UNIVERSITÉ PARIS 13

Ecole doctorale Galilée

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

Thèse

présentée et soutenue publiquement par

Guillaume Cloître

le 26 juin 2017

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : Mathématiques

Sur le motif intérieur de certaines variétés de Shimura : le cas des variétés de Picard

Directeur de thèse : **M. Jörg Wildeshaus**

Membres du Jury

M. Farid Mokrane	Examinateur
M. Frédéric Deglise	Rapporteur
M. Bruno Klingler	Rapporteur
M. Jörg Wildeshaus	Directeur de thèse

Remerciements

Ma première pensée va à mon directeur, Jörg Wildeshaus. Je le remercie très sincèrement de m'avoir initié à ses passionnantes thématiques de recherche en me proposant un sujet de thèse sur lequel j'ai eu la chance de travailler durant ces quatre années. Je lui suis très reconnaissant pour l'aide mathématique précieuse qu'il a su m'apporter, pour avoir contribué au développement des qualités nécessaires à la résolution de ce problème et pour le contact franc et direct qu'il nous a permis d'avoir.

Mes premières pas dans la recherche se sont faits au contact de MM. Mokrane et Tilouine. Ce fut un grand plaisir de discuter et de travailler durant mon master et ensuite à certains moments de ma thèse, lors des séminaires ou des groupes de travail avec deux mathématiciens de cette qualité et de cette gentillesse. Je suis très honoré de voir M. Mokrane être le président de mon jury.

Parmi les professeurs que j'ai le plus appréciés se trouve M. Klingler. Les cours que j'ai suivis de sa part durant mon année de master ou mes premières années de thèse m'ont été d'une grande aide pour me repérer dans le monde motivique. Son travail de rapporteur m'aura été très précieux afin d'améliorer la qualité de mon mémoire. Par la même occasion, je remercie M. Deglise d'avoir été mon rapporteur et d'avoir enrichi mes quatre années de thèse de plusieurs conférences auxquelles j'ai eu la chance d'assister.

La personne qui m'a conseillé sur le choix de ma thèse est M. Bost, mon professeur de théorie des nombres de master à Orsay. Je tiens également à le remercier de m'avoir orienté aux moments où j'étais face à d'importantes options.

Je suis aussi très reconnaissant envers Giuseppe Ancona, mon grand frère mathématique, qui a accompli son rôle à merveille depuis notre rencontre jusqu'à très récemment, en me prodiguant de nombreux conseils qui dépassaient de loin le cadre mathématique. En plus d'être un mathématicien talentueux, c'est une personne modeste, altruiste et très agréable que j'ai eue la chance de côtoyer régulièrement durant ma thèse.

Mes remerciements vont plus généralement à l'ensemble des professeurs qui m'ont permis de découvrir la beauté des mathématiques, de développer mon goût pour la science et qui m'ont donné envie d'apprendre toujours davantage. Je pense par exemple à MM. Merker, Lannes, Colmez, Almeras, Luron, Benoit, Henaff, Desmézières, Trouboul, Pernault Lelouche, Danilo.

Je souhaite ensuite remercier l'ensemble des doctorants de Paris 13 pour la très bonne ambiance de travail. Grâce à eux, devoir braver les aléas des transports pour se rendre au bureau aura été fait d'un pas plus léger. Je pense particulièrement à mes collègues de bureau, Irene, Pepe, Oussama, Didier, Daniel, Ti, Viet, Roland, Cuong, Thomas, Giovani... Je remercie également Mattia pour les discussions mathématiques animées que nous avons pues avoir ces deux dernières années. Ces moments font partie des instants mathématiques les plus riches de ma thèse. Un prix spécial devrait aussi être décernée à la taulière Anna-Laura sans qui le LAGA ne serait plus le même. Je remercie également tous les autres pour leur amitié : Pierre, Bruno, Tom, Lisa, Julien, Nicolas, Xiaoyu, Carlos... Je remercie tous les amis mathématiciens ou non qui m'ont soutenu durant ces années de thèse : Thibaud et Sandrine, Xiaohua, Martin, Grégoire, Edouard, Kevin, Alexandre, Louis, Valentin, Arthur, Ildar, Joaquin, Jean-Denis, Paul, Thomas, Florent, Sammy, Emmanuel (avec Laurent), Hervé, Bernardo, Kevin, Guernut, Nicolae, Adi, Loïc...

Enfin, je dédie cette thèse à l'ensemble de la grande famille, dont j'ai la chance de faire partie, en premier lieu à mes parents, mes frères, soeurs et assimilés, Pauline, Camille, Julien, Paul, Vincent, Simon ainsi qu'à mes grands-parents. Ma passion pour les mathématiques doit beaucoup à mes deux grands-pères pour qui j'ai une pensée particulière.

Résumé

Les variétés de Picard sont des variétés de Shimura associées au groupe des similitudes unitaires d'un espace hermitien de dimension 3 sur un corps CM. Elles paramétrisent les classes d'isomorphismes de variétés abéliennes munies de certaines structures supplémentaires. En particulier, il existe une variété abélienne universelle sur une variété de Picard et plus généralement des familles de Kuga-Sato.

A ces variétés sont attachés des groupes de cohomologie. L'un des intérêts de telles variétés est qu'il est possible de trouver des représentations automorphes dans les groupes de cohomologie qui lui sont attachés, en particulier dans les groupes de cohomologie intérieure. Selon le programme de Langlands, ces représentations correspondent conjecturalement à des motifs.

Le résultat principal de cette thèse est la construction de facteurs directs du motif intérieur de certaines familles de Kuga-Sato sur des variétés de Picard, c'est-à-dire d'un analogue motivique de la cohomologie intérieure. Cela passe par une étude détaillée des poids du motif bord de ces familles. On en déduit l'existence de motifs associés à certaines représentations automorphes.

Abstract

Picard varieties are Shimura varieties associated to the group of unitary similitudes of an hermitian space of dimension 3 over a CM field. They parametrize isomorphism classes of abelian varieties with some additional data. In particular, there exists a universal abelian variety over a Picard variety and more generally Kuga-Sato families.

Cohomology groups are attached to these varieties. Automorphic representations can be found in cohomology groups, more precisely in interior cohomology groups. Following Langlands' program, these representations correspond conjecturally to motives.

The main result of this thesis is the construction of direct factors of the interior motive of certain Kuga-Sato families over a Picard variety, meaning a motivic analogue of interior cohomology. To prove this, we study the weights of the boundary motive of such families. We deduce from this the existence of a motive associated to certain automorphic representations.

Table des matières

Introduction

Les variétés de Picard sont des variétés de Shimura de type PEL. Leur construction fait intervenir un corps CM que l'on notera E. Elles admettent une interprétation comme espace de modules de certaines variétés abéliennes de dimension $3g$, g étant le degré du sous-corps totalement réel maximal de E, munies de données supplémentaires, entre autres une multiplication complexe par un ordre de E et une structure de niveau.

Une variété de Picard S admet une compactification de Baily-Borel, obtenue en ajoutant un nombre fini de points.

Toute variété de Picard S possède également une variété abélienne universelle $\mathcal{A} \to S$. Plus généralement, on s'intéressera à des familles de Kuga-Sato $\mathcal{A}^r \to S$ sur une variété de Picard S.

Dans [40], Wildeshaus développe une stratégie afin de construire ce qu'il définit comme le motif intérieur d'une variété. Notre but est d'appliquer cette stratégie à une famille de Kuga-Sato sur une variété de Picard.

Pour une variété X lisse sur un corps k de caractéristique 0, dont on note $M_{gm}(X)$ le motif associé dans la catégories $DM_{gm}(k)$ des motifs géométriques et $M^c_{gm}(X)$ sa version à support compact, il existe un morphisme canonique $M_{gm}(X) \to M^c_{gm}(X)$. Toute compactification $\tilde{X}$ de X fournit une factorisation du morphisme précédent par $M_{gm}(\tilde{X})$. L'intérêt d'un hypothétique motif intérieur est de fournir une telle factorisation qui soit minimale. Il s'agit d'un analogue motivique de la cohomologie intérieure $H^*_!(X)$ d'une variété X : celle-ci est définie comme l'image de la cohomologie à support compact dans la cohomologie de X (pour une certaine théorie cohomologique H^*, par exemple de Betti ou l-adique) par l'application canonique $H^*_c(X) \to H^*(X)$. En effet, le motif intérieur, lorsqu'il existe, a pour réalisation la cohomologie intérieure.

De tels motifs devraient pouvoir être utilisés, par exemple, dans le cas des conjectures de Beilinson sur le lien entre régulateurs et fonctions L. Par exemple, Kings établit une forme affaibli de ces conjectures pour certaines familles de Kuga-Sato sur des surfaces modulaires de Hilbert-Blumenthal dans [25]. L'existence de motifs intérieurs associés à ces variétés permet de préciser la nature des éléments motiviques construits par Kings (voir la remarque 3.15. de [41]).

Par ailleurs, le programme de Langlands prévoit une correspondance entre certaines représentations automorphes et certains motifs qui se lirait par l'égalité entre, d'une part, la fonction L associée à la représentation automorphe et, d'autre part, la fonction L associée au motif correspondant. Les représentations automorphes sont en particulier à chercher dans les groupes de cohomologie intérieure $H^i_!(X)$ d'une variété de Shimura X. Ces derniers se décomposent en composantes isotypiques sous l'action de l'algèbre de Hecke. On s'attend donc à ce que ces représentations correspondent à des motifs. Dans le cas du groupe GL_2, Deligne associe dans [9] à toute forme modulaire une représentation galoisienne. Par la suite, Scholl a montré (voir [34]) que ces représentations sont les réalisations d'un motif dont on dira qu'il est associé à la forme modulaire de départ. Ce programme peut être mis en oeuvre dans le cas des variétés de Picard de manière à construire des motifs associés à certaines représentations automorphes. Concernant le lien entre motifs et formes automorphes, on pourra se référer à [7].

Deux ingrédients permettent de donner une condition quant à l'existence du motif intérieur.

Tout d'abord, le morphisme $M_{gm}(X) \to M^c_{gm}(X)$ se complète en un triangle distingué canonique

$$\partial M_{gm}(X) \to M_{gm}(X) \to M^c_{gm}(X) \to \partial M_{gm}(X)[1].$$

Le motif $\partial M_{gm}(X)$ est le motif bord de X (construit par Wildeshaus dans la partie 2 de [38]). D'une certaine façon, $\partial M_{gm}(X)$ contrôle les factorisations de $M_{gm}(X) \to M^c_{gm}(X)$.

D'autre part, la catégorie triangulée des motifs géométriques sur un corps de caractéristique nulle admet une structure de poids, notion développée par Bondarko [4]. Cette dernière permet d'identifier les motifs de Chow (vus comme objet d'une sous-catégorie pleine de la catégorie triangulée des motifs mixtes $DM_{gm}(k)$) comme les objets de poids 0 de $DM_{gm}(k)$. Une des difficultés de la notion de structure de poids est l'absence de notion canonique de gradué pur de poids 0. Une telle notion peut-être rendue fonctorielle pour des catégories d'objets évitant certains poids (définies par Wildeshaus dans la première partie de [40]).

Le critère identifié dans [40] permettant de construire le motif intérieur de X est l'évitement des poids 0 et -1 par $\partial M_{gm}(X)$.

Cependant, on ne peut espérer voir $\partial M_{gm}(X)$ éviter les poids 0 et -1 sans que X soit déjà propre, c'est-à-dire que $\partial M_{gm}(X)$ soit trivial (cf. 1.22. de [42]). On peut néanmoins s'intéresser à des facteurs directs d'un tel motif et espérer construire un motif intérieur non trivial pour de tels objets.

Considérant une variété de Shimura de type PEL S (par exemple une variété de Picard), Ancona [1] construit un relèvement $\tilde{\mu}$ aux motifs de Chow relatif sur S du foncteur canonique $\mu : \mathrm{Rep}(G) \to VHS(S)$ qui à une représentation du groupe algébrique définissant la variété de Shimura S associe une variation de structure de Hodge.

Grâce au foncteur allant de la catégorie des motifs de Chow relatifs sur une base S vers les motifs géométriques construit dans [42], on peut alors associer à tout idempotent du dual de la représentation standard de G un idempotent du motif $M_{gm}(\mathcal{A})$ de la variété abélienne universelle $\mathcal{A}$ associée à la variété de Shimura S. Cela se généralise à toute famille de Kuga-Sato $\mathcal{A}^r$ sur S.

Les réalisations du motif bord associé à un tel facteur direct de $M_{gm}(\mathcal{A}^r)$ sont des dégénérescences de structure de Hodge au bord de la compactification de Baily-Borel de S.

Il reste alors à trouver un critère permettant de dire qu'un motif évite certains poids.

Les poids d'un motif respectent les notions correspondantes dans les réalisations. Si un motif évite certains poids, ses réalisations éviteront les poids correspondants.

Dans le cas des motifs de type abélien sur un corps, les réalisations permettent de détecter les poids du motif : un motif évite certains poids si et seulement si les réalisations évitent ces mêmes poids.

Les variétés de Picard relèvent de cette dernière catégorie. La conclusion de ces considérations est qu'il suffit que les dégénérescences de certaines structures de Hodge évitent certains poids pour pouvoir mettre en oeuvre la stratégie précédente.

Le calcul de ces dégénérescences se fait en utilisant de façon essentielle le résultat principal de Burgos et Wildeshaus dans [6]. Contrairement au cas des surfaces de Picard traité par Ancona [2], le groupe arithmétique noté $\overline{H_C}$ dans [6] n'est pas trivial.

Notre résultat principal montre que, sous l'hypothèse de régularité du plus haut poids de la représentation (supposée irréductible) définissant l'idempotent e de $M_{gm}(\mathcal{A}^r)$, le motif $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^e$ évite les poids 0 et -1. Ce résultat est analogue à ceux déjà obtenus par Wildeshaus ([41] et [43]).

Une analyse plus détaillée permet d'affiner ces résultats. Par exemple, on trouve que parmi certaines représentations, comprenant les représentations absolument irréductibles, la régularité du plus haut poids de la représentation équivaut à l'absence des poids 0 et -1 du motif bord. Ces résultats sont à nouveau à rapprocher de ceux précédemment établis pour d'autres variétés de Shimura.

On montre également que le motif intérieur d'une variété de Picard est muni d'une action de l'algèbre de Hecke. On peut découper le motif intérieur construit précédemment (ou plutôt le motif homologique associé) en composantes isotypiques afin de construire des motifs associés à des formes automorphes.

Donnons un bref aperçu de chacune des parties de ce travail.

Le premier chapitre expose la théorie des variétés de Picard, introduites par exemple par Gordon dans [17]. Nous nous plaçons dans le cadre de Pink [31].

Le deuxième chapitre traite des compactifications des variétés de Picard, à nouveau dans le formalisme développé dans [31].

Le troisième chapitre reprend les constructions du motif intérieur de Wildeshaus [40], les propriétés vérifiées par celui-ci, les critères d'évitement de poids, ainsi que les constructions d'idempotents du motif de la variété abélienne universelle d'une variété de Picard.

Le but du quatrième chapitre est de calculer explicitement les poids apparaissant dans les dégénérescences de structures de Hodge au bord de la compactification de Baily-Borel.

Enfin, le cinquième chapitre étudie l'action de l'algèbre de Hecke sur le motif intérieur. Le but est de généraliser la construction d'un motif associé à une forme automorphe au cas des variétés de Picard.

Notations : Lorsque k est un corps parfait, on note Sch/k la catégorie des schémas séparés de type finis et Sm/k la sous-catégorie pleine des schémas lisses sur k.

$DM_{gm}(k)$ désigne la catégorie triangulée des motifs géométriques sur k (définis par exemple dans [27]). Lorsque B est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative, il existe une version à coefficients dans B notée $DM_{gm}(k)_B$.

$CHM(k)$ est la catégorie des motifs de Chow définie par exemple par Levine dans [27]. Il s'agit de la catégorie opposée de celle définie par André dans [3]. $CHM(k)_B$ est sa version à coefficients dans B, une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.

De façon analogue, pour $S \in Sm/k$, on appellera catégorie des motifs de Chow relatifs la catégorie $CHM^s(S)$ qui est la catégorie opposée de celle définie dans la section 1.6. de [13]. Elle possède également une version $CHM^s(S)_B$ pour B une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.

Chapitre 1

Variétés de Picard

Notre objet d'étude est un certain type de variétés de Shimura : les variétés de Picard. Après les avoir définies suivant le formalisme de Pink [31], nous les interprétons comme espaces de modules.

Soit E un corps CM, F son sous-corps totalement réel maximal, $\mathcal{O}_E$ l'anneau des entiers de E. On note $g = [F : \mathbb{Q}]$ et $\Phi = \{\sigma_i : E \to \mathbb{C}\}_{1 \leq i \leq g}$ un ensemble de plongements complexes de E tels que $\Phi \cup \overline{\Phi} = \{\sigma_i, \overline{\sigma_i}\}_{1 \leq i \leq g}$ soit l'ensemble des plongements complexes de E. Autrement dit, Φ est un type CM de E (cf. page 90 de [28]).

Soit V un espace vectoriel de dimension 3 sur E et J une forme hermitienne sur V telle que pour tout plongement complexe σ de E la forme hermitienne $J_\sigma : V_\sigma \times V_\sigma \to \mathbb{C}$ ait signature $(2, 1)$ où $V_\sigma = V \otimes_{E,\sigma} \mathbb{C}$.

On considère également L un $\mathcal{O}_E$-réseau de V tel que $J(L, L) \subset \mathcal{O}_E$.

Proposition 1.1. *Il existe une base $\mathfrak{B}$ de V dans laquelle la matrice de J a la forme*

$$J_b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pour un certain $b \in F$.

Plus précisément, tout vecteur isotrope pour J de V peut être complété en une base dans laquelle J aura la forme précédente.

Démonstration. On peut considérer la forme hermitienne J sur E^3 comme une forme quadratique en six variables sur F. D'après le théorème 66 :2. et le paragraphe 63 :19. de [29], une telle forme est isotrope.

Ainsi, il existe un vecteur isotrope non nul u pour J. Comme $J(u,.)$ est une forme linéaire non nulle, il existe w' tel que $J(u,w') \neq 0$.

$J(u,.)$ étant une forme linéaire non nulle, son noyau est un hyperplan, donc il existe un vecteur v non proportionnel à u qui lui est J-orthogonal.

Par ailleurs $J(v,v) \neq 0$ car J est non dégénérée. Soient $\alpha = J(v,w')/J(v,v)$ et $w'' = w' - \alpha v$. Alors $J(v,w'') = 0$. Quitte à multiplier w'' par un scalaire non nul, on obtient J sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Il suffit alors de poser $w = w'' - \frac{a}{2}u$ et de considérer la base (u,v,w). $\square$

Définition 1.2. *$GU(V;J)_F$ est le groupe algébrique sur F tel que, pour toute F-algèbre R, on a*

$$GU(V,J)_F(R) = \{g \in GL_{E\otimes_F R}(V\otimes_F R) \,/\, \exists \lambda(g) \in (E\otimes_F R)^\times, J(g.,g.) = \lambda(g)J(.,.)\}.$$

On pose $\tilde{G} := Res_{F/\mathbb{Q}} GU(V;J)_F$.

Autrement dit, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R, on a

$$\tilde{G}(R) = \{g \in GL_{E\otimes_{\mathbb{Q}} R}(V\otimes_{\mathbb{Q}} R) \,/\, \exists \lambda(g) \in (E\otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times, J(g.,g.) = \lambda(g)J(.,.)\}.$$

Comme $\lambda(g)J(.,.) = J(g.,g.)$ est une forme hermitienne, $\lambda(g)$ est fixé par la conjugaison complexe. Ainsi, $\lambda(g) \in (F \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times$; on dispose ainsi d'un morphisme $\lambda : \tilde{G} \to Res_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F}$ qui sur les R-points vaut $g \mapsto \lambda(g)$.

Par ailleurs, on a un isomorphisme $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^g$ donné par

$$e \otimes z \mapsto (\sigma_i(e)z, \overline{\sigma_i(e)}z)_{1\leq i\leq g}$$

Pour chaque $1 \leq i \leq g$ les deux facteurs directs de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ sont échangés par l'élément non trivial $\alpha \in \mathrm{Gal}(E/F)$.

Cet isomorphisme induit $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq \prod_{i=1}^{g} (V_{i,+} \times V_{i,-})$ où $V_{i,+}$ (resp. $V_{i,-}$) est l'espace où E agit via σ_i (resp. $\overline{\sigma_i}$). α induit une involution de $V \otimes \mathbb{C}$ qui échange $V_{i,+}$ et $V_{i,-}$. De plus, comme un élément g de $\tilde{G}(\mathbb{C})$ commute à l'action de E, les espaces V_i^+ et V_i^- sont stabilisés par les éléments de $\tilde{G}(\mathbb{C})$.

Pour tout $g \in GL_{E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$, on pose $g = (g_{|V_{i,+}}, g_{|V_{i,-}})_{1\leq i\leq g}$ et on a

$${}^t\alpha(g)Jg = ({}^tg_{|V_{i,-}} J_b g_{|V_{i,+}}, {}^tg_{|V_{i,+}} J_b g_{|V_{i,-}})_{1\leq i\leq g}.$$

Comme $g \in \tilde{G}(\mathbb{C})$ si et seulement si ${}^t\alpha(g)Jg = \lambda(g)J_b$, on a $(g_{|V_{i,+}}, g_{|V_{i,-}})_{1\leq i\leq g} \in \tilde{G}(\mathbb{C})$ si et seulement si

$$g_{|V_{i,-}} = \lambda_i(g) J_b^{-1t} g_{|V_{i,+}}^{-1} J_b \tag{1.1}$$

où λ_i est la composée de l'application λ avec la projection

$$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^g \to \mathbb{C}$$

$$(z_i, z_i')_{1\leq i\leq g} \mapsto z_i.$$

On a donc un isomorphisme $\tilde{G}_{\mathbb{C}} \simeq (GL_{3,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})^g$ induit par $g \mapsto (g_{|V_{i,+}}, \lambda_i(g))$. $\tilde{G}$ est donc un groupe réductif.

La conjugaison complexe de $\mathbb{C}$ agit sur $E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \simeq (\mathbb{C} \times \mathbb{C})^g$ en envoyant $e \otimes z \mapsto (\sigma_i(e)z, \overline{\sigma_i(e)}z)_{1\leq i\leq g}$ sur $e \otimes \overline{z} \mapsto (\sigma_i(e)\overline{z}, \overline{\sigma_i(e)}\overline{z})_{1\leq i\leq g}$, c'est-à-dire en envoyant un élément $(z_i, z_i')_{1\leq i\leq g}$ de $(\mathbb{C} \times \mathbb{C})^g$ sur $(\overline{z_i'}, \overline{z_i})$.

La conjugaison complexe agit donc sur $GL_{E\otimes_{\mathbb{Q}}\mathbb{C}}(V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ en envoyant un élément $g = (g_{|V_{i,+}}, g_{|V_{i,-}})_{1\leq i\leq g}$ de $G_{\mathbb{C}}$ sur $(\overline{g_{|V_{i,-}}}, \overline{g_{|V_{i,+}}})_{1\leq i\leq g}$.

Par conséquent, la conjugaison complexe agit sur $\tilde{G}(\mathbb{C})$ de la façon suivante :

$$g = (g_i, \lambda_i) \in \tilde{G}(\mathbb{C}) \mapsto (\overline{\lambda_i J_b^{-1t} g_i^{-1} J_b}, \overline{\lambda_i}) \in \tilde{G}(\mathbb{C}).$$

On peut résumer cela en énonçant que la conjugaison complexe agit sur $\tilde{G}_{\mathbb{C}}$ par

$$(g_i, \lambda_i)_{1\leq i\leq g} \mapsto (\overline{\lambda_i} g_i^*, \overline{\lambda_i})_{1\leq i\leq g}$$

où

$$g_i^* = J_b^{-1t} \overline{g_i}^{-1} J_b. \tag{1.2}$$

Les $\mathbb{R}$-points de $\tilde{G}$ sont donc

$$\tilde{G}(\mathbb{R}) = \{(g_i, \lambda_i) \in (GL_3(\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^\times)^g \,/\, g_i = \lambda_i J_b^{-1t} \overline{g_i}^{-1} J_b\}.$$

Plus généralement, pour $R \subset \mathbb{C}$ contenant toutes les images $\sigma_i(F)$ des g plongements de F dans $\mathbb{C}$, on a

$$\tilde{G} \times_{\mathbb{Q}} R = \prod_i GU(V, J)_F \times_{F,\sigma_i} R.$$

D'autre part, on a le morphisme canonique $\mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}} \to Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F}$, adjoint de l'identité de $\mathbb{G}_{m,F}$, qui sur les R-points vaut $R \ni x \mapsto x \otimes 1 \in R \otimes_{\mathbb{Q}} F$

Définition 1.3. *On considère le groupe algébrique* $G := \tilde{G} \times_{Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$

On a $G_{\mathbb{C}} \simeq GL^g_{3,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ et

$$G(\mathbb{R}) = \{((g_i)_{1 \leq i \leq g}, \lambda) \in GL^g_{3,\mathbb{C}} \times \mathbb{R}^\times \,/\, \forall 1 \leq i \leq g, \lambda g_i^* = g_i\}.$$

G est donc un groupe réductif connexe.

De plus, le centre $Z(G)$ de G est le groupe algébrique

$$Z(G) = Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \times_{Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}.$$

L'action de $G_{\mathbb{C}}$ sur $V_{\mathbb{C}}$ sera importante dans le chapitre 4. Nous la résumons pour la suite dans la proposition suivante :

Proposition 1.4. *Soit* $g = ((g_i)_{1 \leq i \leq g}, \lambda) \in G(\mathbb{C}) \simeq GL_3(\mathbb{C})^g \times \mathbb{C}^\times$. *Alors* g *agit sur* V_i^+ *identifié aux vecteurs colonnes de* $\mathbb{C}^3$ *par multiplication à gauche par* g_i *et sur* V_i^- *identifié aux vecteurs colonnes de* $\mathbb{C}^3$ *par multiplication à gauche par* $\lambda J_b^{-1t} g_i^{-1} J_b$.

Démonstration. Les identifications faites sont telles que $g_i = g_{|V_i^+}$, d'où l'assertion concernant l'action sur V_i^+. L'action sur V_i^- découle de la formule 1.1 de la page précédente. □

On note $\mathbb{S}$ le tore de Deligne, c'est-à-dire que $\mathbb{S} = Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$.

On définit un morphisme $h : \mathbb{S} \mapsto G_{\mathbb{R}}$ donné sur les $\mathbb{C}$-points par :

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\left(\begin{pmatrix} \frac{z_1+z_2}{2} & 0 & \frac{z_1-z_2}{2} \\ 0 & z_1 & 0 \\ \frac{z_1-z_2}{2} & 0 & \frac{z_1+z_2}{2} \end{pmatrix} \right)_{1 \leq i \leq g}, z_1 z_2 \right).$$

Ce morphisme induit une structure de Hodge rationnelle de poids $(1, -1)$, $(-1, 1)$ et $(0, 0)$ sur $\mathrm{Lie}(G)$.

Il est bien défini sur $\mathbb{R}$ comme le montre le calcul suivant :

$$\begin{aligned} z\overline{z} J_b^{-1} \overline{\begin{pmatrix} \frac{z+\overline{z}}{2} & 0 & \frac{z-\overline{z}}{2} \\ 0 & z & 0 \\ \frac{z-\overline{z}}{2} & 0 & \frac{z+\overline{z}}{2} \end{pmatrix}}^{-1} J_b &= z\overline{z} J_b^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\overline{z}+z}{2} & 0 & \frac{\overline{z}-z}{2} \\ 0 & \overline{z} & 0 \\ \frac{\overline{z}-z}{2} & 0 & \frac{\overline{z}+z}{2} \end{pmatrix}^{-1} J_b \\ &= z\overline{z} J_b^{-1} \begin{pmatrix} \frac{z+\overline{z}}{2z\overline{z}} & 0 & \frac{z-\overline{z}}{2z\overline{z}} \\ 0 & \overline{z}^{-1} & 0 \\ \frac{z-\overline{z}}{2z\overline{z}} & 0 & \frac{z+\overline{z}}{2z\overline{z}} \end{pmatrix} J_b \\ &= \begin{pmatrix} \frac{z+\overline{z}}{2} & 0 & \frac{z-\overline{z}}{2} \\ 0 & z & 0 \\ \frac{z-\overline{z}}{2} & 0 & \frac{z+\overline{z}}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De plus, en notant $w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \mathbb{S}$ le morphisme de poids, $h \circ w$ est le morphisme

$$t \to (\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, t^2)$$

qui est bien à valeur dans $Z(G)$ et défini sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.5. *$h(i)$ est une involution de Cartan sur G^{ad}.*

Démonstration. Il nous faut montrer que $(G^{ad})^{(h(i))}(\mathbb{R})$ est compact (cf. page 17 de [28]).

Soit $H = Res_{F/\mathbb{Q}} SU(V,J)_F$. L'application $H \to G^{ad}$ est donnée sur les $\mathbb{C}$-points par l'application $SL_3(\mathbb{C})^g \to PGL_3(\mathbb{C})^g$ qui est surjective. Le morphisme $H \to G^{ad}$ est donc surjectif. C'est pourquoi il nous suffit de prouver que $H^{(h(i))}(\mathbb{R})$ est compact.

$h(i) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & i & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, 1 \right)$ agissant par conjugaison sur $H(\mathbb{C}) \simeq SL_3(\mathbb{C})^g$, il envoie $(g_i)_{1 \leq i \leq g} \in H(\mathbb{C})$ sur $((iJ_1)g_i(iJ_1)^{-1})_{1 \leq i \leq g} = (J_1 g_i J_1^{-1})_{1 \leq i \leq g}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} H^{(h(i))}(\mathbb{R}) &= \{(g_i)_{1 \leq i \leq g} \in SL_3(\mathbb{C})^g / J_1 J_b^{-1} {}^t\overline{g_i}^{-1} J_b J_1^{-1} = g_i\} \\ &\simeq SU(3)^g. \end{aligned}$$

Ce groupe est bien compact. □

Pour vérifier l'existence d'une donnée de Shimura au sens de Pink associée au morphisme h (voir la définition 2.1. de [31]), il faut enfin s'intéresser à l'existence de facteurs de type compacts définis sur $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.6. *G^{ad} ne possède pas de facteurs non triviaux définis sur $\mathbb{Q}$. En particulier, il n'existe pas de tels facteurs de type compact définis sur $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. Comme précédemment, nous considérons le groupe algébrique $H = Res_{F/\mathbb{Q}} SU(V,J)_F$. Le morphisme $H \to G^{ad}$ étant surjectif, il suffit de montrer que H n'a pas de facteurs simples définis sur $\mathbb{Q}$.

On note E_{gal} une clôture galoisienne de E. $H_{E_{gal}} \simeq SL^g_{3,E_{gal}}$ se scinde en produits de groupes simples. Ces g facteurs sont permutés de façon transitive par l'action de $\mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$.

Ainsi H ne peut avoir de facteur simple non trivial défini sur $\mathbb{Q}$. □

Soit X l'ensemble des $G(\mathbb{R})$-conjugués du morphisme h. (G, X) est donc une donnée de Shimura. De plus, on a :

Proposition 1.7. *(G, X) vérifie la condition $(+)$ définie dans [6] : $Z(G)$ est isogène au produit d'un tore scindé sur $\mathbb{Q}$ et d'un tore de type compact.*

Démonstration. $Z(G) = Res_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,E} \times_{Res_{F/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_{m,F}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est isogène à $T \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ où T est le tore défini sur $\mathbb{Q}$

$$T(R) = \{x \in (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^{\times} \,/\, x\alpha(x) = 1\}.$$

En particulier, $T(\mathbb{R}) = \{(z_i)_{1 \leq i \leq g} \in \mathbb{C}^{\times g}\,,\, z_i\overline{z_i} = 1\}$. T est donc un tore de type compact. □

Pour $1 \leq i \leq g$, on note V_i le sous-espace de $V_{\mathbb{R}}$ correspondant à la projection

$$E \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}^g \to \mathbb{C}$$
$$e \otimes x \mapsto \sigma_i(e)x.$$

X possède une description plus explicite :

Proposition 1.8.

$$X = \prod_{1 \leq i \leq g} X_i$$

où X_i est l'ensemble des droites de V_i négatives pour J.

Démonstration. On note D_i la droite de $V_i \simeq \mathbb{C}^3$ engendrée par le vecteur $(1, 0, -1) \in \mathbb{C}^3$. Si $g = ((g_i)_{1 \leq i \leq g}, \lambda) \in G(\mathbb{R})$ commute avec h, alors g_i préserve le sous-espace de V_i où $h(z)$ agit par $\overline{z}$ qui n'est autre que D_i. Ainsi on peut associer à chaque élément $g.h$ de X l'élément $g.(D_i) = (g_iD_i)$ où g_iD_i est l'image de D_i par g_i. Comme D_i est négative pour J et $g \in G(\mathbb{R})$, cette application est bien à valeur dans l'ensemble noté $\prod_{1 \leq i \leq g} X_i$. Pour voir que cette application est surjective, il suffit de noter que pour toute droite négative D'_i, il existe $g_i \in GU(V_i, J)$ tel que

$$g_iD_i = D'_i.$$

Enfin, pour montrer son injectivité, remarquons que si $g_iD_i = D_i$, g_i préserve aussi l'orthogonal de D_i dans V_i pour J, c'est-à-dire l'espace où $h(z)$ agit par z. Ainsi, g_i préserve l'espace où $h(z)$ agit par z. Il préserve également l'espace où $h(z)$ agit par $\overline{z}$. Comme ces espaces caractérisent le morphisme h, $(g_i)_{1 \leq i \leq g}$ commute avec h. Ceci montre l'injectivité de l'application précédemment définie. □

Cette démonstration montre également que

$$X = G(\mathbb{R})/K_\infty$$

avec

$$K_\infty = \{((g_i), \lambda) \in G(\mathbb{R})/g_i D_i = D_i \,, \forall\, 1 \leq i \leq g\}.$$

On considère désormais un sous-groupe compact et ouvert K de $G(\mathbb{A}_f)$ qui stabilise le réseau L choisi ci-dessus. A un tel sous-groupe, on associe la variété de Shimura

$$S(G, K)(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Elle sera notée $S(\mathbb{C})$ en l'absence d'ambiguïté. Lorsque K est net (voir le paragraphe 0.5. de [31]), $S(\mathbb{C})$ est lisse. On supposera K net dans la suite.

On note

$$G(\hat{\mathbb{Z}}) := \{g \in G(\mathbb{A}_f) \,/\, g(L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}) = L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}\}.$$

On considèrera, par exemple, des groupes K du type

$$K_N = \{g \in G(\hat{\mathbb{Z}}) \,/\, g = \mathrm{id} \mod N\}$$

où $N \geq 2$ est un entier. Afin de satisfaire l'hypothèse de netteté, on pourra prendre $N \geq 3$.

Remarque 1.9. *Dans [17], la donnée de Shimura considérée est $(\tilde{G}, X)$. Le problème est qu'elle ne vérifie pas la condition $(+)$ de Burgos et Wildeshaus dans [6] (rappelée dans la proposition 1.7. ci-dessus). Or, nous aurons besoin de cette hypothèse pour appliquer les résultats de* [6].

En un certain sens précisé ci-dessous, il n'y a pas grande différence entre les variétés de Shimura associées à ces données différentes.

Proposition 1.10. *On rappelle que $H = Res_{F/\mathbb{Q}} SU(V, J)_F$. On a*

$$H = G^{der} = \tilde{G}^{der}.$$

La variété de Shimura $S(G, K)(\mathbb{C})$ est donc une réunion finie de variétés de Shimura associées à $\tilde{G}$.

Démonstration. On a $G^{der} \subset \tilde{G}^{der} \subset H$, avec égalité sur les $\mathbb{C}$-points. Le reste découle du théorème 5.17. de [28]. □

Disons un mot du corps réflexe d'une variété de Picard. On rappelle qu'il s'agit du corps de définition de la $G_{\mathbb{C}}$-classe de conjugaison du cocaractère $\mu : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ défini par

$$\mu(z) = h(z,1) = (\begin{pmatrix} \frac{z+1}{2} & 0 & \frac{z-1}{2} \\ 0 & z & 0 \\ \frac{z-1}{2} & 0 & \frac{z+1}{2} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, z).$$

On rappelle que E est muni d'un type Φ. On appelle $\mathbb{Q}^{al}$ une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ contenant E_{gal}, une clôture galoisienne fixée de E. Le corps réflexe de (E, Φ) est alors par définition le sous-corps de $\mathbb{Q}^{al}$ fixé par les éléments $\tau \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{al}/\mathbb{Q})$ tel que $\tau\Phi = \Phi$ (cf. définition 11.1. de [28]). Il s'agit également du sous-corps de E_{gal} fixé par les éléments $\tau \in \mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$ tels que $\tau\Phi = \Phi$.

Proposition 1.11. *Le corps réflexe $E(G, X)$ d'une variété de Picard définie sur le corps CM E est le corps réflexe de (E, Φ).*

Démonstration. Comme G se scinde sur E_{gal}, ce dernier contient le corps réflexe de la variété de Picard $E(G, X)$.

$\mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$ agit sur l'ensemble des plongements de E dans $\mathbb{C}$.

L'action de $\tau \in \mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$ sur $E \otimes_{\mathbb{Q}} E_{gal}$ est

$$e \otimes f \mapsto e \otimes \tau(f).$$

Dans l'identification $E \otimes_{\mathbb{Q}} E_{gal} \simeq E_{gal}^{2g}$, cette action est donnée par

$$(\sigma_i(e)f, \overline{\sigma_i}(e)f)_{1\leq i\leq g} \mapsto (\sigma_i(e)\tau(f), \overline{\sigma_i}(e)\tau(f))_{1\leq i\leq g} = (\tau(\tau^{-1}\sigma_i(e)f), \tau(\tau^{-1}\overline{\sigma_i}(e)f))_{1\leq i\leq g}.$$

Soit $(g_i, \lambda) \in G_{E_{gal}} \simeq GL_{3,E_{gal}}^g \times \mathbb{G}_{m,E_{gal}}$. On note $\tau^{-1}(i)$ l'entier tel que $\sigma_{\tau^{-1}(i)} \in \{\tau^{-1}\sigma_i, \tau^{-1}\overline{\sigma_i}\}$ et $\tilde{g}_{\tau^{-1}(i)}$ l'élément qui est $g_{\tau^{-1}(i)}$ (resp. $\lambda J^{-1 t} g_{\tau^{-1}(i)}^{-1} J$) si $\tau^{-1}\sigma_i = \sigma_{\tau^{-1}(i)}$ (resp. si $\tau^{-1}\sigma_i = \overline{\sigma_{\tau^{-1}(i)}}$).

Alors, de la description précédente de l'action de $\mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$ sur $E \otimes_{\mathbb{Q}} E_{gal}$, on déduit que l'action de $\mathrm{Gal}(E_{gal}/\mathbb{Q})$ sur $G_{E_{gal}}$ est la suivante :

$$\tau.((g_i)_{1\leq i\leq g}, \lambda) = ((\tau.\tilde{g}_{\tau^{-1}(i)})_{1\leq i\leq g}, \tau.\lambda).$$

Comme chacune des compositions de μ avec chacune des g projections sur l'un des g facteurs $GL_{3,E_{gal}}$ de $G_{E_{gal}}$ sont identiques, μ est défini (au moins) sur le sous-corps de E_{gal} fixé par les éléments stabilisant Φ, c'est-à-dire sur le corps réflexe de (E, Φ).

En outre, $V_{i,+}$ (respectivement $V_{i,-}$) se décompose sous l'action de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ via (un conjugué de) ce cocaractère μ en un sous-espace de poids 0 de dimension 1 (resp. 2) et un sous-espace de poids -1 de dimension 2 (resp. 1). Les espaces $V_{i,+}$ et $V_{i,-}$ sont échangés par un automorphisme τ échangeant σ_i et $\overline{\sigma_i}$. Si la classe de conjugaison de ce cocaractère était défini sur un sous-corps fixé par un tel τ, l'espace de poids 0 de $V_{i,+}$ serait envoyé sur celui de poids 0 de $V_{i,-}$ par cet automorphisme ; la même propriété serait vérifiée par les espaces de poids -1. C'est impossible pour des raisons de dimension.

Ceci permet de voir que si B est un sous-corps de E_{gal} est fixé par un automorphisme ne stabilisant pas Φ, la classe de conjugaison de μ ne peut être définie sur B. Autrement dit, le corps réflexe de (E, Φ) est le corps de définition de la classe de conjugaison de μ, c'est-à-dire le corps réflexe de la variété de Picard.

$\square$

D'après le chapitre 11 de [31], la variété de Picard possède un modèle canonique S défini sur le corps réflexe $E(G, X)$. Concernant la détermination du corps réflexe de (E, Φ), on pourra se reporter à [14].

Intéressons-nous à l'interprétation de $S(G, X)(\mathbb{C})$ en espace de module. Comme V est une représentation de $\mathbb{S}$ de poids $(-1, 0)$ et $(0, -1)$, on peut construire l'extension unipotente de G par V (voir la proposition 2.17. de [31]). La variété de Shimura mixte associée est notée $\mathcal{A}$. D'après une des propriétés 11.2. de [31], $\mathcal{A}$ possède un modèle canonique sur le corps réflexe $E(G, X)$.

Plus généralement, on note $\mathcal{A}^r$ la variété de Shimura mixte associée à l'extension unipotente de G par V^r. Elle possède également un modèle canonique sur $E(G, X)$. Grâce aux paragraphe 2.20. et 3.10. ainsi qu'au lemme 3.11. de [31], nous savons que $\mathcal{A}^r$ est également le r-ème produit fibré de $\mathcal{A}$ au-dessus de S, c'est-à-dire $\mathcal{A} \times_S \mathcal{A} \times_S \cdots \times_S \mathcal{A}$.

On rappelle qu'une variété abélienne complexe peut être représentée sous la forme (W, Λ, ι) où W est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, Λ est un réseau de W et ι une structure complexe pour laquelle il existe une forme de Riemann ψ. L'application $W \times W \to \mathbb{C}$ définie par

$$(u, v) \mapsto \psi(\iota u, v) + i\psi(u, v)$$

est alors une forme hermitienne définie positive.

Définition 1.12. *On considère une variété abélienne A sur $\mathbb{C}$. On dit que deux formes de Riemann ψ_1 et ψ_2 sont équivalentes si il existe des entiers positifs n_1 et n_2 tels que*

$$n_1\psi_1 = n_2\psi_2.$$

On appelle polarisation homogène de A une classe d'équivalence d'une forme de Riemann. On appelle variété abélienne polarisée une variété abélienne munie d'une polarisation homogène.

Définition 1.13. *On considère (A, p) une variété abélienne polarisée munie d'une multiplication complexe m par $\mathcal{O}_E$. Alors l'espace vectoriel réel $W_{\mathbb{R}}$ définissant A (qui n'est rien d'autre que son espace tangent en l'identité) est muni de deux structures complexes. L'une est sa structure complexe qui la définit comme tore complexe. L'autre est celle induite par l'action de $\mathcal{O}_E \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Ces deux structures complexes induisent une décomposition*

$$W_{\mathbb{R}} = W_+ \oplus W_-$$

où W_+ (resp. W_-) est le sous-espace de $W_{\mathbb{R}}$ où les deux structures complexes sont égales (resp. opposées). On appelle alors signature de (A, p, m) le couple d'entier

$$(dim(W_+), dim(W_-)).$$

On rappelle que L est un $\mathcal{O}_E$-réseau de V fixé et J est la forme hermitienne de V fixée au début de ce chapitre.

Définition 1.14. *Soit $A = (W, \Lambda, \phi)$ une variété abélienne complexe de dimension $3g$. On note $\hat{T}(A) = \lim\limits_{\leftarrow} A_n$ le module de Tate, A_n étant l'ensemble des points de n-torsion. Alors il existe un isomorphisme*

$$\hat{T}(A) \simeq L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}.$$

Pour K un sous-groupe compact et ouvert de $G(\hat{\mathbb{Z}})$, on dit que deux isomorphismes $\psi_1 : \hat{T}(A) \xrightarrow{\sim} L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}$ et $\psi_2 : \hat{T}(A) \xrightarrow{\sim} L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}$ sont K-équivalents s'il existe $k \in K$ tel que

$$\psi_2 = k\psi_1.$$

Une structure de niveau K sur A est alors une K-classe d'équivalence d'isomorphisme

$$\hat{T}(A) \xrightarrow{\sim} L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}.$$

Lemme 1.15. *On considère une variété abélienne complexe polarisée* (A, p) *de dimension* $3g$ *qui est munie d'une multiplication complexe par* $\mathcal{O}_E$ *de signature* $(2g, g)$*. Supposons que* $A = (W, \Lambda, \iota)$*. On note* τ *la structure complexe sur* W *induite par la multiplication complexe.*

On note également p *un représentant de la polarisation homogène dont est munie* A*. Alors la forme hermitienne définie sur* W *munie de la structure complexe* ι *par*

$$J_A = p(\tau., .) + ip(., .)$$

a signature $(2g, g)$*.*

Démonstration. On peut écrire $W = W_+ \oplus W_-$ où W_+ (resp. W_-) est le sous-espace propre de τ associé à la valeur propre i (resp. $-i$). Alors sur W_+

$$J_A(., .) = p(\iota., .) + ip(., .).$$

Sur W_-,

$$J_A(., .) = p(-\iota., .) + ip(., .) = -(p(\iota., .) - ip(., .)).$$

Ainsi J_A est une forme hermitienne définie positive sur W_+ et définie négative sur W_-. Pour conclure, il reste à vérifier que W_+ et W_- sont orthogonaux pour J_A. On considère $w_+ \in W_+$ et $w_- \in W_-$. En utilisant le fait que p est alternée et que $p(\iota., .)$ est symétrique (ceci découlant du fait que p est une polarisation de (W, ι)), on a alors

$$\begin{aligned} J_A(w_+, w_-) &= p(\iota w_+, w_-) + ip(w_+, w_-) \\ J_A(w_-, w_+) &= p(-\iota w_-, w_+) + ip(w_-, w_+) \\ &= -p(\iota w_+, w_-) - ip(w_+, w_-) \\ &= -J_A(w_+, w_-). \end{aligned}$$

Par conséquent $J_A(w_+, w_-) = 0$. La signature de J_A est donc $(\dim W_+, \dim W_-) = (2g, g)$. □

Théorème 1.16. $S(G, K)(\mathbb{C}) = S(\mathbb{C})$ *est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphismes de quadruplets* (A, p, m, ϕ) *où* (A, p) *est une variété abélienne de dimension* $3g$ *munie d'une polarisation homogène,* m *une multiplication complexe par l'anneau des entiers* $\mathcal{O}_E$ *de signature* $(2g, g)$ *et* ϕ *une structure de niveau* K *induite par un isomorphisme* $(\hat{T}(A), J_A) \simeq (L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}, J)$ *où* $\hat{T}(A)$ *est le module de Tate de* A *et* $J_A = p(., \tau.) + ip(., .)$*,* τ *étant la structure complexe induite par la multiplication complexe sur* A*.*

$\mathcal{A} \to S$ *est le schéma abélien universel associé. Il est défini sur* $E(G, X)$*, le corps réflexe de* S*.*

Démonstration. On considère le point base de X, c'est-à-dire $D = (D_i)_{1\leq i\leq g}$. On va lui associer un quadruplet comme ci-dessus.

Pour cela, on prend le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V_\mathbb{R} = V \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R}$, le réseau L ainsi qu'une structure complexe j sur $V_\mathbb{R}$ donnée par $h(i)$. Par ailleurs $V_\mathbb{R}$ est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel car $E \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{R} \simeq \mathbb{C}^g$. Cela induit une autre structure complexe (que l'on notera τ) qui coïncide avec j sur chacun des espaces P_i orthogonaux de D_i dans V_i et est opposé à j sur chacun des espaces D_i. Par ailleurs, on considère la forme hermitienne J de signature $(2, 1)$ sur l'espace $V_\mathbb{R}$ par rapport à la structure complexe τ. Soit ψ la partie imaginaire de J pour cette structure complexe. On a alors pour $u, v \in V_\mathbb{R}$

$$J(u, v) = \psi(\tau u, v) + i\psi(u, v).$$

De plus, ψ est alternée car J est hermitienne. ψ est non dégénérée car J l'est. $Re(J) = \psi(\tau., .)$ est symétrique. Ainsi, $\psi(j., .)$ est symétrique.

Enfin, on vérifie que $\psi(j., .)$ est définie positive en faisant le calcul d'une part sur D_i, d'autre part sur P_i (les deux espaces étant orthogonaux pour ψ, ainsi que de tels espaces pris pour $i \neq j$). Si $u \in D_i\backslash\{0\}$, sachant par définition de J que $J(u, u) < 0$, on a

$$\psi(ju, u) = \psi(-\tau u, u) = -\psi(\tau u, u) = -Re(J(u, u)) > 0$$

Si $u \in P_i\backslash\{0\}$, sachant cette fois que $J(u, u) > 0$,

$$\psi(ju, u) = \psi(\tau u, u) = Re(J(u, u)) > 0$$

Par définition de J, on a également $\psi(L, L) \subset \mathbb{Z}$.

On note alors

$$A = (V_\mathbb{R}, L, j)$$

qui est un tore complexe polarisable donc une variété abélienne dont la dimension est $3g$. On note p la polarisation homogène associée à ψ.

En outre, on dispose d'une action de $\mathcal{O}_E$ sur $V_\mathbb{R}$ notée m. Cette action est compatible avec ψ au sens où

$$\psi(\alpha(m(a))u, v) = \psi(u, m(a)v)$$

Il s'agit donc d'une multiplication complexe. On note que τ est induite par l'action de $\mathcal{O}_E \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Cette action commute donc à l'action de j. D'après la comparaison que l'on a effectuée entre les structures complexes τ et j (qui coïncident sur les D_i et sont opposées sur les P_i), la signature de la multiplication complexe m est $(2g, g)$.

Enfin, on choisit la K-structure de niveau donnée par l'identité sur $L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}$.

A la droite D correspondant au point base de X on associe le quadruplet

$$(A, p, m, id).$$

Soit $x = (g_\infty.D, g_f) \in X \times G(\mathbb{A}_f)$ où $g_\infty \in G(\mathbb{R})$. A nouveau, on va associer à ce point un quadrauplet comme ci-dessus.

On note $V_x := V_{\mathbb{R}}$ comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $L_x := g_f(L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}})\cap L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$. Montrons qu'il s'agit d'un réseau. D'après le lemme d'approximation forte (voir par exemple le théorème 4.16. de [28]), il existe $(g_{\mathbb{Q}}, g_{\hat{\mathbb{Z}}}) \in G(\mathbb{Q})\times G(\hat{\mathbb{Z}})$ tel que

$$g_f = g_{\mathbb{Q}} g_{\hat{\mathbb{Z}}}.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} L_x &= g_{\mathbb{Q}}(L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}})\cap L\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q} \\ &= g_{\mathbb{Q}}(L). \end{aligned}$$

On met la structure complexe $j_x := g_\infty j g_\infty^{-1}$ sur $V_{\mathbb{R}}$. $J_x := J(g_\infty., g_\infty.)$ est une forme hermitienne sur $V_{\mathbb{R}}$ muni de la structure complexe $\tau_x = g_\infty \tau g_\infty^{-1}$. On note ψ_x sa partie imaginaire qui, comme précédemment pour ψ, définit une polarisation sur le tore complexe (V_x, L_x, j_x). On définit alors la variété abélienne A_x

$$A_x = (V_x, L_x, j_x)$$

que l'on munit de la polarisation homogène p_x induite par ψ_x.

Comme précédemment, on vérifie que $\mathcal{O}_E$ agit sur V_x, stabilise L_x, commute avec la structure complexe et est compatible avec la polarisation. La variété abélienne $A_x := (V_x, L_x, \psi_x)$ est donc munie d'une multiplication complexe qui est encore de signature $(2g, g)$.

Enfin, on a

$$\begin{aligned} \hat{T}(A_x) &= L_x\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}} = g_{\mathbb{Q}}(L)\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}} = g_{\mathbb{Q}}(L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}) \\ &= g_f(L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}) \simeq L\otimes_{\mathbb{Z}}\hat{\mathbb{Z}}. \end{aligned}$$

On associe à $x = (g_\infty.D, g_f)$ la K-classe de la K-structure de niveau donnée par g_f^{-1} qu'on notera ϕ_x.

Si on change $(g_\infty.D, g_f)$ en $(g_\infty.D, g_f k)$, les données associées sont inchangées, hormis la K-structure de niveau, remplacée par $k^{-1}\phi_x$ qui est K-équivalente à ϕ_x.

Si on change $(g_\infty.D, g_f)$ en $(qg_\infty.D, qg_f)$ avec $q \in G(\mathbb{Q})$, q induit un isomorphisme entre les données associées. En particulier, la forme de Riemann change, mais pas la polarisation homogène qu'elle induit. En effet, $q \in G(\mathbb{Q})$ donc $\lambda(q) \in \mathbb{Q}^\times$ et

$$\psi_{q.x} = \psi_x(q.,q.) = \lambda(q)\psi_x.$$

Passons maintenant à l'injectivité de l'application tout juste définie. Pour cela, prenons un isomorphisme θ entre (A_g, p_g, m_g, ϕ_g) et $(A_{g'}, p_{g'}, m_{g'}, \phi_{g'})$, avec $g, g' \in G(\mathbb{R}) \times G(\mathbb{A}_f)$. On notera $g = (g_\infty, g_f)$ et $g' = (g'_\infty, g'_f)$.

θ envoie L_g sur $L_{g'}$, $L_g \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = V$ et $L_{g'} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q} = V$. Par conséquent, θ respecte la $\mathbb{Q}$-structure de V. De plus, il commute aux multiplications complexes. Enfin, il envoie ψ_g sur $\psi_{g'}$. Par conséquent, θ respecte la $\mathbb{Q}$-structure de V et laisse invariant J à un facteur rationnel près. Il détermine donc un élément $q \in G(\mathbb{Q})$ tel que, quitte à remplacer g en qg, on a

$$(A_g, p_g, m_g) = (A_{g'}, p_{g'}, m_{g'}).$$

D'autre part, comme $j_g = j_{g'}$, $g'_\infty g_\infty^{-1}$ préserve les droites D_i. Ainsi

$$g'_\infty g_\infty^{-1} \in K_\infty.$$

Enfin, comme $L_g = L_{g'}$ et $\phi_g = \phi_{g'}$,

$$g'_f g_f^{-1} \in K.$$

D'où l'injectivité de l'application définie.

Passons à la surjectivité. On considère (A, p, m, ϕ) un quadruplet comme dans l'énoncé. On note $A = (W, \Lambda, \iota)$ notre variété abélienne où W est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $6g$, Λ un réseau de W et ι une structure complexe. On dispose d'un isomorphisme

$$(\Lambda \otimes_\mathbb{Z} \hat{\mathbb{Z}}, J_A) \simeq (L \otimes_\mathbb{Z} \hat{\mathbb{Z}}, J).$$

De plus, d'après le lemme 1.1., (W, J_A) est de signature $(2g, g)$ car m est de signature $(2g, g)$. Donc, d'après le principe local-global (voir le théorème énoncé page 10 de [8]),

$$(\Lambda \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}, J_A) \simeq (V, J).$$

On peut donc trouver un isomorphisme faisant coïncider W avec $V_{\mathbb{R}}$, m avec la multiplication complexe sur $V_{\mathbb{R}}$ et J avec J_A. De plus, on peut choisir g droites négatives de W engendrant l'espace où J est définie négative. Via l'isomorphisme précédent, ces droites correspondent à des droites négatives de $(V_{\mathbb{R}}, J)$. On choisit g_∞ l'élément de $G(\mathbb{R})$ envoyant (D_i) sur le produit de ces droites. Alors la structure complexe sur W correspond à celle induite par g_∞ via l'application définie ci-dessus. Par ailleurs, l'isomorphisme $(V, J) \simeq (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, J_A)$ (que l'on notera g_f) est induit par un isomorphisme $(L \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}, J) \simeq (\Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} \hat{\mathbb{Z}}, J_A)$. Via cette identification, $g_f \in G(\mathbb{A}_f)$ et le quadruplet (A, p, m, ϕ) correspond à l'image de (g_∞, g_f) via l'application précédente.

On renvoie au chapitre 10 de [31] pour l'affirmation concernant la variété abélienne universelle (voir notamment le corollaire 10.10). □

Comme une variété de Picard est une variété de Shimura de type PEL sans facteur de type D, on dispose des résultats d'existence de modèles entiers de Lan [26] sur lesquels nous reviendrons dans le prochain chapitre consacré aux compactifications des variétés de Picard. En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème 1.17. *Une variété de Picard associé à un sous-groupe compact, ouvert et net de $G(\mathbb{A}_f)$ possède un modèle entier sur $\mathcal{O}_{E(G,X)}[\frac{1}{ND}]$ où D est le discriminant de $E(G, X)$.*

Démonstration. Voir [26]. □

Enfin, on rappelle la définition des correspondances de Hecke qui agissent sur la variété abélienne universelle $\mathcal{A}$.

Pour un sous-groupe compact ouvert et net K de $G(\mathbb{A}_f)$, l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$ est définie, par exemple dans le chapitre 4 de [16], comme une algèbre de convolution. En particulier, elle est engendrée par les classes KxK pour $x \in G(\mathbb{A}_f)$.

On considère $x \in G(\mathbb{A}_f)$. On note $K' = K \cap x^{-1}Kx$, S la variété de Picard associée à K et U celle associée à K'. On dispose alors de deux morphismes $[.1], [.x^{-1}] : U \to S$ qui sont finis et étales (d'après le point 3.4. du chapitre 3 de [31] ou la page 86 dans le chapitre 1 de la partie 2 de [36]).

On appelle $\mathcal{B}$ la variété abélienne universelle au-dessus de U. On définit $\mathcal{A}_1 = [.1]^*\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_2 = [.x^{-1}]^*\mathcal{A}$. On a deux morphismes $f_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_1$ et $f_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_2$ qui sont des isogénies.

Pour $r \geq 1$, on définit la correspondance de Hecke associée à KxK comme étant $\Gamma_{f_2^r} \circ^t \Gamma_{f_1^r}$. Son image dans $CH^{3rg}(X_1^r \times_U X_1^r)$ définit un morphisme entre motifs de Chow $h(\mathcal{A}_1^r/U) \to h(\mathcal{A}_2^r/U)$, autrement dit un morphisme

$$\psi : [.1]^* h(\mathcal{A}^r/S) \to [.x^{-1}]^* h(\mathcal{A}^r/S).$$

Chapitre 2

Compactifications

Nous suivons le formalisme du chapitre 4 de [31] pour déterminer la compactification de Baily-Borel et une compactification toroïdale d'une variété de Picard S.

Pour cela, nous devons tout d'abord déterminer les sous-groupes paraboliques et les tores maximaux du groupe algébrique G défini au premier chapitre (définition 1.3.).

Proposition 2.1. *Tout sous-groupe parabolique Q de G défini sur $\mathbb{Q}$ est conjugué dans G à un groupe de la forme*

$$\left(\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, *\right) \cap G$$

vu comme sous-groupe de $Res_{E/\mathbb{Q}}GL_{3,E}$. De plus, un tel groupe est un sous-groupe de Borel.

Le radical unipotent W de Q est de dimension $3g$.

Les tores maximaux définis sur $\mathbb{C}$ sont de dimension $3g+1$ et conjugués à

$$T_m = \left(\begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, *\right).$$

Les $\mathbb{Q}$-tores scindés maximaux sont de dimension 2 et conjugué à

$$T = \left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r^2 t^{-1} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, r^2\right).$$

Démonstration. Le premier sous-groupe décrit dans l'énoncé est un sous-groupe de Borel. Son radical unipotent est le sous-groupe

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1\right) \cap G.$$

En prenant une $\mathbb{Q}$-base de E et en écrivant explicitement les équations définissant G, on voit que la dimension de ce radical unipotent est $3g$.

Considérant G comme un sous-groupe de $Res_{E/\mathbb{Q}}GL_{3,E}$, on voit qu'un sous-groupe parabolique rationnel Q de G stabilise un sous-espace W de V. Il stabilise alors automatiquement $W^{\perp}$, l'orthogonal de W pour J. W et $W^{\perp}$ ne peuvent être d'intersection non nulle, faute de quoi Q ne pourrait contenir un sous-groupe de Borel (par des considérations de dimension du radical unipotent d'un tel sous-groupe qui serait strictement inférieure à $3g$, la dimension du radical unipotent du Borel précédent). Ainsi Q stabilise une droite isotrope. Or, d'après la proposition 1.1., l'action de G sur leur ensemble est transitive. Quitte à conjuguer Q, on peut supposer que Q stabilise la droite isotrope $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Comme cela a déjà été mentionné, Q stabilise alors automatiquement son orthogonal, qui est engendré par les deux premiers vecteurs de la base canonique. Q est donc bien de la forme

$$\left(\begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, *\right) \cap G.$$

L'assertion sur le tore complexe est claire. En cherchant un tore rationnel dans un tel tore complexe et en utilisant les équations définissant G, on voit qu'un $\mathbb{Q}$-tore scindé ne peut avoir dimension supérieure à 2. Un tore rationnel est donné par $\left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r^2t^{-1} \end{pmatrix}_{1\leq i\leq g}, r^2\right)$. □

Nous rappelons les notations utilisées dans le chapitre 4 de [31]. $\mathbb{S} := Res_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ désigne le tore de Deligne. On pose

$$H_0 = GL_{2,\mathbb{R}} \times_{\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}} \mathbb{S}$$

où le morphisme $GL_{2,\mathbb{R}} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ est le déterminant et le morphisme $\mathbb{S} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ est le morphisme "norme", défini sur $\mathbb{R}$ et donné sur $\mathbb{C}$ par

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2.$$

On définit les morphismes $h_0 : \mathbb{S} \to H_0$ et $h_\infty : \mathbb{S}_\mathbb{C} \to H_{0,\mathbb{C}}$ sur les points complexes de la façon suivante :

$$h_0(z_1, z_2) = \left(\begin{pmatrix} \frac{z_1+z_2}{2} & \frac{z_1-z_2}{2i} \\ \frac{z_2-z_1}{2i} & \frac{z_1+z_2}{2} \end{pmatrix}, (z_1, z_2) \right)$$

$$h_\infty(z_1, z_2) = \left(\begin{pmatrix} z_1 z_2 & i(1 - z_1 z_2) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (z_1, z_2) \right).$$

Ils vérifient les conditions imposées dans le chapitre 4 de [31]. On note aussi $w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to \mathbb{S}$ le morphisme canonique adjoint de l'identité de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$.

Dans le paragraphe 4.1. de [31], Pink associe à tout sous-groupe parabolique Q de G un cocaractère λ unique à conjugaison dans Q près. Nous renvoyons à ce paragraphe pour la construction de ce cocaractère.

Proposition 2.2. *Soit (Q, T) comme dans la proposition précédente. Alors le morphisme $\lambda : \mathbb{G}_{m\mathbb{Q}} \to T$ défini par*

$$t \mapsto \left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, 1 \right)$$

est le cocaractère associé au sous-groupe parabolique Q dans le paragraphe 4.1. de [31].

Démonstration. Nous suivons la construction du paragraphe 4.1. de [31] que nous appliquons à nos données.

La seule racine simple associé au parabolique Q et au tore T est

$$\alpha_0 : \left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r^2 t^{-1} \end{pmatrix}, r^2 \right) \mapsto t r^{-1}.$$

Les poids apparaissant dans Lie Q sont α_0 et $2\alpha_0$. Le poids fondamental associé à α_0 est

$$\left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & r^2 t^{-1} \end{pmatrix}, r^2 \right) \mapsto t.$$

Le cocaractère associé à celui-ci est

$$\lambda_0 : t \mapsto \left(\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t^{-1} \end{pmatrix}_{1 \leq i \leq g}, 1 \right).$$

Ce dernier est par définition le cocaractère noté λ au chapitre 4 de [31]. $\square$

Dans le chapitre 4 de [31], Pink montre qu'à tout sous-groupe parabolique (pour nous le groupe Q) d'un groupe algébrique (pour nous G) associé à une donnée de Shimura mixte (pour nous pure) correspond un unique morphisme $\omega : H_{0,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ qui est caractérisé dans notre cas par les trois propriétés suivantes (voir proposition 4.6. de [31]) :

(i) ω est défini sur $\mathbb{R}$

(ii) $h = \omega \circ h_0$

(iii) $\omega \circ h_\infty \circ w : \mathbb{G}_{m,\mathbb{R}} \to Q_{\mathbb{R}}$ est un cocaractère de la forme $\lambda.(h \circ w)$
et $\mathrm{Lie}(Q)_{\mathbb{C}}$ est l'espace des poids positifs de $\mathrm{Lie}(G)_{\mathbb{C}}$ pour $\mathrm{Ad}_G \circ \omega \circ h_\infty \circ w$.

Proposition 2.3. *Soit $\omega : H_{0,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$ le morphisme défini par*

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, (z_1, z_2)\right) \mapsto \left(\begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & z_1 & 0 \\ -ic & 0 & d \end{pmatrix}_{1\leq i\leq g}, z_1 z_2\right).$$

Alors ω est le morphisme défini par [31] dont la caractérisation est rappelée ci-dessus.

Démonstration. Il suffit de vérifier les trois points de la proposition 4.6 de [31] rappelés précédemment.

Pour vérifier le (i), il nous faut montrer que le morphisme ω est défini sur $\mathbb{R}$. Or, si $ad - bc = z_1 z_2$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\times$, on a

$$\begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & z_1 & 0 \\ -ic & 0 & d \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{z_1 z_2} & 0 & \frac{-ib}{z_1 z_2} \\ 0 & z_1^{-1} & 0 \\ \frac{ic}{z_1 z_2} & 0 & \frac{a}{z_1 z_2} \end{pmatrix}.$$

Donc, en utilisant la notation (1.2) du premier chapitre pour la conjugaison complexe sur $G_{\mathbb{C}}$,

$$\overline{z_1 z_2} \begin{pmatrix} a & 0 & ib \\ 0 & z_1 & 0 \\ -ic & 0 & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{d} & 0 & -i\overline{c} \\ 0 & \overline{z_2} & 0 \\ i\overline{b} & 0 & \overline{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 & i\overline{b} \\ 0 & \overline{z_2} & 0 \\ -i\overline{c} & 0 & \overline{d} \end{pmatrix}$$

ce qui montre bien que le morphisme ω est bien défini sur $\mathbb{R}$. Ensuite, on constate que $\omega \circ h_0 = h$ ce qui montre (ii).

Enfin, concernant (iii), on a

$$\omega \circ h_\infty \circ w = t \mapsto \left(\begin{pmatrix} t^2 & 0 & t^2 - 1 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t^2 \right)$$

qui est bien conjugué à

$$\lambda.h \circ w = t \mapsto \left(\begin{pmatrix} t^2 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, t^2 \right)$$

par l'élément

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right) \in P_{\mathbb{C}}.$$

De plus, $Lie(Q)_{\mathbb{C}}$ est bien la somme des espaces de poids positifs dans $Lie(G)_{\mathbb{C}}$ pour l'action de $Ad_G \circ \omega \circ h_\infty \circ w$. □

On considère le tore T_1 inclus dans G tel que, pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R,

$$T_1(R) = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z\alpha(z) & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z\alpha(z) \right),\ z \in (E \otimes_{\mathbb{Q}} R)^\times \text{ et } z\alpha(z) \in R^\times \right\}.$$

On a également

$$T_1 = Res_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,E} \times_{Res_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$$

le morphisme $Res_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,E} \to Res_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_{m,F}$ étant la restriction de F à $\mathbb{Q}$ du morphisme $Res_{E/F} \mathbb{G}_{m,E} \to \mathbb{G}_{m,F}$ donné par $x \mapsto x\alpha(x)$.

Proposition 2.4. *Le plus petit sous-groupe normal P de Q contenant l'image de $\mathbb{S}$ par $\omega \circ h_\infty$ est $P = W.T_1$. Son radical unipotent est le même que celui de Q. De plus, $P(\mathbb{R})$ est connexe.*

Démonstration. D'après la preuve du lemme 4.8. de [31], le plus petit sous-groupe normal P de Q contenant l'image de $\omega \circ h_\infty$ a même radical unipotent que Q. Un tel groupe doit donc contenir W.

Comme il contient l'image de $\omega \circ h_\infty$, ses $\mathbb{C}$-points doivent aussi contenir le tore

$$\left(\begin{pmatrix} z_1 z_2 & 0 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, z_1 z_2\right)$$

Le plus petit sous-groupe défini sur $\mathbb{Q}$ contenant ce tore est T_1. Ainsi

$$W.T_1 \subset P.$$

Comme $W.T_1$ est normal dans Q et contient l'image de $\omega \circ h_\infty$, on a bien

$$P = W.T_1.$$

Enfin, $P(\mathbb{R})$ est engendré par $W(\mathbb{R})$, qui est connexe, et le groupe

$$\begin{aligned} T_1(\mathbb{R}) &= \{(z_i)_{1 \le i \le g} \in \mathbb{C}^{\times g} \,/\, \forall i, j, z_i \overline{z_i} = z_j \overline{z_j}\} \\ &\simeq \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{S}^1(\mathbb{R})^g \end{aligned}$$

où $\mathbb{S}^1(\mathbb{R}) = \{z \in \mathbb{C} \,/\, z\overline{z} = 1\}$. En particulier ce groupe est connexe. $P(\mathbb{R})$ est donc à son tour connexe. □

On définit $U = \exp(W_{-2}Lie(P))$. On note X_∞ l'orbite de $\omega \circ h_\infty$ sous l'action de $P(\mathbb{R})U(\mathbb{C})$.

Proposition 2.5. *U est de dimension g.*

Démonstration. En effet, l'étude de l'action de $\mathbb{G}_{m,\mathbb{R}}$ par $\omega \circ h_\infty \circ w$ sur $Lie(P)$ permet d'identifier $W_{-2}Lie(P)$ à

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{1 \le i \le g}$$

qui est de dimension g. □

Proposition 2.6. *X_∞ est connexe et (P, X_∞) est une donnée de Shimura mixte. C'est une composante de bord de (G, X) et toute composante de bord est de ce type.*

Démonstration. La connexité de X_∞ découle de celle $P(\mathbb{R})$. L'assertion sur les composantes de bord est une conséquence du chapitre 4 de [31] (voir notamment le paragraphe 4.11.). □

Proposition 2.7. *Soient les données de Shimura* $(P/W, X_1) = (P, X_\infty)/W$ *et* $(P/U, X_2) = (P, X_\infty)/U$*. Alors, en tant que variétés analytiques,* X_1 *est un point,* X_2 *un espace affine de dimension* g*,* X_∞ *un espace affine de dimension* $2g$*.*

Démonstration. Les résultats sur les extensions unipotentes sont présentés dans le chapitre 2 de [31]. Nous utilisons notamment le paragraphe 2.22. et la proposition 2.23. sur les extensions unipotentes abéliennes.

P/W est un tore donc X_1 est une union de points. D'après la remarque suivant la proposition 2.9. de [31], X_1 et X_2 sont connexes. X_1 est donc un point.

Comme $(P/U, X_2)$ est une extension unipotente abélienne de $(P/W, X_1)$,

$$X_2 \to X_1$$

est un $W/U(\mathbb{R})$-torseur. $W/U(\mathbb{R})$ étant de dimension $2g$ sur $\mathbb{R}$, X_2 est un espace affine de dimension g en tant que variété analytique.

De le même façon, (P, X_∞) est une extension unipotente abélienne de $(P/U, X_2)$. Ainsi,

$$X_\infty \to X_2$$

est un fibré vectoriel dont la dimension est celle de $U(\mathbb{C})$. Comme X_2 est contractile et que $U(\mathbb{C})$ est de dimension g sur $\mathbb{C}$, on obtient le résultat. □

Proposition 2.8. *Soient* S *une variété de Picard. Alors le complément de* S *dans sa compactification de Baily-Borel est une réunion finie de points.*

S *possède une compactification toroïdale. Une telle compactification est munie d'une stratification. Chaque strate est un tore de dimension comprise entre* 0 *et* $g-1$ *sur une variété abélienne de dimension* g*.*

Démonstration. D'après le chapitre 6 de [31], les composantes de bord de la compactification de Baily-Borel sont du type $(P/W, X_1)$ donc elles forment une union finie de points.

D'après le chapitre 7 de [31] ou le chapitre 1 de [37], les strates d'une compactification toroïdale sont du type

$$(P, X_\infty)/U_\sigma \text{ avec } U_\sigma \subset U.$$

Alors, d'après les résultats de [31],

$$\pi_m : (P, X_\infty)/U_\sigma \to (P/U, X_2)$$

est le produit fibré sur $(P/U, X_2)$ de $\mathbb{G}_m$-torseur de dimension $\dim U - \dim U_\sigma$.

Enfin,
$$\pi_a : (P/U, X_2) \to (P/W, X_1)$$
est un schéma abélien, donc ici une variété abélienne de dimension g.

S étant de dimension $2g$, U_σ ne peut être de dimension 0. $\square$

On sait, d'après la chapitre 12 de [31], que la compactification de Baily-Borel ainsi que la compactification toroïdale, décrites dans la proposition précédente, ont toutes les deux un modèle canonique sur $E(G, X)$.

Comme nous l'avions déjà remarqué dans le premier chapitre, une variété de Picard est une variété de Shimura de type PEL sans facteur de type D. On peut donc lui appliquer les résultats de Lan [26]. En particulier, on a le résultat suivant :

Théorème 2.9. *Toute compactification toroïdale d'une variété de Picard construite précédemment possède un modèle entier sur $\mathcal{O}_{E(G,X)}[\frac{1}{ND}]$, où D est le discriminant de $E(G, X)$, possédant une stratification. Le modèle entier de la variété de Picard est l'unique strate ouverte et son complément est un diviseur de Cartier à croisements normaux.*

La compactification de Baily-Borel possède également un modèle entier sur $\mathcal{O}_{E(G,X)}[\frac{1}{ND}]$.

Démonstration. Il s'agit d'une partie des théorèmes 6.4.1.1 et 7.2.4.1. de [26]. $\square$

Chapitre 3

Motifs abéliens, évitement de poids

On considère k un corps de caractéristique nulle, $\overline{k}$ une clôture algébrique, un plongement $\tau : k \to \mathbb{C}$ et B une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative.

Pour étudier les variétés de Picard, on sera amené à considérer des motifs d'un certain type.

On rappelle qu'une sous-catégorie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{D}$ si tout objet de $\mathcal{D}$ est une colimite d'objets de $\mathcal{C}$.

Définition 3.1. *On définit la catégorie des motifs de Chow de type abélien sur $\overline{k}$ comme la sous-catégorie stricte, pleine, dense, additive et tensorielle de $CHM(\overline{k})_B$ engendrée par les motifs de Tate $\mathbb{Z}(m)[2m]$, $m \in \mathbb{Z}$, et les motifs de Chow de variétés abéliennes sur $\overline{k}$.*

On la note $CHM^{Ab}(\overline{k})_B$.

Définition 3.2. *On définit la catégorie des motifs de Chow de type abélien sur k comme la sous-catégorie strictement pleine, dense, additive et tensorielle de $CHM(k)_B$ des motifs de Chow dont le changement de base à $\overline{k}$ est un motif de type abélien sur $\overline{k}$.*

On la note $CHM^{Ab}(k)_B$.

Définition 3.3. *On définit la catégorie triangulée des motifs de type abéliens sur k comme la sous-catégorie triangulée strictement pleine de $DM_{gm}(k)_B$ engendrée par la catégorie des motifs de Chow de type abélien $CHM^{Ab}(k)_B$.*

On la note $DM_{gm}^{Ab}(k)_B$.

Soit $X \in Sm/k$. Le motif bord d'une telle variété est défini par Wildeshaus dans [38] (page 7). Il s'agit d'un choix canonique d'un cône du morphisme canonique $M_{gm}(X) \to M_{gm}^c(X)$. En particulier, on a un triangle exact

$$\partial M_{gm}(X) \to M_{gm}(X) \to M_{gm}^c(X) \to \partial M(X)[1].$$

On considère $S \in Sm/k$. Nous aurons besoin d'idempotents pour travailler sur des facteurs directs de motif. Pour cela, nous utiliserons une construction utilisant des idempotents de motifs de Chow relatifs. Dans ce but, nous disposons du théorème suivant démontré dans [42].

Théorème 3.4. *Il existe un foncteur canonique additif* $(\partial M_{gm}, M_{gm}, M_{gm}^c)_S$ *de* $CHM^s(S)_B$ *dans la catégorie des triangles exacts de* $DM_{gm}(k)_B$.

Sur les objets, il est caractérisé par le faits d'envoyer le motif de Chow de X*, un schéma propre et lisse sur* S*, sur le triangle exact*

$$\partial M_{gm}(X) \to M_{gm}(X) \to M_{gm}^c(X) \to \partial M(X)[1].$$

Sur les morphismes, il est caractérisé par le fait d'envoyer une S*-correspondance relative* Γ *entre* X *et* Y *sur un morphisme tel que* $M_{gm}(X) \to M_{gm}(Y)$ *soit le morphisme induit par* Γ.

Supposons que X est un schéma séparé, propre et lisse sur S. Notons $d(X/S)$ la dimension de X sur S. Supposons en outre que $e \in CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$ est un idempotent.

D'après le théorème précédent, on a un triangle distingué

$$\partial M_{gm}(X)^e \to M_{gm}(X)^e \to M_{gm}^c(X)^e \to \partial M_{gm}(X)^e[1].$$

On considère R une réalisation de $DM_{gm}(k)_B$ à valeurs ou bien dans la catégorie dérivée bornée des $\mathbb{Q}$-structures de Hodge mixtes graduées polarisables tensorisée avec B (cf. chapitre 3.1. de [30]) ou bien dans la catégorie dérivée bornée des $\mathbb{Q}_l$-faisceaux constructibles sur $\mathrm{Spec}(k)$ tensorisée avec B, l étant un nombre premier (voir la section 6 de [15]). Ces deux catégories sont munies d'une notion de poids (pour la seconde, cela découle de la définition 9.1.4. et de la remarque qui précède le chapitre 9.2. de [19]). Se référant à la définition 9.1.4. de [19], on voit que cette notion de poids fait particulièrement sens dans le cas de variétés munies de modèles entiers lisses comme duquel relèvent les variétés de Picard. Ces réalisations (qui sont des foncteurs contravariants) sont construites par Huber dans [20] complété par [21].

On note $H^n(X)$ les groupes de cohomologie associés à chacune de ces théories cohomologiques, à savoir $H^n(X(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B$ pour la réalisation de Hodge et $H^n(X_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}_l} B$ pour la réalisation l-adique. De même, on note $H^n_c(X)$ les groupes de cohomologie à support compact et $\partial H^n(X)$ les groupes de cohomologie bord associés à chacune de ces théories cohomologiques.

$CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$ agit sur ces groupes. On note $H^n(X)^e$, $H^n_c(X)^e$ et $\partial H^n(X)^e$ les parties fixées par l'idempotent e.

Proposition 3.5. *L'action de $CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$ sur la cohomologie de X est compatible avec son action sur le triangle distingué*

$$\partial M_{gm}(X) \to M_{gm}(X) \to M^c_{gm}(X) \to \partial M_{gm}(X)[1]$$

et les réalisations précédentes.

En particulier, si R est une de ces réalisations et e un idempotent de $CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$, alors

$$R(\partial M_{gm}(X)^e) = \partial H^n(X)^e.$$

Démonstration. Voir la proposition 2.3. de [43] et sa démonstration. □

La proposition suivante permet de construire des morphismes de type de Hecke.

Proposition 3.6. *Soient $U, S \in Sm/k$ et $h : U \to S$ un morphisme propre et lisse purement de dimension relative d_h. Alors il existe deux transformations naturelles de foncteurs additifs*

$$\beta_{h^*,id} : (\partial M, M, M^c)_U \circ h^* \to (\partial M, M, M^c)_S$$

$$\delta_{id,h^*} : (\partial M, M, M^c)_S \to (\partial M, M, M^c)_U(-d_h)[-2d_h] \circ h^*$$

compatibles avec la composition des morphismes propres, lisses et de dimension relative pure entre schémas de Sm/k.

Démonstration. Il s'agit du théorème 2.5. et du corollaire 2.15. de [42]. □

L'ingrédient principal de la stratégie de construction du motif intérieur de [40] repose de façon essentielle sur la notion de structure de poids. Celle-ci est introduite par Bondarko [4]. Nous prenons les conventions utilisées par Hébert [24].

Définition 3.7. *Une structure de poids sur une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ est la donnée de deux sous-catégories pleines $(\mathcal{T}_{w\leq 0}, \mathcal{T}_{w\geq 0})$ vérifiant :*
(i) tout facteur direct d'objets de $\mathcal{T}_{w\leq 0}$ (resp. de $\mathcal{T}_{w\geq 0}$) est également un objet de $\mathcal{T}_{w\leq 0}$ (resp. de $\mathcal{T}_{w\geq 0}$)
(ii) $\mathcal{T}_{w\leq 0}[-1] \subset \mathcal{T}_{w\leq 0}$ et $\mathcal{T}_{w\geq 0}[1] \subset \mathcal{T}_{w\geq 0}$
(iii) $Hom(A, B) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{T}_{w\leq 0}$ et $B \in \mathcal{T}_{w\geq 0}[1]$
(iv) pour tout $X \in \mathcal{T}$, il existe un triangle distingué (appelé décomposition par le poids)

$$A \to X \to B \to A[1]$$

tel que $A \in \mathcal{T}_{w\leq 0}$ et $B \in \mathcal{T}_{w\geq 0}[1]$.

Le coeur de la structure de poids est défini comme la sous-catégorie pleine $\mathcal{T}_{w=0} = \mathcal{T}_{w\leq 0} \cap \mathcal{T}_{w\geq 0}$.

On définit également $\mathcal{T}_{w\leq n} = \mathcal{T}_{w\leq 0}[n]$, $\mathcal{T}_{w\geq n} = \mathcal{T}_{w\geq 0}[n]$ et $\mathcal{T}_{w=n} = \mathcal{T}_{w\leq n} \cap \mathcal{T}_{w\geq n}$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.8. *En prenant une filtration d'un objet $X[n]$ on voit que tout objet X d'une catégorie triangulée $\mathcal{T}$ munie d'une structure de poids $(\mathcal{T}_{w\leq 0}, \mathcal{T}_{w\geq 0})$ admet des filtrations par le poids*

$$A \to X \to B \to A[1]$$

avec $A \in \mathcal{T}_{w\leq n}$, $B \in \mathcal{T}_{w\geq n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Cette notion peut être utilisée avantageusement dans le cadre motivique (voir par exemple [4], [23] et [24]). On dispose notamment du résultat suivant de Bondarko complété par Wildeshaus (proposition 6.5.3. de [4] et proposition 1.2. de [43]) :

Théorème 3.9. *Il existe une unique structure de poids sur $DM_{gm}(k)_B$ dont le coeur est la catégorie des motifs de Chow $CHM(k)_B$. On la notera $(DM_{gm}(k)_{B,w\leq 0}, DM_{gm}(k)_{B,w\geq 0})$. Cette structure de poids induit une structure de poids sur $DM^{Ab}_{gm}(k)_B$ dont le coeur est la catégorie des motifs de Chow de type abélien $CHM^{Ab}(k)_B$.*

Remarque 3.10. *Hébert définit la notion de structure de poids bornée (définition 1.2.3. de [23]) et montre que la structure de poids qu'il a définie avec Bondarko pour certaines catégories triangulées de motifs est bornée (page 8 de [23]).*

Nous esquissons désormais la stratégie de Wildeshaus dans [40] (auquel on se reportera pour davantage de détails).

Définition 3.11. *Soient $m \leq n$ deux entiers et $M \in DM_{gm}(k)_Q$. On dit que M évite les poids $m, m+1, \cdots, n$ s'il existe une filtration par le poids $A \to M \to B \to A[1]$ avec $A \in \mathcal{T}_{w \leq m-1}$ et $B \in \mathcal{T}_{w \geq n+1}$.*
Pour une sous-catégorie pleine $\mathcal{C} \subset \mathcal{T}$, on notera $\mathcal{C}_{w \neq m, \ldots, n}$ la sous-catégorie pleine constitué de tels objets.

La notion de gradué de poids 0 se comporte de manière fonctorielle sur certains de ces objets. C'est l'intérêt de la proposition suivante :

Proposition 3.12. *(a) L'inclusion $\mathcal{T}_{w=0} \subset \mathcal{T}_{w \leq 0, \neq -1}$ admet un adjoint à gauche $Gr_0 : \mathcal{T}_{w \leq 0, \neq -1} \to \mathcal{T}_{w=0}$.*
(b)L'inclusion $\mathcal{T}_{w=0} \subset \mathcal{T}_{w \geq 0, \neq 1}$ admet un adjoint à droite $Gr_0 : \mathcal{T}_{w \geq 0, \neq 1} \to \mathcal{T}_{w=0}$.

Démonstration. Nous renvoyons à la proposition 2.2 de [40] et à sa preuve. Nous rappelons simplement la définition de l'adjoint sur les objets : il s'agit d'envoyer un objet M sur $M_{\geq 0}$ (resp. $M_{\leq 0}$) où

$$M_{\leq -2} \to M \to M_{\geq 0} \to M_{\leq -2}[1]$$

$$M_{\leq 0} \to M \to M_{\geq 2} \to M_{\leq 0}[1]$$

sont des filtrations par le poids évitant les poids -1 (resp. 1). □

Fixons X un schéma séparé, propre et lisse sur S, ainsi que e un idempotent de $CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$. Supposons que $\partial M_{gm}(X)^e$ est un motif évitant les poids 0 et -1. Fixons également une filtration par le poids évitant ces poids

$$M_{\leq -2} \to \partial M_{gm}(X)^e \to M_{\geq 1} \to M_{\leq m-1}[1].$$

On a alors (cf. le théorème 4.3. de [40] et le corollaire 3.9. de [43]) :

Théorème 3.13. *Sous les hypothèses précédentes,*
a) $M_{gm}(X)^e$ est sans poids -1 ; $M^c_{gm}(X)^e$ est sans poids 1.
b) Il existe des triangles distingués canoniques

$$M_{\leq -2} \to M_{gm}(X)^e \to Gr_0 M_{gm}(X)^e \to M_{\leq -2}[1],$$

$$M_{\geq 1} \to Gr_0 M^c_{gm}(X)^e \to M^c_{gm}(X)^e \to M_{\geq 1}[1]$$

se comportant de façon fonctorielle par rapport à $M_{gm}(X)^e$ pour le premier et $M^c_{gm}(X)^e$ pour le second. En particulier, tout endomorphisme de $M_{gm}(X)^e$ (resp. de $M^c_{gm}(X)^e$) induit un endomorphisme de $Gr_0 M_{gm}(X)^e$ (resp. de $Gr_0 M^c_{gm}(X)^e$).

c) Il existe un isomorphisme canonique $Gr_0 M_{gm}(X)^e \overset{\sim}{\to} Gr_0 M^c_{gm}(X)^e$ *dans* $CHM(k)_B$ *uniquement déterminé par le fait de rendre commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} M_{gm}(X)^e \arrow[r] \arrow[d] & M^c_{gm}(X)^e \\ Gr_0 M_{gm}(X)^e \arrow[r] & Gr_0 M^c_{gm}(X)^e \arrow[u] \end{tikzcd}$$

où $M_{gm}(X)^e \to Gr_0 M_{gm}(X)^e$ *et* $Gr_0 M^c_{gm}(X)^e \to M^c_{gm}(X)^e$ *sont les morphismes faisant partie des triangles distingués canoniques de b) alors que* $M_{gm}(X)^e \to M^c_{gm}(X)^e$ *est le morphisme canonique usuel.*
d) Soit $N \in CHM(k)_B$*. Alors on a des isomorphismes*

$$Hom_{CHM(k)_B}(Gr_0 M_{gm}(X)^e, N) \simeq Hom_{DM_{gm}(k)_B}(M_{gm}(X)^e, N)$$

$$Hom_{CHM(k)_B}(N, Gr_0 M^c_{gm}(X)^e) \simeq Hom_{DM_{gm}(k)_B}(N, M^c_{gm}(X)^e).$$

e) Soit $M_{gm}(X)^e \to N \to M^c_{gm}(X)^e$ *une factorisation du morphisme canonique* $M_{gm}(X)^e \to M^c_{gm}(X)^e$*. Alors* $Gr_0 M_{gm}(X)^e = Gr_0 M^c_{gm}(X)^e$ *est canoniquement un facteur direct de* N *avec un facteur direct supplémentaire canonique.*

Le résultat suivant justifie le nom de (partie e du) motif intérieur de X donné au motif $Gr_0 M_{gm}(X)^e$.

Théorème 3.14. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on a*

$$H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \simeq W_n H^n(X)^e$$

$$H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \simeq \frac{H^n_c(X)^e}{W_{n-1} H^n_c(X)^e}$$

où $(W_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ *est la filtration par le poids associée à chacune des théories cohomologiques (de Betti ou* l*-adique). De plus on a*

$$H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \simeq H^n_!(X)^e$$

où $H^n_!(X)$ *est l'image du morphisme* $H^n_c(X) \to H^n(X)$*.*

Démonstration. D'après la proposition 3.1., l'action de $CH^{d(X/S)}(X \times_S X)$ sur $M_{gm}(X)$ et sur $M^c_{gm}(X)$ est compatible avec son action sur $H^n(X)$ et sur $H^n_c(X)$.

On considère la triangle exact définissant $Gr_0 M_{gm}(X)^e$

$$M_{\leq -2} \to M_{gm}(X)^e \to Gr_0 M_{gm}(X)^e \to M_{\leq -2}[1].$$

L'application du foncteur cohomologique H^* donne une suite exacte longue

$$H^{n-1}(M_{\leq -2}) \to H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \to H^n(X)^e \to H^n(M_{\leq -2}). \tag{3.1}$$

Les objets de poids zéro sont les facteurs directs de motifs de variétés projectives et lisses. Le foncteur composé d'une réalisation et de H^n appliqué à un objet de poids zéro donne un objet de poids n : cela découle de la théorie de Hodge pour la réalisation de Hodge et de la conjecture de Weil démontrée par Deligne [10] pour la réalisation l-adique.

En outre, le foncteur H^n est associé à une t-structure sur la catégorie image de la réalisation. Notons également que les réalisations sont des foncteurs triangulés contravariants.

La composition d'une réalisation avec H^n appliqué à un motif de poids zéro décalé de i revient à appliqué H^n au décalé de $-i$ de l'image par la réalisation d'un objet de poids zéro. Cela donne donc un objet de poids $n - i$.

$M_{\leq -2}$ admet à son tour une filtration par le poids

$$M_{\leq -3} \to M_{\leq -2} \to M_{-2} \to M_{\leq -3}[1]$$

avec $M_{\leq -3} \in DM_{gm}(k)_{B,w\leq -3}$ et $M_{-2} \in DM_{gm}(k)_{B,w\geq -2}$. D'après la proposition 1.6. et le lemme 1.7. de l'article [24] de Hébert, la catégorie $DM_{gm}(k)_{B,w\leq -2}$ est "stable par extensions" (définition 1.3. de [24]) donc $M_{-2} \in DM_{gm}(k)_{B,w\leq -2}$. Finalement, $M_{-2} \in DM_{gm}(k)_{B,w=-2}$.

La suite exacte

$$\cdots \to H^{n-1}(M_{-2}) \to H^{n-1}(M_{\leq -2}) \to H^{n-1}(M_{\leq -3}) \to \cdots,$$

le fait (déjà remarqué ci-dessus) que $H^{n-1}(M_{-2})$ est de poids $n+1$ et le caractère borné de la structure de poids motivique permet de montrer par récurrence que $H^{n-1}(M_{\leq -2})$ est de poids supérieur à $n+1$.

Or, il n'y a pas de morphismes entre objets de poids différents. La suite exacte longue (3.1) donne donc une injection

$$H^n(Gr_0(M_{gm}(X)^e) \to H^n(X)^e$$

dont le quotient est de poids supérieur à $n+2$. Comme $H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est de poids n, on a

$$H^n(Gr_0(M_{gm}(X)^e) = W_n H^n(X)^e.$$

De façon analogue, on considère le triangle distingué

$$M_{\geq 1} \to Gr_0 M^c_{gm}(X)^e \to M^c_{gm}(X)^e \to M_{\geq 1}[1].$$

En argumentant comme ci-dessus, on montre que $H^n(M_{\geq 1})$ est de poids inférieur à $n-1$. Ainsi, la suite exacte longue obtenue après application du foncteur cohomologique H^* donne en particulier la suite exacte

$$H^{n-1}(M_{\geq 1}) \to H^n_c(X)^e \to H^n(Gr_0 M^c_{gm}(X)^e) \to 0.$$

On a donc une surjection $H^n_c(X)^e \to H^n(Gr_0 M^c_{gm}(X)^e)$ dont le noyau est de poids inférieur à $n-2$. Comme $H^n(Gr_0 M^c_{gm}(X)^e) \simeq H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est de poids n, on a

$$H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) = H^n_c(X)^e / W_{n-1} H^n_c(X)^e.$$

Enfin, d'après le point c) du théorème 3.13., le morphisme $H^n_c(X)^e \to H^n(X)^e$ admet la factorisation suivante :

$$H^n_c(X)^e \to H^n(Gr_0 M^c_{gm}(X)^e) \xrightarrow{\sim} H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \to H^n(X)^e.$$

Nous venons de démontrer que le premier morphisme est une surjection et que le troisième est une injection. On sait également que la deuxième flèche est un isomorphisme. Ceci signifie que $H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e) \simeq H^n(Gr_0 M^c_{gm}(X)^e$ est aussi l'image du morphisme $H^n_c(X)^e \to H^n(X)^e$, c'est-à-dire que

$$H^n(Gr_0 M_{gm}(X)^e = H^n_!(X)^e.$$

On pourra comparer ce résultat au corollaire 3.2.17. de [10]. □

Dans certains cas, nous pouvons dire davantage sur les réalisations étales du motif intérieur. Le résultat suivant est issu de [40]. La réalisation considérée est la réalisation l-adique.

Théorème 3.15. *Supposons que k est de caractéristique 0 et qu'il est le corps des fractions d'un anneau de Dedeking $\mathcal{D}$. On considère $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{D}$ au dessus de p.*
(a) Suppons $p \neq l$. Alors, si X possède une compactification lisse ayant bonne réduction en $\mathfrak{p}$, $H^*(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est non ramifié en $\mathfrak{p}$. Si X possède une compactification lisse ayant réduction simple et semi-stable en $\mathfrak{p}$, $H^*(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est semi-stable en $\mathfrak{p}$.
(b) Supposons que $p = l$ et que $D/\mathfrak{p}$ est parfait. Alors, si X possède une compactification lisse ayant bonne réduction en $\mathfrak{p}$, $H^*(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est cristalline. Si X possède une compactification lisse ayant réduction simple et semi-stable en $\mathfrak{p}$, $H^*(Gr_0 M_{gm}(X)^e)$ est semi-stable en $\mathfrak{p}$.

Démonstration. Voir le théorème 4.14. de [40]. □

Nous voudrions désormais trouver un critère permettant de vérifier l'hypothèse d'évitement de poids. Pour cela, on considère R une réalisation de $DM_{gm}(k)_B$ (l-adique ou de Betti). Le résultat suivant est démontré dans [43].

Théorème 3.16. *Un motif abélien M évite les poids $m, m+1, \cdots, n$ si et seulement si $R(M)$ évite les poids $m, m+1, \cdots, n$.*

Démonstration. Voir le théorème 1.13. de [43]. □

Ce résultat est démontré à l'aide du théorème suivant qui nous sera également utile :

Théorème 3.17. *La réalisation de Hodge restreinte aux motifs abéliens sur k est un foncteur conservatif.*

Démonstration. Il s'agit du contenu du théorème 1.10. de [43]. □

Le résultat suivant permet de ramener notre situation géométrique des variétés de Picard au cas du théorème précédent :

Théorème 3.18. *Soit $\mathcal{A} \to S$ la variété abélienne universelle sur la variété de Picard S. Pour tout $r \geq 0$, le motif bord $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)$ est un motif de type abélien sur $E(G, X)$.*

Démonstration. $\mathcal{A}^r$ est la variété de Shimura de l'extension unipotente de (G, X) par V^r, V étant l'espace vectoriel utilisé pour définir les variétés de Picard (voir le début du chapitre 1).

On considère une compactification toroïdale associée à $\mathcal{A}^r$ que l'on note $\tilde{\mathcal{A}}^r$. D'après le chapitre 6 de [31], elle est la variété de Shimura associée à une certaine décomposition complète et admissible en cône associée à la donnée de Shimura extension unipotente de (G, X) par V^r.

Cette compactification admet une stratification, dont l'unique strate ouverte est $j : \mathcal{A}^r \to \tilde{\mathcal{A}}^r$. On note $i_\sigma : \tilde{\mathcal{A}}^r_\sigma \to \tilde{\mathcal{A}}^r$ les strates non génériques. Ce sont les variétés de Shimura associées à une composante de bord $(\tilde{P}, \tilde{X})$ de l'extension unipotente de (G, X) par V^r.

D'après la suite exacte de co-localisation du corollaire 3.5. de [38], $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)$ est une extension successive d'objets $M_{gm}(\tilde{\mathcal{A}}^r_\sigma, i^!_\sigma j_! \mathbb{Z})$.

D'après les définitions de la partie 4 et le théorème 6.1. de [39], on a un isomorphisme

$$M_{gm}(\tilde{\mathcal{A}}^r_\sigma, i^!_\sigma j_! \mathbb{Z}) \simeq M_{gm}(S^{\tilde{K}}(\tilde{P}, \tilde{X}))$$

où $S^{\tilde{K}}(\tilde{P},\tilde{X})$ est la variété de Shimura associée à $(\tilde{P},\tilde{X})$ et $\tilde{K}$ est un sous-groupe compact et ouvert de $\tilde{P}(\mathbb{A}_f)$. Il suffit donc de montrer que $S^{\tilde{K}}(\tilde{P},\tilde{X})$ est un motif abélien.

$(\tilde{P},\tilde{X})$ étant une composante de bord de l'extension unipotente de (G,X) par V^r, elle est une extension unipotente d'une composante de bord (P,X_∞) de (G,X) par V^r. $(\tilde{P},\tilde{X})$ et (P,X_∞) ont donc même données de Shimura pures associées. Notons $\tilde{W}$ le radical unipotent de $\tilde{P}$ et $\tilde{U}$ la partie de poids -2 associée. Alors on a le dévissage suivant

$$(\tilde{P},\tilde{X}) \to (\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{U} \to (\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{W} = (P/W,X_1).$$

D'après le théorème 1.3. de la deuxième partie de [36], $(\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{U} \to (\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{W}$ est, au niveau des variétés de Shimura associées, un schéma abélien sur la variété de Shimura associée à $(\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{W} = (P/W,X_1)$. Comme le variété de Shimura associée à $(P/W,X_1)$ est un point (d'après les propositions 2.7. et 2.8.), la variété de Shimura associée à $(\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{U}$ est une variété abélienne. Le motif correspondant est donc un motif de type abélien.

Toujours d'après le théorème 1.3. de la deuxième partie de [36], $(\tilde{P},\tilde{X}) \to (\tilde{P},\tilde{X})/\tilde{U}$ est, au niveau des variétés de Shimura, un torseur sous un tore. Le motif induit après extension des scalaires à une clôture algébrique est donc isomorphe au motif d'un tore scindé sur un motif de type abélien. Un tel motif a pour facteurs directs des motifs de type abélien décalés et tordus à la Tate. C'est donc un motif de type abélien.

En conclusion, le motif associé à la variété de Shimura $S^{\tilde{K}}(\tilde{P},\tilde{X})$ sur $E(G,X)$ est bien un motif de type abélien. $\square$

Nous considérons désormais S une variété de Picard, B un corps de coefficients de caractéristique nulle. Soit $VHS(S)_B$ la catégorie des B-variations de structures de Hodge graduées-polarisables.

Rappelons que, d'après le résumé 1.18. de [31], on a pour toute donnée de Shimura (G,X) associée à une variété de Shimura S un foncteur linéaire, tensoriel, exact, commutant à la dualité

$$\mu : \mathrm{Rep}(G_B) \to VHS(S)_B.$$

On utilisera aussi la version l-adique de ce foncteur, définie dans la partie 4.1. de [32],

$$\mu_l : \{K\text{−modules de torsion discrets et continus}\} \to \{\text{faisceaux étales sur } S\}.$$

En notant $f : \mathcal{A} \to S$ le schéma abélien universel et V l'espace vectoriel de dimension 3 sur le corps CM E défini au chapitre 1, on a $\mu(V^\vee) =$

$R^1 f_* \mathbb{Q}_{\mathcal{A}}$ (voir le paragraphe 2.4. de [1]). Enfin, on désignera par $h^1(\mathcal{A}/S)$ le motif de Chow noté $R^1(\mathcal{A}/S)$ par Deninger et Murre dans le troisième chapitre de [13] (ou plutôt son image dans la catégorie opposée, qui est la catégorie des motifs de Chow que nous avons choisie à la fin de l'introduction).

Le résultat suivant est démontré par Ancona (théorème 4.7. de [1]). Nous l'appliquons à la donnée de Shimura définie au chapitre 1.

Théorème 3.19. *Soit B un corps de coefficients de caractéristique nulle.*

Il existe un foncteur B-linéaire et tensoriel $\tilde{\mu} : \mathrm{Rep}(G_B) \to CHM^s(S)_B$ tel que
a) la composition de $\tilde{\mu}$ avec la réalisation de Hodge est isomorphe au foncteur μ
b) $\tilde{\mu}$ commute avec les twists de Tate
c) $\tilde{\mu}$ envoie la représentation $V^\vee$ sur $h^1(\mathcal{A}/S)$.

On rappelle que G se scinde sur E_{gal}, une clôture galoisienne de E. Pour une représentation irréductible V_α de $G_{E_{gal}}$ de plus haut poids α (pour un choix de sous-groupe de Borel et de tore maximal que l'on fixera dans la partie suivante), on notera V_α^μ le motif de Chow $\tilde{\mu}(V_\alpha)$.

Chapitre 4

Dégénérescences de structures de Hodge

Afin de prouver l'existence de motifs intérieurs pour des familles de Kuga-Sato sur des variétés de Picard, nous allons calculer les réalisations du motif bord d'une famille de Kuga-Sato sur une variété de Picard $\mathcal{A}^r \to S$. Pour cela, nous étudions la façon dont certaines structures de Hodge sur une variété de Picard S dégénèrent au bord de sa compactification de Baily-Borel. Ces structures de Hodge sont construites par le foncteur μ grâce à des représentation de groupe auxquelles nous commençons par nous intéresser.

Etant donnés un groupe algébrique, un tore maximal scindé de ce groupe et λ un caractère de ce tore, on notera V_λ la représentation irréductible de plus haut poids λ.

En particulier on s'intéresse au groupe G défini au premier chapitre (définition 1.3.). On a

$$G_{\mathbb{C}} = GL^g_{3,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

On choisit comme tore maximal le produit $T_m \simeq \mathbb{G}^{3g+1}_{m,\mathbb{C}}$ des matrices diagonales et comme sous-groupe de Borel le produit cartésien des ensembles de matrices triangulaires supérieures que l'on notera Q comme dans la proposition 2.1. On notera les caractères du tore maximal précédent sous la forme

$$\lambda = ((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d).$$

Comme T_m est canoniquement isomorphe à $\mathbb{G}^{3g+1}_{m,\mathbb{C}}$, le groupe des caractères de T_m est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}^{3g+1}$. Par ailleurs, on peut considérer le groupe des g-uplets de matrices 3×3 diagonales comme un sous-tore de T_m. Le groupe de caractères de ce sous-tore est canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}^{3g}$. En outre, un tel caractère peut être vu comme un caractère de T_m (en le prolongeant trivialement sur le dernier facteur $\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ de T_m).

On note alors $\lambda_{i,j}$ avec $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq g$ les caractères de T_m correspondant à la base canonique de $\mathbb{Z}^{3g}$ via l'identification précédente.

Les racines positives relativement au sous-groupe de Borel choisi sont

$$e_{12}^{j} = \lambda_{1,j}\lambda_{2,j}^{-1},$$

$$e_{23}^{j} = \lambda_{2,j}\lambda_{3,j}^{-1},$$

$$e_{13}^{j} = \lambda_{1,j}\lambda_{3,j}^{-1},$$

avec $1 \leq j \leq g$.

Les caractères dominants sont ceux qui vérifient $a_i \geq b_i \geq c_i$, parmi eux les caractères réguliers ceux qui vérifient $a_i > b_i > c_i$. Le groupe de Weyl est $\mathfrak{S}_3^g$ où $\mathfrak{S}_3$ est la groupe des permutations d'un ensemble à trois éléments. On note Ψ le système de racines associé et Ψ^+ l'ensemble des racines positives. On rappelle que la longueur d'un élément τ du groupe de Weyl est par définition

$$l(\tau) = \mathrm{card}\{\alpha \in \Psi^+ \,/\, \tau^{-1}\alpha \notin \Psi^+\}.$$

Chaque élément du groupe de Weyl peut s'écrire comme un produit commutatif de g éléments, chacun agissant sur l'un des facteurs du produit $GL_{3,\mathbb{C}}^g$. Pour $(\tau_i)_{1\leq i\leq g} \in \mathfrak{S}_3^g$, on pourra voir τ_i comme un élément du groupe de Weil de $GL_{3,\mathbb{C}}$ et on notera $l(\tau_i)$ la longueur correspondante. Ainsi, pour $(\tau_i)_{1\leq i\leq g} \in \mathfrak{S}_3^g$, on a

$$l((\tau_i)_{1\leq i\leq g}) = \sum_{i=1}^{g} l(\tau_i).$$

On note $\rho_i = (1, 0, -1)$, $\rho = ((\rho_i)_{1\leq i\leq g}, 0)$ et $\lambda_i = (a_i, b_i, c_i)$. ρ est la demi-somme des racines positives de G pour le sous-groupe de Borel choisi. Calculons chaque $l(\tau)$ pour $\tau \in \mathfrak{S}_3$:

$$l(id) = 0,$$

$$l((12)) = l((23)) = 1,$$

$$l((123)) = l((132)) = 2,$$

$$l((13)) = 3.$$

Calculons les valeurs de $\tau((a,b,c)+\rho)-\rho$ que nous utiliserons plus tard :

$$\begin{aligned}
id(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (a_i,b_i,c_i),\\
(12)(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (b_i-1,a_i+1,c_i),\\
(23)(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (a_i,c_i-1,b_i+1),\\
(123)(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (c_i-2,a_i+1,b_i+1),\\
(132)(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (b_i-1,c_i-1,a_i+2),\\
(13)(\lambda_i+\rho_i)-\rho_i &= (c_i-2,b_i,a_i+2).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, en notant W le radical unipotent du sous-groupe de Borel Q (conformément aux notations de la proposition 2.1.), Q/W est un tore. Les représentations complexes irréductibles de Q/W sont donc de dimension un.

Nous allons maintenant préciser les représentations de $G_{\mathbb{C}}$ que nous serons amenés à considérer.

Reprenant les notations du premier chapitre, on a

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{g} (V_{i,+} \oplus V_{i,-}).$$

La proposition suivante reprend et complète la proposition 1.4.

Proposition 4.1. *$g = ((g_i)_{1\leq i\leq g}, \lambda) \in G_{\mathbb{C}}$ agit sur $V_{i,+}$ (resp. $V_{i,-}$) identifié aux vecteurs colonnes de $\mathbb{C}^3$ par multiplication à gauche par g_i (resp. $\lambda J^{-1t} g_i^{-1} J$).*

$g = ((g_i)_{1\leq i\leq g}, \lambda) \in G_{\mathbb{C}}$ agit sur $V_{i,+}^{\vee}$ (resp. $V_{i,-}^{\vee}$) identifié aux vecteurs lignes de $\mathbb{C}^3$ par multiplication à droite par g_i^{-1} (resp. $\lambda^{-1} J^{-1t} g_i J$).

Démonstration. La première partie est un rappel de la proposition 1.4. dont une preuve a été donnée au premier chapitre. Pour démontrer la seconde partie, il suffit d'avoir en tête que lorsqu'un groupe G' agit sur un espace vectoriel V', alors le dual $V'^{\vee}$ de V' est muni d'une action de G' donnée par

$$\forall \phi \in V'^{\vee}, \forall v \in V', \forall g \in G', (g.\phi)(v) := \phi(g^{-1}v).$$

□

En terme de représentations, $V_{i,+} = V_{\lambda_i^+}$ et $V_{i,-} = V_{\lambda_i^-}$, où, en notant $\lambda_i^+ = ((a_j^+, b_j^+, c_j^+), 0)$ et $\lambda_i^- = ((a_j^-, b_j^-, c_j^-), 1)$, on a $a_j^+ = b_j^+ = c_j^+ = a_j^- = b_j^- = c_j^- = 0$ pour $j \neq i$ et $a_i^+ = 1$, $b_i^+ = c_i^+ = 0$, $c_i^- = -1$, $a_i^- = b_i^- = 0$. Par conséquent,

$$V_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{i=1}^{g} (V_{(\cdots(0,0,0),(1,0,0),(0,0,0),\cdots,0)} \oplus V_{(\cdots(0,0,0),(0,0,-1),(0,0,0),\cdots,1)}).$$

Par passage à la dualité, on obtient :

$$V_{\mathbb{C}}^{\vee} = \bigoplus_{i=1}^{g} (V_{(\cdots(0,0,0),(0,0,-1),(0,0,0),\cdots,0)} \oplus V_{(\cdots(0,0,0),(1,0,0),(0,0,0),\cdots,-1)}).$$

Proposition 4.2. *Les sous-$G_{\mathbb{C}}$-représentations irréductibles de $\Lambda^p((V_{\mathbb{C}}^{\vee})^{\oplus r})$ sont les $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$ qui vérifient :*

$$p = -2d - \sum_{i=1}^{g} (a_i + b_i + c_i),$$

$$-r \leq c_i \leq b_i \leq a_i \leq r,$$

$$3gr + \sum_{i=1}^{g} (c_i^- + b_i^- + a_i^-) \geq -d \geq \sum_{i=1}^{g} (c_i^+ + b_i^+ + a_i^+).$$

Ces deux dernières lignes étant valables pour tout $1 \leq i \leq g$ et où l'on note $x^+ = max(x,0)$ et $x^- = min(x,0)$.

Démonstration. La décomposition précédente de $V_{\mathbb{C}}^{\vee}$ fournit une $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}$ constituée de $g(3+3)$ vecteurs qui sont propres pour l'action du tore T_m et donc une $\mathbb{Q}$-base $\mathcal{B}_p$ de $\Lambda^p((V_{\mathbb{C}}^{\vee})^{\oplus r})$ composée de produits extérieurs de vecteurs pris dans $\mathcal{B}$ encore composée de vecteurs propres pour l'action de T_m.

Se donner un vecteur de cette base $\mathcal{B}_p$ revient à choisir p vecteurs de $\mathcal{B}$. Pour un tel vecteur, notons $\alpha_{i,+}$ (resp. $\beta_{i,+}$, resp. $\gamma_{i,+}$) le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$ choisis comme étant le premier (resp. le deuxième, resp. le troisème) vecteur de la base canonique de $V_{(\cdots(0,0,0),(0,0,-1),(0,0,0),\cdots,0)}$ et notons $\alpha_{i,-}$ (resp. $\beta_{i,-}$, resp. $\gamma_{i,-}$) le nombre de vecteurs de $\mathcal{B}$ choisis comme étant le premier (resp. le deuxième, resp. le troisième) vecteur de la base canonique de $V_{(\cdots(0,0,0),(1,0,0),(0,0,0),\cdots,-1)}$. On a alors $\alpha_{i,+/-}, \beta_{i,+/-}, \gamma_{i,+/-} \in [0,r]$.

$G_{\mathbb{C}}$ agit sur ce vecteur via un caractère $((a_i,b_i,c_i),d)$ tel que

$$a_i = \alpha_{i,-} - \alpha_{i,+}\ ,\ b_i = \beta_{i,-} - \beta_{i,+}\ ,\ c_i = \gamma_{i,-} - \gamma_{i,+}\ ,$$

$$d=-\sum_{i=1}^{g}(\alpha_{i,-}+\beta_{i,-}+\gamma_{i,-}).$$

Or, se donner une sous-représentation irréductible de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee})^{\oplus r}$ revient à se donner un poids maximal apparaissant dans cet espace, c'est-à-dire un vecteur propre dont le poids est maximal.

On trouve donc les inégalités et égalités annoncées, $a_i \geq b_i \geq c_i$ venant du choix du Borel effectué et du fait que le caractère est de poids maximal.

Réciproquement, on considère

$$W^{+}_{a_i,b_i,c_i}=(\Lambda^3 V_{i,-}^{\vee})^{\otimes c_i^+}\otimes(\Lambda^2 V_{i,-}^{\vee})^{\otimes(b_i^+-c_i^+)}\otimes(V_{i,-}^{\vee})^{\otimes(a_i^+-b_i^+)}$$

$$W^{-}_{a_i,b_i,c_i}=(\Lambda^3 V_{i,+}^{\vee})^{\otimes(-a_i^-)}\otimes(\Lambda^2 V_{i,+}^{\vee})^{\otimes(a_i^--b_i^-)}\otimes(V_{i,+})^{\otimes(b_i^--c_i^-)}$$

$$\mathbb{W}=(\bigotimes_{i=1}^{g}W^{+}_{a_i,b_i,c_i}\otimes W^{-}_{a_i,b_i,c_i})\otimes V_{0,\cdots,0,-1}^{\otimes(-d-S_+)}$$

où $S_+=\sum\limits_{i=1}^{g}a_i^+ + b_i^+ + c_i^+$. Notons que ceci est permis en particulier par l'inégalité $-d\geq S_+$ faite par hypothèse.

Les représentations $\Lambda^3 V_{i,-}^{\vee}$, $\Lambda^2 V_{i,-}^{\vee}$, $V_{i,-}^{\vee}$, $\Lambda^3 V_{i,+}^{\vee}$, $\Lambda^2 V_{i,+}^{\vee}$ et $V_{i,+}^{\vee}$ ont pour plus haut poids respectif $((\cdots,(1,1,1),\cdots),-3)$, $((\cdots,(1,1,0),\cdots),-2)$, $((\cdots,(1,0,0),\cdots),-1)$, $((\cdots,(-1,-1,-1),\cdots),0)$, $((\cdots,(0,-1,-1),\cdots),0)$, $((\cdots,(0,0,-1),\cdots),0)$. Ceci permet de voir que le plus haut poids de $\mathbb{W}$ est

$$\Big(\cdots,(c_i^++b_i^+-c_i^++a_i^+-b_i^++a_i^-,c_i^++b_i^+-c_i^++a_i^-+b_i^--a_i^-,c_i^++a_i^-+b_i^--a_i^-+c_i^--b_i^-),\cdots,$$

$$d+S_+\sum_{i=1}^{g}\big(-3c_i^+-2(b_i^+-c_i^+)-(a_i^+-b_i^+)\big)\Big).$$

$\mathbb{W}$ a donc bien pour plus haut poids $(\cdots(a_i^++a_i^-,b_i^++b_i^-,c_i^++c_i^-),\cdots,d)=((a_i,b_i,c_i)_{1\leq i\leq g},d)$.

Pour vérifier que $\mathbb{W}$ est bien une sous-représentation de $\Lambda^p((V_{\mathbb{C}}^{\vee})^{\oplus r})$, il suffit de voir que $V_{0,\cdots,0,-1}$ est une sous-représentation de $V_{i,+}^{\vee}\otimes V_{i,-}^{\vee}$.

Or l'accouplement J sur $V_{i,+}\otimes V_{i,-}$ induit un morphisme surjectif de $G_{\mathbb{C}}$-représentations $V_{i,+}\otimes V_{i,-}\to V_{0,\cdots,0,1}$, ce qui permet bien de voir par dualité $V_{0,\cdots,0,-1}$ comme une sous-représentation de $V_{i,+}^{\vee}\otimes V_{i,-}^{\vee}$. $\square$

Soit V_λ une représentation irréductible de $G_\mathbb{C}$ de plus haut poids λ, λ étant un caractère de T_m. D'après la proposition précédente, V_λ peut être considéré comme un facteur direct de $\Lambda^p(V_\mathbb{C}^{\vee\oplus r})$ pour r assez grand.

Le motif de Chow $\tilde{\mu}(V_\lambda)$ noté V_λ^μ (voir la fin du chapitre 3) est donc un facteur direct de $h(\mathcal{A}^r/S)$, le motif de Chow relatif de $\mathcal{A}^r$ sur S.

On notera e_λ l'idempotent définissant V_λ dans $\Lambda^p(V_\mathbb{C}^{\vee\oplus r})$. L'idempotent induit par e_λ dans $CH^{3rg}(\mathcal{A}^r \times_S \mathcal{A}^r)_\mathbb{C}$ sera encore noté e_λ. G se scindant sur E_{gal}, e_λ peut même être vu comme un élément de $CH^{3rg}(A^r \times_S A^r)_B$ pour tout corps B contenant E_{gal}.

D'après le théorème 3.1., il existe, dans $DM_{gm}(E(G,X))_B$, un triangle distingué

$$\partial M_{gm}(V_\lambda^\mu) \to M_{gm}^c(V_\lambda^\mu) \to M_{gm}(V_\lambda^\mu) \to \partial M_{gm}(V_\lambda^\mu)[1].$$

Par fonctorialité, il existe un idempotent de $M_{gm}(\mathcal{A}^r)$ encore noté e_λ tel que le triangle précédent soit l'image par e_λ du triangle distingué

$$\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r) \to M_{gm}^c(\mathcal{A}^r) \to M_{gm}(\mathcal{A}^r) \to \partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)[1].$$

On rappelle que, pour un faisceau F sur $S(\mathbb{C})$, les groupes $\partial H^k(S(\mathbb{C}), F)$ sont les groupes de cohomologies de $R^k i^* j_*(F)$ sur ∂S.

Pour calculer les poids évités par la partie e_λ du motif bord $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda} = \partial M_{gm}(V_\lambda^\mu)$ de $\mathcal{A}^r$, nous utiliserons le résultat suivant déjà montré dans le cas des surfaces de Picard dans [41].

Proposition 4.3. *Soient un corps B contenant E_{gal} et $\lambda = ((a_i, b_i, c_i), d)$ un caractère de T_m maximal pour les données fixées qui est associé à une sous-représentation irréductible de $\Lambda^p(V_B^{\vee\oplus r})$. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$(\partial H^n(\mathcal{A}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_\mathbb{Q} B)^{e_\lambda} \simeq \partial H^{n-p}(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)).$$

Démonstration. On note à nouveau e_λ l'idempotent définissant V_λ comme facteur direct de l'algèbre extérieur $\Lambda^*(V_B^{\vee\oplus r})$. En appliquant le foncteur de réalisation de Hodge μ on obtient un idempotent agissant sur les objets de cohomologie relative $\mathcal{H}^q(\mathcal{A}^r/S)$. En outre, on a

$$\mu(\Lambda^p(V_B^{\vee\oplus r})) = \mathcal{H}^p(\mathcal{A}^r/S).$$

L'image de cet idempotent est donc $\mu(V_\lambda)$ si $q = p$ et 0 sinon. On dispose également de la suite spectrale de structures de Hodge

$$E_2^{m,n} = \partial H^m(S(\mathbb{C}), \mathcal{H}^n(\mathcal{A}^r/S)) \Rightarrow \partial H^{m+n}(\mathcal{A}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Q})_\mathbb{Q} B$$

qui est compatible avec l'action du groupe de Chow

$$CH^{3rg}(\mathcal{A}^r \times_S \mathcal{A}^r) \otimes_{\mathbb{Z}} B = End_{CHM^s(S)_B}(h(\mathcal{A}^r/S)).$$

En considérant la partie fixée par e_λ, on obtient

$$\partial H^m(S(\mathbb{C}), \mathcal{H}^n(\mathcal{A}^r/S)^{e_\lambda}) \Rightarrow (\partial H^{m+n}(\mathcal{A}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes B)^{e_\lambda}.$$

Par conséquence, on trouve bien

$$\partial H^m(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) \simeq (\partial H^{m+p}(\mathcal{A}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes B)^{e_\lambda}.$$

□

Par définition de $\partial H^k(.)$, les poids de la structure de Hodge $\partial H^k(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ sont ceux de la variation de structure de Hodge $R^k i^* j_* \mu(V_\lambda)$ où $j : S \to S^*$ est l'inclusion de S dans sa compactification de Baily-Borel et $i : \partial S \to S^*$ est l'inclusion du bord.

Remarque 4.4. *Comme noté par Wildeshaus par exemple dans [43], la même démonstration vaut pour la cohomologie et la cohomologie à support compact.*

Nous reprenons les conventions utilisées au chapitre 2. P désigne un sous-groupe de G associé à la donnée de Shimura (G, X) et au sous-groupe parabolique Q (voir la proposition 2.4.). W est son radical unipotent. S désigne une variété de Picard associée à (G, X) et à un sous-groupe compact, ouvert et net K de $G(\mathbb{A}_f)$, pt un point de la compactification de Baily-Borel associée à la donnée de Shimura $(P/W, X_1)$ (cf. propositions 2.7. et 2.8.). On notera

$$\mu_S : \mathrm{Rep}(G) \to VHS(S)$$

$$\mu_{pt} : \mathrm{Rep}(P/W) \to VHS(pt)$$

les foncteurs canoniques associant à une représentation d'un groupe une variation de structure de Hodge sur la variété de Shimura associée (voir le résumé 1.18. de [31]).

Nous rappelons le théorème de Burgos-Wildeshaus (théorème 2.9. de [6]) qui nous permettra de calculer les poids des dégénérescences de structures de Hodge qui nous intéressent.

Pour cela, nous reprenons les notations de [6] : nous définissons H_C comme étant le groupe $Stab_{Q(\mathbb{Q})}(X_1) \cap P(\mathbb{A}_f).K$ et $\overline{H_C}$ comme étant son image dans Q/W.

Théorème 4.5. *Pour tout* $\mathbb{V}^\cdot \in D^b(Rep_G)$ *on a un isomorphisme canonique et fonctoriel*

$$\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_S(\mathbb{V}^\cdot) \simeq \bigoplus_{p+q=n} \mu_{pt} \circ H^p(\overline{H_C}, H^q(W, Res_Q^G \mathbb{V}^\cdot))$$

en tant que variations de structures de Hodge, où la notation pt désigne une composante connexe du bord de la compactification de Baily-Borel S^* *de* S, $i : pt \to S^*$ *l'inclusion de celle-là dans celle-ci et* $j : S \to S^*$ *l'inclusion de la variété de Picard dans sa compactification de Baily-Borel.*

Tout d'abord, la cohomologie du groupe W se calcule avec le théorème de Kostant (voir le théorème 2.5.2.1. de [35]) :

Théorème 4.6. *Soit* G *un groupe réductif sur* $\mathbb{C}$, B *un sous-groupe de Borel,* W *son radical unipotent,* ρ *la demi-somme des racines positives,* $\mathcal{R}$ *le groupe de Weyl et* V_λ *la* G*-représentation irréductible de poids maximal* λ*. Pour tout* $\tau \in \mathcal{R}$*, on note* $l(\tau)$ *la longueur de* τ*.*

Alors on a l'égalité de B/W*-représentations*

$$H^k(W, V_{\lambda|B}) = \bigoplus_{l(\tau)=k} V_{\tau(\lambda+\rho)-\rho, B/W}$$

où $V_{\alpha,B/W}$ *désigne la représentation irréductible de* B/W *de plus haut poids* α*.*

Passons à l'étude du groupe $\overline{H_C}$. Si K est un sous-groupe de congruence de niveau N,

$$\overline{H_C} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(z)^{-1} \end{pmatrix}, 1 \right) / \, z \in U_{E,N} \right\} \simeq U_{E,N} \tag{4.1}$$

où $U_{E,N} = \{z \in \mathcal{O}_E^\times \, / \, z = 1 \mod N\mathcal{O}_E\}$.

Plus généralement, si K est un sous-groupe compact, ouvert et net de $G(\mathbb{A}_f)$, $\overline{H_C}$ est identifié à un sous-groupe U_K d'indice fini de $\mathcal{O}_E^\times$. K étant net, c'est aussi un groupe sans torsion. On a donc $U_K \simeq \mathbb{Z}^{g-1}$. Par conséquent,

$$\overline{H_C} = \left\{ \left(\begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(z)^{-1} \end{pmatrix}, 1 \right) / \, z \in U_K \right\} \simeq \mathbb{Z}^{g-1}. \tag{4.2}$$

Proposition 4.7. *On considère M un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension un muni d'une action de $\overline{H_C}$.*

Si l'action de $\overline{H_C}$ sur M est non triviale,

$$\forall k \geq 0, H^k(\overline{H_C}, M) = 0.$$

Si cette action est triviale,

$$H^k(\overline{H_C}, M) = M^{\binom{g-1}{k}}.$$

Démonstration. On rappelle que

$$\overline{H_C} \simeq \mathbb{Z}^{g-1}.$$

Dans le cas où l'action de $\overline{H_C}$ sur M est triviale, la suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée à un sous-groupe de $\overline{H_C}$ isomorphe à $\mathbb{Z}^{g-2}$ montre que l'on a la suite exacte

$$0 \to H^0(\mathbb{Z}, H^q(\mathbb{Z}^{g-2}, M)) \to H^q(\mathbb{Z}^{g-1}, M) \to H^1(\mathbb{Z}, H^{q-1}(\mathbb{Z}^{g-2}, M)) \to 0.$$

En utilisant la relation du triangle de Pascal, on voit qu'il nous suffit de traiter le cas où $g - 1 = 1$, pour lequel le résultat est immédiat.

Dans le cas où l'action de $\overline{H_C}$ sur V_λ est non triviale, on peut trouver un sous-groupe de $\overline{H_C}$ isomorphe à $\mathbb{Z}^{g-2}$ contenant un élément agissant non trivialement sur V_λ. La suite spectrale de Hochschild-Serre appliquée à ce sous-groupe s'écrit

$$0 \to H^0(\mathbb{Z}, H^q(\mathbb{Z}^{g-2}, M)) \to H^q(\mathbb{Z}^{g-1}, M) \to H^1(\mathbb{Z}, H^{q-1}(\mathbb{Z}^{g-2}, M)) \to 0.$$

Cela nous ramène à nouveau au cas où $g - 1 = 1$.

Sous cette hypothèse, comme M est de dimension un et que l'action de $\mathbb{Z}$ est non triviale,

$$H^0(\mathbb{Z}, M) = 0.$$

D'autre part, un cocycle de $Z^1(\mathbb{Z}, M)$ est déterminé par l'image de $1 \in \mathbb{Z}$. On a donc $Z^1(\mathbb{Z}, M) \simeq M$. L'ensemble des cobords est alors

$$B^1(\mathbb{Z}, M) = \{1.a - a, a \in M\}.$$

Comme l'action de $\mathbb{Z}$ sur M est non triviale, $B^1(\mathbb{Z}, M) = M$. On a donc

$$H^1(\mathbb{Z}, M) = 0.$$

□

On considère une représentation irréductible $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$ du tore maximal $T_m \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{3g+1}$ de $G_{\mathbb{C}}$.

En voyant $\overline{H_C}$ comme un sous-groupe U_K de $\mathcal{O}_E^\times$ et en utilisant l'identification (4.2) précédente, nous pouvons écrire que $z \in \overline{H_C}$ agit sur $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$ par $\prod_{I=1}^{g} \sigma_i(z)^{a_i}\overline{\sigma_i(z)}^{-c_i}$, où $\{\sigma_i, \overline{\sigma_i}\}_{1\leq i\leq g}$ est l'ensemble des plongements $E \to \mathbb{C}$ (cf. chapitre 1).

Proposition 4.8. *L'action de $\overline{H_C}$ sur $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$ est triviale si et seulement si il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq g$,*

$$a_i - c_i = m.$$

Démonstration. Supposons que $\overline{H_C}$ agisse trivialement sur $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$, c'est-à-dire que pour tout $\epsilon \in \overline{H_C}$, $\prod_{i=1}^{g} \sigma_i(\epsilon)^{a_i}\overline{\sigma_i(\epsilon)}^{-c_i} = 1$. Alors, en appliquant le module puis la fonction log à l'expression précédente, on a, pour tout $\epsilon \in \overline{H_C}$,

$$\sum_{i=1}^{g}(a_i - c_i)\log(|\sigma_i(\epsilon)|) = 0.$$

Ainsi le vecteur $(a_i-c_i)_{1\leq i\leq g}$ est orthogonal aux vecteurs $(\log(|\sigma_i(\epsilon)|))_{1\leq i\leq g}$, pour $\epsilon \in \overline{H_C}$, qui engendrent un espace de dimension $g-1$ d'après le théorème des unités de Dirichlet. Ainsi $(a_i - c_i)_{1\leq i\leq g}$ appartient à la droite orthogonale à cet espace, qui n'est autre que la droite engendrée par $(1, \cdots, 1)$, d'après ce même théorème. Par conséquent, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $1 \leq i \leq g$,

$$a_i - c_i = m.$$

Réciproquement, s'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $a_i - c_i = m$ pour tout $1 \leq i \leq g$, alors, pour tout $\epsilon \in \overline{H_C}$,

$$\prod_{i=1}^{g} |\sigma_i(\epsilon)^{a_i}\overline{\sigma_i(\epsilon)}^{-c_i}|^2 = |\prod_{i=1}^{g} \sigma_i(\epsilon)\overline{\sigma_i(\epsilon)}|^m = 1.$$

$\overline{H_C}$ s'envoie donc par le morphisme $\prod_{i=1}^{g} \sigma_i^{a_i}\overline{\sigma_i}^{-c_i}$ dans le sous-groupe des nombres complexes de module 1. Comme $\overline{H_C}$ est un sous-groupe de $\mathcal{O}_E^\times$ et que E est une extension finie de $\mathbb{Q}$, $\overline{H_C}$ est envoyé par le morphisme $\prod_{i=1}^{g} \sigma_i^{a_i}\overline{\sigma_i}^{-c_i}$ dans un sous-groupe de torsion.

De plus, $\overline{H_C}$ est net et l'image par un morphisme (tel que $\prod_{i=1}^{g} \sigma_i^{a_i}\overline{\sigma_i}^{-c_i}$) d'un groupe net est elle-même nette. Pour tout $\epsilon \in \overline{H_C}$, on a donc

$$\prod_{i=1}^{g} \sigma_i(\epsilon)^{a_i}\overline{\sigma_i(\epsilon)}^{-c_i} = 1.$$

Ainsi, l'action de $\overline{H_C}$ sur $V_{((a_i,b_i,c_i),d)}$ est triviale. □

Nous dirons que $\tau_i \in \mathfrak{S}_3$ est positif si $l(\tau_i) \leq 1$ et négatif sinon (nous verrons que cette notion est liée à celle positivité ou négativité de certains poids).

On dira que $\tau = (\tau_i)_{1\leq i\leq g} \in \mathfrak{S}_3^g$ est totalement positif (resp. totalement négatif) si chaque τ_i est positif (resp. négatif).

Proposition 4.9. *Si $\tau = (\tau_i)_{1\leq i\leq g}$ vérifie que l'un des τ_i est positif et qu'un autre est négatif, alors pour tout V_λ sous-représentation irréductible de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\oplus r})$, l'action de $\overline{H_C}$ sur $V_{\tau(\lambda+\rho)-\rho}$ est non triviale.*

Démonstration. Si par exemple $\tau_i = (12)$ et $\tau_j = (123)$, alors en notant $\lambda = ((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$, on a

$$\tau_i((a_i, b_i, c_i) + \rho_i) - \rho_i = (b_i - 1, a_i + 1, c_i),$$

$$\tau_j((a_j, b_j, c_j) + \rho_j) - \rho_j = (c_j - 2, a_j + 1, b_j + 1).$$

Pour que l'action de $\overline{H_C}$ soit triviale, d'après la proposition 4.8., il faut que $b_i - 1 - c_i = c_j - 2 - b_j - 1 = m$. Comme $b_i \geq c_i$,

$$m \geq -1.$$

Comme $b_j \geq c_j$,

$$m \leq -3.$$

Donc ceci est impossible.

Les autres cas conduisent également à des inégalités $m \leq -3$ et $m \geq -1$ incompatibles entre elles. □

Nous allons calculer les poids apparaissant dans $\partial H^n(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ pour un caractère λ de T_m maximal pour le sous-groupe de Borel Q tel que V_λ soit un facteur direct de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$.

On considère un couple d'entiers positifs (p_0, q_0) tel que $n = p_0 + q_0$. Le théorème 4.5. nous amène à nous intéresser au poids apparaissant dans $H^{p_0}(\overline{H_C}, H^{q_0}(W, Res_Q^G V_\lambda))$.

Suivant le théorème 4.6., on considère $\tau \in \mathfrak{S}_3^g$ tel que $l(\tau) = q_0$. Les propositions 4.7., 4.8. et 4.9. nous permettent de ne considérer que les cas où τ est totalement positif ou totalement négatif.

Si τ est totalement positif, posons

$$I = \{i \,/\, 1 \leq i \leq g \ \text{ et } \ \tau_i = id\},$$

$$J = \{j \,/\, 1 \leq j \leq g \ \text{ et } \ \tau_j = (12)\},$$

$$K = \{k \,/\, 1 \leq k \leq g \ \text{ et } \ \tau_k = (23)\}.$$

En vertu de la description des longueurs des éléments du groupe de Weil faite au début de ce chapitre, on a $l(\tau) = |J| + |K|$.

En outre, les propositions 4.7. et 4.8. et la description du début de ce chapitre des éléments $\tau(\lambda+\rho)-\rho$ nous permettent de ne considérer que des éléments $\lambda = ((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$ vérifiant qu'il existe m tel que

$$\forall (i,j,k) \in I \times J \times K, \ a_i - c_i = b_j - 1 - c_j = a_k - b_k - 1 = m.$$

Comme $a_i \geq c_i$ (ainsi que $b_j \geq c_j$ et $a_k \geq b_k$), on doit avoir

$$m \geq -1.$$

Pour un caractère régulier,

$$m \geq 0.$$

La définition du morphisme $\omega \circ h_\infty$ (voir la proposition 2.3.) permettant de décrire la donnée de Shimura du bord de S montre que, si $((\alpha_i, \beta_i, \gamma_i)_{1\leq i\leq g}, \delta)$ est un caractère maximal du tore Q/W, le poids de la structure de Hodge $\mu_{pt}(V_{((\alpha_i,\beta_i,\gamma_i),\delta)})$ est (cf. les paragraphes 1.1. et 1.3. de [31])

$$w = -2\delta - \sum_{i=1}^{g}(2\alpha_i + \beta_i).$$

Par conséquent, pour un élément du groupe de Weil $\tau \in \mathfrak{S}_3^g$ et un caractère maximal $((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$ de T_m considérés précédemment, on voit que $V_{\tau(\lambda+\rho)-\rho}$ est de poids

$$\begin{aligned} w &= -2d - \sum_{i\in I}(2a_i + b_i) - \sum_{j\in J}(2(b_j-1)+a_j+1) - \sum_{k\in K}(2a_k+c_k-1) \\ &= -2d - \sum_{l=1}^{g}(a_l+b_l+c_l) + \sum_{i\in I}(c_i-a_i) + \sum_{j\in J}(c_j-b_j+1) + \sum_{k\in K}(b_k-a_k+1) \\ &= p - mg. \end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\overline{H_C}$ est de dimension cohomologique $g-1$ et $0 \leq |J| + |K| \leq g$, on peut supposer que l'on a

$$0 \leq p_0 \leq g-1,$$

$$0 \leq q_0 \leq g,$$

$$0 \leq n \leq 2g-1.$$

De façon analogue, pour τ totalement négatif, on note

$$I = \{i \,/\, 1 \leq i \leq g \ \text{ et } \ \tau_i = (123)\},$$

$$J = \{j \,/\, 1 \leq j \leq g \ \text{ et } \ \tau_j = (132)\},$$

$$K = \{k \,/\, 1 \leq k \leq g \ \text{ et } \ \tau_k = (13)\}.$$

La description du début de chapitre des longueurs des éléments du groupe de Weil montre que l'on a alors $l(\tau) = 2|I| + 2|J| + 3|K|$.

Les propositions 4.7., 4.8. et la description faite au début de ce chapitre des éléments $\tau(\lambda+\rho)-\rho$ permettent de ne considérer que des éléments $\lambda = ((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$ tel qu'il existe m vérifiant

$$\forall (i,j,k) \in I\times J\times K,\ c_i - 2 - b_i - 1 = b_j - 1 - a_j - 2 = c_k - 2 - a_k - 2 = -m.$$

Comme $b_i \geq c_i$ (ainsi que $a_j \geq b_j$ et $a_k \geq c_k$) on a

$$m \geq 3.$$

Pour un caractère régulier,

$$m \geq 4.$$

$V_{\tau(\lambda+\rho)-\rho}$ sera alors de poids

$$\begin{aligned}
w &= -2d - \sum_{i\in I}(2(c_i-2)+a_i+1) - \sum_{j\in J}(2(b_j-1)+c_j-1) - \sum_{k\in K}(2(c_k-2)+b_k) \\
&= -2d - \sum_{l=1}^{g}(a_l+b_l+c_l) + \sum_{i\in I}(b_i-c_i+3) + \sum_{j\in J}(a_j-b_j+3) + \sum_{k\in K}(a_k-c_k+4) \\
&= p+mg.
\end{aligned}$$

Cette fois, on a

$$0 \leq p_0 \leq g-1,$$

$$2g \leq q_0 \leq 3g,$$

$$2g \leq n \leq 4g-1.$$

Théorème 4.10. *Si λ est un caractère régulier de $G_{\mathbb{C}}$, la partie e_λ du motif bord de $\mathcal{A}^r$ est sans poids 0 et -1.*

Démonstration. D'après les théorèmes 3.3. et 3.4. il suffit de vérifier que $(\partial H^{n+p}(\mathcal{A}^r,\mathbb{Q})\otimes\mathbb{C})^{e_\lambda} \simeq \partial H^n(S(\mathbb{C}),\mu(V_\lambda))$ est sans poids $n+p$ et $n+p+1$.

Or, d'après le calcul précédent, si $n \leq 2g-1$, cette structure de Hodge est soit nulle soit de poids $p-mg$ qu'on écrit $n+p-n-mg$ avec λ vérifiant qu'il existe une partition de $[\![1,g]\!] = I\cup J\cup K$ telle que il existe m tel que

$$\forall i\in I, j\in J, k\in K,\ m = a_i-c_i = b_j-1-c_j = a_k-b_k-1.$$

On a alors vu que

$$m \geq 0.$$

On a donc $-n-mg < 0$ à moins que $n=0$ et $m=0$. Lorsque $n=0$, $I=[\![1,g]\!]$, c'est-à-dire que $a_i-c_i=m$ pour tout $1\leq i\leq g$. Comme λ est régulier, on a alors pour tout $1\leq i\leq g$

$$a_i > c_i.$$

Donc

$$m = a_i - c_i > 0.$$

Ainsi $-n-mg<0$ dans ce cas également.

Si $n \geq 2g$, la structure de Hodge considérée est soit nulle soit de poids $p + mg = n + p - n + mg$ avec λ vérifiant qu'il existe une partition de $[\![1, g]\!] = I \cup J \cup K$ telle qu'il existe un entier m tel que

$$\forall i \in I, j \in J, k \in K, \ -m = c_i - 2 - b_i - 1 = b_j - 1 - a_j - 2 = c_k - 2 - a_k - 2.$$

On a vu dans ce cas que
$$m \geq 4.$$
On a donc $-n + mg > 1$ sauf si $m = 4$ et $n = 4g - 1$. Si $K \neq \emptyset$, $m > 4$. Ainsi, si $m = 4$, $K = \emptyset$. Alors, avec les notations précédentes, on peut écrire

$$n = p_0 + q_0,$$

$$q_0 = 2g,$$
$$0 \leq p_0 \leq g - 1.$$

Par conséquent, $n < 3g$, ce qui montre que les poids proscrits sont de nouveau évités. $\square$

Corollaire 4.11. *Pour λ un caractère régulier de $G_{\mathbb{C}}$, la partie e_λ du motif intérieur de $\mathcal{A}^r$ est bien définie.*

Lorsque le motif bord est nul, la condition d'évitement de poids est trivialement vérifiée. Dans le cas des variétés de Hilbert-Blumenthal ([41]), la condition de nullité du motif bord porte sur le caractère λ définissant l'idempotent e ; c'est une condition de parallélisme entre coefficients définissant λ.

Dans le cas des variétés de Picard, on peut de même préciser dans quel cas la partie e du motif bord de $\mathcal{A}^r$ n'est pas nul. Pour cela on introduit la définition suivante.

Définition 4.12. *On dit qu'un caractère $((a_i, b_i, c_i)_{1 \leq i \leq g}, d)$ de $T_m \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{3g+1}$ est Kostant-parallèle s'il existe un entier m et une décomposition $[\![1, g]\!] = I \cup J \cup K$ avec*
$$I = \{i \in [\![1, g]\!] \,/\, a_i - c_i = m\},$$
$$J = \{j \in [\![1, g]\!] \,/\, b_j - c_j - 1 = m\},$$
$$K = \{k \in [\![1, g]\!] \,/\, a_k - b_k - 1 = m\}.$$

Proposition 4.13. *La partie e_λ du motif bord de $\mathcal{A}^r$ est nulle si et seulement si λ n'est pas Kostant-parallèle.*

Démonstration. D'après les propositions 4.8., 4.9. et le théorème 4.6., l'action de $\overline{H_C}$ n'est pas triviale sur les groupes $H^q(W, Res_Q^G V_\lambda)$ si et seulement si λ n'est pas Kostant-parallèle.

Ceci entraîne, d'après la proposition 4.7. et le théorème 4.5., que la réalisation de Hodge du motif bord de la partie e_λ de $\mathcal{A}^r$ est nulle si et seulement si λ n'est pas Kostant-parallèle.

On en déduit, d'après le théorème 3.17., que la partie e_λ du motif bord de $\mathcal{A}^r$ est nulle si et seulement si λ n'est pas Kostant-parallèle. $\square$

Dans le cas des surfaces de Picard (voirle théorème 3.8. de [43]), la régularité du caractère λ équivaut à l'évitement des poids -1 et 0 par la partie e_λ du motif bord. La remarque suivante montre que dans le cas des variétés de Picard, il existe des motifs bord de certaines familles de Kuga-Sato qui sont non nuls, associés à des caractères non réguliers, qui évitent pourtant les poids 0 et -1.

Proposition 4.14. *Supposons que $g = 2$. Considérons le caractère $\lambda = ((1, 0, -1), (0, 0, 0), -1)$ qui est Kostant parallèle, dominant mais non régulier. La représentation de plus haut poids associée est un facteur direct de $\Lambda^2(V_{\mathbb{C}}^{\vee})$. Néanmoins, la partie e_λ du motif bord de $\mathcal{A}$ est sans poids 0 et -1.*

Démonstration. Les calculs précédents montrent que

$$(\partial H^2(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^0(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) = 0,$$

$$(\partial H^5(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^3(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) = 0,$$

$$(\partial H^6(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^4(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) = 0,$$

$$(\partial H^9(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^7(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) = 0,$$

$$(\partial H^3(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^1(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) \text{ est de poids } 2 = 3 - 1,$$

$$(\partial H^4(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^2(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) \text{ est de poids } 2 = 4 - 2,$$

$$(\partial H^7(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^5(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) \text{ est de poids } 2 + 4 \times 2 = 7 + 3,$$

$$(\partial H^8(\mathcal{A}(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} = \partial H^6(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)) \text{ est de poids } 2 + 4 \times 2 = 8 + 2.$$

Cela montre, d'après la proposition 4.3. et le théorème 3.14., que la partie e_λ du motif bord de $\mathcal{A}$ est sans poids -1 et 0. $\square$

On peut néanmoins trouver une famille de caractères parmi lesquels la régularité équivaut à l'absence des poids 0 et -1.

Définition 4.15. *On dit qu'un caractère* $((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$ *de* $T_m \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{3g+1}$ *est parallèle si pour tout* $1 \leq i, j \leq g$,

$$a_i = a_j,$$

$$b_i = b_j,$$

$$c_i = c_j.$$

Proposition 4.16. *Si* λ *est un caractère parallèle de* $T_m \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}^{3g+1}$, *alors la partie* e_λ *du motif bord de* $\mathcal{A}^r$ *est sans poids* 0 *et* -1 *si et seulement si* λ *est régulier.*

Démonstration. On a déjà montré qu'un caractère régulier évitait les poids 0 et -1.

Réciproquement, supposons que λ soit parallèle et non régulier. Supposons, par exemple, qu'il existe $1 \leq i \leq g$ tel que $a_i = b_i$ (le cas $b_i = c_i$ se traite pareillement). Alors, pour tout $1 \leq j \leq g$, $a_j = b_j$. Prenons l'élément du groupe de Weil $\tau = ((12))_{1\leq j\leq g}) \in \mathfrak{S}_3^g$ où (12) est la transposition échangeant les deux premiers éléments d'un ensemble à trois éléments ordonnés. On a alors $l(\tau) = g$. En utilisant les théorèmes 4.5. et 4.6., on voit alors que le poids

$$-2d - \sum_{j=1}^{g}(2a_j + c_j - 1) = p + \sum_{j=1}^{g}(b_j - a_j + 1) = p + g$$

apparait dans les variations de structure de Hodge $\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_S(V_\lambda)$ pour $g \leq n \leq 2g - 1$.

Ce calcul associé à la proposition 4.3. montre que la structure de Hodge $(\partial H^{g+p}(\mathcal{A}^r, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{e_\lambda}$ présente le poids $p + g$. D'après la proposition 3.5. et le théorème 3.14., $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}$ n'évite pas le poids 0.

Un calcul similaire pour un caractère $((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d)$ parallèle avec $a_i = b_i$ (le cas $b_i = c_i$ se traitant là encore de la même manière) montre que les variations de structure de Hodge $\mathcal{H}^n i^* j_* \circ \mu_S(V_\lambda)$ présente le poids $p + 3g$ pour $2g \leq n \leq 3g - 1$. En particulier, d'après la proposition 4.3., $(\partial H^{p+3g-1}(\mathcal{A}^r, \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})^{e_\lambda}$ présente le poids $p + 3g$. D'après la proposition 3.5. et le théorème 3.16., le motif $\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}$ n'évite pas le poids -1.

□

Par ailleurs, on peut développer les calculs de manière à connaître tous les poids de $i^* R^k j_* R^p f_* \mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$, où $f : \mathcal{A}^r \to S$ est le morphisme structural. Il s'agit de l'objet du théorème suivant.

Lorsque x est un nombre réel, $[x]$ désigne la partie entière de x.

Théorème 4.17. *Lorsque* $p > 6rg$ $i^*R^kj_*Rp^pf_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est nul pour tout* k.
Pour $p \leq 6rg$ *et* $p \neq 1, 6rg-1$, *on a*
(a) pour tout $0 \leq k \leq g-1$, $i^*R^kj_*R^pf_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* $\{p-mg\}_{0\leq m\leq N_p}$ *avec*

$$N_p = min([\frac{p}{g}], 6r - [\frac{p}{g}], 2r),$$

(b) pour tout $g \leq k \leq 2g-1$, $i^*R^kj_*R^pf_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* $\{p-mg\}_{-1\leq m\leq N_p}$ *avec*

$$N_p = min([\frac{p}{g}], [\frac{p+r(k-g+1)}{k+1}], [\frac{6rg+r(k-g+1)-p}{k+1}], [\frac{6rg-p}{g}]) - 1,$$

(c) pour tout $2g \leq k \leq 3g-1$, $i^*R^kj_*R^pf_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* $\{p+mg\}_{3\leq m\leq N_p}$ *avec*

$$N_p = min([\frac{p}{g}], [\frac{p+r(k-g+1)}{k+1}], [\frac{6rg+r(k-g+1)-p}{k+1}], [\frac{6rg-p}{g}]) + 3,$$

(d) pour tout $3g \leq k \leq 4g-1$, $i^*R^kj_*R^pf_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* $\{p+mg\}_{4\leq m\leq N_p}$ *avec*

$$N_p = min([\frac{p}{g}], 6r - [\frac{p}{g}], 2r) + 4.$$

Lorsque $p = 1$, $i^*R^kj_*R^1f_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* 1 *pour* $1 \leq k \leq g$, *de poids* $1+4g$ *pour* $3g-1 \leq k \leq 4g-2$ *et nul pour les autres valeurs de* k.

Lorsque $p = 6rg-1$, $i^*R^kj_*R^{6rg-1}f_*\mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ *est de poids* $6rg-1$ *pour* $1 \leq k \leq g$, *de poids* $6rg-1+4g$ *pour* $3g-1 \leq k \leq 4g-2$ *et nul pour les autres valeurs de* k.

Démonstration. Pour le cas $p = 1$, $V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r}$ est déterminé explicitement à la suite de la proposition 4.1. Les théorèmes 4.5. et 4.6. ainsi que les propositions 4.7. et 4.8. permettent de trouver le résultat.

On note qu'il y a une bijection entre les caractères donnant les sous-représentations irréductibles de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$ et ceux donnant les sous-représentations irréductibles de $\Lambda^{6rg-p}(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$ donnée par

$$((a_i, b_i, c_i)_{1\leq i\leq g}, d) \mapsto ((-c_i, -b_i, -a_i)_{1\leq i\leq g}, -3rg-d).$$

Cette bijection permet de trouver le résultat concernant $p = 6rg-1$ à partir de celui concernant $p = 1$.

Nous reprenons les notations du théorème 4.10. Nous considérons provisoirement V_λ une sous-représentation irréductible de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$. Lorsque

$0 \leq k \leq g-1$, l'ensemble noté I est non vide. De plus, pour $i \in I$ on a $a_i - c_i = m$. Ainsi, $0 \leq m \leq 2r$.

Supposons désormais que $p \leq rg$. Soit m tel que $0 \leq mg \leq p$. Il existe un caractère vérifiant $a_i = m$, $b_i = 0$ et $c_i = 0$ pour tout i (sauf éventuellement pour un entier i, $b_i = 1$ selon la parité de p) tel que $V_\lambda \subset \Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee \oplus r})$ et $i^* R^k j_* \mu(V_\lambda)$ fasse apparaître le poids $p - mg$. La proposition 4.2. (plus particulièrement la troisième ligne décrivant les caractères concernés) montre que m ne peut être supérieur à $[\frac{p}{g}]$.

Lorsque $r < m$, $mg \leq p$ et $mg \leq 6rg - p$, il existe un caractère vérifiant $a_i = r$, $b_i = 0$ et $c_i = r - m$ (avec éventuellement $b_i = 1$ pour un entier i selon la parité de p) tel que $V_\lambda \subset \Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee \oplus r})$ et $i^* R^k j_* \mu(V_\lambda)$ fasse apparaître le poids $p - mg$.

Cette description et la proposition 4.2. montre également que les valeurs de m tel que $p - mg$ soit un poids de $i^* R^k j_* R^p f_* \mathbb{Q}_{\mathcal{A}^r}$ ne peuvent être supérieures à N_p.

Nous considérons à présent k tel que $g \leq k \leq 2g-1$ et dans un premier temps un caractère λ maximal tel que $V_\lambda \subset \Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee \oplus r})$. Dans ce cas, l'un des ensembles notés J et K est non vide. On peut par exemple supposer $J \neq \emptyset$. Il existe alors un entier m tel que $a_j - b_j - 1 = m$. Ainsi $-1 \leq m$.

Supposons alors que $p \leq rg$. Si l'on choisit m tel que $0 \leq (m+1)g \leq p$, on peut trouver un caractère λ tel que $a_i = m+1$, $b_i = 0$ et $c_i = 0$ (sauf peut-être un i tel que $c_i = -1$ selon la parité de p) avec $V_\lambda \subset \Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee \oplus r})$ et tel que $i^* R^k j_* \mu(V_\lambda)$ fasse apparaître le poids $p - mg$. A nouveau, la troisième ligne décrivant les caractères concernés dans la proposition 4.2. montre que $m + 1 \leq [\frac{p}{g}]$.

Lorsque $m > r$, $mg \leq N_p$, on choisit $k - g + 1$ entiers i, $1 \leq i \leq g$, pour lesquels on pose $a_i = r$, $b_i = c_i = r - m - 1$ (sauf peut-être pour un i pour lequel on pose $c_i = b_i - 1$ selon la parité de p) ; pour tous les autres entiers $1 \leq i \leq g$, on pose $a_i = r$, $b_i = 0$ et $c_i = r - m$. Il existe alors un caractère $\lambda = ((a_i, b_i, c_i), d)$ tel que $V_\lambda \subset \Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee \oplus r})$ et $i^* R^k j_* \mu(V_\lambda)$ fasse apparaitre le poids $p - mg$.

Les cas $2g \leq k \leq 3g-1$ et $3g \leq 4g-1$ se traitent comme les deux cas précédents. $\square$

Chapitre 5

Le motif d'une forme automorphe

L'objectif de ce chapitre est de construire des motifs analogues à ceux construits par Scholl dans [34] pour des formes modulaires.

Considérons S une variété de Picard associée à un sous-groupe compact, ouvert et net K de $G(\mathbb{A}_f)$, ainsi qu'un élément KxK de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$. Notons U la variété de Picard associée à $K' = K \cap x^{-1}Kx$. On a vu dans le dernier paragraphe du premier chapitre que cet élément x induit un morphisme

$$\psi : [.1]^*h(\mathcal{A}^r/S) \to [.x^{-1}]^*h(\mathcal{A}^r/S).$$

Soit e un idempotent de $h(\mathcal{A}^r/S)$. Supposons qu'il vérifie

$$\psi \circ [.1]^*(e) = [.x^{-1}]^*(e) \circ \psi.$$

Dans ce cas, ψ induit un morphisme

$$\psi^e : [-1]^*h(\mathcal{A}^r/S)^e \to [.x^{-1}]^*h(\mathcal{A}^r/S)^e.$$

Grâce à la proposition 3.6., on obtient un endomorphisme du triangle distingué

$$\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^e \to M_{gm}(\mathcal{A}^r)^e \to M_{gm}^c(\mathcal{A}^r)^e \to \partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^e[1]$$

en considérant l'élément $\beta_{[.x^{-1}]^*,id} \circ \psi^e \circ \delta_{id,[.1]^*}$. On dit qu'un tel morphisme est de type de Hecke.

Nous considérons par la suite des caractères du tore maximal T_m de $G_{\mathbb{C}}$. Ces caractères seront maximaux pour le sous-groupe de Borel Q choisi dans le chapitre 2 (proposition 2.1.).

Proposition 5.1. *Si $x \in G(\mathbb{A}_f)$ définit une correspondance de Hecke ψ et si e_λ est un idempotent de $h(\mathcal{A}^r/S)$ image par $\tilde{\mu}$ d'un idempotent de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$, alors on a*

$$\psi \circ [.1]^*(e_\lambda) = [.x^{-1}]^*(e_\lambda) \circ \psi.$$

Démonstration. En plus des notations rappelées au début de ce chapitre, nous reprenons celles de la fin du chapitre 1.

$\mathcal{A} \to S$ et $\mathcal{B} \to U$ sont définies comme étant les variétés abéliennes universelles des variétés de Picard S et U associées aux sous-groupes compacts, ouverts et nets K et $K' = K \cap x^{-1}Kx$ de $G(\mathbb{A}_f)$. En outre, on note $\mathcal{A}_1 = [.1]^*\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_2 = [.x^{-1}]\mathcal{A}$. ψ est alors la correspondance de Hecke

$$\psi : [.1]^*h(\mathcal{A}^r/S) \to [.x^{-1}]^*h(\mathcal{A}^r/S).$$

Les morphismes $[.1]$ et $[.x^{-1}]$ étant finis et étales, $f_1 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_1$ et $f_2 : \mathcal{B} \to \mathcal{A}_2$ sont des isogénies.

On considère $p_{\mathcal{A}_i,1}$ les projecteurs $h(\mathcal{A}_i/S) \to h^1(\mathcal{A}_i/S)$ construits par Deninger et Murre dans [13]. D'après la proposition 3.3. de [13], ces projecteurs commutent avec les isogénies. En particulier, ψ étant une correspondance définie (cf. chapitre 1) comme la composée $\Gamma_{f_2^r} \circ {}^t\Gamma_{f_1^r}$, on a

$$\psi \circ p_{\mathcal{A}_1,1} = p_{\mathcal{A}_2,1} \circ \psi.$$

ψ induit donc un morphisme $[.1]^*h^1(\mathcal{A}/S) \to [.x^{-1}]^*h^1(\mathcal{A}/S)$.

D'autre part, d'après le théorème 2.2.1. de [25] et la proposition 3.3. de [1], pour savoir que l'action de e_λ commute avec celle de la correspondance ψ, il suffit de voir que ψ commute avec l'action de E, c'est-à-dire qu'il suffit de prouver que ψ est compatible avec la multiplication complexe. Or, les isogénies f_1 et f_2, qui sont des morphismes canoniquement associés aux variétés abéliennes universelles de variétés de Picard, sont compatibles avec la multiplication complexe. Ainsi, on a bien

$$\psi \circ [.1]^*(e_\lambda) = [.x^{-1}]^*(e_\lambda) \circ \psi.$$

□

Soit λ un caractère de T_m le tore maximal des matrices diagonales de $G_{\mathbb{C}}$ qui est maximal pour le sous-groupe de Borel Q. Notons V_λ la représentation de plus haut poids λ associée. D'après la proposition 4.2., il existe des entiers p et r tels que V_λ soit une sous-représentation de $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$. e_λ désigne l'idempotent définissant V_λ dans $\Lambda^p(V_{\mathbb{C}}^{\vee\oplus r})$ ou son image par certains foncteurs (voir les notations introduites dans le paragraphe suivant la proposition 4.2.).

D'après la proposition 5.1., on obtient une action de l'algèbre de Hecke sur le triangle distingué

$$\partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda} \to M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda} \to M_{gm}^c(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda} \to \partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}[1].$$

Supposons, de surcroît, que λ est un caractère régulier. D'après le chapitre 4, nous savons que $\partial M_{gm}(V_\lambda^\mu) = \partial M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}$ est sans poids 0 et -1. D'après le théorème 3.13., on obtient une action de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$ sur le motif intérieur $Gr_0 M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}$.

Dans le but de définir des composantes isotypiques du motif intérieur, intéressons-nous à l'action de l'algèbre de Hecke sur les réalisations du motif intérieur.

Soient $\overline{E}$ une clôture algébrique de $E(G,X)$ et B un corps de coefficients contenant E_{gal}, la clôture galoisienne de E fixée au chapitre 1.

Proposition 5.2. *Sous les hypothèses précédentes, on a des isomorphismes*

$$(H_!^n(\mathcal{A}^r(\mathbb{C}), \mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} \simeq (H_!^{n-p}(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)),$$

$$(H_!^n(\mathcal{A}^r_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_l) \otimes_{\mathbb{Q}} B)^{e_\lambda} \simeq (H_!^{n-p}(S_{\overline{E}}, \mu_l(V_\lambda)).$$

Démonstration. Cela découle de la proposition 4.3. et de la remarque 4.4. pour la version de Hodge. La version l-adique s'obtient par les mêmes arguments. □

On renvoie au troisième chapitre pour les définitions des réalisations.

Proposition 5.3. *Les réalisations l-adique R_l ou de Hodge R_h de la partie e_λ du motif intérieur de $\mathcal{A}^r$ sont*

$$R_h(Gr_0 M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}) = H_!^{2g}(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))[-2g-p]$$

$$R_l(Gr_0 M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}) = H_!^{2g}(S_{\overline{E}}, \mu_l(V_\lambda))[-2g-p].$$

Démonstration. Nous avons vu avec le théorème 3.14. que le motif intérieur se réalisait sur la cohomologie intérieure. On utilise ensuite la proposition 5.2. et le théorème d'annulation de Saper (théorème 5 de [33]). Le caractère λ étant régulier, les groupes $H^i(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ sont nuls pour $i < 2g$. Par dualité, les groupes $H^i_c(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ sont nuls pour $i > 2g$.

Ainsi les groupes de cohomologie intérieure $H^i_!(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ sont nuls pour $i \neq 2g$. □

Le théorème suivant est énoncé au chapitre 2 page 62 de [18].

Théorème 5.4. *Soit B un corps contenant E_{gal}. Alors le $\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K) \otimes_E B$-module $H^{2g}_!(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda))$ est semi-simple.*

Démonstration. La preuve est donnée à la section 4.3.5. du chapitre 3 de [18]. □

On considère toujours B un corps contenant E_{gal}. On notera $R(\mathfrak{H})$ l'image par la réalisation de Hodge de l'algèbre de Hecke $\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$ dans l'algèbre des endomorphismes de la cohomologie intérieure de S en degré $2g$.

Corollaire 5.5. *La B-algèbre $R(\mathfrak{H}) \otimes_E B$ est semi-simple.*

Démonstration. Cela découle du théorème précédent et de la proposition 3. du §5.1. page 46 de [5]. □

Les classes d'isomorphisme de $R(\mathfrak{H}) \otimes_E B$-module simple à droite sont donc en bijection avec les classes d'isomorphisme d'idéaux à droite minimaux. Ces idéaux sont engendrés par des idempotents.

Soit Y_{π_f} un tel idéal. Soit $e_{\pi_f} \in R(\mathfrak{H}(G(\mathbb{A}_f), K) \otimes_E B$ l'idempotent qui l'engendre.

Définition 5.6. *On définit la structure de Hodge associée à Y_{π_f} comme étant*

$$W(\pi_f) = Hom_{R(\mathfrak{H}(K, G(\mathbb{A}_f)) \otimes_E B}(Y_{\pi_f}, H^{2g}_!(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)))$$

Autrement dit, on a (voir par exemple la proposition 5.4. de [43])

$$W(\pi_f) = H^{2g}_!(S(\mathbb{C}), \mu(V_\lambda)).e_{\pi_f}.$$

L'idempotent e_{π_f} de $R(\mathfrak{H}) \otimes_E B$ ne peut être relevé, à priori, en un cycle qui soit idempotent modulo équivalence rationnelle, c'est-à-dire en un idempotent de la catégorie des motifs de Chow. C'est la raison pour laquelle on considère $Gr_0M_{gm}(V_\lambda^\mu)'$ le motif homologique associé au motif de Chow $Gr_0M_{gm}(V_\lambda^\mu) = Gr_0M_{gm}(\mathcal{A}^r)^{e_\lambda}$.

La catégorie des motifs homologiques est construite dans le paragraphe 4.1. du chapitre 4 de [3]. Elle est notée $M_{hom}(k)_B$.

Définition 5.7. *On définit le motif associé à Y_{π_f} comme étant l'image par l'idempotent $e_{\pi_f} \in R(\mathfrak{H}) \otimes_E B$ du motif homologique $Gr_0M_{gm}(V_\lambda^\mu)' \in M_{hom}(k)_B$ associé à la partie e_λ du motif intérieur de $\mathcal{A}^r$. On le note $\mathcal{W}(\pi_f)$.*

Théorème 5.8. *Les réalisations de $\mathcal{W}(\pi_f)$ sont concentrés en degré cohomologique $p+2g$ et sont égales à $W(\pi_f)$ en réalisation de Hodge.*

Démonstration. Cela découle de la construction précédente et de la proposition 5.3. $\square$

Bibliographie

[1] G. Ancona. *Décomposition du motif d'un schéma abélien universel.* PhD thesis, Université Paris 13, 2012.

[2] G. Ancona. Degeneration of Hodge structures over Picard modular surfaces. arXiv : 1403.5187v2 [math.AG], mar 2014.

[3] Y. André. *Une introduction aux motifs.* Soc. Math. France, 2004.

[4] M. V. Bondarko. Weight structures vs. t-strucutres ; weight filtrations, spectral sequences, and complexes (for motives and in general). *Journal of K-theory*, 6 :387–504, 2010.

[5] N. Bourbaki. *Eléments de mathématique. Fascicule XXIII. Livre II : Algèbre. Chapitre 8 : Modules et anneaux semi-simples.* Hermann, Paris, 1958.

[6] J. I. Burgos and J. Wildeshaus. Hodge modules on Shimura varieties and their higher direct images in the Baily-Borel compactification. *Ann. Scient. ENS*, 37 :363–413, 2004.

[7] L. Clozel. Motifs et formes automorphes : applications du principe de fonctorialité. In J. Milne L. Clozel, editor, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions*, volume 1, pages 77–159. Acad. Press, 1990.

[8] A. Cortella. *Le principe de Hasse pour les similitudes de formes quadratiques et hermitiennes.* PhD thesis, Université de Franche-Comté, 1992.

[9] P. Deligne. Formes modulaires et représentations l-adiques. *Séminaire Bourbaki*, 11 :139–172, 1968-1969.

[10] P. Deligne. Théorie de Hodge : II. *Publications mathématiques de l'IHES*, 40 :5–57, 1971.

[11] P. Deligne. La conjecture de Weil : I. *Publications mathématiques de l'IHES*, 43 :273–307, 1974.

[12] P. Deligne. La conjecture de Weil : II. *Publications mathématiques de l'IHES*, 52 :137–252, 1980.

[13] C. Deninger and J. Murre. Decomposition of abelian schemes and the Fourier transform. *Journal für die reine and angewandte Mathematik*, 422 :201–219, 1991.

[14] B. Dodson. The structure of Galois groups of CM-fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 283 :1–32, 1984.

[15] T. Ekedahl. On the adic formalism. In P. Cartier et al., editor, *The Grothendieck festschrift*, pages 197–218. Birkhäuser, Boston, 1990.

[16] G. Chenevier et J. Lannes. Formes automorphes et réseaux unimodulaires pairs. http ://gaetan.chenevier.perso.math.cnrs.fr.

[17] B. Brent Gordon. Canonical models of Picard modular surfaces. In D. Ramakrishnan R. P. Langlands, editor, *The zeta functions of Picard modular surfaces*, pages 1–29. Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, 1992.

[18] G. Harder. Cohomology of arithmetic groups. http ://www.math.uni-bonn.de/people/harder/Manuscripts/buch/.

[19] A. Huber. *Mixed motives and their realization in derived categories*, volume 1604 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer Verlag, 1995.

[20] A. Huber. Realization of Voevodsky's motives. *J. of Alg. Geom.*, 9 :755–799, 2000.

[21] A. Huber. Corrigendum to "Realization of Voevodsky's motives". *J. of Alg. Geom.*, 13 :195–207, 2004.

[22] J. E. Humphreys. *Linear algebraic groups*. Springer-Verlag, New York Berlin Heidelberg, 1975.

[23] D. Hébert. Complexes de poids, dualité et motifs de Beilinson. arXiv : 1010.5469 [math.AG], 2010.

[24] D. Hébert. Structure de poids à la Bondarko sur les motifs de Beilinson. *Compositio Math.*, 147 :1447–1462, 2011.

[25] G. Kings. Higher regulators, Hilbert modular surfaces, and special values of L-functions. *Duke Math. J.*, 92 :61–127, 1998.

[26] K. W. Lan. *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*. PhD thesis, Harvard university, 2008.

[27] M. Levine. Six lectures on motives. In J.-B. Bost and J.-M. Fontaine, editors, *Autour des motifs-Ecole d'été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres. Vol. II*. Soc. Math. France, 2013.

[28] J. Milne. Introduction to Shimura varieties. In J. Arthur and R. Kottwitz, editors, *Harmonic analysis, the trace formula and Shimura varieties*, pages 265–378. Amer. Math. Soc., Clay Math. Inst., 2005.

[29] O. T. O'Meara. *Introduction to quadratic forms.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.

[30] C. Peters and J. H. M. Steenbrink. *Mixed Hodge structures.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2008.

[31] R. Pink. *Arithmetical compactification of mixed Shimura varieties.* PhD thesis, Bonner Mathematische Schriften, 1989.

[32] R. Pink. On l-adic sheaves on Shimura varieties and their direct images in the Bailey-Borel compactification. *Math. Ann.*, 292 :197–240, 1992.

[33] L. Saper. L-modules and the conjecture of Rapoport and Goresky-MacPherson. In *Automorphic forms. I*, pages 319–334. Astérisque, 2005.

[34] A.J. Scholl. Motives for modular forms. *Inv. Math*, 100 :419–430, 1990.

[35] G. Warner. *Harmonic analysis on semi-simple Lie groups II.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1972.

[36] J. Wildeshaus. *Realizations of Polylogarithms.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997.

[37] J. Wildeshaus. Mixed sheaves on Shimura varieties and their higher direct images in toroidal compactifications. *J. Algebraic Geom*, 9(2) :323–353, 2000.

[38] J. Wildeshaus. The boundary motive : definition and basic properties. *Compositio Math.*, 142 :631–656, 2006.

[39] J. Wildeshaus. On the boundary motive of a Shimura variety. *Compositio Math.*, 143 :959–985, 2007.

[40] J. Wildeshaus. Chow motives without projectivity. *Compositio Math.*, 145 :1196–1226, 2009.

[41] J. Wildeshaus. On the interior motive of certain Shimura varieties : the case of Hilbert-Blumenthal varieties. *Int. Math. Res. Not.*, 2012 :2321–2355, 2012.

[42] J. Wildeshaus. Boundary motive, relative motives and extensions of motives. In J.-B. Bost and J.-M. Fontaine, editors, *Autour des motifs-Ecole d'été franco-asiatique de géométrie algébrique et de théorie des nombres. Vol. II.* Soc. Math. France, 2013.

[43] J. Wildeshaus. On the interior motive of certain Shimura varieties : the case of Picard surfaces. *Manuscripta Math.*, 148 :351–377, 2015.