviaux modulo p. On pose ausi $H_{U^\alpha}(Q^j) = H \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$ et $H_{\widehat{B}^\alpha}(Q^j) = H \cap \Gamma_{\widehat{B}^\alpha}(Q^j)$. Soient x, y dans $\widehat{G}(A)$, on note par $[x, y]$ leur commutateur $xyx^{-1}y^{-1}$. Pour un sous-groupe $S_1 \subset \widehat{G}(A)$, on note par DS_1 son sous-groupe dérivé. De plus, on note par $[X, Y]_{\mathrm{Lie}}$ le crochet de Lie sur $\widehat{\mathfrak{g}}(A)$ et aussi sa restriction sur $\mathfrak{sl}_2(\alpha)(A)$.

On a le lemme suivant :

LEMME 5.2. *Soit j un entier positif, on a*

$$D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j) \subset \Gamma_{\widehat{B}^\alpha}(Q^{2j}) \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q^j).$$

Ici DG signifie le groupe dérivé de G.

DÉMONSTRATION. Soit $X \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$. X a une décomposition : $X = UM$ avec $U \in U^\alpha$ et $M \in \Gamma_\alpha(Q^j)$.

Donc, on voit

$$\Gamma_{U_\alpha}(Q^j) = \Gamma_\alpha(Q^j)\iota_\alpha(U_{\mathrm{SL}(2)}(A).$$

Note that

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e & f \\ g & -e \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} bg-cf & 2(af-be) \\ 2(ce-ag) & cf-bg \end{pmatrix}.$$

Du coup, on a

LEMME 5.3. *If $X, Y \in \mathfrak{sl}_2(A) \cap \begin{pmatrix} Q^j & Q^k \\ Q^i & Q^j \end{pmatrix}$ with $i \geq j \geq k$, $[X, Y] \in \begin{pmatrix} Q^{i+k} & Q^{j+k} \\ Q^{i+j} & Q^{i+k} \end{pmatrix}$.*

Soient $X, X_1 \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$

on a $[X, X_1] \in \Gamma_{\widehat{B}^\alpha}(Q^{2j})$. L'autre inclusion $[X, X_1] \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$ est évidente parce que X, X_1 sont dans $\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$. Donc on a démontré ce lemme. $\square$

Soit $d \in T(A)$ l'élément A-régulier qui normalise H dans l'hypothèse. Comme A est complet pour la topologie p-adique, la limite $\lim_{n\to\infty} d^{p^n}$ définit un élément $\delta \in T(A)$. Par la définition, on a $\delta^p = \delta$, donc $\delta^{p-1} = I$ et l'ordre de δ dans $G(A)$ est un diviseur de $p-1$. On note son ordre par a. Par l'hypothèse, H est un sous-groupe compact de $\Gamma_G(A)(p)$, donc H est un pro-p groupe et δ normalise H. On note par $\mathrm{Ad}(\delta)$ l'action par conjugaison de δ sur $G(A)$.

Considérons le pro-p sous-groupe $\Gamma_A(p)$ de SL_2^α. Tout élément de $\Gamma_A(p)$ a une unique a-ième racine dans $\Gamma_A(p)$ grâce aux l'existence des fonctions log et exp. Comme δ est dans la tore, il normalise $\Gamma_A(p)$. On définit une application $\Delta\colon \Gamma_A(p) \to \Gamma_A(p)$ par :

$$\Delta(x) = (x \cdot (\mathrm{Ad}(\delta)x) \cdot \alpha(\delta)^{-1} \cdot (\mathrm{Ad}(\delta^2)(x)) \cdot \alpha(\delta)^{-2} \cdots (\mathrm{Ad}(\delta^{a-1})(x)) \cdot \alpha(\delta)^{1-a})^{1/a}$$

pour tout $x \in \Gamma_A(p)$. Notons que l'application Δ n'est pas un homomorphisme, mais il induit un homomorphisme des groupes abéliens $\Delta^{\mathrm{ab}}\colon \Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p) \to \Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p)$.

Le lemme suivant est un analogue de [**HT15**, Lemme 4.7]

Lemme 5.4. *Soit $u \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$ avec j un entier positif, alors $\pi_{Q^j}(\Delta(u)) = \pi_{Q^j}(u)$ et $\Delta(u) \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^{2j})$.*

Démonstration. Par la définition de sous-groupe U^α associé à α, on a $\mathrm{Ad}(\pi_{Q^j}(\delta))(x) = \pi_{Q^j}(\alpha(\delta))(x)$ pour tout $x \in U^\alpha(A/Q^j)$. Comme Δ commute avec la projection, on a $\pi_{Q^j}(\Delta(u)) = \Delta(\pi_{Q^j}(u)) = \pi_{Q^j}(u)$ pour tout $u \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$.

Considérons l'homomorphisme $\Delta^{\mathrm{ab}}\colon \Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p) \to \Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p)$. Par un calcul direct, on a $\mathrm{Ad}(\delta)(\Delta^{\mathrm{ab}}(x)) = \alpha(\delta)(\Delta^{\mathrm{ab}}(x))$ pour tout $x \in \Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p)$. Donc l'image de Δ^{ab} est dans le $\alpha(\delta)$-espace propre pour l'action de $\mathrm{Ad}(\delta)$ sur $\Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p)$. Cet espace est justement $U^\alpha(A)D\Gamma_A(p)/D\Gamma_A(p)$ (pour ceci, on peut le voire clairement par la décomposition Iwahorique de $\Gamma_A(p)$).

Notons que par la première partie de la proposition, l'application Δ^{ab} induit un homomorphisme $\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{U^\alpha}} : \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j) \to \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$. Par la remarque dans le paragraph précédent,

$$\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{U^\alpha}}(\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)) \subset \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j).$$

Par le lemme 5.2, on a $D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j) \subset \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}) \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$, donc

$$\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{U^\alpha}}(\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j)) \subset \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}) \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)/D\Gamma_{U^\alpha}(Q^j).$$

Donc on a $\Delta(u) \in \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}) \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q^j)$.

Pour le même raison, Δ induit une application :

$$\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{B^\alpha}} : \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})/D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}) \to \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})/D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}).$$

L'image de $\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{B^\alpha}}$ est dans le $\alpha(\delta)$-sous espace propre pour l'action de $\mathrm{Ad}(\delta)$. Ce sous espace est précisément $U^\alpha(Q^{2j})D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})/D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})$. Notons que $D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}) \subset U^\alpha(Q^{2j})$, donc

$$\Delta^{\mathrm{ab}}_{\Gamma_{B^\alpha}}(\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})/D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})) \subset \Gamma_{U^\alpha}(Q^{2j})/D\Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j}).$$

Comme $\Delta(u) \in \Gamma_{B^\alpha}(Q^{2j})$, on conclut que $\Delta^2(u) \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^{2j})$. $\square$

On finit la démonstration de la proposition 5.1. Voyons $H \cap U^\alpha(A)$ et $\pi_Q(H) \cap \mathrm{SL}_2(A/Q)$ comme les sous-groupes respectivement de $\mathrm{SL}_2^\alpha(A)$ et $\mathrm{SL}_2^\alpha(A/Q)$. Soit $\overline{u} \in \pi_Q(G) \cap U^\alpha(A/U)$. Prenons $u_1 \in H$ et $u_2 \in U^\alpha(A)$ tels que $\pi_Q(u_1) = \pi_Q(u_2) = \overline{u}$. Alors $u_1 u_2^{-1} \in \Gamma_A(Q)$, donc $u_1 \in H \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q)$. Notons que $H \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q)$ est compact parce que H et $\Gamma_{U^\alpha}(Q)$ sont des pro-p groupes. Par le lemme5.4, on a $\pi_Q(\Delta^{2^m}(u_1)) = \overline{u}$ et $\Delta^{2^m}(u_1) \in \Gamma_{U^\alpha}(Q^{2m})$ pour tout m entier positif. Donc la limite $\lim_{m\to\infty} \Delta^{2^m}(u_1)$ définit un élément $u \in \mathrm{SL}_2(A)$ satisfaisant $\pi_Q(u) = \overline{u}$. On a $u \in H \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q)$, parce que $H \cap \Gamma_{U^\alpha}(Q)$ est compact. Ceci montre que la surjectivité de l'application $H \cap U^\alpha(A) \to \pi_Q(H) \cap \mathrm{SL}_2(A/Q)$. $\square$

On donne un corollaire comme une application simple de cette proposition.

COROLLAIRE 8. Soit $\rho = \rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ une représentation galoisienne satisfaisant $(IRRAD_{\mathfrak{P}})$ et $(\mathbb{Z}_p - REG)$. Alors pour toute racine α de G, le groupe $\mathrm{Im}\,\rho \cap U^\alpha(\mathbb{I})$ est non-trivial.

DÉMONSTRATION. Par $(IRRAD_{\mathfrak{P}})$ et Proposition 5, $\mathrm{Im}\,\rho_{\mathfrak{P}}$ contient un sous-groupe de congruence de $\widehat{G}'(\mathcal{O}_E)$ où $\mathcal{O}_E$ désigne la clôture normale de $\mathbb{Z}_p[\mathrm{TrAd}\rho_{\mathfrak{P}}]$. En particulier, $\mathrm{Im}\,\rho_{\mathfrak{P}} \cap U^\alpha(\mathbb{I}/\mathfrak{P})$ est non-trivial pour toute racine α. En prenant $A = \mathbb{I}, H = \mathrm{Im}_\rho$ et $Q = \mathfrak{P}$, la Proposition 5.1 implique que la projection $\mathrm{Im}\,\rho \cap U^\alpha(\mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}) \to \mathrm{Im}\,\rho \to \mathrm{Im}\,\rho_{\mathfrak{P}} \cap U^\alpha(\mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P})$ est surjective pour toutes racines α. En particulier, $\mathrm{Im}\,\rho_{\mathfrak{P}} \cap U^\alpha(\mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}})$ est non-trivial pour toute racine α. $\square$

6. les sous-groupes unipotents dans l'image de Galois

Soit $\mu \colon \mathbb{T}_h \to \mathbb{I}$ une famille. Soit $\rho \colon \Gamma \to \mathbb{G}(\mathbb{I})$ la représentation associée à μ. On suppose que ρ est $\mathbb{Z}_p$-régulière et résiduellement irréductible. Soit le groupe Γ le groupe de self-twists de ρ. Soit $\mathbb{I}$ le sous anneau des éléments fixés par Γ de $\mathbb{I}$. Par une restriction du domaine de définition de ρ et remplacer ρ par certain son conjugaison, on peut construire une représentaion $\mathbb{Z}_p$-régulière dont l'image est fixé par Γ. On écrit η_σ pour le caractère de Galois d'ordre fini associé à $\sigma \in \Gamma$. Définissons $H_0 = \cap_{\sigma\in\Gamma} \ker \eta_\sigma$. Comme Γ est fini, le sous-groupe H_0 est ouvert et distingué dans Γ.

PROPOSITION 6.1. *Supposons*
(1) Im ρ *contient un élément $\mathbb{Z}_p$-régulier $d = \rho(\delta) \in {}^LG(\mathbb{Z}_p)$*
(2) $\overline{\rho}|_{H_0}$ est irréductible,
alors, il existe un élément $g \in {}^LG(\mathbb{I})$ tel que : $g\rho g^{-1}(H_0) \subset {}^LG(\mathbb{I}_0)$;

Il serait bienvenu de se débarrasser de l'hypothèse (1) comme dans [**Lang16b**, Theorem 7.5] et [**Con16a**, Proposition 4.8.2]. Avant de commencer la démonstration, on va d'abord établir un lemme.

LEMME 6.2. *Soient F un corps et α une racine de G. Supposons qu'il existe $u_0 \in U^\alpha(F)$ non-trivial et $g \in G(F)$ tel que $gu_0g^{-1} \in u^\alpha(F)$. Alors g normalise $U^\alpha(F)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $N^\alpha(F)$ un sous-groupe de $M_n(F)$ définit par $N^\alpha(F) = \{u - I_n | u \in U^\alpha(F)\}$. Pour $n_0 = u_0 - I_n$, on a $N^\alpha(F) = \{fn_0 | f \in F\}$ et $U^\alpha(F) = \{I_n + n | n \in N^\alpha(F)\}$. Conjugaison par g sur $M_n(F)$, donc pour tout $f \in F$, on a

$$g(I_n+fn_0)g^{-1} = gI_ng^{-1}+gfn_0g^{-1} = I_n+fgn_0g^{-1} = I_n+fg(u_0-I_n)g^{-1} = I_n+f(gu_0g^{-1}-I_n).$$

Par l'hypothèse, $gu_0g^{-1} \in U^\alpha(F)$, donc $gu_0g^{-1} - I_n \in N^\alpha(F)$. Donc $f(gu_0g^{-1} - I_n) \in N^\alpha(F)$ et $I_n + f(gu_0g^{-1} - I_n) \in U^\alpha(F)$. Ceci montre le lemme. $\square$

DÉMONSTRATION. (1) Comme $\overline{\rho}|_{H_0}$ est irréducitble, on considère $\Xi = (\Xi_n)_n$ le pseudo-caractère de V. Lafforgue associé à $\rho|_{H_0} \colon H_0 \to {}^LG(\mathbb{I})$. La relation

$$\rho^\sigma \equiv \eta_\sigma \cdot \rho$$

montre que Ξ coïncide avec le pseudo-caractère associé à $\rho^\sigma|_{H_0}$. On a donc $\Xi^\sigma = \Xi$, c'est à dire que Ξ est à valeurs dans $\mathbb{I}_0$. Par le Théorème 4.10 de [**BHT17**], on conclut qu'il existe un homomorphisme continu $\rho_0 \colon H_0 \to {}^LG(\mathbb{I}_0)$ de pseudo-caractère Ξ.

(2) On peut supposer que $d \in \widehat{T}(\mathbb{Z}_p)$. La relation ci-dessus implique l'existence une matrice $C_\sigma \in G(\mathbb{I}_0)$ telle que pour tout $h \in H_0$,

$$\rho^\sigma(h) = \eta_\sigma C_\sigma \rho(h) C_\sigma^{-1}.$$

LEMME 6.3. *Pour tout $\sigma \in \Gamma$, $C_\sigma \in \widehat{T}(\mathbb{I}_0)$.*

DÉMONSTRATION. Soit α une racine quelconque de $\widehat{G}$. Soit u^α un élément non-trivial dans $\mathrm{Im}\,\rho \cap U^\alpha(\mathbb{I})$. Tel u^α existe par le Corollaire 8. Soit $g^\alpha \in \Gamma_F$ un élément tel que $\rho(g^\alpha) = u^\alpha$. En prenant pour $h = g^\alpha$ dans l'équation ci-dessus, on obtient $C_\sigma u^\alpha C_\sigma^{-1} = (u^\alpha)^\sigma$, qui est aussi un élément de $U^\alpha(\mathbb{I})$. C_σ agit par conjugaison donc un automorphisme de $G(Q(\mathbb{I}))$. Par le Lemme 6.2, en prenant $F = Q(\mathbb{I}), u_0 = u^\alpha$ et $g = C_\sigma$, on déduit que C_σ normalise $U^\alpha(Q(\mathbb{I}))$. C'est vrai pour toutes les racines α. Comme $\widehat{T}$ est son propre normalisateur, on en déduit que $C_\sigma \in \widehat{T}(\mathbb{I}_0)$.

□

Posant $\rho(\delta) = d \in \widehat{T}(\mathbb{I}_0)$, la relation 1

$$\rho(\delta) = \eta_\sigma(\delta) C_\sigma \rho(\delta) C_\sigma^{-1} = \rho(\delta)$$

entraîne $\eta_\sigma(\delta) = 1$, c'est à dire, $\delta \in H_0$.

□

7. Sous-groupes unipotents dans l'image d'une grande représentation Galoisienne

Soit μ une famille de Hida et $\rho_\mu \colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I})$ la représentation associée. On suppose que $\mathrm{Im}\ \rho_\mu$ contient un élément $\mathbb{Z}_p$-régulier. Pour toute racine α de $\widehat{G}$, on identifie le groupe unipotent $U^\alpha(\mathbb{I}_0)$ à $\mathbb{I}_0$ et $\mathrm{Im}\,\rho_\mu \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0)$ à un $\mathbb{Z}_p$ sous-module de $\mathbb{I}_0$. Le but de cette section est de montrer que, pour toute α, $\mathrm{Im}\,\rho_\mu \cap U^\alpha$ contient une base d'un Λ'_G-réseau dans $\mathbb{I}_0$. Notre stratégie est inspirée par [**HT15**] et [**Lang16a**]. On le fait en deux étapes :

(1) montrer qu'il existe un premier arithmétique non-trivial $P_\lambda \subset \Lambda'_G$ tel que $\mathrm{Im}\,\rho_{\mu,P_\lambda \mathbb{I}_0} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_{\lambda\mathbb{I}_0})$ contient une base d'un Λ'_G/P_λ-réseau dans $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$:

(2) montrer que le morphisme naturel $\mathrm{Im}\,\rho_\mu \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0) \to \mathrm{Im}\,\rho_{\mu,P_\lambda\mathbb{I}_0} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_{\lambda\mathbb{I}_0})$ est surjectif, donc on peut relever une base dans (1) à une base d'un Λ'_G réseau dans $\mathbb{I}_0$.

La partie (1) est prouvée en adaptant le travail de [**Lang16a**, Sections 3 et 5] à notre situation et le combinant avec le Théorème 5. Partie (2) est une application de la Proposition 5.1.

7.1. Groupes juste-infinis.

Ici on fait une digression sur la théorie des groupes juste-infinis.

DÉFINITION 7.1. *Soit G est un groupe abstrait. On dit G est que juste-infini, s'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) G est infini ;

(2) tous sous-groupe distingué non-trivial est d'indice fini.

DÉFINITION 7.2. *Soit $\mathcal{X}$ une classe des sous-groupes de G. On dit que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{B}$-clos, si elle vérifie la propriété suivante :*

Soient H et K deux sous-groupes de G. Si H et K sont des sous-groupes distingués dans le sous-groupe $\langle H, K\rangle$ engendré par H et K, si de plus $H \cap K$ et HK sont dans $\mathcal{X}$, alors H et K sont dans $\mathcal{X}$.

Soit $\mathcal{X}$ une classe de sous-groupes. On définit $\mathcal{X}'$ la classe des groupes dont tous les sous-groupes distingués sont dans $\mathcal{X}$. On définit récursivement $\mathcal{X}^{(n)}$ en posant $\mathcal{X}^{(0)} = \mathcal{X}$ et

$\mathcal{X}^{(n+1)} = (\mathcal{X}^{(n)})'$. Évidemment $\mathcal{X}^{(n)}$ est la classe des sous-groupes G tels que $H \in \mathcal{X}$ pour tout $H \lhd^n G$.

Lemme 7.3. [**Wi00**, Lemme 3.1] *Si $\mathcal{X}$ est $\mathcal{B}$-clos, alors $\mathcal{X}^{(n)}$ l'est aussi pour tout $n \geq 0$.*

Lemme 7.4. [**Wi00**, Lemme 3.2] *La classe des sous-groupes juste-infinis est $\mathcal{B}$-clos.*

On fixe quelques notations : soient H un sous-groupe de G, T un sous-ensemble de G et $t \in T$. On note tHt^{-1} par H^t, et $\langle H^t | t \in T \rangle$ par H^T. Soit $n \geq 1$. Rappelons qu'un sous groupe H de G est dit n-sous-distingué s'il existe une suite de sous-groupes $(G_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec $G_{i+1} \lhd G_i$, $G_0 = G$, $G_n = H$. On écrit alors $H \lhd^n G$.

Soit H un sous-groupe 2-sous-distingué : $H \lhd^2 G$; soit T un sous-ensemble fini de G. Alors $H^t \lhd H^G$ pour tout $t \in T$ et le groupe H^T est le produit de ces groupes.

Lemme 7.5. [**Wi00**, Lemme 3.3] *Soient $H \lhd^2 G$ et T' un sous-ensemble fini de G. Posons $T = T' \cup \{1\}$ et $H^* = H \cap H^{T'}$. Alors,*

$$(H^{*T'}H)(H^{T'}) = H^T \quad et \quad (H^{*T'}H) \cap (H^{T'}) = H^{*T}.$$

Si G_0 est un sous-groupe distingué d'indice fini de G, on note $G_0 \lhd_f G$.

Proposition 7.6. [**Wi00**, Proposition 3.4] *Supposons que $\mathcal{X}$ est $\mathcal{B}$-clos. Soient $G \in \mathcal{X}'$ et $G_0 \lhd_f G$. Alors $G_0 \in \mathcal{X}'$.*

Corollaire 9. [**Wi00**] Soit $\mathcal{X}$ une classe $\mathcal{B}$-close. Soit G un groupe juste-infini. Si tous les sous-groupes distingués fermés de G sont dans $\mathcal{X}$, alors tout les sous-groupes sous-distingués fermés de G sont aussi dans $\mathcal{X}$.

Soit F un corps p-adique et $\underline{G}$ un groupe réductif absolument simple de type adjoint sur F ; soit R l'anneau de valuation de F. Prenons $G = \underline{G}(R)$. Le groupe G est un groupe profini et tout sous-groupe distingué fermé N non trivial de G est ouvert. En effet, N est infini car G ne contient pas de sous-groupe distingué fini non trivial ; l'algèbre de Lie $\mathrm{Lie}(N)$ est non nulle car N n'est pas discret, et c'est un idéal de $\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Lie}(\underline{G})$; elle est donc égale à $\mathrm{Lie}(G)$, et N est ouvert. Par définition, G est un groupe juste-infini. On prend la classe $\mathcal{X} = \{H : H \text{est un sous-groupe ouvert de} G\}$. Si $H \cap K$ est ouvert dans G, alors H et K sont aussi ouverts dans G. Ceci implique que la classe $\mathcal{X}$ est $\mathcal{B}$-close. Par le Corollaire 9, on montre que tous sous-groupe sous-distingué est dans $\mathcal{X}$, c-à-d, ils sont tous ouverts. On en déduit le théorème suivant.

Corollaire 10. [**Wi00**, Corollary 3.5] Soit G un groupe algébrique absolument simple sur un corps p-adique F, Soit $N \lhd^m G(\mathcal{O}_F)$ un sous-groupe sous-distingué qui n'est pas contenu dans le centre. Alors N est un sous-groupe ouvert, autrement dit, il contient un sous-groupe de congruence $\Gamma_G(\mathcal{O}_F)$.

7.2. Grande image dans le produit. Pour un idéal premier arithmétique régulier $P_\lambda \subset \Lambda'_G$, considérons les conditions

$(IRRAD_\lambda)$ Pour tout premier $\mathfrak{P} \subset \mathbb{I}$ au-dessus de P_λ, la représentation $\mathrm{Ad}\,\rho_{\mathfrak{P}}$ est absolument irréductible.

$(NON_{H,\lambda})$ Pour tout premier $\mathfrak{P} \subset \mathbb{I}$ au-dessus de P_λ, la représentation $\rho_{\mathfrak{P}}$ n'est pas de type H.

Rappelons que $(IRRAD_\lambda)$ entraîne $(NON_{H,\lambda})$ et que $(IRRAD_\lambda)$ entraîne le Théorème 5 pour tout premier PG de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_λ.

Lemme 7.7. *Il existe un premier arithmétique $P_\lambda \subset \Lambda'_G$ régulier qui satisfait $(NON_{H,\lambda})$.*

Démonstration. Considérons l'ensemble Σ_H des idéaux premiers $\mathfrak{P}$ de $\mathbb{I}$ tels qu'il existe $\rho_{H,\mathfrak{P}}$ telle que $\rho_{\mathfrak{P}} = r \circ \rho_{H,\mathfrak{P}}$. Il suffit de montrer que la restriction à Σ_H du morphisme fini Spec, $\mathbb{I} \to \mathrm{Spec}\Lambda'_G$ n'est pas surjective. Si elle létait, Σ_H serait Zariski-dense dans Spec $\mathbb{I}$. Par la définition, l'idéal de congruence $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ est contenu dans l'intersection des premiers de Σ_H, donc il serait nul, ce qui est absurde. Il y a donc des poids classiques réguliers λ tels que pour tout $\mathfrak{P}$ au-dessus de P_λ, $\rho_{\mathfrak{P}}$ n'est pas de type H. □

Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de $\mathbb{I}_0^\circ$. On définit un sous-groupe H_0' de H_0 par

$$H_0' = \{g \in H_0 | \rho(g) \equiv 1 (\mod \mathfrak{m}_0)\}.$$

C'est un sous-groupe ouvert distingué de H_0, donc de Γ. Par la Proposition 6.1, on peut supposer que $\rho|_{H_0} \subset G(\mathbb{I}_0)$. Rappelons que $\nu = \widehat{j} \circ \widehat{\pi}|_{Z(^L G)}$ est une isogénie de degré divisant $p-1$ (voir la condition $(H1)$ de la Section 3.2). Avec les notations de $(H1)$ et $(H2)$, on peut donc former la représentation $\rho_0 \colon H_0' \to \widehat{G}'(\mathbb{I}_0)$ définie par

$$\rho_0 = \rho|_{H_0'} \cdot (\nu_{rec} \circ {}^L j \circ \rho|_{H_0'})^{-1}.$$

où l'application réciproque ν_{rec} de ν est bien définie sur

$$(\widehat{Z_G})_1(\mathbb{I}_0) = \mathrm{Ker}(\widehat{Z_G}(\mathbb{I}_0) \to \widehat{Z_G}(\mathbb{I}_0/\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_0})$$

Même si nos résultats sont énoncés pour la représentation ρ, on a besoin de travailler avec ρ_0 et sa réduction modulo un idéal premier de $\mathbb{I}_0$.

Pour chaque idéal premier $\mathfrak{P}_i$, $i = 1, \dots, r$ au-dessus de P_λ, on note $\mathfrak{O}_i = \mathfrak{P}_i \cap \mathbb{I}_0$. Soit $\mathfrak{I}$ égale à $P_\lambda \mathbb{I}_0$ ou $\mathfrak{O}_i$ pour $i \in \{1, 2, \cdots, r\}$. Soit $\rho_{\mathfrak{I}} \colon H_0 \to {}^L G(\mathbb{I}_0/\mathfrak{I})$ et $\rho_{0,\mathfrak{I}} \colon H_0' \to \widehat{G}'(\mathbb{I}_0)$ les réduction modulo $\mathfrak{I}$ de ρ et ρ_0 respectivement. Soit $\mathcal{G} = \rho_{\mathfrak{I}}(H_0')$ et $\mathcal{G}_0 = \rho_{0,\mathfrak{I}}(H_0')$. Soit

$$({}^L G)_1(\mathbb{I}_0) = \{g \in {}^L G(\mathbb{I}_0); {}^L j(g) \in \widehat{Z_{G}}_1(\mathbb{I}_0)\}$$

Soit $f \colon ({}^L G)_1(\mathbb{I}_0) \to \widehat{G}'(\mathbb{I}_0)$ l'homomorphisme $g \mapsto (\nu_{rec} \circ {}^L j(g))^{-1} g$. Il est surjectif (en fait $f \circ f = f$) et on a $\mathcal{G}_0 = f(\mathcal{G})$ par définition de ρ_0.

Lemme 7.8. *Le sous-groupe $\mathcal{G}$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{I})$ si et seulement si le sous-groupe $\mathcal{G}_0$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0^\circ/\mathfrak{I})$.*

Démonstration. Un sous-groupe de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0^\circ/\mathfrak{I})$ est de congruence (c'est à dire contient un sous-groupe de congruence) si et seulement si il est ouvert. Si $\mathcal{G}_0$ est de congruence dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0^\circ/\mathfrak{I})$, il en va de même pour $\mathcal{G}$ puisque $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$. Réciproquement, si $\mathcal{G}$ est de congruence : on a $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{G} \cap \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{I})$.

La restriction de f à $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{I})$ est l'identité et $f(\mathcal{G}) = \mathcal{G}_0$. Si on applique f aux deux membres de l'inclusion on trouve donc $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{G}_0$. □

On fixe un premier P_λ régulier, étale dans $\mathbb{T}_G$ jusquà la fin de la section. L'idéal $P_\lambda \mathbb{I}$ s'écrit donc comme une intersection d'idéaux premiers distincts $\mathfrak{P}_i$ de $\mathbb{I}$, donc $P_\lambda \mathbb{I}_0$ est l'intersection des idéaux premiers $\mathfrak{Q}_i$ de $\mathbb{I}_0$. Pour tout facteur premier $\mathfrak{Q}$ de $P_\lambda \mathbb{I}_0$, posons $\rho_{0,\mathfrak{Q}} \colon H_0' \to \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q})$ la réduction de ρ_0 modulo $\mathfrak{Q}$.

Lemme 7.9. *Soit $\mathfrak{Q}$ un premier de $\mathbb{I}_0$ au-dessus de P_λ. Alors l'image de $\rho_{0,\mathfrak{Q}}$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $\widehat{G}'(\lambda_0/\mathfrak{Q})$.*

Démonstration. Soit $\mathfrak{P}$ un premier de $\mathbb{I}$ au-dessus de $\mathfrak{Q}$. La représentation de $\rho_{\mathfrak{Q}}$ est la restriction à H_0 de la représentaion $\rho_{\mathfrak{P}}$ obtenu par reduction de $\rho \colon \Gamma \to {}^L G(\mathbb{I})$ modulo $\mathfrak{P}$. Par Proposition 7, le groupe $\rho_{\mathfrak{P}}(\Gamma_F)$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $G'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q})$. Comme H_0' est un sous-groupe d'indice fini de Γ_F, le groupe $\rho_{\mathfrak{Q}}(H_0')$ est un sous-groupe d'indice fini de $\rho_{\mathfrak{P}}(\Gamma)$, donc il contient aussi un sous-groupe de congruence non-trival de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q})$. La conclusion découle du Lemme 7.8 pour $\mathfrak{I} = \mathfrak{Q}$. $\square$

Ce lemme ne suffit pas à fournir l'information dont on a besoin sur l'image de ρ_0. Soit $\rho_{P_\lambda}\colon H_0 \to {}^L G(\mathbb{I}_0/P_\lambda \mathbb{I}_0)$, resp. $\rho_{0,P_\lambda}\colon H_0' \to \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/P_\lambda \mathbb{I}_0)$, la réduction de ρ, resp. ρ_0, modulo $P_\lambda \mathbb{I}_0$. Le but du reste de la Section est la démonstration du Théorème d'image pleine suivant pour ρ_{P_λ}.

THEOREM 7.10. *L'image de la représentation ρ_{P_λ} contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/P_\lambda \mathbb{I}_0)$.*

La méthode de la démonstration de ce Thórème est similaire à celle de [**Lang16b**, Proposition 5.1] et [**Con16a**, Proposition 4.9.8]. Soit $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_r$ les idéaux premiers de $\mathbb{I}_0$ au-dessus de P_λ (on note $\mathfrak{P}_i$ les idéaux premiers de $\mathbb{I}$ au-dessus de P_λ). Il y a un morphisme injectif $\mathbb{I}_0/P_\lambda \hookrightarrow \prod_{i=1}^r \mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i$. Soit $\mathcal{G}$ l'image de $\operatorname{Im} \rho_{0,P_\lambda}$ dans $\prod_{i=1}^r \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$ par l'injection prcédente. On va montrer le Théorème-clé suivant.

THEOREM 7.11. *Soient $1 \le i < j \le r$. Alors l'image de $\mathcal{G}$ dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i \times \mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$ est ouverte.*

Sinon, on va montrer qu'il y a un self-twist σ de ρ tel que $\sigma(\mathfrak{Q}_i) = \mathfrak{Q}_j$ ce qui est un contradiction parce que $\mathbb{I}_0$ est fixé par tous les self-twists. Cette idée de démonstration remonte à [**Ri76**, Théorem 3.5].

Dans la démonstration, les deux principaux ingrédients seront le Corollaire 10 et le Lemme de Goursat, qu'on rappelle :

Soient $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ deux groupes et soit $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$ tel que les deux projections $\pi_1\colon \mathcal{G} \to \mathcal{K}_1$ et $\pi_2\colon \mathcal{G} \to \mathcal{K}_2$ soient surjectives. Soit $\mathcal{N}_1 = \ker \pi_2$ et $\mathcal{N}_2 = \ker \pi_1$. On identifie $\mathcal{N}_1$ avec $\pi_1(\mathcal{N}_1)$ et $\mathcal{N}_2$ avec $\pi_2(\mathcal{N}_2)$, donc les sous-groupes de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, respectivement. Évidement, on a $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2 \supset \mathcal{G}$. Les projections naturelles induisent une application $\mathcal{G} \to \mathcal{K}_1/\mathcal{N}_1 \times \mathcal{K}_2/\mathcal{N}_2$.
On voit facilement le

LEMME 7.12. *Lemme de Goursat,* [**Go1889**, Sections 11 et 12],[**La02**, Exercice 5, P.75] *L'image de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{K}_1/\mathcal{N}_1 \times \mathcal{K}_2/\mathcal{N}_2$ est le graphe d'un isomorphisme $\mathcal{K}_1/\mathcal{N}_1 \cong \mathcal{K}_2/\mathcal{N}_2$.*

DÉMONSTRATION. On peut maintenant démontrer le Théorème-clé. Par le Corollaire 7, pour chaque $i = 1, \dots, r$, il existe un idéal non-nul $\mathfrak{l}_i$ de $\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i$ tel que $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_i) \subset \operatorname{Im} \rho_{0,\mathfrak{Q}_i} \subset \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$.

Soit $1 \le i < j \le r$. Le domaine de la représentation ρ_0 est un sous-groupe ouvert distingué H_0' de Γ_F défini au début de cette sous-section. Considérons le groupe

$$H_1 = \{h \in H_0' | h(\mod \mathfrak{Q}_i) \in \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_i) \quad \text{et} \quad h(\mod \mathfrak{Q}_j) \in \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_j)\}.$$

Puisque pour tout k les sous-groupes $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_k)$ sont distingués et d'indice fini dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_k)$, le sous-groupe H_1 est distingué et d'indice fini dans H_0'. Il est évidement fermé, donc il est aussi ouvert.
Soient $\mathcal{K}_1 = \rho_{0,\mathfrak{Q}_i}(H_1), \mathcal{K}_2 = \rho_{0,\mathfrak{Q}_j}(H_1)$ et $\mathcal{G}$ l'image de $\rho_0(H_1)$ dans $\mathcal{K}_i \times \mathcal{K}_j$. Notons que $\mathcal{K}_i, \mathcal{K}_j$ et $\mathcal{G}$ sont profinis et fermés parce qu'ils sont images continues d'un groupe de Galois. Par définition de $\mathfrak{l}_i, \mathfrak{l}_j$ et H_1, on a $\mathcal{K}_1 = \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_i)$ et $\mathcal{K}_2 = \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_j)$. En particulier, $\mathcal{K}_1$ et $\mathcal{K}_2$ sont sous-groupes distingués et d'indice fini de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$ et $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$ respectivement.

Pour $k = 1, 2$, soit $\pi_k\colon \mathcal{G}_1 \to \mathcal{K}_k$ et $\mathcal{N}_k = \operatorname{Ker} \pi_{3-k}$; supposons que ce sont des sous-groupes ouverts de $\mathcal{K}_k$; le produit $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$ est alors ouvert dans $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$. Puisque $\mathcal{G}$ contient $\mathcal{N}_1 \times \mathcal{N}_2$, il est aussi ouvert dans $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2$. Le sous-groupe $\mathcal{K}_1 \times \mathcal{K}_2 = \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_1) \times \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_2)$ est un sous-groupe ouvert de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i \times \mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$. Donc $\mathcal{G}$ est aussi ouvert dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i \times \mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$. On a montré le lemme dans ce cas.

Si maintenant $\mathcal{N}_1$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{K}_1$, on voit que $\mathcal{N}_2$ n'est pas ouvert non plus car par le lemme de Goursat, il existe un isomorphisme $\mathcal{K}_1/\mathcal{N}_1 \cong \mathcal{K}_2/\mathcal{N}_2$. En particulier, $\mathcal{N}_i$ n'est pas d'indice fini dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$. Mais $\mathcal{N}_i$ est sous-distingué et n'est pas d'indice fini dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$, il est donc contenu dans $Z(\widehat{G}')$ par le Corollaire 10. Par la définition de H_0', l'image de ρ_0 est dans $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_0})$, Par l'hypothèse $(H1)$ de la Section 3.2, $Z(\widehat{G}') \cap \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_0}) = \{1\}$; on a donc $\mathcal{N}_1 = \{1\}$ et $\mathcal{N}_2 = \{1\}$.

Par le lemme de Goursat, on a donc un isomorphisme de groupes

$$\Theta\colon \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_1) \cong \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_2)$$

Par le Corollaire 6, appliqué à $F = Q(\mathbb{I}_0), F_1 = Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j), \Delta = \mathcal{K}_1, \Delta_1 = \mathcal{K}_2$, il existe un isomorphisme $\alpha\colon Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i) \to Q(\mathbb{I}_0^\circ/\mathfrak{Q}_j)$, un caractère $\chi\colon \mathcal{K}_1 \to Z(\widehat{G}')(Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)^\times$ et un élément $\gamma \in \widehat{G}(Q(\mathbb{I}_0))$ et un élément $\varphi \in \Phi = \mathrm{Out}(\widehat{G})$ tels que pour $z \in \mathcal{K}_1$, on a

$$(*) \quad \Theta(z) = \chi(z)\gamma\varphi(\alpha(z))\gamma^{-1},$$

avec $\varphi(z) = z$ ou ${}^t z^{-1}$ dans le cas où $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n$ (on exclut le cas SO_8). Comme par $(H1)$, $Z(\widehat{G}') \cap \Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{m}_{\mathbb{I}_0}) = \{1\}$, le caractère χ est trivial. Par les définitions de $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$, on peut reformuler l'équation comme

$$\alpha(\rho_{0,\mathfrak{Q}_i}(h)) = \gamma^{-1}\rho_{0,\mathfrak{Q}_j}(h)\gamma$$

ou

$$\alpha(\rho_{0,\mathfrak{Q}_i}(h)) = \gamma^{-1t}\rho_{0,\mathfrak{Q}_j}(h)^{-1}\gamma$$

pour un élément $\gamma \in \widehat{G}(Q(\mathbb{I}_0))$. Notons par π_j la projection $\mathbb{I}_0 \to \mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j$. Rappelons que $\rho_0|_{H_1} = \rho|_{H_1} \cdot (\nu_{rec} \circ {}^L j \circ \rho|_{H_1})^{-1}$. Soit $\phi\colon H_1 \to Z({}^L G)(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$ par

$$\phi(h) = \pi_j((\nu_{rec} \circ {}^L j \circ \rho|_{H_1})^{1-\alpha}$$

pour tout $h \in H_1$. On a donc soit

$$\rho_{\mathfrak{Q}_i}|_{H_1}^{\alpha} = \phi \cdot \gamma\rho_{\mathfrak{Q}_j}|_{H_1}\gamma^{-1}$$

soit

$$\rho_{\mathfrak{Q}_i}|_{H_1}^{\alpha} \cong \phi \cdot \gamma^t\rho_{\mathfrak{Q}_j}^{-1}|_{H_1}\gamma^{-1}$$

Soient $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{P}_j$ des idéaux premiers de $\mathbb{I}$ au-dessus de $\mathfrak{Q}_i$ et $\mathfrak{Q}_j$ respectivement.

Proposition 7.13. *L'isomorphisme $\alpha\colon Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i) \to Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$ sétend à un isomorphisme $\tilde{\alpha}\colon Q(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i) \to Q(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)^\times$ et le caractère $\phi\colon H_1 \to Z({}^L G)(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j)$ sétend en un caractère $\tilde{\phi}\colon \Gamma_F \to Z({}^L G)(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)$ tel qu'il existe un isomorphisme de représentations $\Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)$:*

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\phi} \cdot \rho_{\mathfrak{P}_j}$$

ou bien

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\phi} \cdot {}^t\rho_{\mathfrak{P}_j}^{-1}$$

Cette proposition va résulter de la théorie de l'obstruction comme dans [**Lang16b**, Section 5]. La stratégie est le même que celle dans *loc.cit.* mais on a besoin de quelques modifications dans la démonstration.

Corollaire 11. Si ρ est $\mathbb{Z}_p$-régulière, avec les notations de la Proposition 7.13, il existe un isomorphisme

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\phi} \cdot \rho_{\mathfrak{P}_j}$$

Démonstration. Observons que

$$\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\phi} \cdot {}^t\rho_{\mathfrak{P}_j}^{-1}$$

ne peut se produire que si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n$. Soit $\delta \in \Gamma_F$ un élément $\mathbb{Z}_p$-régulier et $d_k = \rho_{\mathfrak{P}_k}^{\tilde{\alpha}}(\delta)$. La relation

$$d_i^{\tilde{\alpha}} = \gamma \cdot d_j^{-1} \cdot \gamma^{-1}$$

entraîne que $\gamma = w \in W_{\mathrm{GL}_n}$ et que $d \cdot d^w = 1$. Ceci est exclu par l'hypothèse que pour toute racine α de GL_{2n}, l'image $R(d)$ par $R \colon \mathrm{GL}_n \to \mathrm{GL}_{2n}$, $g \mapsto \mathrm{diag}(g, {}^tg)$ satisfait

$$\alpha(R(d)) \not\equiv 1 \pmod p$$

Ainsi, la seconde possibilité est exclue et $\rho_{\mathfrak{P}_i}^{\tilde{\alpha}} \cong \tilde{\phi} \cdot \rho_{\mathfrak{P}_j}$. □

On rappelle les résultats de la théorie d'obstruction dont on a besoin. Soit n un entier positif. Soit N un sous-groupe distingué de Γ_F. Soit K une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Soit ${}^LG = \widehat{G}$ si $\widehat{G}$ est de type B_n ou C_n (ou D_n, $n \neq 4$) et ${}^LG = (\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_1) \times \{1, j\}$ avec $j(g,\mu)j^{-1} = ({}^tg^{-1}\mu, \mu)$ si $\widehat{G} = \mathrm{GL}_n$. Notons que dans tous les cas, $Z({}^LG)$ est un tore déployé. Soit $r \colon N \to {}^LG(K)$ une représentation continue, absolument irréductible. On a donc $Z(r) = Z({}^LG)(K)$. Pour tout $g \in \Gamma_F$, posons $r^g \colon N \to {}^LG(K)$ une représentation définie par $r^g = r(ghg^{-1})$ pour tout $h \in N$. Supposons la condition suivante :

$$(\mathrm{Desc}(r)) \quad \text{pour tout} g \in \Gamma, \text{il y a un isomorphisme} \quad r^g \cong r \quad \text{sur} K.$$

On voit facilement qu'il existe alors une application $c \colon \Gamma_F \to {}^LG(K)$ avec les propriétés suivantes :

(1) $c(1) = 1$;
(2) $c(hg) = r(h)c(g)$ pour tout $h \in N, g \in \Gamma_F$;
(3) $r = c(g)^{-1}r^g c(g)$ pour tout $g \in \Gamma_F$.

Soit $\Delta = \Gamma_F/N$. Par absolue irréductibilité de r, l'application $b \colon \Gamma_F \times \Gamma_F \to {}^LG(K)$ définie par $b(g_1, g_2) = c(g_1)c(g_2)c(g_1g_2)^{-1}$ est un 2-cocycle à valeurs dans $Z({}^LG)(K)$. De plus, par la suite spectrale de Hochschild-Serre, b se factorise en une application $b \colon \Delta^2 \to Z({}^LG)(K)$. On note par $\mathrm{Ob}(r)$ la classe de b dans le groupe de cohomologie $H^2(\Delta, Z({}^LG)(K))$. On note par 1 la classe de cocycle trivial dans $H^2(\Delta, Z({}^LG)(K))$.
Une extension de r à Γ_F est une représentation $\tilde{r} \colon \Gamma \to {}^LG(K)$ qui satisfait $\tilde{r}|_N = r$.

Il est facile de voir que

(1) Il existe une extension $\tilde{r}$ de r à Γ_F si et seulement si $\mathrm{Ob}(r) = 1$.
(2) Si $\tilde{r}$ est une extension de r à Γ_F, toutes les autres extensions $\tilde{r}'$ de r à Γ_F satisfont

$$\tilde{r}' \cong \tilde{r} \cdot \psi$$

pour un homomorphisme $\psi \colon \Gamma \to Z({}^LG)(K)$ qui est trivial sur N.

Soient $E_1 = Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i), E_2 = Q(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_j), K_1 = Q(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i), K_2 = Q(\mathbb{I}/\mathfrak{Q}_j)$. Ce sont des corps p-adiques et il y a des inclusions naturelles $E_1 \subset K_1$ et $E_2 \subset K_2$. Rappelons qu'il y a un isomorphisme $\alpha \colon E_1 \to E_2$ et un caractère $\phi \colon H_1 \to E_2^\times$ qui est cohérent avec l'équation $(*)$. Soit L_1 et L_2 deux extensions finies de K_1 et K_2 respectivement.

Soit $\rho_1 = \rho_{\mathfrak{Q}_i}|_{H_1} \colon H_1 \to {}^LG(L_1)$. On considère les deux représentations

$$\rho_1^\alpha \colon H_1 \to {}^LG(L_2), \quad \rho_2 = \rho_{\mathfrak{Q}_j}|_{H_1} \colon H_1 \to {}^LG(L_2)$$

et $\phi \colon H_1 \to Z({}^LG)(L_2)$. Ces trois homomorphismes satisfont la condition (obstr) avec $N = H_1$ et $K = L_2$ le corps de coefficients.

Lemme 7.14. *cf.*[**Lang16a**, Lemme 5.5] *Les homomorphismes* ρ_1^α, ρ_2, ϕ *satisfont la condition (obstr). De plus* $Ob(\rho_1)$ *et* $Ob(\rho_2)$ *sont triviales et* $Ob(\phi \cdot \rho_2) = Ob(\phi)Ob(\rho_2)$.

Démonstration. Pour chaque $g \in \Gamma_F$, il y a $c(g) \in {}^LG(L_1)$ tel que $\rho_1^g = c(g) \cdot \rho_1 \cdot c(g)^{-1}$,à savoir $c(g) = \rho_{\mathfrak{P}_1}(g)$. donc ρ_1 satisfait (obst(ρ_1)). Le même argument montre que ρ_2 satisfait (obst(ρ_2)). De plus, les classes $\mathrm{Ob}(\rho_1)$ et $\mathrm{Ob}(\rho_2)$ sont triviales, parce que ρ_1 et ρ_2 ont des prolongements à Γ_F (encore notés ρ_1 et ρ_2).
Soit $\tau\colon K_1 \to \overline{\mathbb{Q}}_p$ un prolongement de α. Alors la représentation ρ_1^τ est une extension à Γ_F de ρ_1^α. En particulier $(\rho_1^\tau)^g \sim \rho_1^\tau$ sur $\overline{\mathbb{Q}}_p$ pour tout $g \in \Gamma_F$, donc

$$\rho_1|_{H_1}^\alpha \sim (\rho_1^\tau)^g|_{H_1} \cong (\rho_1^\tau)|_{H_1} = \rho_1|_{H_1}$$

sur $\overline{\mathbb{Q}_p}$. La conjugaison précédente en induit encore une sur K_2.
Comme $\rho_1|_{H_1}^\alpha$ et $\rho_2|_{H_1}$ satisfont (obst), pour tout $g \in \Gamma_F$, on a

$$\phi \cdot \rho_2|_{H_1} \sim \rho_1|_{H_1}^\alpha \sim (\rho_1|_{H_1}^\alpha)^g \sim$$
$$\sim \phi^g \cdot (\rho_2|_{H_1})^g \sim \phi^g \cdot \rho_2|_{H_1},$$

donc $\rho_2|_{H_1} \sim \phi^{-1} \otimes \phi^g \otimes \rho_2|_{H_1}$. Rappelons que le représentation ρ_2 est associée à un SVPH classique. Donc par le Théorème 5, l'image de ρ_2 est ouverte dans ${}^LG(K_2)$. Ceci implique que ρ_2 ne peut pas être isomorphe à un twist d'elle-même par un caractère non-trivial ψ. En effet, si $R\colon {}^LG \to \mathrm{GL}_n$ est une représentation fidèle, on a $\mathrm{Tr} \circ R \neq 0$ donc le lieu où cette trace est nulle est un fermé et par le théorème de densité de Tchebotarev, l'ensemble des places de F où $\mathrm{Tr} \circ R \circ \rho_2(\mathrm{Frob}_v) \neq 0$ est de densité 1 ce qui contredit que l'ensemble des places v de F où $R \circ \psi(\mathrm{Frob}_v) \neq 1$ soit de densité positive. On voit donc que l'égalité précédente donne $\phi^g = \phi$. On conclut que ϕ satisfait (obst(ϕ)). □

On montre maintenant que pour certain choix de L_1 et L_2, il existe un isomorphisme $\tilde{\alpha}\colon L_1 \to L_2$ qui prolonge $\alpha\colon E_1 \to E_2$ et un caractère $\tilde{\phi}'\colon \Gamma \to L_2^\times$ qui prolonge $\phi\colon \Gamma \to L_2^\times$. Soit $\tau\colon K_1 \to \overline{Q}_p$ une extension arbitraire de α à K_1. Soit $L_2 = K_2 \cdot \tau(K_1)$. Soit $\tau'\colon L_2 \to \overline{\mathbb{Q}_p}$ une extension de $\tau^{-1}\colon \tau(K_1) \to K_1$ et soit $L_1 = \tau'(L_2)$. Posons $\tilde{\alpha} = (\tau')^{-1}\colon L_1 \to L_2$. Alors $\tilde{\alpha}$ est une extension de α. En particulier, $\rho_1^{\tilde{\alpha}}\colon \Gamma \to L_2^\times$ est une extension de $\rho_1|_{H_1}^\alpha$, donc $\mathrm{Ob}(\rho_1|_{H_1}^\alpha) = 1$. On a

$$1 = \mathrm{Ob}(\rho_1|_{H_1}^\alpha) = \mathrm{Ob}(\phi)\mathrm{Ob}(\rho_2|_{H_1}) = \mathrm{Ob}(\phi).$$

donc, ϕ peut s'étendre à un caractère $\tilde{\phi}'\colon \Gamma_F \to L_2^\times$.
On peut modifier $\tilde{\phi}'$ pour satisfaire l'égalité désirée.

Lemme 7.15. *cf.*[**Lang16a**, Lemme 5.6] *Il existe une extension* $\tilde{\phi}\colon \Gamma_F \to L_2^\times$ *de* $\phi\colon H_1 \to L_2^\times$ *telle qu'on ait*

$$\rho_1^{\tilde{\alpha}} \sim \tilde{\phi} \cdot \rho_2$$

sur $L_2^\times$.

Démonstration. Puisque $\tilde{\phi}'$ est une extension de ϕ, la représentation $\tilde{\phi}' \cdot \rho_2$ est une extension de $\rho_1|_{H_1}$. Comme $\rho_1^{\tilde{\alpha}}$ est aussi une extension de $\rho_1|_{H_1}$, Il existe un caractère $\psi\colon \Gamma_F \to L_2^\times$, trivial sur H_1, tel que $\rho_1^{\tilde{\alpha}} \sim \psi \cdot \tilde{\phi}' \cdot \rho_2$. Alors le caractère $\tilde{\phi}$ défini comme $\psi\tilde{\phi}'$ satisfait l'égalité désirée. □

Remarque 7.16. *A priori,* $\tilde{\phi} \cdot \rho_2$ *prend ses valeurs dans* ${}^LG(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)[\tilde{\phi}])$ *; la représentation* $\rho^{\tilde{\alpha}}$ *prend donc aussi ses valeurs dans* ${}^LG((\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)[\tilde{\phi}])$.

Lemme 7.17. *On a* $(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_i)[\tilde{\phi}] = \mathbb{I}/\mathfrak{P}_i$, *et* $(\mathbb{I}/\mathfrak{P}_j)[\tilde{\phi}] = \mathbb{I}/\mathfrak{P}_j$.

Démonstration. En appliquant ${}^L j$ à la relation $\rho_1^{\tilde{\alpha}} \sim \rho_2 \cdot \tilde{\phi}$, on trouve

$$ {}^L j \circ \tilde{\phi} = ({}^L j \rho_1)^{\tilde{\alpha}}) \cdot {}^L j \circ \rho_2)^{-1}. $$

Par $(H2)$, le membre de droite est trivial, donc $\tilde{\phi}$ est à valeurs dans Ker $\widehat{j} \circ \widehat{\pi}$ qui par $(H1)$ est $\mathbb{Z}_p$-rationnel.

□

On voit donc que $\tilde{\alpha}\colon L_1 \to L_2$ se restreint en un isomorphisme $\tilde{\alpha}\colon \mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P}_i \to \mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P}_j$ et $\tilde{\phi}$ prend ses valeurs dans $\mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P}_j$.

On peut maintenir achever la démonstration du Théorème 7.11. Posons $\sigma = \tilde{\alpha}\colon \mathbb{I}/\mathfrak{P}_i \to \mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P}_j$ et $\eta = \tilde{\phi}\colon \Gamma \to \mathbb{I}^\circ_{\mathrm{Tr}}/\mathfrak{P}_j$. Grâce à la Proposition 7.13, σ et η satisfont les hypothèses de la Proposition 3.1. Donc, il existe un self-twist $\tilde{\sigma}\colon \mathbb{I} \to \mathbb{I}$ pour $\rho\colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I})$ qui induit σ. En particulier, $\tilde{\sigma}(\mathfrak{P}_i) = \mathfrak{P}_j$. Comme $\mathfrak{P}_i$ et $\mathfrak{P}_j$ sont au-dessus des premiers différents de $\mathbb{I}_0$, le self-twist $\tilde{\sigma}$ ne fixe par $\mathbb{I}_0$. Ceci nous donne une contradiction. Rappelons que l'hypothèse de cet argument est que $\mathcal{N}_1$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{K}_1$, ou $\mathcal{N}_2$ n'est pas ouvert dans $\mathcal{K}_2$. Quand ce n'est pas le cas, on a déjà montré le lemme. Donc on a fini la démonstration du Théorème. □

On rappelle un lemme de Ribet [**Ri76**, Lemme 3.4]. Soit r un entier plus grand que 2 et soient $\mathcal{G}_1, gc_2, \cdots, \mathcal{G}_r$ des groupes profinis. Supposons la propriété suivante :
Si $\mathcal{K}$ un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}_i$, alors la clôture de sous-groupe de commutateurs de $\mathcal{K}$ est aussi ouvert dans $\mathcal{G}_i$.
(coml) Soit $\mathcal{G}_0$ un sous-groupe fermé de $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \cdots \times \mathcal{G}_r$.

Lemme 7.18. *Supposons que pour tout i, j avec $1 \leq i < j \leq r$, l'image de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j$. Alors $\mathcal{G}_0$ est un sous-groupe ouvert de $\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2 \times \cdots \times \mathcal{G}_r$.*

On peut alors finir la démonstration du Théorème 7.10.

Démonstration. Soit $1 \leq i \leq r$. Soit $\mathcal{G}_i$ l'image de $\rho_{i,\mathfrak{P}_i}\colon H^prime_0 \to G'(\mathbb{I}^\circ_0/\mathfrak{Q}_i)$. Comme avant, $\mathcal{G}_0$ désigne l'image de $\operatorname{Im} \rho_{0,P_{\underline{k}}}$ par l'inclusion $G'(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0) \hookrightarrow \prod_i G'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$. Les groupes $\mathcal{G}_j$ sont profinis et satisfont la condition (comm). Le groupe $\mathcal{G}_0$ est fermé parce que il est l'image continue de H_0'. Par le Théorème-clé 7.11, pour tout couple (i, j) avec $1 \leq i < j \leq r$, sa projection dans $\mathcal{G}_i \times \mathcal{G}_j$ est ouverte . Donc le Lemme 7.18 implique que $\mathcal{G}_0$ est ouvert dans $\prod_i \mathcal{G}_i$.

Par la lemme 7.9, le groupe $\mathcal{G}_i$ est ouvert dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$ pour tout i. Donc $\prod_i \mathcal{G}_i$ est ouvert dans $\prod_i \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$. Par le Théorème-clé 7.11 et le Lemme 7.18, on en déduit que $\mathcal{G}_0$ est ouvert dans $\prod_i \widehat{G}'(\mathbb{I}_0/\mathfrak{Q}_i)$, donc $\operatorname{Im} \rho_{0,P_\lambda}$ est ouvert dans $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ En particulier, $\operatorname{Im} \rho_{0,P_\lambda}$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $G'(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$. Maintenant, appliquons le Lemme 7.8 à $\mathcal{I} = P_\lambda$: on a que $\operatorname{Im} \rho_{P_\lambda}$ contient un sous-groupe de congruence non-trivial de $\widehat{G}'(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$. □

7.3. Sous-groupes unipotents de congruence et image pleine. Rappelons que pour toute racine α de $\widehat{G}$, on note U^α le sous-groupe unipotent associé. Soient R une $\mathbb{Z}_p$-algèbre intègre.

Définition 7.19. *Une sous-algèbre de Lie de congruence de l'algèbre de Lie semisimple $\widehat{\mathfrak{g}}'(R)$ de niveau $\mathfrak{a}$ est une sous-algèbre de Lie de la forme $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{g}(R)$ pour un idéal non nul $\mathfrak{a}$ de R.*

Lemme 7.20. *Soit $\mathfrak{G}$ une sous-algèbre de Lie de $\widehat{\mathfrak{g}}'(R)$. Les énoncés suivants sont équivalents :*

(1) l'algèbre de Lie $\mathfrak{G}$ contient un sous-algèbre de Lie de congruence $\mathfrak{a}\cdot\widehat{\mathfrak{g}}'(R)$ de niveau non nul $\mathfrak{a}\subset R$

(2) pour toute racine α de G, l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{G}\cap\mathfrak{u}^\alpha(R)$ contient un idéal non-nul $\mathfrak{a}^\alpha$ de R par l'identification $\mathfrak{u}^\alpha(R)\cong R$.

DÉMONSTRATION. Si la condition (1) est satisfaite, on a $\mathfrak{a}\cdot\widehat{\mathfrak{g}}(R)\subset\mathfrak{G}$ pour un idéal $\mathfrak{a}$ non-nul, donc $\mathfrak{a}\subset\mathfrak{G}\cap\mathfrak{u}^\alpha(R)$ pour toutes les racines α. La condition (2) est satisfaite en prenant $\mathfrak{a}^\alpha=\mathfrak{a}$ pour tout α.

Montrons que si la condition (2) est satisfaite pour un ensemble d'idéaux $\{\alpha^\alpha\}_\alpha$, la condition (1) est satisfaite pour l'idéal $\mathfrak{a}=\prod_\alpha\mathfrak{a}^\alpha$ (non nul car R est intègre). On a $\mathfrak{a}^\alpha\subset\mathfrak{G}\cap\mathfrak{u}^\alpha(R)$ pour toute racine α et des idéaux $\{\mathfrak{a}^\alpha\}_\alpha$ non nuls. Soit $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\}$ un ensemble des racines simples pour G'. Pour $i=1,2,\cdots,n$, $u_{\pm\alpha_i}$ sont des générateurs des sous-algèbres unipotentes $\mathfrak{u}_{\pm\alpha_i}(R)$ comme R-modules. Posons $t_{\alpha_i}=[u_{\alpha_i},u_{-\alpha_i}]$. Ces éléments $\{t_{\alpha_i}\}_{i=1,2,\cdots,r}$ engendrent la sous-algèbre torale $\widehat{\mathfrak{t}}$ de $\widehat{\mathfrak{g}}(R)$. Comme $\mathfrak{a}_{\pm\alpha_i}\subset\mathfrak{G}\cap\mathfrak{u}_{\pm\alpha_i}(R)$, on a $\mathfrak{a}_{\alpha_i}\mathfrak{a}_{-\alpha_i}\cdot t_{\alpha_i}\subset\mathfrak{G}\cap Rt_i$ pour tout i. Si on écrit $\mathfrak{u}^\alpha(R)=R\cdot u_\alpha$ pour toute racine α, le R-module $\widehat{\mathfrak{g}}'(R)$ est engendré par le système $((t_i)_i,(u_\alpha)_\alpha$. Le résultat en résulte facilement avec $\mathfrak{a}=\prod_\alpha\mathfrak{a}^\alpha$, qui est un idéal non-nul parce que R est un anneau intègre. □

On peut réécrire le lemme précédent en terme des sous-groupes unipotents et de congruence au lieu des algèbres de Lie.

LEMME 7.21. *Soient R un anneau intègre et H un sous-groupe de $\widehat{G}'(R)$. Alors les suivants sont équivalents :*

(1) le groupe H contient un sous-groupe de congruence principal $\Gamma_R(\mathfrak{a})$ de niveau non nul $\mathfrak{a}$ de $\widehat{G}'(R)$,

(2) pour chaque racine α de G, le sous-groupe unipotent $H\cap U^\alpha(R)$ contient un idéal non-nul $\mathfrak{a}^\alpha$ de R par l'identification $U^\alpha(R)\cong R$.

DÉMONSTRATION. La démonstration est analogue à celle du Lemme 7.20 en remplaç ant le crochet de Lie par le commutateur. □

REMARQUE 7.22. *Dans les Lemmes 7.20 et 7.21, s'il existe un idéal $\mathfrak{a}'$ de R tel que $\mathfrak{a}^\alpha=\mathfrak{a}'$ pour tout α dans la condition (2),on peut prendre $\mathfrak{a}=(\mathfrak{a}')^2$ dans la condition (1). C'est un conséquence directe de l'argument dans les démonstrations.*

On peut traduire le Théorème 7.10 dans un résultat sur les sous-groupes unipotents de $\operatorname{Im}\rho_{0,P_{\underline{k}}}$.

COROLLARY 7.23. *Pour toute racine α de $\widehat{G}'$, le groupe $\operatorname{Im}\rho_{P_\lambda}\cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ contient l'image d'un idéal de $\mathbb{I}_0/P_{\underline{k}}\mathbb{I}_0$.*

DÉMONSTRATION. Il résult de le Théorème 7.10 et le Lemme 7.21 appliqué à $R=\mathbb{I}_0^\circ/P_{\underline{k}}\mathbb{I}_0^\circ$ et $H=\operatorname{Im}\rho_{0,P_{\underline{k}}}$. □

7.4. Relèvement d'un sous-groupe de congruence. Soit $A\hookrightarrow B$ une extension finie d'anneaux noethériens intègres.

DÉFINITION 7.24. *Un A-réseau dans B est un A-sous module engendré par les éléments d'une base de* $\operatorname{Frac}(B)$ *sur* $\operatorname{Frac}(A)$.

On rappelle le lemme [**Lang16b**, Lemme 4.10].

LEMME 7.25. *Tout A-réseau dans B contient un idéal non-trivial de B. Réciproquement, tout idéal non-trivial dans B contient un A-réseau.*

Soit α une racine $\widehat{G}$, on note U^α le sous-groupe à un paramètre de $\widehat{G}$ associé à α. Soient H un groupe profini, R un anneau pro-p et $\tau\colon \Gamma_F \to \widehat{G}(R)$ une représentation continue. Soit $U^\alpha(\tau) = \tau(H) \cap U^\alpha(R)$. On identifie toujours $U^\alpha(R)$ avec R ; $U^\alpha(\tau)$ est un $\mathbb{Z}_p$-sous-module compact de R.
Rappelons que ρ_{P_λ} est la réduction de $\rho\colon H_0 \to G(\mathbb{I}_0)$ modulo $P_\lambda\mathbb{I}_0$.

Proposition 7.26. *Pour toute racine α de $\widehat{G}$, le groupe $U^\alpha(\rho)$ contient une base d'un Λ'_G-réseau dans $\mathbb{I}_0$.*

Démonstration. Soit $\pi_\lambda\colon \mathbb{I}_0 \to \mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$ la projection naturelle. On note aussi par π_λ l'application induite $\widehat{G}(\mathbb{I}_0) \to G(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$. Pour α une racine de $\widehat{G}$, on note $\pi_\lambda^\alpha\colon U^\alpha(\mathbb{I}_0) \to U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ la projection induite par π_λ.
Soit $\rho\colon H_0 \to {}^LG(\mathbb{I}_0)$ la restriction de ρ_μ à H_0 et $G = \operatorname{Im}\rho \cap \Gamma_{\widehat{G}'}(p)$ et $G_{P_\lambda} = \pi_\lambda(G)$. On vérifie que les choix $A = \mathbb{I}_0$, $H = G$ et $Q = P_\lambda$ satisfont les hypothèses de la Proposition 5.1 :

(1) le groupe G est pro-p parce que $\operatorname{Im}\rho$ est profini et $\Gamma_{\widehat{G}'}(p \cdot \mathbb{I}_0)$ est un pro-p groupe,
(2) par les hypothèses $\operatorname{Im}\rho$ contient un élément d diagonal $\mathbb{Z}_p$-régulier, qui normalise $\operatorname{Im}\rho \cap \Gamma_{\widehat{G}'}(p)$.

Alors par la Proposition 5.1, π_λ^α induit une surjection

$$G \cap U^\alpha(\lambda_0) \to G_{P_\lambda} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$$

Par la Corollaire 7.23, il existe un idéal non-nul $\mathfrak{a}$ de $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$ tel que $U^\alpha(\rho_{P_\lambda})$ contient $\mathfrak{a}$. Donc $G_{P_\lambda} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ contient l'idéal non-nul $p\mathbb{I}_0 \cdot \mathfrak{a}$. Notons que $\Lambda'_G/P_\lambda \subset \mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$ est une extension finie des anneaux intègres noethériens. Donc, le Lemme 7.25 implique que $G_{P_\lambda} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ contient un Λ'_G/P_λ-réseau dans $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$. Par la définition du réseau, ceci signfie que $G_{P_\lambda} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ contient une base $\{e_j\}_{j=1,2,\cdots,n}$ de $Q(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ sur $Q(\Lambda'_G/P_\lambda)$. Par le résultat précédent, l'application naturelle $G \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0^\circ) \to H_{\underline{k}} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0)$ est surjective. Donc pour chaque $j \in \{1, 2, \cdot, n\}$, il existe un réprésentant f_j de e_j dans $H \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0)$. Par la définition, $G \subset \operatorname{Im}\rho$, donc l'ensemble $\{f_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$ est dans $U^\alpha(\rho)$.

Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que $\{f_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$ est une base d'un Λ'_G-réseau dans $\mathbb{I}_0$. Soit M_λ le Λ'_G/P_λ-sous-module de $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$ engendré par l'ensemble $\{e_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$. Comme $\{e_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$ est une base d'un Λ'_G/P_λ-réseau dans $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$, le Lemme7.25 implique que M_λ contient un idéal $\mathfrak{b}_\lambda$ de $\mathbb{I}_0/P_\lambda\mathbb{I}_0$. Posons $M = \pi_\lambda^{-1}(M_\lambda)$. Alors M est un Λ'_G-sous-module de $\mathbb{I}_0$. Comme l'idéal $\mathfrak{b}_\lambda$ est dans M_λ, l'idéal $\mathfrak{b} = \pi_\lambda^{-1}(\mathfrak{b}_\lambda)$ de $\mathbb{I}_0$ est dans M. Soit N le Λ'_G-sous-module de $\mathbb{I}_0$ engendré par l'ensemble $\{f_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$. Comme f_j est un représentant e_j, il y a une inclusion

$$N \hookrightarrow M$$

des Λ'_G-sous–modules de $\mathbb{I}_0$, induisant un isomorphisme de Λ'_G/P_λ-modules

$$N/P_\lambda N \cong M/P_\lambda M.$$

Par le Lemme de Nakayama, l'inclusion est une bijection. Comme M contient l'idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathbb{I}_0$, N le contient aussi. Donc $\{f_j\}_{j\in\{1,2,\cdots,n\}}$ est une base d'un Λ'_G-réseau dans $\mathbb{I}_0$.

□

8. L'existence du niveau Galoisien

Dans cette section, on va démontrer notre premier résultat principal. La méthode qu'on utilise est inspirée par [**HT15**, Theorem 4.8]. Soit $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ une famille de Hida. On suppose $\overline{\rho}_\mu$ absolument irréductible. Soit $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^LG(\mathbb{I})$ la représentation galoisienne associée à μ. Soit $\mathbb{I}_0$ le sous-anneau fixé par le groupe Γ des self-twists. Soit $H_0 = \bigcap_{\sigma\in\Gamma} \mathrm{Ker}\ \eta_\sigma$ le sous-groupe ouvert distingué de Γ_F associé aux caractères des self-twists. Soit $\rho = \rho_\mu|_{H_0} \colon H_0 \to {}^LG(\mathbb{I}_0)$.

Théorème 6. *Supposons que :*
(0) $\overline{\rho}$ *est absolument irréductible,*
(1) Il existe un poids classique régulier λ *tel qu'on ait* $(IRRAD_{G,P_\lambda})$*,*
(2) ρ *est* $\mathbb{Z}_p$*-régulière,*
(3) ρ *est p-distinguée (voir l'hypothèse 4.2),*
Alors il existe un idéal $\mathfrak{l}$ *non-nul de* $\mathbb{I}_0$ *tel que l'image* $\mathrm{Im}\,\rho$ *contienne l'idéal de congruence* $\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l})$.

On devrait pouvoir se débarrasser de l'hypothèse déplaisante (0) avec plus de travail.

Démonstration. La décomposition $\mathcal{T}(\mathcal{O}_{F,p}) = \prod_{v\in S_p} \mathcal{T}'(\mathcal{O}_{F_v})$ induit les décompositions $\mathcal{T}'_1 = \prod_{v\in S_p} \mathcal{T}'_{v,1}$ et $\Lambda'_G = \widehat{\bigotimes}_{v\in S_p}\Lambda'_v$ où $\Lambda'_v = \mathcal{O}[[\mathcal{T}'_{v,1}]]$.

Soit $v \in S_p$, d_v un élément régulier dans $\rho(\Gamma_{F_v})$. Soit $g_v \in \widehat{G}(\mathbb{I}_0)$ tel que

$$g_v \cdot \rho(\Gamma_{F_v}) \cdot g_v^{-1} \subset \widehat{B}(\mathbb{I}_0) \quad \text{et}\, g_v \cdot d_v \cdot g_v^{-1} \in \widehat{T}(\mathbb{Z}_p)$$

la Proposition 4.4. On va montrer que pour toute racine $\alpha \in \Phi$ de $\widehat{G}$, $U^\alpha(\rho_v) = U^\alpha(\mathbb{I}_0) \cap \mathrm{Im}\ g_v\rho g_v^{-1}$ contient un Λ'_v-sous-module qui contient une Λ'_G-base d'un réseau de $U\alpha(\mathbb{I}_0)$ On note $\widehat{N}^0 = \widehat{N} \supset \ldots \supset \widehat{N}^{n-1} \supset \{1\}$ la série centrale descendante du radical unipotent $\widehat{N}$ du Borel $\widehat{B}$. On a donc $[\widehat{N}, \widehat{N}^i] = \widehat{N}^{i+1}$. Cette filtration définit une partition de l'ensemble Φ^+ des racines positives de $\widehat{G}$:$\Phi^+ = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} \Phi_i^+$ en notant Φ_i^+ l'ensemble des racines telles que $U^\alpha \colon \mathbb{G}_a \hookrightarrow \widehat{N}^i/\widehat{N}^{i+1}$. Notons que $\widehat{N}^{n-1}$ est le centre de $\widehat{N}$. Ce centre est de rang 1 pour les sous-groupes de Borel (des groupes classiques). Pour $x \in (1 + p\mathcal{O}_{F_v})^\times$, soit $\delta_v(x) = g_v \cdot \rho([x, F_v]) \cdot g_v^{-1}$. Pour toute racine $\alpha \in \Phi_i^+$ et pour tout $U^\alpha(z) \in U^\alpha(\rho_v)$, on a

$$(*) \quad \mathrm{Ad}(\delta_v(x))U^\alpha(z) \equiv U^\alpha(\Theta_v(x)z) \pmod{\widehat{N}^{i+1}}.$$

On voit facilement que Λ'_v est engendré topologiquement sur $\mathcal{O}$ par les $\beta(\Theta_v(x))$ pour les $beta_\in\Phi^+$ et les $x \in (1 + p\mathcal{O}_{F_v})^\times$. Pour toute racine $\beta \in \Phi^+$, on note Λ_β le quotient de Λ'_v associé à $\beta \colon \mathcal{T}'_v \to \mathcal{O}_{F_v}^\times$. Si $\alpha \in \Phi_{n-1}$, la relation montre que $U^\alpha(\rho_v)$ admet une action de Λ_α. En fait cette racine est unique et sera notée α_{max}. Pour les autres racines, il est plus commode de passer aux algèbres de Lie.

Soit $H_1 = \mathrm{Im}\,\rho\cap\Gamma_{\widehat{G}'}(p\mathbb{I}_0)$. On voit que pour chaque racine α, le groupe $g_vH_1g_v^{-1}\cap U^\alpha(\mathbb{I}_0)$ (qu'on va encore noter $U^\alpha(\rho_v)$) contient le système des $(e_i^\alpha)^p$ $(i = 1, \ldots, m)$. Ce groupe est encore compact pour la topologie p-adique sur $\mathbb{I}_0$. Pour cette topologie, on peut définir la fonction continue Log qui fournit une bijection entre H_1 et le sous-ensemble compact $\mathrm{Log}H_1$ de $p \cdot \widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$ (cet ensemble n'est peut-être pas stable par l'addition). La fonction Log induit un isomorphisme du groupe $g_vH_1g_v^{-1} \cap U^\alpha(\mathbb{I}_0)$ avec la $\mathbb{Z}_p$-algèbre de Lie abélienne $g_v \cdot\ H_1 \cdot g_v^{-1} \cap \mathfrak{u}_\alpha(\mathbb{I}_0)$. On note $\mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p}H_1$ la $\mathbb{Q}_p$-algèbre de Lie $\mathbb{Q}_p \cdot \mathrm{Log}H_1$.

En utilisant l'action adjointe de l'élément régulier $g_vd_vg_v^{-1}$, on obtient une décompostion de $g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p}H_1 \cdot g_v^{-1}$ en les sous-espaces de racines :

$$g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p}H_1 \cdot g_v^{-1} = (g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p}H_1 \cdot g_v^{-1})_0 \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi}(g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p}H_1 \cdot g_v^{-1})_\alpha.$$

Cette décomposition est compatible avec celle de $\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$:

$$\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0) = \mathrm{Lie}(\widehat{T}) \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Phi}\mathfrak{u}^\alpha(\mathbb{I}_0).$$

Plus précisément, en posant $\mathfrak{u}^\alpha(\rho_v) = \mathrm{Lie} U^\alpha(\rho_v)$, on a

$$(g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p} H_1 \cdot g_v^{-1})_\alpha = \mathfrak{u}^\alpha(\rho_v).$$

Cette décomposition est valable sur $\mathbb{I}_0$ donc elle reste valide sur $\mathbb{I}_0[\frac{1}{p}]$.

Pour toute racine $\alpha \in \Phi$, soit $(\mathrm{Log}\, e_i^\alpha)_{1 \leq i \leq m}$ un système d'éléments de $\mathfrak{u}^\alpha(\rho_v)$ qui engendre $\mathfrak{u}^\alpha(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G. Si $\alpha + \beta \in \Phi$, on voit par Λ'_G-bilinéarité du crochet de Lie que les éléments $[\mathrm{Log}\, e_i^\alpha, \mathrm{Log}\, e_j^\beta]$ $(i, j = 1 \cdots, m)$ forment un système de générateurs de $\mathfrak{u}^{\alpha+\beta}(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G. On voit facilement par inspection des groupes classiques que l'unique racine α_{max} telle que $\alpha_{max} \in \Phi^+_{n-1}$ est la somme de toutes les racines simples α_i $(i = 1, \cdots, n)$ affectées de coefficients strictement positifs. Il en résulte facilement en prenant des crochets des $e_j^{\alpha_i}$, qu'il existe un sous $\mathbb{Z}_p$-module non nul $L_v^{\alpha_{max}}$ de $\mathfrak{u}^{\alpha_{max}}(\rho_v)$ contenant un système de générateurs de $\mathfrak{u}^{\alpha_{max}}(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G stable par tous les quotients Λ_{α_i} de Λ'_v. Il s'ensuit que c'est un Λ'_v -module non nul. En prenant des crochets de Lie par toutes les racines de Φ, on voit que pour toute $\alpha \in \Phi$, il existe un sous Λ'_v-modules non nul L_v^α de $\mathfrak{u}^\alpha(\rho_v)$ contenant un système de générateurs de $\mathfrak{u}^\alpha(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G ainsi qu'un Λ'_v-module non nul L_v^0 de $\mathrm{Lie}(\widehat{T}')(\rho_v)$ contenant un système de générateurs de $\mathrm{Lie}(\widehat{T}')(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G. En prenant la somme L_v de tous les L_v^α et de L_v^0 on obtient un sous Λ'_v-module L_v de $g_v \cdot \mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p} H_1 \cdot g_v^{-1}$ contenant un système de générateurs de $\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$. sur Λ'_G. En conjuguant par g_v^{-1}, on obtient un sous-Λ'_v-module $M_v = g_v^{-1} \cdot L_v \cdot g_v$ de $\mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p} H_1$ contenant un système de générateurs de $\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$ sur Λ'_G.

Ceci est vrai pour chaque $v \in S_p$. Formons les crochets de Lie des modules M_v. Par multilinéarité des crochets de Lie, on obtient un sous-module M de $\mathrm{Log}_{\mathbb{Q}_p} H_1$ stable par $\Lambda'_G = \widehat{\bigotimes}_{v \in S_p} \Lambda'_v$ et contenant un système de générateurs de $\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$. sur Λ'_G. Le Λ'_G-sous-module M est donc un réseau de $\widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$. Il contient donc une sous-algèbre de congruence $\mathfrak{a} \cdot \widehat{\mathfrak{g}}'(\mathbb{I}_0)$ non nulle. En prenant les intersections de M avec les $\mathfrak{u}^\alpha(\mathbb{I}_0)$ et en reprenant les exponentielles, on obtient un sous-groupe de congruences dans H_1, ce qui montre l'existence du niveau galoisien $\mathfrak{l}_\mu \subset \mathbb{I}_0$. □

Remarque 8.1. *Si p inerte dans F (par exemple $F = \mathbb{Q}$), suivant une idée de J. Lang, on peut définir un niveau galoisien $\mathfrak{l}'_\mu \subset \mathbb{I}_0$ plus fin que $\mathfrak{l}_\mu$: Dans la démonstration du Théorème 6, un idéal $\mathfrak{l}'_\mu$ est intervenu dans la démonstration. C'est le plus grand idéal $\mathfrak{a}$ tel que*

$$U^{\alpha_{max}}(\mathfrak{a} \cdot \mathbb{I}_0) \subset U^{\alpha_{max}}(\rho_v)$$

Le niveau $\mathfrak{l}_\mu$ qui convient à la fin de la démonstration pour l'inclusion

$$\Gamma_{\widehat{G}'}(\mathfrak{l}_\mu) \subset \mathrm{Im}\, g_v \cdot IM\, \rho \cdot g_v^{-1}$$

est construit comme un multiple de $\mathfrak{l}'_\mu$.

9. Comparaison du niveau galoisien et de l'idéal de congruence

Théorème 7. *Soit $r {}^L H \to {}^L G$ un morphisme de transfert strict effectif irréductible et tel que $(REDAD_H)$ soit vraie. Soit $\mu_H \to \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ telle que ρ_{μ_H} soit d'image résiduelle contenant $\widehat{H}'(k') \subset \mathrm{Im}\, \overline{\rho}_{\pi_H}$. On suppose que $\overline{\rho}_\mu = r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$.*

Avec les mêmes hypothèses et notations que le théorème 6. On a $V(\mathfrak{c}_{\mu,gal}[p^{-1}]) = V(\mathfrak{l}_\mu[p^{-1}])$. Autrement dit, $\mathfrak{c}_{\mu,gal}$ et $\mathfrak{l}_\mu$ contiennent les mêmes idéaux premiers autres que (p).

Démonstration. Une direction de l'inclusion est évidente. On a déjà vu que $\mathfrak{l}_\mu \subset \mathfrak{c}_{\mu,gal}$ par le Lemme 0.9 au début de ce chapitre. Donc $V(\mathfrak{l}_\mu) \supset V(\mathfrak{c}_{\mu,gal})$.

Pour l'autre direction de l'inclusion, on prend un idéal premier $\mathfrak{p}$ dans $V(\mathfrak{l}_\mu)$, il faut montrer que $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{c}_{\mu,gal})$ ou $\mathfrak{p} = (p)$.

On considère la représentation $\rho_\mathfrak{p} \colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I}_0/\mathfrak{p})$. Soit $G_\mathfrak{p}$ l'enveloppe de Zariski de l'image de $\rho_\mathfrak{p}$. Par irréductibilité de $\rho_\mathfrak{p}$, le groupe $G_\mathfrak{p}$ est réductif et n'est contenu dans aucun parabolique. Soit $\widetilde{H_1} = \widehat{(G_\mathfrak{p}^\circ)}$. Il admet une forme H_1 définie sur F telle que $G_\mathfrak{p} \subset {}^L H_1 \subset {}^L G$ pour un triplet $(H_1, r_1, s_1) \in \mathcal{C}$. La représentation $\rho_\mathfrak{P}$ se factorise donc par la représentation fidèle $r_1 \colon {}^L H_1\ to {}^L G$ et donc

$$\mathfrak{P} \supset \mathfrak{c}_{\mu,gal}^{H_1} \supset \mathfrak{c}_{\mu,gal}$$

□

Remarque 9.1. *Supposons p inerte dans F. Si $\mathfrak{c}_{\mu,gal} \subset \mathfrak{P}$, on a aussi $\mathfrak{l}'_\mu \subset \mathfrak{P}$. On est tenté de croire, suivant une idée de J. Lang, que l'idéal $\mathfrak{l}'_\mu$ est plus proche de l'idéal de congruences : les idéaux $\mathfrak{c}_{\mu,gal}[p^{-1}]$ et $\mathfrak{l}'_\mu[p^{-1}]$ sont ils égaux ?*

Dans un travail récent, J. Lang a établi ce résultat pour $G = \mathrm{GL}_2$, $H = K^\times$ (K corps quadratique imaginaire) et $\mathbb{I} = \Lambda'_G$ (qui dans ce cas est l'algèbre d'Iwasawa à une variable).

CHAPITRE 4

Cas connus de fonctorialité

1. Puissances symétriques de GL_2

On prend $F = \mathbb{Q}$. Soit K un corps quadratique CM imaginaire et $U(n)$ un groupe unitaire associé, compact à l'infini. Soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière de poids λ sur $U(n)$. Soit $\mathcal{G}_n$ le c-groupe de $U(n)$ (voir [**CHT08**, Section 2.1]), il possède un caractère de Gross naturel (voir [**BG13**, Section 8.3]). La représentation galoisienne $\rho_\pi\colon \Gamma_F \to \mathcal{G}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ associée à π et satisfaisant les conditions de 2.3 a été construite par Kottwitz, Clozel, Harris, Labesse, Shin, Chenevier-Harris, voir [**CHLN11**].

Soit $H = GL_2$ le morphisme de puissance symétrique $\mathrm{Sym}^n\colon GL_2 \to \mathrm{GL}_{n+1}$ induit par [**CHT08**, Lemma 2.1.2] un morphisme de transfert $r\colon \mathrm{GL}_2 \to \mathcal{G}_{n+1}$ défini sur $\mathbb{Z}$. On voit facilement que ce morphisme est effectif et strict si $n > 1$. On a même $r \circ \rho_H = \rho_G$. Ceci résulte du fait que Sym^n envoie un unipotent régulier sur un unipotent régulier. Notons aussi que $Z(\mathcal{G}_{n+1}) = \{(\alpha, \alpha^2), \alpha \in \mathbb{G}_m\}$ et que $r\colon Z(\mathrm{GL}_2) \to Z(\mathcal{G}_{n+1})$ est donné par $x \mapsto (x^n, x^{2n})$, donc la condition $(PLATSURJ)$ de l'hypothèse est satisfaite.

Soit π_H une représentation cuspidale associée à une forme modulaire classique de poids $k = m + 2 \geq 2$. Son poids λ_H est donc $(m, 0)$. Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique contenant les valeurs propres de Hecke de π_H. Soit ϖ une uniformisante. On suppose que $\mathrm{SL}_2(k') \subset \mathrm{Im}\ \overline{\rho}_{\pi_H}$. On a donc $r \circ \rho_{\pi_H}$ résiduellement absolument irréductible. Par contre, la représentation adjointe sur $\widehat{\mathfrak{g}}' = \mathfrak{sl}_{n+1}$ est réductible (la condition $(REDAD_H)$ est donc satisfaite) :

$$\mathrm{Ad} \circ r = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathrm{Sym}^{2k} \otimes det^{-k}$$

Si π_H est p-ordinaire, ρ_{π_H} est ordinaire. Soit α la valeur propre de U_p. On suppose que p est décomposé dans K. On suppose aussi que $r \circ \overline{\rho}_{\pi_H}$ est p-distinguée (au sens de la Définition 4.2). On voit facilement [**HT16**, Lemma 2.6] que c'est le cas si $\alpha^{2c_n} \not\equiv 1 \pmod{\varpi}$ pour $c_n = ppcm(k; 1 \leq k \leq n)$. La théorie de Hida a été établie par Hida pour H et par D. Geraghty [**Ge10**] pour G. Le transfert à GL_n a été établi pour $n = 3, 4, 5$ par Kim-Shahidi [**KS02a**],[**KS02b**] et pour $5 \leq n \leq 8$ par Clozel-Thorne [**CT15**]. La descente à $U(n)$ a été établie par Clozel [**Clo90**]. L'existence du transfert r_* fournit un morphisme $r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ au-dessus de $\Lambda'_G \to \Lambda'_H$. Ces algèbres ont $n-1$, resp. 1 variables.

On se donne une famille de Hida $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ passant par π_H et une famille de Hida $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ telle que ρ_μ satisfasse $(Z_p - REG)$ et $(IRRAD_{G,\mathfrak{P}})$. On suppose que ces familles sont de Nebentypus trivial hors de p. Notons que les analogues des conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaisaites pour le c-groupe $\mathcal{G}_n$:
(H1) Le morphisme $\widehat{j}\colon \mathcal{G}_n \to \mathbb{G}_m$ est le facteur de similitude $(g, \mu) \mapsto \mu$; de plus $Z(\mathcal{G}_n^\circ) = \{(x, \mu), x, \mu \in \mathbb{G}_m\}$ et $Z(\mathcal{G}_n) = \{(x, x^2), x \in \mathbb{G}_m\}$. On voit donc que le noyau de $\widehat{j}$ restreint à $Z(\mathcal{G}_n^\circ)$ est connexe et que le noyau de l'isogénie $\widehat{j} \circ \widehat{\pi}\colon Z(\mathcal{G}_n^\circ) \to \mathbb{G}_m$ est d'ordre 2, divisant $p - 1$.

De plus, l'analogue de ${}^L j\colon {}^G \to {}^L(Z_G)$ est $\mathcal{G}_n \to {}^L(K^{\times,1})$. Soit $\rho_\mu\colon \Gamma_F \to {}^L G(\mathbb{I})$. Soit $\Lambda_{G,\mathbb{Z}_p} = \mathbb{Z}_p[[\mathcal{T}_1']] \subset \Lambda_G = \mathcal{O}[[\mathcal{T}_1']]$.

(H2) La représentation ${}^L j \circ \rho_\mu$ est à valeurs dans $(\Lambda_{G,\mathbb{Z}_p})^\times$. En effet en spécialisant en poids λ, on trouve que le facteur de similitude de ρ_{μ_λ} est donné par [**CHT08**, Lemme 2.1.1 et Theorem 3.3.4 (2)] et c' est une puissance du caractère cyclotomique. On a bien que Im ${}^L j \circ \rho_\mu \in \Lambda'_G)^\times$.

On obtient donc le théorème 6. Pour obtenir une bonne formulation du Théorème 7, il faut déterminer la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) qui internient dans la définition de l'idéal de congruences.

La liste des groupes ${}^L H_1$ contenant $\mathrm{Sym}^n \mathrm{GL}_2$ est la suivante

Si $n = 3$, on a $\mathrm{Sym}^3 \mathrm{GL}_2 \subset \mathrm{GSp}_4 \subset \mathcal{G}_4$, on a donc $\mathcal{C} = \{\mathrm{GL}_2, \mathrm{GSp}_4\}$ Notons que le transfert de H à $H_1 = \mathrm{GSp}_4$ a été établi dans [**RS06**] et celui de GSp_4 à GL_4 dans [**Mok14**] et la descente de GL_4 à $\mathcal{G}_4$ est dûe à Clozel [**Clo90**].

Si $n = 4$, on a $\mathrm{Sym}^4 \mathrm{GL}_2 \subset \mathrm{GSO}_5 \mathcal{G}_5$ donc $\mathcal{C} = \{\mathrm{GL}_2, \mathrm{GSO}_5\}$

Plus généralement

Si $n = 2k+1$, $n \neq 7$, on a $\mathrm{Sym}^n \mathrm{GL}_2 \subset \mathrm{GSp}_{2k+2} \mathcal{G}_{2k+2}$ donc $\mathcal{C} = \{\mathrm{GL}_2, \mathrm{GSp}_{2k+2}\}$.

Si $n = 2k$, on a $\mathrm{Sym}^n \mathrm{GL}_2 \subset \mathrm{GSO}_{2k+1} \mathcal{G}_{2k+1}$ donc $\mathcal{C} = \{\mathrm{GL}_2, \mathrm{GSO}_{2k+1}\}$

On obtient donc le Théorème 7 avec l'information supplémentaire que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}_{\mu,gal}^{\mathrm{GL}_2} \cap \mathfrak{c}_{\mu,gal}^{H_1}$ où H_1 est orthogonal ou symplectique suivant la parité de n.

2. Induction automorphe

Soit K/F une extension quadratique CM d'un corps totalement réel et $U(n)$ un groupe unitaire associé, compact à l'infini. Soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière de poids λ sur $U(n)$. Soit $\mathcal{G}_n$ le c-groupe de $U(n)$ (voir [**CHT08**, Section 1]), il possède un caractère de Gross naturel (voir [**BG13**, Section 8.3]). La représentation galoisienne $\rho_\pi \colon \Gamma_F \to \mathcal{G}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ associée à π et satisfaisant les conditions de 2.3 a été construite par Kottwitz, Clozel, Harris, Labesse, Shin, Chenevier-Harris, voir [**CHLN11**]. Soit $n = m\ell$ et F'/F une extension cyclique totalement réelle de degré ℓ de groupe de Galois C. Soit $K' = FK$ et $H = U(m)$ un groupe unitaire compact à l'infini associé à K'/F'. L'induction automorphe de H à G a été établie [**AC89**]. Elle correspond au morphisme d'inclusion $r \colon \mathcal{G}_m^C \rtimes C \to \mathcal{G}_n$. On voit facilement que ce morphisme est effectif et strict. Notons aussi que $Z(\mathcal{G}_m^C \rtimes C) = Z(\mathcal{G}_n) = \{(\alpha, \alpha^2), \alpha \in \mathbb{G}_m\}$, donc la condition $(PLATSURJ)$ de l'hypothèse est satisfaite.

On suppose que $\widehat{H}'(k') \subset \mathrm{Im}\ \overline{\rho}_{\pi_H}$. On a donc $r \circ \rho_{\pi_H}$ résiduellement absolument irréductible. Par contre, la représentation adjointe sur $\mathfrak{sl}_n$ est réductible (la condition $(REDAD_H)$ est donc satisfaite) . On peut en effet écrire une décomposition stable de la forme

$$\mathfrak{sl}_n = \mathfrak{sl}_m^C \oplus W$$

Soitπ_H une représentation cuspidale algébrique régulière de poids λ_H p-ordinaire. On suppose p totalement décomposé de F à K. On suppose que $r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ est p-distinguée (au sens de la Définition 4.2). La théorie de Hida a été établie pour G et H par D. Geraghty [**Ge10**]. L'existence du transfert r_* fournit un morphisme $r^* \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ au-dessus de $\Lambda'_G \to \Lambda'_H$. Ces algèbres ont $d(n-1)$, resp. $rd(m-1)$ variables.

On se donne une famille de Hida $\mu_H \colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ passant par π_H et une famille de Hida $\mu \colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ telle que ρ_μ satisfasse $(Z_p - REG)$ et $(IRRAD_{G,\mathfrak{P}})$. On a déjà vu dans la section 1 que les analogues des conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaisaites pour le c-groupe $\mathcal{G}_n$.

On obtient donc le théorème 6. Si de plus on suppose que $\overline{\rho}_{\mu_H}$ est absolument irréductible et Im $\overline{\rho}_{\mu_H}$ contient $\mathrm{SL}_m(k')^C$ on obtient le Théorème 7. En fait, la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) se réduit à H et G avec l'inclusion $r \colon {}^L H \subset {}^L G$. On a donc l'information supplémentaire que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}_{\mu,gal}^H$.

3. produit tensoriel sur $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$

Soit $F = \mathbb{Q}$. Soit K un corps quadratique imaginaire et $U(4)$ un groupe unitaire associé, compact à l'infini. Soit π une représentation automorphe cuspidale algébrique régulière de poids λ sur $U(4)$. Soit $\mathcal{G}_4$ le c-groupe de $U(4)$. La représentation galoisienne $\rho_\pi : \Gamma_F \to \mathcal{G}_n(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ associée à π et satisfaisant les conditions de 2.3 a été construite par Kottwitz, Clozel, Harris-Taylor, Taylor-Yoshida, Labesse, Shin, Chenevier-Harris, voir [**Shin11**], [**CHLN11**]. Le transfert de $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ à GL_4 a été construit par Ramakrishnan cite [**Ra00**]. La représentation automorphe obtenue est cuspidale si les formes ne sont pas CM. La descente à $U(4)$ est dûe à Clozel [**Clo90**]. La composée est associée au morphisme de transfert $r\colon \mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2 \to \mathcal{G}_4$. On voit facilement que ce morphisme est effectif et strict. Notons aussi que $Z(\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2)$ est connexe et se surjecte et $Z(\mathcal{G}_4) = \{(\alpha, \alpha^2), \alpha \in \mathbb{G}_m\}$, donc la condition $(PLATSURJ)$ de l'hypothèse est satisfaite.

On suppose que $\widehat{H}'(k') \subset \mathrm{Im}\, \overline{\rho}_{\pi_H}$. On a donc $r \circ \rho_{\pi_H}$ résiduellement absolument irréductible. Par contre, la représentation adjointe sur $\mathfrak{sl}_4$ est réductible (la condition $(REDAD_H)$ est donc satisfaite) :

$$\mathfrak{sl}_4 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathfrak{sl}_2 \oplus (\mathfrak{sl}_2 \otimes 1 \oplus 1 \otimes \mathfrak{sl}_2)$$

Soient f, g deux formes cupsidales classiques ordinaires de poids distincts $k, \ell \geq 2$ soit p décomposé dans K et soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique contenant les valeurs propres de Hecke de f et g. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$. La représentation $\pi_H = \pi_f \otimes \pi_g$ est cuspidale algébrique régulière de poids $\lambda_H = ((n, 0, n', 0)$ et p-ordinaire. On suppose que $r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ est p-distinguée (au sens de la Définition 4.2). C'est le cas si

$$\alpha\alpha', \alpha \cdot \beta'/p^{\ell-1}, (\beta/p^{k-1})\alpha', (\beta/p^{k-1})(\beta'/p^{ell-1})$$

sont mutuellement distincts modulo ϖ. La théorie de Hida a été établie par Hida pour H et pour G par D. Geraghty [**Ge10**]. L'existence du transfert r_* fournit un morphisme $r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ au-dessus de $\Lambda'_G \to \Lambda'_H$. Ces algèbres ont 3, resp. 2 variables.

On se donne une famille de Hida une famille de Hida $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ telle que ρ_μ satisfasse $(Z_p{-}REG)$ et $(IRRAD_{G,\mathfrak{P}})$. On a déjà vu dans la section 1 que les analogues des conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaisaites pour le c-groupe $\mathcal{G}_n$.

On obtient donc le théorème 6. Si de plus on se donne $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ passant par π_H, telle que $\overline{\rho}_{\mu_H}$ est absolument irréductible et $\mathrm{Im}\, \overline{\rho}_{\mu_H}$ contient $\mathrm{SL}_2(k')^2$ on obtient le Théorème 7. En fait, la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) se réduit à H et G avec l'inclusion $r\colon {}^LH \subset {}^LG$. On a donc l'information supplémentaire que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}^H_{\mu,gal}$.

4. transfert de GSp_4 à GL_4

Le transfert associé à l'inclusion $r\colon \mathrm{GSp}_4 \hookrightarrow \mathrm{GL}_4$ a été établi par [**Ar04**], [**Mok14**]. La descente à $U(4)$ est dûe à Clozel [**Clo90**]. La composée est associée au morphisme de transfert $r\colon \mathrm{GSp}_4 \to \mathcal{G}_4$. On voit facilement que ce morphisme est effectif et strict. Notons aussi que $Z(\mathrm{GSp}_4)$ est isomorphe à $Z(\mathcal{G}_4) = \{(\alpha, \alpha^2), \alpha \in \mathbb{G}_m\}$, donc la condition $(PLATSURJ)$ de l'hypothèse est satisfaite.

On suppose que $\mathrm{Sp}_4(k') \subset \mathrm{Im}\, \overline{\rho}_{\pi_H}$. On a donc $r \circ \rho_{\pi_H}$ résiduellement absolument irréductible. Par contre, la représentation adjointe sur $\mathfrak{sl}_4$ est réductible (la condition $(REDAD_H)$ est donc satisfaite) :

$$\mathfrak{sl}_4 = \mathfrak{sp}_4 \oplus \mathrm{St}_5$$

Si f est une forme cupsidale de Siegel classique ordinaire de poids $k = a+3 > \ell = b+3 > 3$ soit p décomposé dans K et soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique contenant les valeurs propres de Hecke de f. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$. La représentation π_H associée à f est cuspidale algébrique régulière de poids λ_H avec $r \circ \lambda_H = ((a+b, a, b, 0)$ et

p-ordinaire. On suppose que $r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ est p-distinguée (au sens de la Définition 4.2). C'est le cas si

$$\alpha, \beta/p^{\ell-1}, \gamma/p^{k-1}, \delta/p^{k+\ell-3})$$

sont mutuellement distincts modulo ϖ. La théorie de Hida a été établie pour H par [**TU99**] et pour G par D. Geraghty [**Ge10**]. L'existence du transfert r_* fournit un morphisme $r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ au-dessus de $\Lambda'_G \to \Lambda'_H$. Ces algèbres ont 3, resp. 2 variables.

Pour le premier théorème, on se donne une famille de Hida $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ telle que ρ_μ soit résiduellement irréductible et satisfasse $(Z_p - REG)$ et $(IRRAD_{G,\lambda})$ pour un λ régulier. On a déjà vu dans la section 1 que les analogues des conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaisaites pour le c-groupe $\mathcal{G}_n$.

On obtient donc le théorème 6. Si de plus on se donne $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ passant par π_H, telle que $\overline{\rho}_{\mu_H}$ est absolument irréductible et Im $\overline{\rho}_{\mu_H}$ contient $\mathrm{Sp}_4(k')$ on obtient le Théorème 7. En fait, la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) se réduit à H et G avec l'inclusion $r\colon {}^LH \subset {}^LG$. On a donc l'information supplémentaire que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}^H_{\mu,gal}$.

5. transfert $\bigwedge^2\colon \mathrm{GL}_4 \to GL_6$

Soit $K/\mathbb{Q}$ un corps quadratique imaginaire dans lequel p est décomposé ; soient $G = U(6)$ et $H = U(4)$ des formes compactes à l'infini de groupes unitaires pour $K/\mathbb{Q}$. Le transfert de H à G associé à $\bigwedge^2\colon \mathrm{GL}_4 \to \mathrm{GL}_4$ a été établi dans [**Kim03**]. On voit facilement que ce morphisme est effectif et strict. Notons aussi que $r\colon Z(\mathcal{G}_4) \to Z(\mathcal{G}_6)$ s'identifie à lélévation au carré sur $\mathbb{G}_m$, donc la condition $(PLATSURJ)$ de l'hypothèse est satisfaite.

On suppose que $\mathrm{SL}_4(k') \subset$ Im $\overline{\rho}_{\pi_H}$. On a donc $r \circ \rho_{\pi_H}$ résiduellement absolument irréductible. Par contre, la représentation adjointe sur $\mathfrak{sl}_6$ est réductible (la condition $(REDAD_H)$ est donc satisfaite) :

$$\mathfrak{sl}_6 = \mathfrak{sp}_4 \oplus \mathfrak{sl}_2$$

Soit $\mathcal{O}$ l'anneau de valuation d'un corps p-adique contenant les valeurs propres de Hecke de π. Soit ϖ une uniformisante de $\mathcal{O}$.

On suppose que $r \circ \overline{\rho}_{\mu_H}$ est p-distinguée (au sens de la Définition 4.2). C'est le cas si le paramètre de Satake en p $\alpha(t_{\pi_H,p})$ /(mod ϖ).

La théorie de Hida a été établie pour H et pour G par D. Geraghty [**Ge10**]. L'existence du transfert r_* fournit un morphisme $r^*\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{T}_H$ au-dessus de $\Lambda'_G \to \Lambda'_H$. Ces algèbres ont 5, resp. 3 variables.

Pour le premier théorème, on se donne une famille de Hida $\mu\colon \mathbb{T}_G \to \mathbb{I}$ telle que ρ_μ soit résiduellement irréductible et satisfasse $(Z_p - REG)$ et $(IRRAD_{G,\lambda})$ pour un λ régulier. On a déjà vu dans la section 1 que les analogues des conditions $(H1)$ et $(H2)$ sont satisfaisaites pour le c-groupe $\mathcal{G}_n$.

On obtient donc le théorème 6. Si de plus on se donne $\mu_H\colon \mathbb{T}_H \to \mathbb{I}_H$ passant par π_H, telle que $\overline{\rho}_{\mu_H}$ est absolument irréductible et Im $\overline{\rho}_{\mu_H}$ contient $\mathrm{SL}_4(k')$ on obtient le Théorème 7. En fait, encore une fois, la classe $\mathcal{C}$ des triplets (H_1, r_1, s_1) se réduit à H et G avec l'inclusion $r\colon {}^LH \subset {}^LG$. On a donc l'information supplémentaire que $\mathfrak{c}_{\mu,gal} = \mathfrak{c}^H_{\mu,gal}$.

Bibliographie

[Ar04] J. Arthur *Automorphic representations of GSp(4)*, In Contributions to automorphic forms, geometry, and number theory, p. 65 ?81, Baltimore, MD, 2004. Johns Hopkins Univ. Press.

[AC89] J. Arthur, L. Clozel, *Simple algebras, Base Change and the Advanced Theory of the Trace Formula*, Ann. of Math. Studies, Princeton U. Press, 1989

[BZ77] I. N. Bernstein, A. V. Zelevinski, *Induced representations of reductive p-adic groups I*, Ann. Sci. ENS 4ème série, tome 10, no 4 (1977), p. 441-472

[BAL] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitre 2, Hermann, Paris, 1962.

[BCM] N. Bourbaki, *Algèbre Commutative*, Hermann, Paris, 1961–1998.

[CRT] H. Matsumura, *Commutative Ring Theory*, Cambridge studies in advanced mathematics **8**, Cambridge Univ. Press, 1986

[BC09] J. Bellaïche, G. Chenevier, *Families of Galois representations and Selmer groups*, Astérisque No 324, Publ. SMF, 2009

[BHT17] G. Boeckle, M. Harris, J. Thorne, *Unconditional potential lifting*, preprint

[Bo79] A. Borel, Automorphic L-functions, *Automorphic Forms, representations, and L-Functions* (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Corvallis, OR, USA, 1979, pp. 2472-89

[BG13] K. Buzzard, T. Gee, *The conjectural connections between automorphic representations and Galois representations*, *Automorphic Forms and Galois Representations, volume I*, Proc. LMS Durham Symposium 2011, eds F. Diamond, P. Kassaei, M. Kim, LMS Lect. Notes Ser. 414, Cambridge Univ. Press 2013

[Ca79] P. Cartier, *Representations of p-adic groups : a survey. In Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977, Part 1, Proc. Sympos. Pure Math.,XXXIII, pages111-155.Amer.Math.Soc., Providence, R.I., 1979.

[Cas88] W. Casselman, *The unramified principal series of p-adic groups, I the spherical functions*, Compos. Math. 40, no 3 (1980), 387-406

[Cas95] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, preprint 1995

[ChH13] G. Chenevier, M. Harris, *Construction of automorphic Galois representations, II*, Cambridge Math. Journal 1, 53-73 (2013)

[CHT08] L. Clozel, M. Harris, R. Taylor, *Automorphy for some ℓ-adic lifts of automorphic modulo ℓ Galois representations*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. (2008), no. 108, 1-181, With Appendix A, summarizing unpublished work of Russ Mann, and Appendix B by Marie-France Vignéras. MR MR2470687

[Clo90] L. Clozel, *Motifs et Formes Automorphes : Application du Principe de Fonctorialité*, *Automorphic Forms, Shimura Varieties L Functions*, Proc. Conference Ann Arbor, eds L. Clozel, J. Milne, Perspectives in Math. vol.10, Academic Press 1990

[Clo91] L. Clozel, *Représentations galoisiennes associées aux représentations automorphes autoduales de $GL(n)$*, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 73 (1991), p. 97-145

[CHLN11] L. Clozel, M. Harris, Labesse, B.C. Ngô, *On the Stabilization of the trace formula*, 527 pp, International Press 2011

[CT14] L. Clozel, J. Thorne, *Level-raising and symmetric power functoriality, I.* Compositio Mathematica, Vol. 150 (2014), No. 5, pp 729-748

[CT15] L. Clozel, J. Thorne, *Level-raising and symmetric power functoriality, II.* Annals of Mathematics, Vol. 181 (2015), No. 1, pp. 303-359

[CIT16] A. Conti, A. Iovita, J. Tilouine,*Big image of Galois representations associated with finite slope p-adic families of modular forms*, pp.87-123, *dans Elliptic Curves, Modular Forms and Iwasawa Theory (in honour of John Coates' 70th birthday)*, eds D. Loeffler, S. Zerbes, Springer 2016

[Con16a] A. Conti, *Grande image de Galois pour les familles p-adiques de formes automorphes de pente positive*, thèse de l'Université Paris 13, defended July 13, 2016

[Con16b] A. Conti, *Galois level and congruence ideal for* GSp_4, preprint, 65 pp

[FC90] G. Faltings, C.-L. Chai, *Degeneration of abelan varieities*, Erg. Math. Grenzgebiete 3, 22, Springer Verlag 1990.

[FH91] W. Fulton, J. Harris, *Representation Theory*, Graduate Texts in Math., Springer Verlag 1991.

[Go1889] É.Goursat, *Sur les substitutions orthogonales et les divisions régulières de l'espace* Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. 6(1989), PP 9-102.

[Gr98] B. Gross, *On the Satake isomorphism in Galois representations in Arithmetic Algebraic Geometry* (Durham, 1996), volume 254 of London Math. Soc. Lecture Note Ser., pages 223237. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998

[Gr99] B. Gross, *Algebraic Modular Forms*, Isr. J. Math. 113 (1999),61-93

[GT11] W.-T. Gan, S. Takeda, The local Langlands conjecture for $GSp(4)$, Ann. of Math., vol. 173 (2011), pp. 1841-1882

[GeT05] A. Genestier, J. Tilouine, *Syst'emes de Taylor-Wiles pour* GSp(4)*, dans Formes Automorphes (II) : GSp(4)*, Asterisque 302 (2005).

[Ge10] *Modularity lifting theorems for ordinary Galois representations*, Harvard Dissertation 2010

[GK15] W. Goldring, J.-S. Koskivirta, *Strata Hasse Invariants, Hecke algebras and Galois Representations*, ArXiv :submit/1306555 math.NT 17 July 2015

[HT01] *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich

[HJ16] R. Harron, A. Jorza, *On symmetric power* $\mathcal{L}$*-invariants of Iwahori level Hilbert modular forms*, à paraître à Amer. J. of Math.

[HL04] M. Harris, J.-P. Labesse, *Conditional base change for unitary groups*, Asian J. Math. 8 (2004)no. 4, 653-683

[H86] H. Hida, *Hecke algebras for* GL_1 *and* GL_2, Sém. de Théorie des Nombres, Paris 1984-85, Progress in Math. **63** (1986), 131–163

[H88] H. Hida, *Modules of congruence of Hecke algebras and L–functions associated with cusp forms*, Amer. J. Math. 110 (1988), 323–382

[H88b] H. Hida, *Modules of congruence of Hecke algebras and L-functions associated with cusp forms*, Amer. J. Math. 110 (1988), 323-382

[H89] H. Hida, *Nearly ordinary Hecke algebras and Galois representations in several variables*, Proc. JAMI Inaugural Conference, , Supplement to Amer. J. Math. (1989), 115-134

[H95] H.Hida,*Control theorems of p-nearly ordinary cohomology groups for SL(n)*, Bull.Soc. Math. France 123(1995), no.3,425-475.

[H02] H. Hida, *Control theorems of coherent sheaves on Shimura varieties of PEL type*, J. Inst. Math. Jussieu, 1, 2002, pp.1-76

[H15] H. Hida, *Big Galois representations and p-adic L-functions*, Compositio Math. 151 (2015) 603-664

[Hs14] M. Hsieh, *Eisenstein congruence on unitary groups and Iwasawa main conjectures for CM fields.* Journal of the American Mathematical Society, 27 (2014), no. 3, 753-862

[GME] H. Hida, *Geometric Modular Forms and Elliptic Curves*, second edition, World Scientific, Singapore, 2011

[MFG] H. Hida, *Modular Forms and Galois Cohomology*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **69**, Cambridge University Press, Cambridge, England, 2000 (a list of errata posted at `www.math.ucla.edu/~hida`).

[PAF] H. Hida, *p-adic Automorphic Forms*, Springer Monographs in Mathematics, Springer Verlag, 2004

[H16] H. Hida, *Arithmetic of adjoint L-values*, *in p-adic Aspects of Modular Forms*, eds B. Balasubramaniam, H. Hida, A. Raghuram, J. Tilouine, Proc. of an IISER Pune Conference, World Scientific Publ. 2016

[HT15] H. Hida, J. Tilouine, *Big image of Galois representations and congruence ideals, in Arithmetic Geometry*, pp. 217-254, Proc. Workshop on Serre's Conjecture, Hausdorff Inst. Math., Bonn, eds. L. Dieulefait, D.R. Heath-Brown, G. Faltings, Y.I. Manin, B. Z. Moroz, J.-P. Wintenberger, Cambridge University Press (2015).

[HT16] H. Hida, J. Tilouine, *Symmetric power congruence ideals and Selmer groups*, soumis pour publication.

[HR10] T. Haines, S. Rostami, *The Satake isomorphism for special maximal parahoric Hecke algebras*, Repr. Th. 14, 264-284, 2010

[Ja03] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Math. Surveys and Monographs 107, AMS, Providence, 2003

[Kim03] H. H. Kim, *Functoriality for the exterior square of GL_4 and the symmetric fourth of GL_2*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 1, 139-183. With appendix 1 by Dinakar Ramakrishnan and appendix 2 by Kim and Peter Sarnak

[KS02a] H. H. Kim and F. Shahidi,*Cuspidality of symmetric powers with applications*, Duke Math. J. 112 (2002), pp.177-197

[KS02b] H. H. Kim and F. Shahidi, *Functorial products for $GL_2 \times GL_3$ and the symmetric cube for GL_2*, Ann. of Math. (2) 155 (2002), no. 3, 837-893. With an appendix by Colin J. Bushnell and Guy Henniart

[Ko92] R. Kottwitz, *On the λ-adic representations associated to some simple Shimura varieties*, Invent. Math. 108 (1992), 653-666

[KrSh16] A. Kret, S.-W. Shin, *Galois representations for general symplectic groups*, preprint arXiv :1609.04223 [math.NT]

[La02] S.Lang, *Algebra* 3rd edition, Grad. Text in Math 2011, Springer (2002)

[Lab09] J.-P. Labesse, *Changement de base CM et séries discrètes*, dans Book ed. M. Harris 2009.

[Laff16] L. Lafforgue, *Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale*, ArXiv 1209.5352v6

[Lana15] T. Lanard, *Représentations des groupes p-adiques et conjectures de Langlands*, Mémoire de fin de Master 2, IMJ-PRG Jussieu et ENS Lyon, https ://webusers.imj-prg.fr/ jean-francois.dat/enseignement/memoires/M2Lanard.pdf

[LaTo79] Lancaster, J. Towber, *Representation functors and flag algebras for the classical groups*, J. of Algebra 94, 265-316 (1985)

[Lang16a] J. Lang, *Image of Galois representations associated to p-adic families of modular forms*, UCLA Dissertation 2016

[Lang16b] J. Lang, *On the image of the Galois representation associated to a non-CM Hida family*, Algebra Number Theory 10(1) (2016), pp. 155-194

[La79] R. Langlands, *Automorphic representations, Shimura varieties and motives*, ein Maerchen, *dans Automorphic forms, representations and L-functions*, Proc. Corvallis Conference, eds A. Borel, W. Casselman, PSPM 33 (II), Publ. AMS 1979, Providence

[Lau05] G. Laumon, *Fonctions zêta des variétés de Siegel de dimension trois,dans Formes Automorphes (II), le cas du groupe $GSp(4)$*, Astérisque 302, SMF, 2005

[MR70] B. Mazur and L. Robert, *Local Euler characteristic*, Invent. Math. **9** (1970), 201–234, avec un Appendix par J. Tate

[Me73] J. I. Merzljakov, *Automorphisms of two-dimensional congruence groups*, Algebra Logic 12 (1973), pp. 468-477.

[Mok14] C. P. Mok, *Galois representations attached to automorphic forms on* GL_2 *over a CM field*, Compos. Math. 150, (2014), pp 523-567

[Mom81] F. Momose, *On the ℓ-adic representations attached to modular forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 28(1) (1981), pp. 89-109

[OMZ69] T. O'Meara, H. Zassenhaus, *The automorphisms of linear congruence groups over Dedekind rings* J. Number Th. 1 (1969), 211-221

[OM78] T. O'Meara, *Symplectic groups*, Mathematical Surveys, No. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1978

[PR94] V. Platonov, A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Acad. Press 1994

[Pi12a] V. Pilloni, *Sur la théorie de Hida pour le groupe* GSp_{2g}, Bulletin de la SMF 140, fascicule 3 (2012), 335-400

[Pi12b] V. Pilloni, *Modularité, formes de Siegel et surfaces abéliennes*, J. reine angew. Math. 666, 2012, 35-82

[Pink98] R. Pink, *Compact subgroups of linear algebraic groups*, J. Algebra 206 (1998), pp. 438-504.

[PT02] P. Polo, J. Tilouine, *Bernstein-Gelfand-Gelfand complexes and cohomology of nilpotent groups over* $\mathbb{Z}_p$, Astérisque 282, SMF, 2002

[Re10] D. Renard, *Représentations des groupes réductifs p-adiques*, Cours Spécialisés vol.17, Publ. Soc. Math. France 2010

[Ra00] *Modularity of the Rankin-Selberg L-series, and multiplicity one for SL(2)*, Ann. of Math. (2) 152, no. 1, 45-111 (2000)

[Ri76] K. Ribet,*A modular construction of unramified p-extensions of* $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Inv. Math. 34, 151-162, 1976

[RS06] D. Ramakrishnan, F. Shahidi, *Siegel modular forms of genus two attached to elliptic curves*, Math. Res. Lett. 14 (2007), fasc. 2, pp.315-332

[RS07] Roberts B., Schmidt R.,*Local Newforms on* $GSp(4)$, Springer LNM 1918, Springer Verlag 2007

[SGA3III] *Schémas en groupes*, Séminaire IHES 1962-1964, Springer LNM 153, 1970

[Shin11] S.W. Shin *Galois representations arising from some compact Shimura varieties*, Ann. of Math. 173 (2011), no.3, 1645-1741

[Spr79] T. Springer, Reductive groups, *Automorphic Forms, representations, and L-Functions* (A. Borel and W. Casselman, eds.), Proc. Symp. Pure Math., vol. 33, Amer. Math. Soc., Corvallis, OR, USA, 1979, pp. 3-28

[Ta91] R. Taylor, *Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight*, Duke Math. J. 63 (1991), no. 2, 281–332.

[Ti96] J. Tilouine, *Deformations of Galois Representations and Hecke Algebras*, Narosa Publ. House, Delhi, 1996

[TU99] J. Tilouine, E. Urban, *Several variable p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigensystems and their Galois representations*, Ann. Sci. E.N.S., 4 série, t. 32, p. 499-574, 1999

[Ti06] J. Tilouine, *Nearly ordinary rank four Galois representations and p-adic Siegel modular forms*, Compos. Math.142 (2006), 1122-1156

[To79] J. Towber, *Young Symmetry, the Flag Manifold, and representations of* $\mathrm{GL}(n)$ J. Algebra 61. 414-462 (1979)

[Ur05] E. Urban, *Sur les reprsentations p-adiques associes aux reprsentations cuspidales de* $\mathrm{GSp}_{4/\mathbb{Q}}$, *dans Formes Automorphes (II) , Le cas du groupe* $\mathrm{GSp}(4)$, eds Jacques Tilouine, Henri Carayol ,Michael Harris, Marie-France Vignéras, Astérisque 302 (2005), xiv+436 pages

[Vi84] M.-F. Vignéras, *On the global correspondence between* $\mathrm{GL}(n)$ *and a division algebra*, Institute for Advanced Studies, Princeton 1984

[We05] R. Weissauer, *Four-dimensional Galois representations*, *dans Formes Automorphes (II) , le cas du groupe* $GSp(4)$, pp., Astérisque 302, SMF, 2005

[Wi00] J.S. Wilson , *On just Infinite Abstract and Profinite Groups*, *dans New Horizons in Pro-p-Groups*, pp.181-204, eds M. du Sautoy, D. Segal, A. Shalev, Progress in Math. 184, 2000, Springer Science Publ.

[Y79] H. Yoshida, *Weil's representations and Siegel's modular forms.* Lectures on harmonic analysis on Lie groups and related topics (Strasbourg, 1979), pp. 319-341, Lectures in Math., 14, Kinokuniya Book Store, Tokyo, 1982.