UNIVERSITÉ PARIS 13

École doctorale Galilée

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications, UMR 7539

Thèse

presentée et soutenue publiquement par

Shinan LIU

le 28 septembre, 2018

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : Mathématiques

Modèle local des schémas de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$

Co-directeur de thèse : **Benoît STROH**
Co-directeur de thèse : **Pascal BOYER**

Membres du Jury

Mme. Anne-Marie AUBERT	Examinatrice
M. Pascal BOYER	Co-directeur de thèse
M. Christophe CORNUT	Examinateur
M. Laurent FARGUES	Rapporteur
Mme. Sophie MOREL	Rapporteuse absent à la soutenance
M. Cédric PEPIN	Examinateur
M. Benoît STROH	Co-directeur de thèse

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la mauvaise réduction de variétés de Shimura. Plus précisément, nous construisons un modèle local des schémas de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$ sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ lorsque p est non-ramifié dans le corps totalement réel, où q est le cardinal résiduel au-dessus de p. Notre outil principal est une variante sur le petit topos de Zariski du complexe de Lie anneau-équivariant ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ défini par Illusie dans sa thèse, où A est un anneau commutatif et G est un schéma en A-modules. Nous montrons aussi une compatibilité entre le complexe de Lie de G équivariant par l'anneau A, et celui équivariant par le monoïde multiplicatif sous-jacent de A. Ce complexe nous permet de calculer le complexe de Lie $\mathbb{F}_q$-équivariant d'un schéma en groupes de Raynaud, donc de relier le modèle entier et le modèle local.

Abstract

In this thesis, we study the bad reduction of Shimura varieties. More precisely, we construct a local model of Hilbert-Siegel moduli schemes in level $\Gamma_1(p)$ over $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ when p is unramified in the totally real field, where q is the residue cardinality over p. Our main tool is a variant over the small Zariski topos of the ring-equivariant Lie complex ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ defined by Illusie in his thesis, where A is a commutative ring and G is a scheme of A-modules. We also prove a compatibility result between the ring-equivariant Lie complex and the Lie complex equivariant by the multiplicative monoid underlying this ring. With this complex, we calculate the $\mathbb{F}_q$-equivariant Lie complex of a Raynaud group scheme, then relate the integral model and the local model.

Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse Benoît Stroh pour diriger ma thèse, et pour toutes les discussions et soutien pendant ces cinq ans. Je lui remercie pour m'introduire dans ce domaine de recherche, et pour avoir consacré tellement de temps à discuter avec moi. J'ai appris beaucoup de choses dans ces discussions– notamment les variétés de Shimura et la géométrie arithmétique–ce que je n'avais jamais vu avant. Je lui remercie également pour avoir eu la patience quand j'étais bloqué dans ma recherche, et pour m'encourager de trouver mon propre chemin.

Je remercie mon co-directeur de thèse Pascal Boyer pour ses aides, qui sont également importantes, dans l'administration et l'enseignement à Université Paris 13.

Je suis honoré d'avoir Laurent Fargues et Sophie Morel comme mes rapporteurs. Je les remercie pour avoir rapporté cette thèse technique. Je remercie Anne-Marie Aubert, Christophe Cornut et Cédric Pépin d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie sincèrement Monsieur Luc Illusie pour son attention portée à mon travail. Il est évident que sa théorie sur le complexe cotangent a de l'importance fondamentale pour ma thèse. Je lui remercie beaucoup pour avoir répondu mes questions et pour ses remarques très inspirantes sur mes manuscrits précédents.

Je remercie Jacques Tilouine pour m'avoir accueilli au LAGA et pour les discussions mathématiques pendant ces quatre ans. Son cours sur la théorie de Hida en 2016 m'a ouvert la porte à la théorie des nombres.

Je remercie Laurent Clozel pour avoir dirigé mon mémoire de M2 et pour m'avoir introduit la conjecture de Langlands. Je lui remercie pour m'encourager de continuer dans ce domaine.

Je souhaite remercier Dennis Gaitsgory, même s'il ne peut-être connaît pas mon nom, pour son exposé à IHES en juin 2016 sur un article de Bezrukavnikov-Braverman. Cet exposé m'avait beaucoup aidé quand j'essayais d'apprendre Langlands géométrique, et il était clé pour mes études.

Je remercie sincèrement Liang Xiao pour les discussions mathématiques et pour son encouragement. J'ai appris beaucoup de choses en discutant avec lui, en particulier j'ai compris quelques détails clés dans les articles de Xinwen Zhu, qui m'ont été précieux. Je remercie Xinwen Zhu pour répondre mes questions et pour ses articles sur le modèle local.

Je souhaite remercier mes professeurs à Université Tsinghua, notamment Zhi-Ying Wen et Jia-Yan Yao, pour m'avoir proposé de poursuivre mes études en France, et pour leur attention et encouragement depuis toujours. Je veux aussi dire merci à mes professeurs à ENS, en particulier à Monsieur Olivier Debarre pour son aide.

Je souhaite remercier tous les professeurs et collègues de LAGA que j'ai rencontré dans mon enseignement. Sans eux, je ne peux pas bien adapter à mon travail en France. Je n'oublie pas non plus nos secrétaires Isabelle et Yolande.

Je veux remercier tous mes amis à Paris pour les bons moments qu'on a partagé. Je pense à Huan Chen, Vincent de Daruvar, Yiwen Ding, Ziyang Gao, Zhizhong Huang, Jie Lin, Cédric Pépin, Zicheng Qian, Peng Shan, Haoran Wang, Song-Yan Xie, Cong Xue, Daxin Xu, Disheng Xu, Lizao Ye, Xiaoyu Zhang, Zhiyuan Zhang, Yihang Zhu, avec qui j'ai aussi discuté et appris des belles math. Mais cette liste n'est bien sûr pas exhaustive.

Enfin, j'exprime ma reconnaissance au fond du cœur à mes parents pour leur soutien constant.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1

Deux sujets sont abordés dans cette thèse. Premièrement nous étudions la mauvaise réduction de variété de Shimura. Plus précisément nous construisons un modèle entier et un modèle local des variétés de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$ lorsque p est non-ramifié dans le corps totalement réel, généralisant le travail antérieur de Haines et Stroh sur les variétés de Siegel. En même temps nous définissons une variante du complexe de Lie d'un schéma en modules construit par Illusie dans sa thèse. Ce complexe est un outil indispensable pour notre construction du modèle local mais nous espérons aussi qu'il trouvera des applications dans différents problèmes de déformation équivariante.

La mauvaise réduction des variétés de Shimura a été étudiée par beaucoup d'auteurs. Une attention toute particulière est portée aux niveaux parahoriques parce qu'une large classe de modèles entiers est construite dans [RZ]. Un des problèmes centraux est alors le calcul de la fonction zêta. Le *modèle local* est utile pour ce problème car il possède le même faisceau de cycles proches—la donnée locale clé de la fonction zêta. La théorie des modèles locaux parahoriques est établie par [dJ], [DP], [RZ], plus récemment par [PZ] en toute généralité via la théorie des groupes.

Au contraire, la théorie des modèles entiers et modèles locaux aux niveaux plus profonds est moins développée à présent. Dans le cas de niveau $\Gamma_1(p)$ (c'est-à-dire que le sous-groupe de niveau est le radical pro-unipotent d'un sous-groupe d'Iwahori), des modèles entiers sont construits et étudiés par [Pap1] pour les schémas de Hilbert-Blumenthal, et par [HR] pour les variétés de Shimura de type Harris-Taylor. Plus récemment dans le travail [HS], les auteurs ont étudié les variétés de Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$; ils ont établi une théorie du modèle local pour ces variétés. Les modèles locaux en niveau $\Gamma_1(p)$ pour les variétés de Siegel (et certaines variétés de Shimura unitaires) sont aussi considérés par [Sh].

1.2

Dans cette thèse nous tentons également d'étudier des niveaux non-parahoriques. Plus précisément nous généralisons la théorie de [HS] aux variétés de Hilbert-Siegel, qui paramètrent certains schémas abéliens munis d'une action d'un ordre d'un corps totalement réel. Pour décrire les difficultés, nous rappelons d'abord la construction du modèle entier et modèle local de [HS]. Notons $Y_0/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ le schéma de Siegel de niveau $\Gamma_0(p)$. Par définition Y_0 est le schéma de module des familles

$$(A, H_1 \subset ... \subset H_g),$$

où A est un schéma abélien de genre g (avec d'autres structures qui garantissent la représentabilité), et H_i est un sous-groupe fini plat isotrope de $A[p]$, tel que $\operatorname{rg}(H_i) = p^i$ pour tout i. Soit $S/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ un schéma, et $(A, H_1 \subset ... \subset H_g)$ un S-point de Y_0. Alors pour tout i, le schéma en groupes H_i/H_{i-1} est de rang p, donc classifié par Oort-Tate ([OT]). Pour simplifier les notations on note $H = H_i/H_{i-1}$. D'après [OT], le schéma en groupes H admet un paramètre $(\mathcal{L}, a, b)$, où $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur S, et

$$a : \mathcal{L}^{\otimes p} \to \mathcal{L} \qquad b : \mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\otimes p}$$

sont des morphismes de fibrés en droites tel que $ab = w_p$. (Ici $w_p \in p\mathbb{Z}_p^\times$ est un élément particulier défini dans [OT].) On appelle un *générateur d'Oort-Tate* de H un morphisme de fibré en droites

$$z : \mathcal{L} \to \mathcal{O}_S$$

tel que

$$z^{\otimes(p-1)} = a.$$

(Voir §3.1 pour une explication de cette notion et sa généralisation sur un schéma en groupes de Raynaud.) Le modèle entier $Y_1/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ de niveau $\Gamma_1(p)$ est défini comme le schéma de module des systèmes

$$(A, H_1 \subset ... \subset H_g, z_1, ..., z_g)$$

où z_i est un générateur d'Oort-Tate de H_i/H_{i-1}. (Il est également nécessaire de choisir des générateurs d'Oort-Tate pour les duaux de Cartier $(H_i/H_{i-1})^\vee$, *cf.* [HS] ou la définition 3.8 dans §3.2 de cette thèse.)

Pour décrire les modèles locaux, on note d'abord $M_0/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_p$ le modèle local en niveau $\Gamma_0(p)$, *cf.* [dJ], [RZ]. Par définition M_0 est le schéma de module des systèmes

$$(W_0, ..., W_g),$$

où $W_i \subset \mathcal{O}_S^{2g}$ est un sous-fibré vectoriel de rang g (plus certaines conditions d'isotropie), tel que la matrice $\mathrm{diag}(1, ..., p, ..., 1)$ avec p en la i-ième place envoie W_i dans W_{i-1}. Dans ce cas il existe un *diagramme de modèle local*

$$Y_0 \xleftarrow{\pi} Z_0 \xrightarrow{f} M_0,$$

où π et f sont lisses de même dimension relative. Un point $(A, H_1, ..., H_g)$ de Y_0 correspond via ce diagramme au point $(\omega_A, \omega_{A/H_1}, ..., \omega_{A/H_g})$ de M_0 en choisissant une trivialisation de $\mathcal{H}^1(A/H_i)$.

La construction par [HS] sur le modèle local de niveau $\Gamma_1(p)$ dépend de la théorie du complexe cotangent ([Ill1]). Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_p$, et

$$(A, H_1 \subset ... \subset H_g, z_1, ..., z_g)$$

un S-point de Y_1. On note $H = H_i/H_{i-1}, z = z_i$, $(\mathcal{L}, a, b)$ le paramètre d'Oort-Tate de H comme précédemment, et $B = A/H_{i-1}$ le schéma abélien. D'après [OT], l'algèbre affine de H est canoniquement isomorphe à

$$\bigoplus_{r=0}^{p-1} \mathcal{L}^{\otimes r},$$

où la multiplication est définie par le paramètre a. Si l'on note X le schéma affine sur S défini par le faisceau d'algèbres $\underline{\mathrm{Sym}}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{L}$, alors il existe une immersion fermée naturelle

$$i : H \hookrightarrow X.$$

On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de i, et e la section neutre de H. On considère le complexe de co-Lie ℓ_H de H, *cf.* [Ill1]. La théorie de [Ill1] implique qu'il existe deux isomorphismes canoniques dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$:

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^* i^* \Omega_X] \cong \ell_H \cong [\omega_{B/H} \to \omega_B]. \qquad (*)$$

Le premier isomorphisme existe parce que X est lisse et i est une immersion régulière, et le deuxième isomorphisme est un corollaire du triangle fondamental du complexe cotangent.

L'observation de [HS] est que, premièrement il existe un isomorphisme naturel de complexe

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^* i^* \Omega_X] \cong [\mathcal{L}^{\otimes p} \xrightarrow{a} \mathcal{L}];$$

deuxièmement par le diagramme de modèle local, on trouve que le complexe

$$[\omega_{B/H} \to \omega_B]$$

descend sur M_0. Le déterminant de complexe parfait ([KM]) nous fournit, d'après $(*)$, un isomorphisme de fibré en droites

$$\det[\mathcal{L}^{\otimes p} \xrightarrow{a} \mathcal{L}] \cong \det[\omega_{B/H} \xrightarrow{d} \omega_B],$$

qui commute avec les sections canoniques, i.e. les sections induites par a et d, respectivement. La définition ([HS]) de modèle local de niveau $\Gamma_1(p)$ est de la manière suivante : d'abord on définit un $\mathbb{G}_m^g$-torseur M_0^+ sur M_0, qui est le schéma de module des trivialisations

$$v_i : \det[W_i \xrightarrow{d_i} W_{i-1}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S, \qquad i = 1, ..., g;$$

puis on définit un schéma M_1^+ fini sur M_0^+ par le système d'équations de variables s_i :

$$s_i^{p-1} = v_i d_i, \qquad i = 1, ..., g,$$

où on note (par l'abus de notation) d_i la section canonique du fibré en droites $\det[W_i \to W_{i-1}]$. On doit aussi considérer les équations associées aux sections duales des d_i, *cf.* §5.3, la définition 5.7. Le schéma M_1^+ est un modèle local de Y_1 : il existe un diagramme de modèle local

$$Y_1 \xleftarrow{\pi'} Z_1^+ \xrightarrow{f'} M_1^+,$$

où π' et f' sont lisses tel que $\dim M_1^+ = \dim Y_1 + g$. (Ici π' et f' n'ont pas la même dimension relative, néanmoins c'est suffisant pour comparer les cycles proches.)

1.3

Le nouveau phénomène pour les schémas de Hilbert-Siegel est la $\mathbb{F}_q$-action. Plus précisément, soit $F/\mathbb{Q}$ un corps totalement réel degré n, $\mathcal{O}_F$ son anneau des entiers, et p un nombre premier non-ramifié dans F. Dans cette introduction et la plupart de cette thèse, on suppose que p est inerte (avec le cas non-ramifié général traité dans §5.4). On note $q = p^n$. Comme le modèle local M_1^+ ne sera construit que sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$, on suppose que S est un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$. La définition du schéma de Hilbert-Siegel $Y_0/\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_p$ (*resp.* $Y_1/\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$) en niveau $\Gamma_0(p)$ (*resp.* $\Gamma_1(p)$) est exactement comme les précédentes, sauf qu'on suppose que $\operatorname{rg} H_i = q^i$, et on ajoute une $\mathcal{O}_F$-action sur A et (H_i) avec la condition de Kottwitz. Soit $(A, H_1 \subset ... \subset H_g)$ un S-point de Y_0. Alors $H = H_i/H_{i-1}$ est un schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels de dimension 1 qui est classifié par Raynaud ([Ray]). D'après [Ray], H admet un paramètre $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)_{k=0,...,n-1}$, où pour tout k, $\mathcal{L}_k$ est un fibré en droites sur S, et

$$a_k : \mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_k \qquad b_k : \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p}$$

sont des morphismes de fibrés en droites tels que $a_k b_k = w_p$. L'algèbre affine de H est isomorphe à

$$\bigoplus_{0 \le r_k \le p-1} \Big(\bigotimes_{k=0}^{n-1} \mathcal{L}_k^{\otimes r_k}\Big).$$

On définit un schéma X par son algèbre affine $\underline{\mathrm{Sym}}_{\mathcal{O}_S}(\bigoplus_{k=0}^{n-1}\mathcal{L}_k)$. On obtient une immersion naturelle $i : H \hookrightarrow X$, et on note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de i. Dans ce cas, le complexe

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_X]$$

est muni d'une $\mathbb{F}_q^\times$-action car $\mathbb{F}_q^\times$ agit sur X et i est équivariante, et les paramètres de Raynaud a_k de H se trouvent comme les *composantes* $\mathbb{F}_q^\times$*-isotypiques* de ce complexe (*cf.* §4.1, le lemme 4.1).

Les difficultés apparaissent quand on considère les actions sur d'autres objets d'un diagramme analogue à $(*)$, i.e. on résout H par un schéma abélien B d'une façon $\mathcal{O}_F$-équivariante. En fait,

(1) il faut définir une «$\mathbb{F}_q^\times$-action» sur ℓ_H et la «$\mathbb{F}_q^\times$-équivariance» des isomorphismes de $(*)$ dans la catégorie dérivée ;

(2) il n'existe pas de $\mathbb{F}_q^\times$-action évidente sur le complexe $[\omega_{B/H} \to \omega_B]$, parce que $\mathbb{F}_q^\times$ n'agit pas sur le schéma abélien B.

On peut résoudre le problème (1) par le complexe cotangent $\mathbb{F}_q^\times$-équivariant défini dans [Ill1]. En fait, dans [Ill1] il existe un objet [1]

$$\underline{\ell}_H^{\mathbb{F}_q^\times} \in \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$$

associé à H, qui est un relèvement de $\ell_H \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$, où on note $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times]$ l'algèbre de groupe de $\mathbb{F}_q^\times$ sur $\mathbb{Z}$, S_{fpqc} le *grand* site fpqc de S, et $\otimes = \otimes_{\mathbb{Z}}$. Comme S est au-dessus de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_q$, les projecteurs dans $\mathbb{Z}_q[\mathbb{F}_q^\times]$ définissent les composantes $\mathbb{F}_q^\times$-isotypiques de $\underline{\ell}_H^{\mathbb{F}_q^\times}$. Par [Ill1] on obtient un isomorphisme canonique

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_X] \cong \underline{\ell}_H^{\mathbb{F}_q^\times}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$, qui induit des isomorphismes sur les composantes $\mathbb{F}_q^\times$-isotypiques.

Pour le problème (2), on peut considérer la $\mathcal{O}_F$-action sur $[\omega_{B/H} \to \omega_B]$. Dans [Ill1] est défini un autre complexe équivariant : le complexe de Lie d'un schéma en $\mathcal{O}_F$-modules. Pour le schéma en groupes H c'est un relèvement

$$_{\mathcal{O}_F}\underline{\ell}_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$$

de $\ell_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$, où $\ell_H^\vee = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\ell_H, \mathcal{O}_S)$ est le complexe de Lie de H. Il existe un isomorphisme canonique

$$_{\mathcal{O}_F}\underline{\ell}_H^\vee \cong [\omega_{B/H} \to \omega_B]^\vee$$

1. La définition de [Ill1] est plus générale et vaut pour tout schéma en groupes muni d'une action d'un monoïde, *cf.* §4.2.1. La même remarque vaut pour le paragraphe suivant.

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$, qui induit des isomorphismes de composantes $\mathcal{O}_F$-isotypiques (c'est bien défini car $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_q = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{Z}_q$).

La question de retrouver les paramètres de Raynaud de H dans $[\omega_{B/H} \to \omega_B]$ se réduit à trouver un isomorphisme entre les composantes isotypiques de $\underline{\ell}_H^{\mathbb{F}_q^\times}$ et ${}_{\mathcal{O}_F}\underline{\ell}_H^\vee$. Comme l'action de $\mathcal{O}_F$ sur H se descend à $\mathbb{F}_q$, il est naturel de considérer le complexe de Lie de schéma en $\mathbb{F}_q$-modules ([Ill1])

$$ {}_{\mathbb{F}_q}\underline{\ell}_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) $$

associé à H. Grâce aux morphismes évidents

$$ \mathbb{F}_q^\times \hookrightarrow \mathbb{F}_q \twoheadleftarrow \mathcal{O}_F, $$

où à gauche c'est un morphisme de monoïde et à droite c'est une surjection d'anneau, on peut essayer de relier les composantes isotypiques de $\underline{\ell}_H^{\mathbb{F}_q^\times}$ et ${}_{\mathcal{O}_F}\underline{\ell}_H^\vee$ via celles pour ${}_{\mathbb{F}_q}\underline{\ell}_H^\vee$. On remarque que

$$ \mathbb{F}_q \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}} $$

est un dg-anneau (§4.3), dont la définition dépend d'un choix d'une résolution de $\mathbb{F}_q$ ou $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ par un dg-anneau plat. On peut bien sûr calculer $\mathbb{F}_q \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ en utilisant la résolution évidente de $\mathbb{F}_q$:

$$ 0 \to \mathbb{Z}_q \xrightarrow{p} \mathbb{Z}_q \to \mathbb{F}_q \to 0; $$

néanmoins, il ne nous semble pas évident d'en déduire une notion de composante isotypique qui soit compatible avec celle dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$. On a donc fait le choix de remplacer partout le faisceau structurel $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ du grand site fpqc par le faisceau structurel $\mathcal{O}_S$ du petit site de Zariski, en vérifiant que les constructions de [Ill1] s'adaptent bien à ce nouveau cas. On obtient la proposition suivante (*cf.* §4.7, la proposition 4.18) :

Proposition 1.1. *Soit A un anneau commutatif, S un schéma* plat *sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. On note $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ (*resp. *$\mathcal{O}_S$) l'anneau structurel du grand site fpqc (*resp. *petit site de Zariski) de S. Alors la construction de [Ill1] sur le complexe*

$$ {}_A\underline{\ell}_G^\vee \in \mathrm{D^b}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) $$

reste valable si l'on remplace $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ par $\mathcal{O}_S$. On obtient un objet

$$ {}_A\ell_G^\vee \in \mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S) $$

qui est un relèvement de $\ell_G^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$.

On remarque que la platitude de S sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ implique la platitude de $\mathcal{O}_S$, donc l'isomorphisme (*cf.* §4.3)

$$A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_S \cong A \otimes \mathcal{O}_S.$$

Cela n'implique pas la platitude de $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ parce que S_{fpqc} est un grand site. Nous renvoyons le lecteur au premier paragraphe de §4.2.2 pour savoir pourquoi un grand site est nécessaire dans [Ill1]. Dans l'application au modèle local, on prend $S = Y_{0,\mathbb{Z}_q}, A = \mathbb{F}_q$, et $G = H$ le schéma en groupes de Raynaud universel sur S. On obtient le complexe

$${}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S).$$

Comme $\mathbb{F}_q \otimes \mathbb{Z}_q = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_q$ et S est au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, il existe une notion naturelle de composante $\mathbb{F}_q$-isotypique de ${}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee$, qui est compatible avec celle dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^\times] \otimes \mathcal{O}_S)$, *cf.* §4.2.1.

On obtient aussi la proposition suivante (*cf.* §4.9, la proposition 4.27) sur la compatibilité des complexes de Lie équivariants par un anneau et par le monoïde multiplicatif sous-jacent. Cette proposition nous permet de relier les composantes isotypiques de ${}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee$ et $\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}$, où $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$ est le monoïde multiplicatif sous-jacent de $\mathbb{F}_q$. (Le lecteur trouvera dans §4.2.1 pourquoi on utilise $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$ au lieu de $\mathbb{F}_q^\times$.)

Proposition 1.2. *Soit A un anneau commutatif, S un schéma plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, *et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. On note A^{mon} le monoïde multiplicatif sous-jacent de A, et $\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}]$ la $\mathbb{Z}$-algèbre libre engendrée par A^{mon}. On note*

$$\mathrm{Com} : \mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$$

le foncteur induit par le morphisme d'anneau évident $\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \to A$. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Com}({}_A\ell_G^\vee) \cong \ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$, *où $\ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$ est le complexe de Lie A^{mon}-équivariant de G défini dans §4.8.*

On remarque que le même énoncé reste valable pour les complexes ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ et $\underline{\ell}_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$ définis dans [Ill1]. Cet isomorphisme, bien que d'apparence évidente, n'est pas énoncé dans [Ill1], et sa démonstration demande de se plonger dans les définitions compliquées de ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ par [Ill1].

On peut déduire le corollaire suivant (*cf.* §5.2, le corollaire 5.5, et §4.2.1 pour une stratégie). Ce corollaire est une généralisation de $(*)$ au cas de Hilbert-Siegel, donc nous permet de construire le modèle local par la même méthode que [HS] (*cf.* §5.3).

Corollaire 1.3. *Soit S un schéma sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ *qui est* plat *sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, et H/S un schéma en groupe de Raynaud de paramètre $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)$. Soit*

$$0 \to H \to B \to B/H \to 0$$

une résolution équivariante de H par un $\mathcal{O}_F$-schéma abélien B, avec la condition de Kottwitz sur B et B/H. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$[\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_k} \mathcal{L}_k] \cong e_k[\omega_{B/H} \to \omega_B]$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{O}_S)$*, où pour $k = 0, ..., n-1$, e_k est le projecteur sur la k-ième composante isotypique d'un objet de* $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S)$*,* cf. *§5.2.1.*

Nous rajoutons dans §4.2.2 des sorites sur le complexe ${}_A\underline{\ell}_G^{\vee}$ d'Illusie. Il nous semble que ce complexe est un objet non-trivial et que sa généralisation au topos de Zariski n'est pas tout à fait évidente. Nous croyons néanmoins que cette généralisation était déjà connue par Illusie.

Le théorème suivant est notre théorème principal sur le diagramme de modèle local pour les schémas de Hilbert-Siegel (*cf.* §5.3, le théorème 5.8).

Théorème 1.4. *Notons $Y_1/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ le schéma de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$. Alors Y_1 admet un modèle local $M_1^+/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ défini par les définitions 5.6, 5.7 de §5.3. Il existe un diagramme de modèle local*

$$Y_1 \xleftarrow{\pi'} Z_1^+ \xrightarrow{f'} M_1^+$$

tel que les morphismes π' et f' sont lisses, et $\dim M_1^+ = \dim Y_1 + ng$.

Chapitre 2

Schémas de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_0(p)$

2.1 Le schéma Y_0

Dans cette section, on définit le schéma de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_0(p)$. Fixons d'abord les notations. Soit n un entier positif. Soit F un corps de nombres totalement réel de degré n sur $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F. Soit p un nombre premier, non-ramifié dans F. Pour simplifier les notations, on suppose d'abord que p est *inerte*, avec le cas général traité en §5.4. Soit $g \geq 1$ un autre entier.

On note $\langle \ , \ \rangle : F^{2g} \times F^{2g} \to F$ la forme symplectique standard sur F^{2g}. Elle est normalisée par $\langle e_i, e_{2g+1-j} \rangle = \delta_{i,j}$ pour tout $i, j \in \{1, ..., 2g\}$, où e_i est le i-ième élément dans la base canonique de F^{2g}. Le groupe de similitudes symplectiques $\mathrm{GSp}_{2g,F}$ est un groupe algébrique sur F, tel que pour toute F-algèbre R,

$$\mathrm{GSp}_{2g,F}(R) = \{(h, c) \in \mathrm{GL}_{2g}(R) \times R^\times | \langle hv, hw \rangle = c\langle v, w \rangle, \forall v, w \in R^{2g}\}.$$

On définit le sous-groupe algébrique $G/\mathbb{Q}$ de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GSp}_{2g,F}$ par

$$G = \{(h, c) \in \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathrm{GSp}_{2g,F} \mid c \in \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}\}.$$

Si l'on note $(\ , \ ) := \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}} \langle \ , \ \rangle$, alors $(\ , \ )$ est une forme $\mathbb{Q}$-bilinéaire sur F^{2g}, et G est le groupe de similitude de $(\ , \ )$.

Soit S un schéma, et A, A' des schémas abéliens sur S. On appelle une quasi-isogénie $f : A \to A'$ au-dessus de S une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$*–isogénie* si le degré de f appartient à $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$. Lorsque $A' = A^\vee$ est le dual de A, on dit que f est une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$*–polarisation* s'il existe de plus $N \in \mathbb{N}^*$ tel que Nf est une polarisation. On note que si f est une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$-isogénie, alors elle induit un isomorphisme de schémas en groupes $f : A[p] \to A'[p]$ sur les p-torsions. On note $\mathrm{End}(A)$ l'anneau des endomorphismes de A. On note $\omega_A = e^*\Omega_{A/S}$ l'algèbre de co-Lie de A, où e la section unité.

On note $(\mathrm{Sch}/\mathbb{Z}_{(p)})$ (*resp.* (Ens)) la catégorie des schémas sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ (*resp.* des ensembles). On note $\mathbb{A}_f^p$ les adèles finies de $\mathbb{Q}$ hors de p, et on fixe un sous-groupe ouvert compact K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$ suffisamment petit.

Dans cette thèse, le bi-foncteur $\otimes_{\mathbb{Z}}$ (*resp.* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}$) de $\mathbb{Z}$–module sera noté par $\otimes$ (*resp.* Hom).

Définition 2.1. On définit le foncteur $Y_0 : (\mathrm{Sch}/\mathbb{Z}_{(p)}) \to (\mathrm{Ens})$, tel que pour tout schéma $S/\mathbb{Z}_{(p)}$, $Y_0(S)$ est égal à l'ensemble des classes d'isomorphismes de $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$, où

- A/S est un schéma abélien de genre ng ;
- $\lambda : A \to A^\vee$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$–polarisation ;
- $\iota : \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \to \mathrm{End}(A) \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est un morphisme d'anneau, tel que pour tout a qui appartient à $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, $\iota(a)$ commute avec λ. On suppose que localement sur S, ω_A est un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ -module libre (avec l'action de $\mathcal{O}_F$ induite par ι).
- $\bar{\eta}$ est une K^p-structure de niveau au sens de Kottwitz. Plus précisément $\bar{\eta}$ est une K^p-orbite de similitudes symplectiques F-linéaires $\eta : F^{2g} \otimes \mathbb{A}_f^p \to H_1^{et}(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f^p)$ qui est aussi $\pi_1(S, \bar{s})$-invariante. Ici $\bar{s}$ est un point géométrique de S, et $H_1^{et}(A_{\bar{s}}, \mathbb{A}_f^p)$ est muni la forme symplectique induite par λ. (Cette notion ne dépend pas du choix de $\bar{s}$ lorsque S est connexe.)
- $H_\bullet = (H_1 \subseteq ... \subseteq H_g)$ est un drapeau de sous-groupes finis plats de $A[p]$ stables par l'action de $\mathcal{O}_F$, tel que $\mathrm{rg}\, H_i = p^{ni}$ pour tout i, et H_g est λ-isotrope. On suppose que localement sur S, ω_{A/H_i} est un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ -module libre pour tout i.

Un isomorphisme f entre $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$ et $(A', \lambda', \iota', \bar{\eta'}, H'_\bullet)$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$–isogénie $f : A \to A'$, telle que

- sur chaque composante connexe de S, on a $\lambda = r \cdot f^\vee \lambda' f$ pour une constante $r \in \mathbb{Z}_{(p)}^\times$;
- pour tout $a \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, $f\iota(a) = \iota'(a) f$;
- $f_* \bar{\eta} = \bar{\eta'}$;
- pour tout i, $f : H_i \to H'_i$ est un isomorphisme de schémas en groupes.

Le foncteur Y_0 est défini dans [RZ] la définition 6.9. Ici on utilise aussi le langage de [Lan]. On remarque que dans [RZ], la condition imposée sur ω_A (*resp.* ω_{A/H_i}) est la condition de déterminant de Kottwitz ([Kot] §5). Elle est équivalente à notre définition. En fait, ici on suppose que S est un schéma sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, donc pour tout point $s \in S$ son corps résiduel $k(s)$ est de caractéristique 0 ou p. Comme p est non-ramifié dans F, alors $\mathcal{O}_F \otimes k(s)$ est une algèbre séparable sur $k(s)$, donc elle est égale à un produit fini d'extensions de $k(s)$. On en déduit facilement que dans ce cas la condition de Kottwitz est équivalente à «localement sur S, ω_A (*resp.* ω_{A/H_i}) est un $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ -module libre».

D'après [RZ], [Kot], le foncteur Y_0 est représentable par un schéma quasi-projectif sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. On le note aussi par Y_0. La fibre générique de Y_0 est la variété de Shimura pour le groupe G de niveau K_pK^p avec K_p le sous-groupe d'Iwahori standard de $G(\mathbb{Q}_p) \subset \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q}_q)$, où $\mathbb{Q}_q$ est l'extension non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ de degré n. On appelle donc Y_0 le schéma de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_0(p)$.

2.2 Le modèle local M_0

2.2.1

Nous rappelons d'abord la notion de chaîne polarisée définie dans [RZ]. On donne une définition équivalente, qui est similaire à la définition dans [dJ] pour les variétés de Siegel. La notion de chaîne polarisée sera utilisée dans la définition du modèle local.

Soit S un schéma sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. Pour tout $\mathcal{O}_S$-module M localement libre de type fini, on note $M^\vee$ le $\mathcal{O}_S$-module $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(M, \mathcal{O}_S)$. La définition suivante est une reformulation de [RZ] la définition 3.14 dans le cas de Hilbert-Siegel.

Définition 2.2. On appelle une chaîne de $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-modules polarisée, ou simplement une *chaîne polarisée* sur S, la donnée

$$M_\bullet = (M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \ldots \leftarrow M_g, q_0, q_g),$$

où

- Pour $i = 0, ..., g$, M_i est un faisceau de $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-modules qui est localement sur S libre de rang $2g$, et le morphisme $M_{i-1} \leftarrow M_i$ est $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-linéaire.
- Pour $j = 0$ ou g, $q_j : M_j \times M_j \to \mathcal{O}_S$ est une forme alternée parfaite, et $q_j(ax, y) = q_j(x, ay)$ pour tout $a \in \mathcal{O}_F$ et $x, y \in M_j$.
- Pour $j = 0$ ou g, en identifiant M_j avec $M_j^\vee$ via q_j, on obtient une chaîne $2g$-périodique

  $$\ldots \leftarrow M_g \simeq M_g^\vee \leftarrow \ldots \leftarrow M_0^\vee \simeq M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \ldots \leftarrow M_g \leftarrow \ldots$$

  On suppose que la composée des flèches dans chaque période est égale à la multiplication par p.
- Pour $i = 1, ..., g$, localement sur S le $\mathcal{O}_F/p \otimes \mathcal{O}_S$-module M_{i-1}/M_i est libre de rang 1.

Exemple 2.3. La chaîne polarisée standard sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ est la chaîne

$$St_\bullet = (St_0 \leftarrow St_1 \leftarrow \ldots \leftarrow St_g, q_0, q_g),$$

où $St_i = \mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ pour tout i, et pour $i = 1, ..., g$ la flèche $St_{i-1} \leftarrow St_i$ est définie par la matrice $\mathrm{diag}(1, ..., p, ..., 1)$ avec p en la i-ième place.

On définit $q_0 = q_g = \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}\langle\ ,\ \rangle$; c'est une forme alternée parfaite sur $\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. En fait, si l'on note $\mathcal{D}_F^{-1}$ la différence inverse de F, alors on a des isomorphismes

$$\mathcal{D}_F^{-1} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F, \mathcal{D}_F^{-1}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F, \mathbb{Z})$$

$$a \mapsto a\cdot \mapsto \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}(a\cdot)$$

Comme p est non-ramifié dans F, on a $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathcal{D}_F^{-1} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$. On en déduit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}, \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow{\mathrm{tr}} \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}, \mathbb{Z}_{(p)}).$$

$$l \mapsto \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}} \circ l$$

La forme q_0 (*resp.* q_g) est égale à la composée de tr avec l'isomorphisme

$$\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_F}(\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}, \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)}),$$

$$x \mapsto \langle x,\ \rangle$$

donc elle est aussi un isomorphisme.

Pour tout schéma S sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, on définit la chaîne polarisée standard sur S par le produit tensoriel $St_\bullet \otimes \mathcal{O}_S$.

Nous proposons un analogue de [dJ] la proposition 3.6 sur la forme standard d'une chaîne polarisée arbitraire. La proposition est démontrée en toute généralité par [RZ] le théorème 3.16, en supposant p localement nilpotent sur S. Cette condition est enlevée par [Pap2] le théorème 2.2 et [Hai] le théorème 6.3. Nous choisissons de réécrire la démonstration en suivant [dJ] parce que nous la trouvons plus élémentaire.

Proposition 2.4. *Soit $M_\bullet$ une chaîne polarisée sur S. Alors localement sur S (pour la topologie de Zariski), $M_\bullet$ est isomorphe à $St_\bullet \otimes \mathcal{O}_S$. De plus, le groupe d'automorphisme de $St_\bullet$ est un schéma en groupes lisse sur $\mathbb{Z}_{(p)}$.*

Démonstration. Pour $j = 0$ ou g, on note q_j la forme alternée sur M_j. D'après le lemme 1.1.4.5 de [Lan] et l'égalité $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_{(p)} = \mathcal{D}_F^{-1} \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$, il existe une unique forme alternée $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-linéaire $q'_j : M_j \times M_j \to \mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$ telle que $q_j = \mathrm{tr}_{F/\mathbb{Q}}\, q'_j$. Alors

$$M' = (M_0 \leftarrow M_1 \leftarrow \ldots \leftarrow M_g, q'_0, q'_g)$$

est un système de $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-modules de type II au sens de [dJ] la definition 3.2. Il suffit de montrer que localement sur S, M' est isomorphe à $\widetilde{St}_\bullet \otimes \mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$, où $\widetilde{St}_\bullet$ est le système de $\mathbb{Z}$–modules de type II standard au sens de [dJ] l'example 3.3.

On peut se réduire à [dJ] la proposition 3.6. Soit s un point de S, $\mathcal{O}_{S,s}$ son anneau local, et $k(s)$ le corps résiduel. Comme dans [dJ] on suppose que le caractéristique de $k(s)$ est égale à p, qui est le cas essentiel. Alors il existe un nombre fini d'extensions finies $k_j/k(s)$ tel que $\mathcal{O}_F \otimes k(s) = \oplus k_j$. Tout point fermé $t \in \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S,s})$ est envoyé sur le point fermé $s \in \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{S,s}$ par la flèche $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S,s}) \to \mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_{S,s}$, parce que ce dernier morphisme est fini (donc propre). On en déduit que les points fermés de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S,s})$ sont les $\mathrm{Spec}\, k_j$. Comme la caractéristique de k_j est égale à p, on sait que p appartient à $\mathrm{rad}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S,s})$. On peut donc appliquer la démonstration de [dJ] la proposition 3.6 pour $R = \mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_{S,s}$ (car dans [dJ] l'auteur a supposé que R est un anneau local de caractéristique résiduelle p, mais la seule propriété utilisée dans la démonstration est la propriété $p \in \mathrm{rad}(R)$). □

2.2.2

Nous donnons la définition du modèle local M_0 et de son diagramme de modèle local. Soit $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$ un S-point de Y_0. On obtient une chaîne de schémas abéliens sur S avec $\mathcal{O}_F$-action

$$A \to A/H_1 \to \ldots \to A/H_g.$$

Si l'on note $H_0 = 0$, alors $A = A/H_0$. Pour tout i, on note $\mathcal{H}^1(A/H_i)$ la première cohomologie de de Rham de A/H_i. Comme $\lambda : A \to A^\vee$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}^\times$-polarisation, elle induit un isomorphisme $\mathcal{H}^1(A) \xleftarrow{\sim} \mathcal{H}^1(A^\vee)$ de $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-module. L'argument de [dJ] §2 montre que pour $j = 0$ et g, λ définit une forme alternée parfaite q_j sur $\mathcal{H}^1(A/H_j)$.

Lemme 2.5. *La chaîne*

$$\mathcal{H}^1(A/H_\bullet) = (\mathcal{H}^1(A) \leftarrow \mathcal{H}^1(A/H_1) \leftarrow \ldots \leftarrow \mathcal{H}^1(A/H_g), q_0, q_g)$$

est une chaîne polarisée sur S.

Démonstration. On doit vérifier les quatre conditions de la définition 2.2. La première condition est montrée dans [DP] §2.8. La deuxième condition est automatique. La troisième condition est vérifiée par [dJ] la proposition 1.7. Et la dernière condition est montrée par [dJ] le lemme 2.3 ou [RZ] §3.23 d). □

On construit maintenant le diagramme de modèle local. On définit d'abord un schéma Z_0 sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, tel que pour tout schéma S sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, $Z_0(S)$ est égal à l'ensemble des classes d'isomorphismes de

$$(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet, \phi)$$

où $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$ est un S-point de Y_0, et

$$\phi : \mathcal{H}^1(A/H_\bullet) \xrightarrow{\sim} St_\bullet \otimes \mathcal{O}_S$$

est un isomorphisme de chaînes polarisées. On note la projection canonique par

$$\pi : Z_0 \to Y_0.$$

La proposition 2.4 implique que π est un torseur pour la topologie de Zariski sous un schéma en groupes lisse.

Définition 2.6. Le modèle local M_0 est le schéma sur $\mathbb{Z}_{(p)}$ tel que pour tout schéma S sur $\mathbb{Z}_{(p)}$, $M_0(S)$ est égal à l'ensemble des classes d'isomorphismes de

$$(W_0, \ldots, W_g),$$

où

- Pour $i = 0, ..., g$, $W_i \subset St_i \otimes \mathcal{O}_S$ est un sous-$\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-module, qui est un $\mathcal{O}_S$-facteur direct, et localement sur S il est isomorphe à $\mathcal{O}_F^g \otimes \mathcal{O}_S$.
- La flèche $St_{i-1} \otimes \mathcal{O}_S \leftarrow St_i \otimes \mathcal{O}_S$ envoie W_i dans W_{i-1}.
- Pour $j = 0$ et g, W_j est isotrope pour q_j.

Par définition M_0 est un sous-schéma fermé d'un produit de $(g + 1)$ Grassmanniennes. On définit un morphisme

$$f : Z_0 \to M_0$$

tel que, soit $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet, \phi)$ un S-point de Z_0, alors son image par f est égale à $(\phi(\omega_A), ..., \phi(\omega_{A/H_g}))$. On remarque que la propriété d'isotropie de ω_A et ω_{A/H_g} est prouvée par [dJ] §2, donc $(\phi(\omega_A), ..., \phi(\omega_{A/H_g}))$ est bien un S-point de M_0.

Proposition 2.7. *Le morphisme f est lisse.*

Démonstration. D'après le critère infinitésimal de lissité, on se ramène à vérifier la propriété suivante : supposons qu'on a un S-point $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet, \phi)$ de Z_0, un épaississement nilpotent $S \to S'$, et une déformation de $(\omega_A, ..., \omega_{A/H_g})$ sur S'. On veut montrer que le point $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet, \phi)$ se déforme aussi sur S'.

On applique les arguments de [dJ] §2, où la déformation de A, λ et $H_\bullet$ est un corollaire de la théorie de Grothendieck-Messing sur la déformation des schémas abéliens. Il faut aussi vérifier la déformation de $\iota, \bar{\eta}$ et ϕ. En fait, par la théorie de Grothendieck-Messing, ι se déforme via la déformation de la structure de $\mathcal{O}_F$-module sur ω_A. Pour la structure de niveau $\bar{\eta}$, on note que par la définition 2.1, η est défini en choisissant un point géométrique $\bar{s}$. Comme le point $\bar{s}$ et le groupe fondamental étale basé sur $\bar{s}$ sont indépendants d'un épaississement nilpotent, la définition de $\bar{\eta}$ l'est aussi. Donc $\bar{\eta}$ se déforme automatiquement. Finalement, la déformation de ϕ est garantie par la lissité du morphisme π. $\square$

Chapitre 3

Schéma de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$

3.1 Théorie de Raynaud

3.1.1

La construction de schémas de Hilbert-Siegel en niveau $\Gamma_1(p)$ est basée sur la théorie de Raynaud ([Ray]), qui classifie les schémas en $\mathbb{F}_q$-vectoriels de dimension 1 vérifiant une certaine hypothèse sur une base au-dessus de $\operatorname{Spec} D$, où D est un anneau de Dedekind défini dans [Ray] §1.1. On note $q = p^n$, $\mathbb{Q}_q$ l'extension non-ramifiée de degré n de $\mathbb{Q}_p$, et $\mathbb{Z}_q$ l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}_q$. Nous rappelons la théorie de [Ray] en supposant que la base est au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$.

Soit S un schéma au-dessus de $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$. Dans [Ray] §1.3 (17), un élément particulier

$$w_p \in p\mathbb{Z}_q^\times$$

est défini. Cet élément apparaît dans l'énoncé de la classification. On note

$$\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{Z}_q^\times$$

le caractère de Teichmüller. C'est un relèvement du morphisme de Frobenius

$$\mathrm{Fr} : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{F}_q^\times, \quad x \mapsto x^p.$$

Par le lemme de Hensel, χ est en fait déterminé par son image modulo p. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $\chi^m : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{Z}_q^\times$ la m-ième puissance de χ. On en déduit que tout caractère de $\mathbb{F}_q^\times$ vers $\mathbb{Z}_q^\times$ est de la forme χ^m pour $m \in \{1, ..., q-1\}$.

Soit H un schéma en groupes fini plat de rang q sur S muni d'une action de $\mathbb{F}_q$. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre de Hopf de H. Alors $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre localement libre de rang q, et il existe une décomposition $\mathcal{A} = \mathcal{O}_S \oplus \mathcal{J}$, où $\mathcal{J}$ est l'idéal d'augmentation de H (i.e. $\mathcal{J}$ est le faisceau des fonctions sur H qui s'annulent en l'élément neutre). L'action de $\mathbb{F}_q$ sur H induit une action de $\mathbb{F}_q^\times$ sur $\mathcal{J}$, donc on peut décomposer $\mathcal{J}$ en composantes $\mathbb{F}_q^\times$-isotypiques :

$$\mathcal{J} = \bigoplus_{m=1}^{q-1} \mathcal{J}_{\chi^m}.$$

La définition suivante est signalée dans [Ray] §1.2, la condition ($\star\star$).

Définition 3.1. On dit que H est un schéma en groupes *de Raynaud* si pour tout $m \in \{1, ..., q-1\}$, le faisceau $\mathcal{J}_{\chi^m}$ est un fibré en droites sur S (i.e. il est de rang 1).

Le théorème suivant est le théorème principal de [Ray] (*cf.* le théorème 1.4.1) qui classifie les schémas en groupes de Raynaud.

Théorème 3.2 (Raynaud)**.** *Soit S un schéma sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$*. Il existe une bijection canonique entre les classes d'isomorphismes de schémas en groupes de Raynaud sur S et les classes d'isomorphismes des systèmes*

$$(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)_{k=0,...,n-1},$$

où $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, ..., \mathcal{L}_{n-1}$ sont des fibrés en droites sur S, et

$$a_k : \mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_k, \quad b_k : \mathcal{L}_k \to \mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p}, \quad k = 0, ..., n-1$$

sont des morphismes de fibrés en droites (avec $\mathcal{L}_{-1} = \mathcal{L}_{n-1}$) tels que

$$a_k b_k = w_p, \quad k = 0, ..., n-1.$$

On appelle $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)_{k=0,...,n-1}$ le paramètre du schéma en groupes de Raynaud associé.

Remarque 3.3. La bijection dans le théorème 3.2 est construite de la manière suivante. Soit H/S un schéma en groupes de Raynaud. On note $\mathcal{A}$ (*resp.* $\mathcal{J}$) l'algèbre de Hopf (l'idéal d'augmentation) de H. Alors le paramètre de H est défini par

$$\mathcal{L}_k = \mathcal{J}_{\chi^{p^k}}, \quad k = 0, ..., n-1,$$

et pour tout k,

$$\mathcal{J}_{\chi^{p^{k-1}}} \otimes ... \otimes \mathcal{J}_{\chi^{p^{k-1}}} \xrightarrow{a_k} \mathcal{J}_{\chi^{p^k}} \qquad \mathcal{J}_{\chi^{p^k}} \xrightarrow{b_k} \mathcal{J}_{\chi^{p^{k-1}}} \otimes ... \otimes \mathcal{J}_{\chi^{p^{k-1}}}$$

sont des morphismes induits par la multiplication et la comultiplication de $\mathcal{A}$, respectivement. (Ici on note $\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_S}$ pour simplifier la notation.)

Réciproquement, si $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)$ est un système dans le théorème 3.2, alors la $\mathcal{O}_S$-algèbre

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{0 \leq r_k \leq p-1} (\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}})$$

est localement libre de rang q. Les morphismes a_k (*resp.* b_k) définissent naturellement une multiplication (*resp.* comultiplication) sur $\mathcal{A}$. La projection de $\mathcal{A}$ sur le premier facteur $\mathcal{L}_0^{\otimes 0} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes 0} = \mathcal{O}_S$ définit une co-unité de $\mathcal{A}$. Le groupe $\mathbb{F}_q^\times$ agit naturellement sur $\mathcal{A}$: pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, λ agit sur $\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}}$ par la multiplication par $\chi^{r_0 + r_1 p + ... + r_{n-1} p^{n-1}}(\lambda)$. Le schéma en groupes correspondant est donc $H = \underline{\mathrm{Spec}}_{\mathcal{O}_S} \mathcal{A}$. (On remarque que l'action de $0 \in \mathbb{F}_q$ sur $\mathcal{A}$ est induite par la multiplication par 0 sur tous les $\mathcal{L}_k$.)

3.1.2

Nous donnons la définition d'un générateur de Raynaud d'un schéma en groupes de Raynaud. Soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}_q$, et H/S un schéma en groupes de Raynaud. On note $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)_{k=0,...,n-1}$ le paramètre de H. On considère le morphisme composé

$$\mathcal{L}_0^{\otimes p^n} \xrightarrow{a_1^{\otimes p^{n-1}}} \mathcal{L}_1^{\otimes p^{n-1}} \xrightarrow{a_2^{\otimes p^{n-2}}} \mathcal{L}_2^{\otimes p^{n-2}} \to ... \to \mathcal{L}_{n-2}^{\otimes p^2} \xrightarrow{a_{n-1}^{\otimes p}} \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_0} \mathcal{L}_0,$$

où pour tout morphisme de fibré en droites $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ et tout entier m, $\varphi^{\otimes m} : \mathcal{L}^{\otimes m} \to \mathcal{M}^{\otimes m}$ est la m-ième puissance de φ. On note

$$a_0 \cdot a_{n-1}^{\otimes p} \cdot ... \cdot a_2^{\otimes p^{n-2}} \cdot a_1^{\otimes p^{n-1}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_0^{\otimes (p^n - 1)}, \mathcal{O}_S)$$

l'élément qui correspond à cette flèche composée.

Définition 3.4. On appelle un *générateur de Raynaud* de H un élément

$$x \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_0, \mathcal{O}_S)$$

qui vérifie l'équation

$$x^{\otimes (p^n - 1)} = a_0 \cdot a_{n-1}^{\otimes p} \cdot ... \cdot a_2^{\otimes p^{n-2}} \cdot a_1^{\otimes p^{n-1}}.$$

Exemple 3.5. Supposons $S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{C}$ (ou plus généralement le spectre d'un corps algébriquement clos de caractéristique différente de p). Soit H un schéma en groupes de Raynaud sur S. Comme tous les fibrés en droites $\mathcal{L}_k$ sont triviaux sur S, on peut regarder les a_k, b_k comme des éléments de $\mathbb{C}$ (en choisissant une base de $\mathcal{L}_k$ pour tout k). On note $\mathcal{A}$ l'algèbre de Hopf de H. D'après la remarque 3.3, on a

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[t_0, ..., t_{n-1}]/(t_0^p - a_1 t_1, t_1^p - a_2 t_2, ..., t_{n-1}^p - a_0 t_0).$$

Comme w_p est inversible dans $\mathbb{C}$, on a $a_k \neq 0$ pour tout k. Dans ce cas H est un schéma en groupes étale sur $\operatorname{Spec}\mathbb{C}$, et $H(\mathbb{C})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_q$ de dimension 1. Un générateur de Raynaud x de H définit un point non-nul de $H(\mathbb{C})$ en prenant $t_0 = x$ (puis $t_1, ..., t_{n-1}$ sont déterminés uniquement) et vice-versa. On en déduit que, dans ce cas la notion de générateur de Raynaud et de générateur naïf coïncident.

Remarque 3.6. Soit H un schéma en groupes de Raynaud sur S, et $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)$ son paramètre. On note $\mathcal{A}$ l'algèbre de Hopf de H. On note $H^\vee$ le dual de Cartier de H. Alors l'algèbre de Hopf de $H^\vee$ est égale à $\mathcal{A}^\vee$ (voir §2.2.1 pour la notation $\vee$), et la multiplication (*resp.* la comultiplication) de $\mathcal{A}^\vee$ est définie par la comultiplication (*resp.* la multiplication) de $\mathcal{A}$. Il est facile de voir que $\mathcal{A}^\vee$ vérifie aussi la définition 3.1, donc $H^\vee$ est un schéma en groupes de Raynaud. Le paramètre de $H^\vee$ est égal à

$$b_k : \mathcal{L}_{k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_k^\vee, \quad a_k : \mathcal{L}_k^\vee \to \mathcal{L}_{k-1}^{\vee,\otimes p}, \quad k = 0, ..., n-1.$$

Supposons

$$x \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_0, \mathcal{O}_S), \quad y \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_0^\vee, \mathcal{O}_S)$$

des générateurs de Raynaud de H et $H^\vee$, respectivement. Alors y définit un élément de $\operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{L}_0)$, qu'on note aussi par y. On peut considérer la composée

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{y} \mathcal{L}_0 \xrightarrow{x} \mathcal{O}_S.$$

Elle définit un élément de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$, qu'on note par xy. Cette notion de composition de générateurs de Raynaud sera utilisée dans la définition du schéma Y_1 dans la section suivante.

3.2 Le schéma Y_1

Nous définissons le schéma de Hilbert-Siegel $Y_1/\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ de niveau $\Gamma_1(p)$. On note $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$ le changement de base du schéma Y_0 (*cf.* §2.1) sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$. Dans la suite de cette thèse, on fixe un isomorphisme $\mathcal{O}_F/p \cong \mathbb{F}_q$.

Lemme 3.7. *Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, et $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$ un S-point de $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$. Alors pour $i = 1, ..., g$, H_i/H_{i-1} est un schéma en groupes de Raynaud (avec la notation $H_0 = 0$).*

Démonstration. On voit facilement que la définition 3.1 est préservée par tout changement de base, donc il suffit vérifier le lemme pour le point universel $(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet)$ de $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$. Dans ce cas $S = Y_{0,\mathbb{Z}_q}$.

On rappelle que, dans [Ray] la proposition 1.2.2, Raynaud a montré que si S est un schéma intègre de corps des fractions de caractéristique 0, alors tout schéma en $\mathbb{F}_q$-vectoriels, fini plat de rang q au-dessus de S est un schéma en groupes de Raynaud.

D'après [PZ] le théorème 0.1 (qui dépend des résultats de Görtz, *cf.* [G]), le modèle local M_0 est normal, i.e. tous ses anneaux locaux sont intègres et intégrallement clos.

Comme la normalité est préservée par tout morphisme lisse, on déduit du diagramme de modèle local que Y_0 (donc $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$) est aussi normal. Donc chaque composante connexe de $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$ est intègre, et on peut appliquer [Ray] la proposition 1.2.2. □

Définition 3.8. On définit le schéma Y_1 sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ tel que pour tout S sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, $Y_1(S)$ est égal à l'ensemble des classes d'isomorphismes de

$$(A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet, x_1, ..., x_g, y_1, ..., y_g),$$

où $A, \lambda, \iota, \bar{\eta}, H_\bullet$ sont comme dans la définition 2.1, et pour tout i, x_i (*resp.* y_i) est un générateur de Raynaud de H_i/H_{i-1} (*resp.* $(H_i/H_{i-1})^\vee$) tel que

$$x_1y_1 = x_2y_2 = ... = x_gy_g$$

au sens de la remarque 3.6.

Remarque 3.9. On fixe une injection $\mathbb{Q}_q \hookrightarrow \mathbb{C}$. On montre que $Y_1(\mathbb{C})$ est une variété de Shimura pour le groupe G (§2.1). Le point clé est que, d'après la remarque 3.3, x_i (*resp.* y_j) définit un point non-nul de $(H_i/H_{i-1})(\mathbb{C})$ (*resp.* $(H_i/H_{i-1})^\vee(\mathbb{C})$). La condition $x_1y_1 = ... = x_gy_g$ implique que, en identifiant $(H_i/H_{i-1})^\vee(\mathbb{C})$ avec $\operatorname{Hom}((H_i/H_{i-1})(\mathbb{C}), \mathbb{C}^\times)$, l'élément $y_i(x_i) \in \mathbb{C}^\times$ est indépendant de i. En appliquant l'argument de [Kot] §8, on voit que $Y_1(\mathbb{C})$ est un espace localement symétrique pour le groupe G, et son niveau en p est égal au radical pro-unipotent de K_p défini dans §2.1.

Remarque 3.10. Le schéma Y_1 est plat sur $\mathbb{Z}_q$. En fait, d'après [PZ] et [G], le modèle local M_0 est plat, donc il suffit de montrer que le morphisme $Y_1 \to Y_{0,\mathbb{Z}_q}$ est plat. On note H_i/H_{i-1} les schémas en groupes universels sur $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$, et $(\mathcal{L}_{i,k}, a_{i,k}, b_{i,k})$ le paramètre de H_i/H_{i-1}. On choisit un ouvert $U \hookrightarrow Y_{0,\mathbb{Z}_q}$ sur lequel tous les $\mathcal{L}_{i,k}$ sont triviaux. En fixant les trivialisations, on peut identifier les $a_{i,k}, b_{i,k}$ avec des éléments de $\Gamma(U, \mathcal{O}_U)$. Alors le faisceau structurel de $U \times_{Y_{0,\mathbb{Z}_q}} Y_1$ est isomorphe à

$$\mathcal{O}_U[x_1, y_1, ..., x_g, y_g]/(x_i^{p^n-1} - \prod_k a_{i,k}^{p^{n-k}}, y_i^{p^n-1} - \prod_k b_{i,k}^{p^{n-k}}, x_iy_i - x_jy_j),$$

où i, j parcourent $1, ..., g$. C'est un $\mathcal{O}_U$-module libre avec une base

$$\prod_{i=1,...,g} x_i^{r_i} y_i^{s_i}$$

pour tout $r_i, s_i \leq p^n - 2$ tel que $r_2s_2 = ... = r_gs_g = 0$. On en déduit que $U \times_{Y_{0,\mathbb{Z}_q}} Y_1$ est plat sur U, d'où la platitude de Y_1.

Chapitre 4

Complexes de Lie

4.1 Un lemme

Nous montrons un lemme sur la $\mathbb{F}_q^\times$-action sur le complexe $[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_X]$ de l'introduction (nous rappelons les notations dans la suite). Ce lemme est un point de départ pour généraliser la méthode de [HS] aux schémas de Hilbert-Siegel.

Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, et H un schéma en groupe de Raynaud sur S. On note $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)$ le paramètre de H. On définit deux $\mathcal{O}_S$-algèbres

$$\mathcal{S} = \bigoplus_{r_k \geq 0} (\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}})$$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{0 \leq r_k \leq p-1} (\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}}).$$

On rappelle que $\mathcal{A}$ est isomorphe à l'algèbre de Hopf de H. Les morphismes a_k : $\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_k$ définissent une surjection

$$\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{A},$$

et on note $\mathcal{I}$ son noyau. D'après la remarque 3.3, l'action de $\mathbb{F}_q^\times$ sur $\mathcal{A}$ s'étend à une action de $\mathbb{F}_q^\times$ sur $\mathcal{S}$ par la même formule, i.e. pour tout $\lambda \in \mathbb{F}_q^\times$, λ agit sur $\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}}$ par multiplication par $\chi^{r_0 + r_1 p + ... + r_{n-1}p^{n-1}}(\lambda)$. Avec cette action, les morphismes a_k sont $\mathbb{F}_q^\times$-équivariants, donc la surjection $\mathcal{S} \twoheadrightarrow \mathcal{A}$ l'est aussi. On définit l'action de $\mathbb{F}_q^\times$ sur $\mathcal{I}$ comme l'action induite.

On définit $X = \underline{\operatorname{Spec}}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{S})$, qui est l'espace total d'un fibré vectoriel sur S. On obtient une immersion fermée $\mathbb{F}_q^\times$-équivariante $i : H \to X$. On note $e : S \to H$ la section unité. La différentielle

$$\mathrm{d} : \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \to i^*\Omega_{X/S}$$

est induite par l'injection $\mathcal{I} \hookrightarrow \mathcal{S}$, donc elle est $\mathbb{F}_q^\times$-équivariante. On considère la $\mathbb{F}_q^\times$-action sur le complexe de $\mathcal{O}_S$-modules $[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \xrightarrow{\mathrm{d}} e^*i^*\Omega_{X/S}]$. Pour $k = 0, ..., n-1$, on note la composante χ^{p^k}-isotypique par

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \xrightarrow{\mathrm{d}} e^*i^*\Omega_{X/S}]_{\chi^{p^k}}.$$

Lemme 4.1. *Il existe un isomorphisme canonique de complexe*

$$[\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_k} \mathcal{L}_k] \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \xrightarrow{\mathrm{d}} e^*i^*\Omega_{X/S}]_{\chi^{p^k}}$$

pour $k = 0, ..., n-1$.

Démonstration. On note $\mathcal{N}$ le noyau de la projection $e^*i^* : \mathcal{S} \to \mathcal{O}_S$ sur le premier facteur dans la définition de $\mathcal{S}$. Alors $e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) = e^*i^*(\mathcal{I}) = \mathcal{I}/\mathcal{I}\mathcal{N}$. Donc on peut remplacer $e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$ par $\mathcal{I}/\mathcal{I}\mathcal{N}$ dans le complexe à droite.

Pour $k = 0, ..., n-1$, on définit un morphisme de $\mathcal{O}_S$-modules

$$\varphi_k : \mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{S} = \bigoplus_{r_k \geq 0} (\mathcal{L}_0^{\otimes r_0} \otimes \mathcal{L}_1^{\otimes r_1} \otimes ... \otimes \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes r_{n-1}})$$

tel que sa projection sur $\mathcal{L}_k$ est a_k, sa projection sur $\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p}$ est -1, et ses projections sur les autres facteurs sont 0. Par définition on a $\varphi_k(\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p}) \subset \mathcal{I}$. On note

$$\varphi : \mathcal{L}_{n-1}^{\otimes p} \oplus \mathcal{L}_0^{\otimes p} \oplus ... \oplus \mathcal{L}_{n-2}^{\otimes p} \to \mathcal{I}/\mathcal{I}\mathcal{N}$$

le morphisme défini par la somme de tous les φ_k.

On montre que φ est un isomorphisme. Comme la question est d'une nature locale, on peut supposer que tous les $\mathcal{L}_k$ sont triviaux sur S. En choisissant des trivialisations, on peut identifier les a_k avec des éléments de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On obtient des isomorphismes naturels

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}]$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}]/(x_0^p - a_1x_1, x_1^p - a_2x_2, ..., x_{n-1}^p - a_0x_0)$$
$$\mathcal{I} = (x_0^p - a_1x_1, x_1^p - a_2x_2, ..., x_{n-1}^p - a_0x_0)$$
$$\mathcal{N} = (x_0, x_1, ..., x_{n-1})$$
$$\varphi_k : \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}], \quad 1 \mapsto a_kx_k - x_{k-1}^p.$$

Par la définition de φ, on voit directement qu'il est surjectif. L'injectivité de φ vient d'une comparaison de degré des éléments dans $\mathcal{I}$ et $\mathcal{I}\mathcal{N}$.

Comme $\mathcal{S} = \underline{\mathrm{Sym}}(\mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{L}_{n-1})$, il existe un isomorphisme canonique

$$\psi : \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus ... \oplus \mathcal{L}_{n-1} \xrightarrow{\sim} \Omega_{X/S} \otimes_{\mathcal{S}} \mathcal{O}_S = e^*i^*\Omega_{X/S}.$$

On obtient un diagramme

$$\begin{array}{ccc} \oplus\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} & \xrightarrow{\oplus a_k} & \oplus\mathcal{L}_k \\ \wr\downarrow\varphi & & \wr\downarrow\psi \\ e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) & \xrightarrow{\mathrm{d}} & e^*i^*\Omega_{X/S} \end{array} ,$$

où les flèches verticales sont des isomorphismes. En prenant des coordonnées locales comme précédemment, on voit que ce diagramme est en fait commutatif. Par ailleurs, par définition φ et ψ sont $\mathbb{F}_q^\times$-équivariants. Donc l'isomorphisme du lemme est obtenu en prenant les composantes $\mathbb{F}_q^\times$-isotypiques du diagramme précédent (on rappelle que $\mathbb{F}_q^\times$ agit sur $\mathcal{L}_k$ via χ^{p^k}). □

Remarque 4.2. Dans la démonstration on voit qu'en fait le complexe

$$[e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_{X/S}]$$

ne possède que des composantes isotypiques pour les caractères χ^{p^k}. Les caractères χ^{p^k} sont appelés les caractères *fondamentaux.* Ils sont tous les caractères de $\mathbb{F}_q^\times$ à $\mathbb{Z}_q^\times$ dont la réduction mod p s'étend à un endomorphisme d'anneau de $\mathbb{F}_q$. Le phénomène de cette remarque sera réexpliqué dans §4.2.1, la remarque 4.3 à l'aide du complexe ${}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee$ qui est un objet clé de cette thèse.

4.2 La stratégie

4.2.1

Suite à l'introduction, nous expliquons comment la construction du complexe ${}_A\ell_G^\vee$ dans la proposition 1.1 permettra de déduire le corollaire 1.3. Ce dernier corollaire est un ingrédient nécessaire dans la définition du modèle local M_1^+ (*cf.* §5.3).

Nous rappelons d'abord les complexes de Lie (ou de co-Lie) équivariants sur les grands topos fpqc construits par [Ill1]. Soit S un schéma, et K/S un schéma en groupes plat et de présentation finie, muni d'une action d'un monoïde (discret) M. On note $\mathcal{O}_S$ l'anneau structurel (i.e. pour le petit topos de Zariski) du schéma S, S_{fpqc} le grand site fpqc de S, et $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ le faisceau structurel de S_{fpqc}. On note $\mathbb{Z}[M]$ l'algèbre libre sur $\mathbb{Z}$ engendrée par M, i.e.

$$\mathbb{Z}[M] = \bigoplus_{m\in M} \mathbb{Z}m,$$

et la loi de multiplication et l'élément unité sont définis par ceux pour M. On note $\ell_K \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$ le complexe de co-Lie de K, i.e. $\ell_K = \mathrm{L}\, e^*\, \mathrm{L}_{K/S}$, où $\mathrm{L}_{K/S} \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_K)$ est le complexe cotangent de K, et $e : S \to K$ est la section unité.

Dans [Ill1] VII 2, Illusie a défini un objet [1]

$$\underline{\ell}_K^M \in \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}),$$

qui est un relèvement de ℓ_K dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$. Le complexe $\underline{\ell}_K^M$ vérifie les propriétés usuelles du complexe de co-Lie, e.g. le triangle distingué fondamental, mais dans un contexte M-équivariant. Le complexe $\underline{\ell}_K^M$ permet de décrire les déformations M-équivariantes de K, *cf.* [Ill1] VII 2.3.

Soit d'autre part A un anneau commutatif, et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. On note $\ell_G^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$ le complexe de Lie de G, i.e. $\ell_G^\vee = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}(\ell_G, \mathcal{O}_S)$, où ℓ_G est le complexe de co-Lie de G défini précédemment.

Dans [Ill1] VII 4.1 Illusie a défini un autre objet

$${}_A\underline{\ell}_G^\vee \in \mathrm{D^b}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}).$$

Ici $A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ est le produit tensoriel dérivé des anneaux de faisceaux fpqc. Le module $A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ est muni d'une structure de dg-anneau (*cf.* §4.3), donc la catégorie dérivée $\mathrm{D^b}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ a un sens. Le complexe ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ est un relèvement de $\ell_G^\vee$ dans $\mathrm{D^b}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$. Ce complexe est utilisé par Illusie pour décrire la déformation de G comme un schéma en A-modules, *cf.* [Ill1] VII 4.2 et §4.2.2.

Les objets qui nous intéressent sont les contreparties de $\underline{\ell}_K^M$ et ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ sur le petit topos de Zariski. On expliquera dans §4.2.2 pourquoi Illusie considère le grand topos fpqc mais pas seulement le petit, et on décrira les modifications apportées afin de considérer le petit topos de Zariski. Pour une raison technique (qui est relative à la structure de monoïde de $\mathrm{C}_\bullet\,\mathrm{S}_1$, *cf.* §4.4), la même construction de ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ ne donne pas directement le complexe de co-Lie ${}_A\underline{\ell}_G$. Donc on considère plutôt la contrepartie de $\underline{\ell}_K^{M,\vee}$ sur le topos de Zariski, i.e. on travaille partout avec les complexes de Lie. Pour la simplicité, dans la définition de ${}_A\ell_G^\vee$ on va supposer que S est *plat* sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. On note A^{mon} le monoïde multiplicatif sous-jacent de A.

On va définir (les propositions 4.18, 4.25) deux complexes

$$\ell_K^{M,\vee} \in \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_S)$$

$${}_A\ell_G^\vee \in \mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S)$$

par la même construction que celle de $\underline{\ell}_K^{M,\vee}$ et ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ dans [Ill1], sauf qu'on remplace $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}$ par $\mathcal{O}_S$. On montre que ce changement de topos est possible dans §4.6. (Cela

1. Ici l'objet défini dans [Ill1] est en fait le complexe cotangent équivariant L_K^M. Le complexe $\underline{\ell}_K^M$ est alors égal à $\mathrm{L}\,e^*\,\mathrm{L}_K^M$.

permet d'éliminer $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ donc d'avoir des projecteurs canoniques dans $\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S$ sur les composantes isotypiques.)

Ensuite, on construit le foncteur Com défini dans la proposition 1.2 de l'introduction (*cf.* §4.9), qui décrit la compatibilité du complexe de Lie avec le morphisme $A^{\mathrm{mon}} \to A$ de changement de coefficient. Autrement dit, soit G un schéma en A-modules, plat et de présentation finies sur S. Alors G est muni d'une action du monoïde A^{mon}. On montre qu'il existe un isomorphisme

$$\mathrm{Com}({}_A\ell_G^\vee) \cong \ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$.

On considère aussi la compatibilité avec des morphismes d'anneaux $A' \to A$. Ce morphisme définit un foncteur de restriction des scalaires Res (*cf.* §4.7.2, la proposition 4.22). On montre un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Res}({}_A\ell_G^\vee) \cong {}_{A'}\ell_G^\vee$$

dans $\mathrm{D^b}(A' \otimes \mathcal{O}_S)$. La compatibilité de Res est énoncée dans [Ill1] pour le complexe ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$.

Dans le contexte des variétés de Hilbert-Siegel, soit S un schéma sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}_q$ qui est plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. Soit H/S un schéma en groupes de Raynaud. Associé à H, on peut définir un schéma X et un idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ comme dans §4.1. L'action de $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$ sur H définit le complexe de Lie équivariant [2]

$$\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee} \in \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S).$$

On montre (*cf.* §4.8.2, la proposition 4.26) que

$$\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee} \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_{X/S}]^\vee \tag{4.1}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$. (Ici on utilise le fait que $i : H \hookrightarrow X$ est une immersion régulière.)

Soit de plus B/S un $\mathcal{O}_F$-schéma abélien, et

$$0 \to H \to B \to B/H \to 0$$

une résolution $\mathcal{O}_F$-équivariante de H (avec la condition de Kottwitz sur B et B/H). L'action de $\mathcal{O}_F$ sur H définit

$${}_{\mathcal{O}_F}\ell_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S).$$

2. On peut utiliser $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$ au lieu de $\mathbb{F}_q^\times$ parce que tout $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$-module V s'écrit comme $V_0 \oplus V_1$, où V_0 est annulé par 0 et V_1 est un $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$-module trivial.

On montre (*cf.* §4.7.2, la proposition 4.20) que

$$ {}_{\mathcal{O}_F}\ell_H^\vee \cong [\omega_{B/H} \to \omega_B]^\vee \tag{4.2}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S)$.

On peut considérer le troisième complexe

$$ {}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee \in \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S).$$

Les foncteurs de compatibilité nous donnent des isomorphismes

$$\mathrm{Com}({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee) \cong \ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}, \quad \mathrm{Res}({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee) \cong {}_{\mathcal{O}_F}\ell_H^\vee. \tag{4.3}$$

Comme $\mathcal{O}_S$ est au-dessus de $\mathbb{Z}_q$, il existe des projecteurs bien définis dans les anneaux

$$\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S, \quad \mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S, \quad \mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S$$

sur les composantes isotypiques (*cf.* §5.2.1 pour les détails). On montre que ces projecteurs commutent avec les foncteurs Com et Res. Le corollaire 1.3 se déduit des isomorphismes 4.1, 4.2, 4.3 précédemment et du lemme 4.1.

Remarque 4.3. On peut expliquer le phénomène de la remarque 4.2 de §4.1. On note

$$\mathrm{Com} : \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$$

le foncteur décrit précédemment. On rappelle que $\mathcal{O}_S$ est au-dessus de $\mathbb{Z}_q$, donc il existe un isomorphisme

$$\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{O}_S/p\mathcal{O}_S$$

où pour tout k, le k-ième facteur dans la somme directe est associé à l'endomorphisme $\lambda \mapsto \lambda^{p^k}$ de $\mathbb{F}_q$, i.e. la réduction mod p de χ^{p^k}. Par définition, les composantes isotypiques d'un objet de $\mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S)$ sont définies par les éléments $e_k = (0, ..., 1, ..., 0)$ de $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{O}_S/p\mathcal{O}_S$, avec 1 en la k-ième place.

Or, l'isomorphisme

$$\mathrm{Com}({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee) \cong \ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}$$

implique que chaque composante isotypique de $\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}$ vient d'une composante isotypique de ${}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^\vee$. On déduit que $\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}$, donc le complexe dans la remarque 4.2, n'admet que des composantes isotypiques pour les caractères fondamentaux.

4.2.2

Nous expliquons comment le complexe ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ est construit et utilisé par Illusie dans [Ill1]. En fait, comme tous les complexes cotangents, ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ est construit pour étudier la déformation de G. Plus précisément Illusie a obtenu le théorème suivant ([Ill1] le théorème VII 4.2.1). Soit S un schéma, et $S \twoheadrightarrow S'$ un épaississement nilpotent de S défini par un idéal $I \subset \mathcal{O}_{S'}$. Alors l'obstruction à la déformation de G sur S' *comme un schéma en A-modules* est caractérisée par un élément

$$\omega(G,i) \in \mathrm{Ext}^2_A(G, {}_A\underline{\ell}_G^\vee \overset{\mathrm{L}}{\otimes}_{\mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}} I).$$

(C'est dans la démonstration de ce théorème que l'on a besoin du *grand* topos. Pour expliquer on va utiliser les notations Ner et $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ définies dans le reste de §4.2.2. Nous conseillons le lecteur de lire d'abord le reste de §4.2.2. En fait, pour décrire la déformation A-équivariante de G, Illusie construit un diagramme de schémas $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$, tel que la A-déformation de G est équivalente à la déformation du diagramme $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$. Par la théorie du complexe cotangent usuel, la déformation de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$ est caractérisée par un groupe Ext^2 du complexe cotangent $\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))}$. Le complexe $\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))}$ est un objet de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Top}\, X)$ avec X un topos fibré simplicial (§4.6) associé à $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$. Pour calculer ce groupe Ext^2, on applique le théorème [Ill1] VI 8.4.2.1 (*cf.* §4.4.1) à $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$. C'est à ce moment que le grand topos apparaît : notons qu'en général les morphismes d_i de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$ ne sont pas plats (*cf.* le paragraphe pour L_M^K dans la suite), donc le petit topos fpqc de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1))$ ne suffit pas pour appliquer [Ill1] VI 8.4.2.1.) Une application du théorème d'Illusie apparaît dans l'étude de la déformation de groupes finis plats de rang p (ou groupes de Barsotti-Tate) en prenant $A = \mathbb{F}_p$ (ou $\mathbb{Z}/p^n$), *cf.* [Ill2].

En général, la déformation équivariante est étudiée à l'aide d'un schéma simplicial, appelé le *nerf.* Soit S un schéma, K un schéma en groupes, plat et de présentation finie sur S, et M un monoïde agissant sur K. On peut construire le complexe de co-Lie équivariant $\underline{\ell}_K^M$ (*cf.* §4.2.1) et étudier la déformation M-équivariante de K via le nerf associé au couple (M,K). C'est le schéma simplicial $\mathrm{Ner}(M,K)$ défini par

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & M \times M \times K \arrow[r, shift left=4, "\mathrm{d}_0"] \arrow[r, "\mathrm{d}_1" description] \arrow[r, shift right=4, "\mathrm{d}_2"'] & M \times K \arrow[l, shift left=8, "\mathrm{s}_0"] \arrow[l, shift left=10, "\mathrm{s}_1"'] \arrow[r, shift left=2, "\mathrm{d}_0"] \arrow[r, shift right=2, "\mathrm{d}_1" description] & K \arrow[l, bend left, "\mathrm{s}_0"] \end{tikzcd} ;$$

on décrit les morphismes entre degré 1 et 0 : d_0 est le morphisme d'action de M sur K, d_1 est la projection sur K, et s_0 est la section définie par l'élément neutre de M. Les morphismes d_i et s_j en tout degré sont définis dans [Ill1] VI 2.5. On obtient un autre schéma simplicial $\mathrm{Ner}(M,S)$ lorsqu'on remplace K par S (muni de l'action triviale de M). Il existe un morphisme naturel $\mathrm{Ner}(M,K) \to \mathrm{Ner}(M,S)$ de schémas simpliciaux.

On peut considérer le complexe cotangent du morphisme $\mathrm{Ner}(M,K) \to \mathrm{Ner}(M,S)$ au sens de [Ill1] VII 1.2 (c'est défini plus généralement pour tout morphisme de diagrammes de schémas). On obtient un complexe $\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\mathrm{Ner}(M,S)}$, qui est équivalent à la donnée suivante : sur chaque sommet $M^n \times K$ de $\mathrm{Ner}(M,K)$, on met le complexe cotangent usuel $\mathrm{L}_{M^n\times K/M^n\times S}$; pour tout morphisme d_i, *resp.* s_j dans le diagramme $\mathrm{Ner}(M,K)$, on lui associe le morphisme naturel de complexe cotangent

$$\mathrm{d}_i^* \,\mathrm{L}_{M^n\times K/M^n\times S} \to \mathrm{L}_{M^{n+1}\times K/M^{n+1}\times S}, \quad \mathrm{s}_j^* \,\mathrm{L}_{M^{n+1}\times K/M^{n+1}\times S} \to \mathrm{L}_{M^n\times K/M^n\times S}$$

défini par d_i et s_j respectivement. Dans le langage de [Ill1] VII 1.2, le complexe $\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\mathrm{Ner}(M,S)}$ est un complexe de faisceaux sur le *site total* de Zariski de $\mathrm{Ner}(M,K)$.

On note $\ell_{\mathrm{Ner}(M,K)}$ le complexe de co-Lie de $\mathrm{Ner}(M,K)$, i.e. l'image inverse de $\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\mathrm{Ner}(M,S)}$ par la section unité. On note $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$ le complexe de faisceaux sur le grand topos fpqc associé à $\ell_{\mathrm{Ner}(M,K)}$. Le complexe $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$ appartient à $\mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(M,S)_{\mathrm{fpqc}})$, où $\mathrm{Ner}(M,S)_{\mathrm{fpqc}}$ est le site total du grand site fpqc de $\mathrm{Ner}(M,S)$. On note ℓ_K le complexe de Lie de K. L'idée est que l'on peut mettre une M-structure sur ℓ_K par le complexe $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$. Pour cela Illusie définit un foncteur (*cf.* [Ill1] VI 8.1)

$$\mathrm{ner} : \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(M,S)_{\mathrm{fpqc}})$$

de la manière suivante : pour tout objet U de $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$, on pose

$$\mathrm{ner}_n(U) = \mathrm{p}_n^*(U)$$

où $\mathrm{ner}_n(U)$ est la restriction de $\mathrm{ner}(U)$ sur $M^n \times K$, et p_n est la projection de $M^n \times K$ sur K ; les morphismes de transition de $\mathrm{ner}(U)$ (i.e. des morphismes $\mathrm{d}_i^* \,\mathrm{ner}_n(U) \to \mathrm{ner}_{n+1}(U)$ et $\mathrm{s}_j^* \,\mathrm{ner}_{n+1}(U) \to \mathrm{ner}_n(U)$ pour tout n, i, j qui vérifient la condition de cocyle usuelle) sont induits par la M-structure de U. Illusie montre que (*cf.* [Ill1] VI 8.4.2.1) : ner est pleinement fidèle, et son image essentielle se compose des objets *quasi-cartésiens* de $\mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(M,S)_{\mathrm{fpqc}})$.

Ce dernier théorème implique que $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$ appartient à l'image essentielle du foncteur ner. Grâce à la pleine fidélité on peut définir $\underline{\ell}_K^M$ comme l'unique objet de $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ tel que

$$\mathrm{ner}(\underline{\ell}_K^M) \cong \underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}.$$

Les propriétés (e.g. le triangle fondamental) de $\underline{\ell}_K^M$ se déduisent des mêmes propriétés de $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$. La déformation M-équivariante de K est caractérisée par $\underline{\ell}_K^M$, parce qu'elle est équivalente à la déformation de $\mathrm{Ner}(M,K)$ donc caractérisée par $\underline{\ell}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$, *cf.* [Ill1] VII 2.3.

On remarque que l'objet défini dans [Ill1] est en fait le complexe *cotangent* équivariant L_K^M. Il est défini plus généralement pour tout schéma K muni d'une action par M, i.e. K n'est pas nécessairement un schéma en groupes. La définition de L_K^M est similaire de celle de $\underline{\ell}_K^M$: à chaque étape on remplace le complexe de co-Lie ℓ par le complexe cotangent L, et le foncteur ner de $\mathrm{Ner}(M,S)$ par celui de $\mathrm{Ner}(M,K)$. La définition de L_K^M n'est valable que sur le *grand* topos fpqc. En fait, pour la pleine fidélité de ner on doit appliquer [Ill1] VI 8.4.2.1 (*cf.* §4.6.1) à $\mathrm{Ner}(M,K)$. En général les morphismes d_i de $\mathrm{Ner}(M,K)$ ne sont pas plats,[3] donc l'hypothèse de [Ill1] VI 8.4.2.1 n'est pas vérifiée pour le petit topos fpqc de $\mathrm{Ner}(M,K)$.

Ici nous rappelons la définition de $\underline{\ell}_K^M$ sur le grand topos fpqc d'une manière similaire à celle de L_K^M. On verra dans §4.8 qu'en fait on peut définir $\underline{\ell}_K^M$ sur le petit topos de Zariski (car les d_i et s_j de $\mathrm{Ner}(M,S)$ sont des isomorphismes locaux au sens de §4.6.3).

La situation est plus compliquée pour les schémas en modules. Soit A un anneau commutatif, et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. Comme A contient plus de structure qu'un monoïde, la construction précédente ne s'applique pas directement. Nous expliquons la définition de ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ par Illusie, et nous renvoyons le lecteur à [Ill1] pour la relation avec la théorie des déformations. Le point est qu'une résolution particulière de A, appelée le «complexe de Eilenberg-MacLane stable», permet de décrire la A-structure sur ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ par l'action d'un anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\, A(1)]$ dans la catégorie des diagrammes. Ici $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\, A(1)$ est un diagramme de $\mathbb{Z}$–modules qui est muni d'une structure de monoïde, et $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\, A(1)]$ est le diagramme obtenu en appliquant $\mathbb{Z}[-]$ en chaque sommet. Cela nous permet d'imiter la construction précédente de $\underline{\ell}_K^M$ pour $M = \mathrm{C}_{\textbf{.}}\, A(1)$.

Plus précisément, dans [Ill1] VI 9.2 et 11.1 (voir aussi §4.4 de cette thèse), Illusie construit le foncteur $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$, qui est un foncteur de la catégorie des $\mathbb{Z}$–modules dans celle des diagrammes de $\mathbb{Z}$–modules. Soit V un $\mathbb{Z}$–module. Alors tous les sommets de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\, V(1)$ sont de type $V \oplus ... \oplus V$. Le nom de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$ vient de sa relation avec la résolution standard. Dans [Ill1] VI 9.5 et 11.5.2.2, Illusie définit un autre foncteur $\Delta^2 \text{–}^{\mathrm{red}}(-1)$ de la catégorie des diagrammes de $\mathbb{Z}$–modules de type $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$, dans celle des $\mathbb{Z}$–modules simpliciaux. Ici Δ est l'opérateur de sous-objet diagonal, red est l'objet simplicial réduit associé, et (-1) est la translation. Il existe un quasi-isomorphisme canonique

$$\Delta^2(\mathrm{C}_{\textbf{.}}\, V(1))^{\mathrm{red}}(-1) \to V \tag{4.4}$$

qui est fonctoriel en V.

On note $\mathbb{Z}[-]$ le foncteur de $\mathbb{Z}$–module libre engendré par un ensemble. Dans

3. Par exemple, si A est un anneau, K est un schéma en A-modules non-trivial, et $M = A^{\mathrm{mon}}$ est le monoïde multiplicatif sous-jacent de A, alors l'action par l'élément 0 de A sur K n'est pas plat.

[Ill1] VI 9.5, Illusie considère le foncteur

$$\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[-] := \Delta^2(\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,\mathbb{Z}[-](1))^{\mathrm{red}}(-1) \tag{4.5}$$

(c'est la composition de $\mathbb{Z}[-]$ avec le foncteur dans l'équation 4.4), et l'appelle le *stabilisé* de $\mathbb{Z}[-]$. Alors $\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ n'est plus quasi-isomorphe à V, mais la troncation $\tau_{\geq -1}\,\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ en degré -1 de $\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ est une résolution de V. (Ici $\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ est le complexe associé au $\mathbb{Z}$–module simplicial $\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ via Dold-Kan.) Ce dernier résultat était démontré par Henri Cartan, et utilisé dans un article antérieur de L.Breen. On remarque que, par définition les composantes de $\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[V]$ sont libres sur $\mathbb{Z}$.

La structure de monoïde de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)$ est induite par la multiplication de A. Cela implique que $\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A]$ est un anneau simplicial. Si V est un A-module, alors $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,V(1)$ devient naturellement un $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)$-module. Les équations 4.4 et 4.5 définissent un diagramme ([Ill1] VI 11.5.2.2) commutatif à isomorphisme près :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) \arrow[r, "\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)"] \arrow[dr, "\mathrm{res}"'] & \mathrm{D}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) \arrow[d, "\Delta^{2_\mathrm{red}}(-1)"] \\
& \mathrm{D}(\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})
\end{tikzcd} ,$$

où res est la restriction de scalaire par $\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A] \to A$. La propriété de $\tau_{\geq -1}\,\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A]$ implique une équivalence de catégorie

$$\mathrm{res} : \mathrm{D}^{[0,1]}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{D}^{[0,1]}(\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}).$$

(On remarque que c'est ici le $\overset{\mathrm{L}}{\otimes}$ apparaît : il vient de l'isomorphisme

$$A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}} \cong \tau_{\geq -1}\,\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}.)$$

A partir de cela, l'image essentielle de la restriction de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$ sur $\mathrm{D}^{[0,1]}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ est facile à déterminer : $L \in \mathrm{D}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ appartient à cette image essentielle si et seulement si c'est le cas quand on oublie l'action de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)$ sur L, *cf.* [Ill1] VI 11.5.2.4 ou §4.4.2, la proposition 4.7 de cette thèse.

Maintenant on construit le complexe ${}_A\underline{\ell}_G^{\vee}$. Le foncteur $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$ définit le diagramme de schémas $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,G(1)$, qui est muni d'une action de $\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)$. On considère le nerf $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1), \mathrm{C}_{\textbf{.}}\,G(1))$. D'après [Ill1] VI 8.1 il existe un foncteur

$$\mathrm{ner}^{\circ} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}}) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1), \mathrm{C}_{\textbf{.}}\,G(1))_{\mathrm{fpqc}})$$

similaire de ner, tel que son image essentielle est caractérisé d'une manière similaire. Le même argument que précédemment définit $L \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ par l'équation

$$\mathrm{ner}^{\circ}(L) \cong \underline{\ell}^{\vee}_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\textbf{.}}\,A(1), \mathrm{C}_{\textbf{.}}\,G(1))},$$

où $\underline{\ell}^{\vee}_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}A(1),\mathrm{C}_{\bullet}G(1))}$ est le complexe de Lie de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}A(1),\mathrm{C}_{\bullet}G(1))$. Or le résultat du paragraphe précédent caractérise l'image essentielle de $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$, et on voit facilement que L lui appartient (car G est d'intersection complète donc L appartient à $\mathrm{D}^{[0,1]}$). On peut donc définir ${}_A\underline{\ell}^{\vee}_G \in \mathrm{D}^{[0,1]}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_{S_{\mathrm{fpqc}}})$ tel que

$$\mathrm{C}_{\bullet}\,{}_A\underline{\ell}^{\vee}_G(1) \cong L.$$

Quelques remarques sur la généralisation ${}_A\ell^{\vee}_G$ de ${}_A\underline{\ell}^{\vee}_G$ au petit topos de Zariski. Le point est que les foncteurs $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ et $\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[-]$ ne dépendent pas du choix du topos. En fait, comme la définition originelle de complexe cotangent est sur le topos de Zariski (mais parfois on considère le complexe fpqc associé), au point de vu de complexe de Lie c'est même plus naturel de considérer ${}_A\ell^{\vee}_G$ (on remarque qu'on ne considère pas la relation de ${}_A\ell^{\vee}_G$ avec la déformation). Dans ce cas il faut redémontrer le théorème sur la pleine fidélité et l'image essentielle de ner°. Le théorème [Ill1] VI 8.4.2.1 ne s'applique pas directement pour le petit site de Zariski (*cf.* §4.6.2 pour la raison), mais on contourne ce problème par une astuce (on construit dans §4.6 un autre site dont le topos est équivalent au topos de Zariski, et sur lequel on peut appliquer [Ill1] VI 8.4.2.1). Les propriétés de ${}_A\ell^{\vee}_G$ qu'on utilise sont de nature plus élémentaire, e.g. le triangle distingué fondamental ou l'isomorphisme ${}_A\ell^{\vee}_G = \omega^{\vee}_G$ pour G lisse. Tout vient facilement des mêmes propriétés pour $\ell^{\vee}_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}A(1),\mathrm{C}_{\bullet}G(1))}$.

4.3 Les dg-anneaux

Dans cette section on rappelle les rudiments sur les dg-anneaux (anneaux différentiels gradués) utilisés dans [Ill1], qui sont essentiels dans la construction de ${}_A\underline{\ell}^{\vee}_G$. Dans cette thèse on ne considère que des dg-anneaux de degré ≤ 0. Par définition, un *dg-anneau* $P_{\bullet}$ est un complexe de $\mathbb{Z}$–modules

$$\ldots \to P_2 \to P_1 \to P_0$$

muni d'une multiplication

$$P_{\bullet} \otimes P_{\bullet} \to P_{\bullet}$$

et un élément unité dans P_0, tel que les axiomes usuels d'anneau sont vérifiés. (Ici $P_{\bullet}\otimes P_{\bullet}$ est le complexe total d'un double complexe.) Un $P_{\bullet}$*–module* $M_{\bullet}$ est un complexe de $\mathbb{Z}$–modules muni d'une action de $P_{\bullet}$ (i.e. d'un morphisme $P_{\bullet} \otimes M_{\bullet} \to M_{\bullet}$ vérifiant les axiomes usuels). On note $\mathrm{C}(P_{\bullet})$ la catégorie des $P_{\bullet}$–modules.[4] La catégorie dérivée $\mathrm{D}(P_{\bullet})$ est définie comme la localisation de $\mathrm{C}(P_{\bullet})$ par l'ensemble des quasi-isomorphismes. La même définition vaut pour $\mathrm{D}^{+}(P_{\bullet}), \mathrm{D}^{-}(P_{\bullet})$ et $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(P_{\bullet})$.

4. Attention, ce n'est pas la catégorie des *complexes* de $P_{\bullet}$–modules.

Soient A et B deux anneaux (commutatifs) usuels. Alors la définition de

$$A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} B$$

dépend du choix d'une résolution de A (ou de B). Soit $P_{\bullet}$ est une résolution plate de A qui est muni d'une structure de dg-anneau tel que $P_{\bullet} \to A$ est un morphisme de dg-anneau. Alors le complexe $P_{\bullet} \otimes B$ est aussi un dg-anneau. On peut définir

$$\mathrm{D}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} B) := \mathrm{D}(P_{\bullet} \otimes B).$$

La catégorie $\mathrm{D}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} B)$ est bien définie à équivalence près, car la proposition [Ill1] VI 10.3.15 implique qu'un quasi-isomorphisme de dg-anneaux induit une équivalence entre leurs catégories dérivées. Comme $\mathbb{Z}$ est de tor-dimension 1, on peut prendre $P_{\bullet}$ d'une forme plus simple :

$$P_{\bullet} = [P_1 \to P_0]$$

où P_0 est un anneau plat sur $\mathbb{Z}$, la flèche est injective, et l'image de P_1 est un idéal de P_0 ; la multiplication de $P_{\bullet}$ est induite par celle de P_0 parce que P_1 est un idéal, *cf.* [Ill1] VI 10.3.19.

Soit maintenant A un anneau commutatif et S un schéma. On note $\mathcal{O}_S$ le faisceau structurel du petit site de Zariski de S.

Lemme 4.4. *Si S est plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, alors $A \otimes \mathcal{O}_S$ est un représentant canonique de $A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_S$.*

Démonstration. On prend une résolution $[P_1 \to P_0]$ de A de la forme précédente. Alors $[P_1 \otimes \mathcal{O}_S \to P_0 \otimes \mathcal{O}_S]$ est un représentant de $A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_S$. Il suffit de montrer que la suite

$$0 \to P_1 \otimes \mathcal{O}_S \to P_0 \otimes \mathcal{O}_S \to A \otimes \mathcal{O}_S \to 0$$

est exacte. Pour cela on peut localiser en chaque point de S. Soit s un point de S. Par hypothèse, $\mathcal{O}_{S,s}$ est plat sur $\mathbb{Z}$. Donc la suite est exacte après tensorisation par $\mathcal{O}_{S,s}$. □

Corollaire 4.5. *Si S est plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, alors il existe une équivalence de catégorie triangulée canonique* $\mathrm{D}^*(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_S) \cong \mathrm{D}^*(A \otimes \mathcal{O}_S)$ *pour* $* = \varnothing, +, -, b$.

On remarque que dans [Ill1], la résolution de A qui est essentielle dans la définition de $\mathrm{D}(A \overset{\mathrm{L}}{\otimes} \mathcal{O}_S)$ est le complexe $\tau_{\geq -1} \,\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A]$ de §4.2.2.

4.4 Le foncteur $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$

4.4.1

Dans §4.4 on rappelle la définition du foncteur $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$ de [Ill1]. Le foncteur $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-(1)$ est défini comme la composition de deux foncteurs $-(1)$ et $\mathrm{C}_{\textbf{.}}-$. Commençons par le foncteur $-(1)$. On fixe d'abord quelques notations pour les objets (multi-)simpliciaux et les (multi-)diagrammes.

On note Δ la catégorie des simplexes standards ([Ill1] I 1.1). Par définition les objets de Δ sont tous les ensembles finis $[n] := \{0, 1, ..., n\}$, où $n \in \mathbb{N}$. Les morphismes de Δ sont engendrés (par la composition) par les flèches

$$\mathrm{d}^i : [n] \to [n+1], \quad i = 0, ..., n+1$$

$$\mathrm{s}^j : [n+1] \to [n], \quad j = 0, ..., n$$

pour tout n, i, j, où d^i est le morphisme croissant en oubliant i, et s^j est le morphisme croissant en répétant j. On note Δ° la catégorie opposée de Δ.

On note $\overline{\Delta}$ la catégorie des simplexes standards augmentés. Par définition les objets de $\overline{\Delta}$ sont tous les objets de Δ, avec un objet supplémentaire : l'ensemble vide $\varnothing$. Les morphismes de $\overline{\Delta}$ sont engendrés par les $\mathrm{d}^i, \mathrm{s}_j$ comme précédemment et l'unique morphisme $\varnothing \to [0]$. On note $\overline{\Delta}'$ la catégorie des simplexes stricts augmentés ([Ill1] VI 4.1). C'est la sous-catégorie de $\overline{\Delta}$ en gardant les mêmes objets mais en oubliant tous les morphismes *non-injectifs* (i.e. les morphismes composés par au moins un s^j).

Soit T une catégorie, et $r \in \mathbb{N}$. Par définition, un objet *r-simplicial* de T est un foncteur de $(\Delta^\circ)^r$ dans T. On note $\mathrm{Simp}_r(T)$ la catégorie des objets r-simpliciaux de T.

On utilise aussi la langage des (multi-)diagrammes de [Ill1] VI 5.6 b). Par définition, un 1-*diagramme* de T est un foncteur d'une petite catégorie dans T. Soit $X : I \to T$ un tel foncteur. La catégorie I est appelée le *type* de X. Pour deux 1-diagrammes $X : I \to T$ et $Y : J \to T$ de T, un morphisme de X vers Y consiste en un couple (u, v), où u est un foncteur de I vers J, et v est un morphisme de foncteur entre X et $Y \circ u$. On obtient la catégorie des 1-diagrammes de T, et on la note par $\mathrm{Diag}_1(T)$. Par récurrence, on peut définir la catégorie $\mathrm{Diag}_r(T)$ des r-diagrammes de T (avec la notion de type) pour tout $r \geq 1$. En fait, par définition un r-diagramme de T est juste un 1-diagramme de $\mathrm{Diag}_{r-1}(T)$. Le foncteur de type s'étend en un foncteur de $\mathrm{Diag}_r(T)$ à $\mathrm{Diag}_{r-1}(\mathrm{Cat})$, où (Cat) est la catégorie des petites catégories. On dit un multi-diagramme ou simplement un *diagramme* pour un r-diagramme pour un certain $r \geq 1$ (chaque fois la valeur de r sera claire dans le contexte).

Supposons que T est une catégorie abélienne. On va définir le foncteur

$$-(1) : T \to \mathrm{Diag}_2(T),$$

tel que pour tout objet X de T, le type du 2-diagramme $X(1)$ est égal à un 1-diagramme particulier S_1. En fait,

$$\mathrm{S}_1 : \overline{\Delta}' \to (\mathrm{Cat})$$

est un 1-diagramme de (Cat) de type $\overline{\Delta}'$ défini dans [Ill1] VI 9.2. Par définition,

$$\mathrm{S}_1([n]) = (\Delta^\circ)^{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$$

où $[-1] := \varnothing$ et $(\Delta^\circ)^0 = \mathrm{pt}$ en tant que catégorie pointée. Pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $i = 0, ..., n+1$, on définit le morphisme $\mathrm{d}^i : \mathrm{S}_1([n]) \to \mathrm{S}_1([n+1])$ par la formule

$$\mathrm{d}^i(x_0, ..., x_n) = (x_0, ..., x_{i-1}, [1], x_i, ..., x_n),$$

où $(x_0, ..., x_n)$ est un élément de $(\Delta^\circ)^{n+1} = \mathrm{S}_1([n])$. Les morphismes d^i vérifient bien la loi de composition de $\overline{\Delta}'$, donc S_1 est un foncteur. Voici un dessin pour S_1 :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{pt} \arrow[r, "\mathrm{d}^0"] & \Delta^\circ \arrow[r, shift left, "\mathrm{d}^0"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{d}^1"'] & \Delta^\circ \times \Delta^\circ \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & ... \end{tikzcd}$$

Soit X un 2-diagramme de T de type S_1. On a la description concrète de X comme suivant : la donnée de X est équivalente à la donnée du système

$$(X^r, \mathrm{d}^{r,i})_{r \in \mathbb{N}, 0 \leq i \leq r}$$

où pour tout r et tout i, $X^r \in \mathrm{Simp}_r(T)$ et $\mathrm{d}^{r,i} : X^r \to \partial_i^1 X^{r+1}$ un morphisme de $\mathrm{Simp}_r(T)$ dont la loi de composition est déterminée par celle de $\overline{\Delta}'$. Ici ∂_i^1 est le foncteur de la i-ième face de degré 1 : il est égal à la composition avec $\mathrm{d}^i : (\Delta^\circ)^r \to (\Delta^\circ)^{r+1}$ défini précédemment. En fait, par définition on a $X^r = X([r-1])$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Voici un dessin pour un 2-diagramme de type S_1. (Les sommets de X^r sont notés par $X^r_{p_1,...,p_r}$, et on ne dessine que des X^0, X^1, X^2 avec les sommets de degré ≤ 2. Il existe aussi un morphisme $\mathrm{d}^{1,0} : X^1 \to \partial_0^1 X^2$ qui n'est pas décrit dans le dessin.)

$$\begin{tikzcd} & X^1_1 \arrow[r, dotted, "\mathrm{d}^{1,1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X^2_{11} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X^2_{01} \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\ X^0 \arrow[ur, dotted, "\mathrm{d}^{0,0}"] & X^1_0 \arrow[r, dotted, "\mathrm{d}^{1,1}"] & X^2_{01} \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & X^2_{00} \end{tikzcd}$$

Comme la catégorie T est abélienne, pour tout r on peut définir le foncteur de translation des objets r-simpliciaux

$$[1, ..., 1] : \mathrm{Simp}_r(T) \to \mathrm{Simp}_r(T).$$

Via la correspondance de Dold-Kan, il devient la translation usuelle des complexes. Voir [Ill1] VI 9.1.7 pour la définition précise. Le lecteur trouvera aussi dans [W] 8.4 la définition des foncteurs de Dold-Kan. La définition suivante apparaît dans [Ill1] 9.2.

Définition 4.6. On définit le foncteur

$$-(1) : T \to \mathrm{Diag}_2(T)$$

tel que pour tout objet X de T, $X(1)$ est le 2-diagramme de T de type S_1 qui vérifie (avec la description précédente)

$$X(1)^r = X[1, ..., 1]$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$, où le X à droite est l'objet r-simplicial constant de T de valeur X ; pour $i = 0, ..., r$, on définit

$$\mathrm{d}^{r,i} = \mathrm{id}_{X(1)^r} .$$

Voici un dessin pour $X(1)$, où on trouve $X(1)^r$ pour $r = 0, 1, 2$. Le 0 dans le dessin est l'objet initial de T.

$$\begin{tikzcd}
 & X \oplus X \arrow[r, dotted, "\mathrm{id}"] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & X \oplus X \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & 0 \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
 & X \arrow[r, dotted, "\mathrm{id}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 0 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
X \arrow[ur, dotted, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r, dotted, "\mathrm{id}"] & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 0
\end{tikzcd}$$

On rappelle la définition du foncteur $\mathrm{C}_{\bullet}-$ dans [Ill1] VI 11.1.2. Soit T' une catégorie qui possède des sommes quelconques. Alors $\mathrm{C}_{\bullet}-$ est un foncteur de $\mathrm{Diag}_1(T')$ dans $\mathrm{Simp}_1(T')$ défini comme la suite. Soit $U : I \to T'$ un 1-diagramme de T'. Alors $\mathrm{C}_{\bullet} U$ est un objet simplicial de T', dont le n-ième étage est

$$\mathrm{C}_n U = \coprod_{r_0 \to ... \to r_n} U_{r_0}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où $r_0 \to ... \to r_n$ parcourt toutes les chaînes de longueur n de flèches dans I, et $\coprod$ est la somme dans T'. On décrit les morphismes d_i dans $\mathrm{C}_{\bullet} U$. Pour $i = 0, ..., n+1$, $\mathrm{d}_i : \mathrm{C}_{n+1} U \to \mathrm{C}_n U$ envoie le facteur indexé par $r_0 \to ... \to r_{n+1}$ vers celui indexé par $r_0 \to ... \to r_{i-1} \to r_{i+1} \to ... \to r_{n+1}$, où on a composé les flèches $r_{i-1} \to r_i \to r_{i+1}$. Sur le facteur U_{r_0} de $\mathrm{C}_{n+1} U$, d_0 est le morphisme fonctoriel $U_{r_0} \to U_{r_1}$, et d_i est le morphisme identité $U_{r_0} \to U_{r_0}$ pour $i = 1, ..., n+1$. On obtient une description similaire pour les morphismes s_j, i.e. on répète r_j dans l'index. On voit que les d_i et s_j vérifient la loi de composition dans Δ°, donc $\mathrm{C}_{\bullet} U$ est un objet simplicial.

Soit T une catégorie abélienne. Le foncteur

$$\mathrm{C}_{\bullet} -(1) : T \to \mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 T)$$

est alors défini comme la composition de $-(1)$ et $\mathrm{C}_{\bullet} -$, i.e. dans la définition de $\mathrm{C}_{\bullet} -$, on prend U égal à

$$X(1) : \overline{\Delta}' \to \mathrm{Diag}_1(T), \quad [n] \mapsto X(1)^{n+1}$$

pour tout objet X de T. On rappelle la définition de la somme dans $\mathrm{Diag}_1(T)$. Soient $X : I \to T$ et $Y : J \to T$ deux objets de $\mathrm{Diag}_1(T)$. Leur somme $X \sqcup Y : I \sqcup J \to T$ est l'extension évidente de X et Y à $I \sqcup J$, la réunion disjointe des catégories I et J. On obtient pour tout objet X de T et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{C}_n X(1) = \bigsqcup_{[m_0] \to \ldots \to [m_n]} X(1)^{m_0+1}$$

où $[m_0] \to \ldots \to [m_n]$ parcourt toutes les chaînes de longueur n des flèches de $\overline{\Delta}'$ (on rappelle que $m_i \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$). Voici un dessin pour (la partie de degré ≤ 2) de $\mathrm{C}_0 X(1)$:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & X \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 0 . \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
X & 0 & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 0
\end{tikzcd}$$

On remarque que $\mathrm{C}_{\bullet} X(1)$ est un 2-diagramme de T de type $\mathrm{C}_{\bullet} \mathrm{S}_1$.

4.4.2

On note $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ la catégorie des $\mathbb{Z}$–modules. Soit A un anneau commutatif. Comme A est un objet de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$, on peut considérer les 2-diagrammes $A(1)$ et $\mathrm{C}_{\bullet} A(1)$ de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$. On rappelle leur structures de monoïde définies dans [Ill1] VI 11.1.

On rappelle que $A(1)$ est un 2-diagramme de $\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}}$ de type S_1, où S_1 est le 1-diagramme de (Cat) de type $\overline{\Delta}'$ défini dans §4.4.1. Il existe une structure de monoïde évidente sur la catégorie $\overline{\Delta}'$: la multiplication est définie par le foncteur

$$\overline{\Delta}' \times \overline{\Delta}' \to \overline{\Delta}', \quad ([m], [n]) \mapsto [m+n+1],$$

où le morphisme $(\mathrm{d}^i, \mathrm{d}^j)$ sur $([m], [n])$ est envoyé sur le morphisme $\mathrm{d}^i \, \mathrm{d}^{m+j+1}$ sur $[m+n+1]$; l'élément neutre de $\overline{\Delta}'$ est l'objet $[-1]$. Au-dessus de $\overline{\Delta}'$ il existe une structure de monoïde pour S_1 : la multiplication $\mathrm{S}_1 \times \mathrm{S}_1 \to \mathrm{S}_1$ est juste les identifications $(\Delta^\circ)^{m+1} \times (\Delta^\circ)^{n+1} = (\Delta^\circ)^{m+n+2}$ pour tout $m, n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$. Finalement on peut définir le monoïde $A(1)$. Il suffit de définir la multiplication $A(1) \times A(1) \to A(1)$ dans $\mathrm{Diag}_2(\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}})$, qui est équivalente aux morphismes d'objets $(r+s)$-simpliciaux

$$A(1)^r \times A(1)^s \to A(1)^{r+s}$$

pour tout $r, s \in \mathbb{N}$. En fait, d'après la définition 4.6 pour $A(1)^r$, on voit qu'un tel morphisme est induit par la *multiplication* de A de façon évidente. Par la fonctorialité de $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ et la commutativité de $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ avec $\times$, la multiplication de $A(1)$ définit une multiplication sur $\mathrm{C}_{\bullet} A(1)$ tel que $\mathrm{C}_{\bullet} A(1)$ est aussi un monoïde. (On remarque que les définitions de produit sont différentes dans $\mathrm{Diag}_1(T)$ et dans $\mathrm{Simp}_1(T)$: le produit de deux objets de $\mathrm{Diag}_1(T)$ de type I et J respectivement est un 1-diagramme de T de type $I \times J$, or le produit de deux objets Z, W de $\mathrm{Simp}_1(T)$ est l'objet simplicial défini par $(Z \times W)_n = Z_n \times W_n$. La définition de produit de $\mathrm{Diag}_1(T)$ s'étend à $\mathrm{Diag}_r(T)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.)

On note $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$ l'objet de $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}})$ obtenu en appliquant $\mathbb{Z}[-]$ sur chaque sommet de $\mathrm{C}_{\bullet} A(1)$. La multiplication de $\mathrm{C}_{\bullet} A(1)$ induit un morphisme

$$\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \otimes \mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \to \mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$$

où $\otimes$ est défini comme $\times$ de $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}})$ mais en chaque sommet on remplace $\times$ par $\otimes$. Alors $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$ est muni d'une structure d'anneau au sens de [Ill1] VI 11.2.2, et on peut considérer les $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$-modules. Par définition, un $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$-*module* est un objet de $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}})$ de type $\mathrm{C}_{\bullet} \mathrm{S}_1$ muni d'une action de $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$ (par $\otimes$ comme plus haut). Par exemple $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$ lui-même est un $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$-module.

Soit S un schéma. On note $\mathcal{O}_S$ l'anneau structurel de S, et $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_S$-modules. On note

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{C}_{\bullet} \mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$$

la catégorie des 2-diagrammes de $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)$ de type $\mathrm{C}_{\bullet} \mathrm{S}_1$, et

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$$

la catégorie des $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \otimes \mathcal{O}_S$-modules (au sens du paragraphe précédent). En oubliant l'action de $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)]$, on obtient un foncteur naturel de $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$ dans $\mathrm{Mod}(\mathrm{C}_{\bullet} \mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$.

Le foncteur $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ définit un foncteur exact

$$\mathrm{C}_{\bullet}-(1) : \mathrm{Mod}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\bullet} A(1)] \otimes \mathcal{O}_S), \quad V \mapsto \mathrm{C}_{\bullet} V(1).$$

La propriété clé de $\mathrm{C}_{\bullet}-(1)$ est montrée dans la proposition suivante, où $\mathrm{D}^*(\ldots)$ est la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(\ldots)$. Sa démonstration par [Ill1] dépend de la résolution $\tau_{\geq -1} \mathrm{N}\, \mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A]$, voir §4.2.2.

Proposition 4.7. *Supposons que S est plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$. *Alors le foncteur*

$$\mathrm{C}_{\textstyle .}\,\text{–}(1) : \mathrm{D}^{[0,1]}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_{\textstyle .}\, A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle se compose des objets Y tels que, en tant qu'objet de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{C}_{\textstyle .}\,\mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$, *$Y$ est dans l'image essentielle de* $\mathrm{C}_{\textstyle .}\,\text{–}(1) : \mathrm{D}^{[0,1]}(\mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{C}_{\textstyle .}\,\mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$.

Démonstration. Via le corollaire 4.5, c'est un cas particulier de [Ill1] VI 11.5.2.4 en prenant $\mathcal{O} = \mathcal{O}_S$. □

4.5 Le foncteur ner°

4.5.1

Soit S un schéma quelconque et A un anneau commutatif. Dans §4.5 on considère l'action de $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, S(1)$, et on définit le diagramme Ner et le foncteur ner° associé.

On définit d'abord $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, S(1)$. On applique la définition 4.6 lorsque T est égal à la catégorie des faisceaux fpqc abéliens sur S, et $X = S$. On obtient le 2-diagramme $S(1)$ de T. Notons que les sommets de $S(1)$ sont représentables par des schémas sur S. En fait, comme S est l'objet final de T, tous les sommets de $S(1)$ sont isomorphes à S. En particulier, pour tout $r \in \mathbb{N}$, $S(1)^r$ est le schéma r-simplicial constant de valeur S. Si l'on note (Sch/S) la catégorie des schémas sur S, alors $S(1)$ est un 2-diagramme de (Sch/S). En appliquant $\mathrm{C}_{\textstyle .}\,\text{–}(1)$ on obtient le 2-diagramme $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, S(1)$.

On considère l'action triviale de A sur S. Elle induit une action de $A(1)$ sur $S(1)$ dans $\mathrm{Diag}_2(\mathrm{Sch}/S)$, puis une action de $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, S(1)$ dans $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1\,\mathrm{Sch}/S)$. L'action de $A(1)$ sur $S(1)$ n'est plus «triviale» : en fait, en chaque sommet cette action est triviale, mais le type de cette action est la multiplication de S_1 qui est non-triviale. La même remarque vaut pour l'action de $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_{\textstyle .}\, S(1)$.

4.5.2

On rappelle la définition du diagramme Ner par [Ill1] VI 2.5.1, 11.1.2.4. Soit T une catégorie qui possède des produits finis et un objet final. Soit K un objet de T, M un monoïde de T qui agit sur K, i.e. il existe un morphisme $M \times K \to K$ vérifiant la condition de cocyle usuelle. On lui associe l'objet simplicial

$$\mathrm{Ner}(M, K) \in \mathrm{Simp}_1(T)$$

dont on explique la définition. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le n-ième étage de $\mathrm{Ner}(M, K)$ est égal à $\mathrm{Ner}_n(M, K) = M^n \times K$. On définit le morphisme $\mathrm{d}_i : \mathrm{Ner}_{n+1}(M, K) \to \mathrm{Ner}_n(M, K)$ comme suit : pour tout $(a_0, ..., a_n, x) \in M^{n+1} \times K$,

$$\mathrm{d}_0(a_0, ..., a_n, x) = (a_1, ..., a_n, a_0 x)$$

$$\mathrm{d}_i(a_0, ..., a_n, x) = (a_0, ..., a_{i+1}a_i, ...a_n, x), \quad i = 1, ..., n-1$$

$$\mathrm{d}_n(a_0, ..., a_n, x) = (a_0, ..., a_{n-1}, x).$$

Pour les morphismes $\mathrm{s}_j : \mathrm{Ner}_n(M, K) \to \mathrm{Ner}_{n+1}(M, K)$, on a :

$$\mathrm{s}_j(a_0, ..., a_{n-1}, x) = (a_0, ..., a_{j-1}, 1, a_j, ..., a_{n-1}, x), \quad j = 0, ..., n.$$

(On prétend que T est la catégorie des ensembles, mais ces formules sont valables en toute généralité.) Avec les d_i et s_j, $\mathrm{Ner}(M, K)$ est un objet simplicial.

On prend $T = \mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}/S)$. L'action de $\mathrm{C}_. A(1)$ sur $\mathrm{C}_. S(1)$ dans T définit l'objet

$$\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_. A(1), \mathrm{C}_. S(1)) \in \mathrm{Simp}_2(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}/S).$$

En particulier, on a $\mathrm{Ner}_n(\mathrm{C}_. A(1), \mathrm{C}_. S(1)) = \mathrm{C}_. A(1)^n \times \mathrm{C}_. S(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit X un (multi-)diagramme de schémas. On va définir une catégorie appelée $\mathrm{Mod}(X)$, qui est similaire (mais différente !) au topos total Top° de [Ill1] VI 5.2. La catégorie $\mathrm{Mod}(X)$ est importante pour nous car le complexe de Lie appartient à la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(X)$ pour un certain X. On fixe d'abord la notation d'image inverse.

Notation. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de schéma. On note f^{-1} le foncteur d'image inverse ensembliste, et f^* l'image inverse de $\mathcal{O}_X$-module, dans tous les topos : Zariski, fpqc, *etc.*.

Une remarque pour cette notation dans la littérature. Dans [SGA4] le foncteur d'image inverse ensembliste est noté par f^* lorsque le topos ambiant n'est pas annelé ; quand il est annelé c'est f^{-1} qui représente l'image inverse ensembliste, et f^* pour celui de $\mathcal{O}_X$-module. Dans [Ill1] VI, VII, Illusie travaille avec un grand site, donc tout morphisme de schéma est un morphisme de localisation. Dans ce cas il n'y a pas de différence entre l'image inverse ensembliste et de $\mathcal{O}_X$-module, donc Illusie utilise f^* partout. Dans notre cas, comme on travaille avec le petit topos de Zariski, f^{-1} et f^* sont bien différents. En particulier, les théorèmes dans [Ill1] VI 8 qui sont écrits avec f^*, ne sont valables que pour notre f^{-1}.

Maintenant on définit la catégorie $\mathrm{Mod}(X)$. Soit I une (petite) catégorie, et X un 1-diagramme de schémas de type I. Pour toute flèche $f : i \to j$ de I, on note $f : X_i \to X_j$ le morphisme de schémas associé. On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_Y$-modules pour tout schéma Y. On note $\mathrm{ob}\, I$ l'ensemble des objets de I, et $\mathrm{fl}\, I$ l'ensemble des flèches de I.

Définition 4.8. Soit X un 1-diagramme de schémas de type I. On note

$$\mathrm{Mod}(X)$$

la catégorie des systèmes $(M_i, M_f)_{i\in \mathrm{ob}\, I, f\in \mathrm{fl}\, I}$, où

$$M_i \in \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_i})$$

pour tout i, et

$$M_f : M_i \to f^* M_j$$

est un morphisme de $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_i})$ pour toute $f : i \to j$. On suppose que les M_f vérifient la condition de cocyle évidente. Les morphismes de $\mathrm{Mod}(X)$ sont les morphismes de système (M_i) compatibles avec tous les M_f.

On appelle M_f les morphismes *de transition* de (M_i, M_f). La définition de $\mathrm{Mod}(X)$ s'étend facilement aux r-diagrammes de schémas pour tout $r \in \mathbb{N}$. La catégorie $\mathrm{Mod}(X)$ est une catégorie abélienne lorsque tous les $f : X_i \to X_j$ sont plats. Dans ce cas on note $\mathrm{D}^*(X)$ la catégorie dérivée de $\mathrm{Mod}(X)$.

Remarque 4.9. La catégorie $\mathrm{D}(X)$ est la bonne catégorie pour définir le complexe de Lie d'un diagramme de schémas en groupes sur le topos de Zariski. En effet, soit S un schéma, G, H deux schémas en groupes sur S, et $f : G \to H$ un morphisme de schémas en groupes sur S. Alors il existe un morphisme naturel de complexe cotangent

$$f^* \mathrm{L}_{H/S} \to \mathrm{L}_{G/S}\,.$$

On note $\ell_G = \mathrm{L}\, e^* \mathrm{L}_{G/S}$ le complexe de co-Lie de G (où e est la section unité), et $\ell_G^\vee = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\ell_G, \mathcal{O}_S)$ le complexe de Lie de G ; on utilise les mêmes notations pour H. Alors le morphisme précédent induit des morphismes

$$\mathrm{L}\, f^* \ell_H \to \ell_G, \qquad \ell_G^\vee \to \mathrm{L}\, f^* \ell_H^\vee.$$

Si l'on note X le diagramme de schémas associé à f, i.e. X possède deux sommets G et H et une flèche f, alors le complexe de Lie de X (au sens de §4.7.1) est un objet de $\mathrm{D}(X)$. Voir §4.7.1 pour les détails.

4.5.3

Maintenant on définit le foncteur ner°. On remarque que notre définition est similaire mais différente de celle dans [Ill1] VI 8.1.5, parce que dans notre définition, f^* est l'image inverse de $\mathcal{O}_X$-module, mais dans [Ill1] VI 8.1.5 f^* représente l'image inverse ensembliste.

On rappelle que, dans le diagramme $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\, A(1), \mathrm{C}_\bullet\, S(1))$ de §4.5.2 il existe deux morphismes

$$\mathrm{d}_0, \mathrm{d}_1 : \mathrm{C}_\bullet\, A(1) \times \mathrm{C}_\bullet\, S(1) \rightrightarrows \mathrm{C}_\bullet\, S(1)$$

entre le 0-ième et le premier étage. Le morphisme d_0 est défini par l'action de $\mathrm{C}_\bullet A(1)$ sur $\mathrm{C}_\bullet S(1)$, et le morphisme d_1 est la projection sur $\mathrm{C}_\bullet S(1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{p}_n : \mathrm{C}_\bullet A(1)^n \times \mathrm{C}_\bullet S(1) \to \mathrm{C}_\bullet S(1)$$

la projection sur $\mathrm{C}_\bullet S(1)$. On a en fait $\mathrm{p}_n = \mathrm{d}_1 \, \mathrm{d}_2 \ldots \mathrm{d}_n$.

Soit M un objet de $\mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$. Alors M est un faisceau sur le diagramme $\mathrm{C}_\bullet S(1)$. L'action de $\mathrm{C}_\bullet A(1)$ sur M est équivalente à un morphisme

$$a_M : \mathrm{d}_1^* \, M \to \mathrm{d}_0^* \, M$$

qui vérifie la condition de cocyle de [Ill1] VI 8.1. Cette notation sera utilisée dans la définition suivante.

Définition 4.10. On définit le foncteur

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1)))$$

comme suit. Pour tout $M \in \mathrm{Mod}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$ et tout $n \in \mathbb{N}$, le n-ième étage de $\mathrm{ner}^\circ(M)$ est égal à

$$\mathrm{ner}^\circ_n(M) = \mathrm{p}_n^* \, M.$$

Les morphismes de transition de $\mathrm{ner}^\circ(M)$ sont définis de la manière suivante ([Ill1] VI 8.1.5) : $\mathrm{ner}^\circ_{n+1}(M) \to \mathrm{d}_i^* \, \mathrm{ner}^\circ_n(M)$ est égal à l'identité pour $i = 1, \ldots, n+1$, et à $(\mathrm{d}_2 \ldots \mathrm{d}_{n+1})^* a_M$ pour $i = 0$; $\mathrm{ner}^\circ_n(M) \to \mathrm{s}_j^* \, \mathrm{ner}^\circ_{n+1}(M)$ est égal à l'identité pour $j = 0, \ldots, n$.

D'après §4.5.1, chaque sommet de $\mathrm{C}_\bullet S(1)$ est isomorphe à S. La restriction de p_n à chaque sommet de $\mathrm{C}_\bullet A(1)^n \times \mathrm{C}_\bullet S(1)$ est isomorphe à la projection $A^m \times S \to S$ pour un certain m, donc p_n est plat. Donc ner° est exact, et on utilise la même notation pour le foncteur dérivé.

Proposition 4.11. *Le foncteur*

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1)))$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle se compose des objets Y de la catégorie à droite, tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}^i(Y)$ est un objet de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1)))$ *qui est dans l'image essentielle de* ner° *de la définition 4.10.*

La démonstration est l'objectif de la section suivante.

4.6 Preuve de la proposition 4.11

4.6.1

La démonstration de la proposition 4.11 se ramène (d'une manière non-évidente) au théorème [Ill1] VI 8.4.2.1. Rappelons d'abord le contexte de [Ill1] VI 8.4.2.1.

On appelle un *topos fibré simplicial* (ou topos fibré au-dessus de Δ°) X la donnée suivante : un topos X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et les morphismes de topos

$$\mathrm{d}_i : X_{n+1} \to X_n \qquad \mathrm{s}_j : X_n \to X_{n+1}$$

pour $i = 0, ..., n+1$ et $j = 0, ..., n$. On suppose que les $\mathrm{d}_i, \mathrm{s}_j$ vérifient la loi de composition dans Δ°.

Soit X un topos fibré simplicial. On appelle le *topos classifiant* $\mathrm{B}\,X$ de X la catégorie des couples (M, a_M), où M est un objet de X_0, et a_M est un morphisme

$$a_M : \mathrm{d}_1^{-1}\, M \to \mathrm{d}_0^{-1}\, M$$

dans X_1, qui vérifie la condition de cocyle usuelle (*cf.* la définition de a_M dans §4.5 ou [Ill1] VI 8.1.1). Les morphismes de $\mathrm{B}\,X$ sont les morphismes de M qui commutent avec a_M.

On appelle le *topos total* $\mathrm{Top}^\circ X$ de X la catégorie des systèmes $(M_n, M_f)_{n\in\mathbb{N}, f\in \mathrm{fl}\,\Delta^\circ}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, M_n est un objet de X_n, et pour tout $f : [m] \to [n]$ dans Δ°,

$$M_f : M_m \to f^{-1}M_n$$

est un morphisme de X_m qui vérifie la condition de cocyle usuelle. Ici $f : X_m \to X_n$ est le morphisme qui apparaît dans la définition d'un topos fibré simplicial. Les morphismes de $\mathrm{Top}^\circ X$ sont les morphismes de M_n commutant avec les M_f. La définition de Top° est similaire à la définition 4.8, sauf qu'ici on utilise f^{-1}. Il existe une version duale Top, qui consiste en les systèmes (M_n, M'_f) où $M'_f : f^{-1}M_n \to M_m$ est dans le sens inverse, *cf.* [Ill1] VI 5.2.

La définition d'un topos fibré simplicial et de Top° se généralise facilement aux topos fibrés quelconques. Par définition, un *topos fibré* sur une catégorie I est l'objet obtenu en remplaçant Δ° par I dans la définition d'un topos fibré simplicial. Les exemples de topos fibrés sont fournis par les diagrammes de schémas. Soit S un 1-diagramme de schémas de type I. On considère par exemple $\widetilde{S_{\mathrm{Zar}}}$ le petit topos de Zariski de S, qui consiste en la donnée suivante : pour tout $i \in \mathrm{ob}\, I$, le petit topos de Zariski $\widetilde{S_{i,\mathrm{Zar}}}$ de schéma S_i, et pour tout $f : i \to j$, le morphisme de topos $f : \widetilde{S_{i,\mathrm{Zar}}} \to \widetilde{S_{j,\mathrm{Zar}}}$ induit par $f : S_i \to S_j$. On obtient une définition similaire pour $\widetilde{S_{\mathrm{fpqc}}}$ le grand topos fpqc.

D'après la définition 4.10 il existe un foncteur

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{B}\,X \to \mathrm{Top}^\circ X$$

défini par les mêmes formules, sauf qu'à chaque fois on remplace * par $^{-1}$.

Soit $\mathcal{O}$ un anneau de $\mathrm{B}\,X$ tel que $a_{\mathcal{O}}$ est un isomorphisme. On note $\mathrm{Mod}(\mathrm{B}\,X)$ la catégorie des $\mathcal{O}$-modules dans $\mathrm{B}\,X$. On note $\mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$ la catégorie des $\mathrm{ner}^\circ\,\mathcal{O}$-modules dans $\mathrm{Top}^\circ\,X$. Le foncteur ner° définit un foncteur exact

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{Mod}(\mathrm{B}\,X) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$$

(car f^{-1} est exact pour tout morphisme de topos f).

Avant d'énoncer le théorème [Ill1] VI 8.4.2.1 on rappelle deux conditions techniques qui apparaissent dans [Ill1]. Soit X un topos fibré simplicial. On dit que X est *bon* si tous les d_i^{-1} et s_j^{-1} admettent des adjoints à gauche. On dit que X est une *pseudo-catégorie* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le morphisme de changement de base

$$(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1}\mathrm{d}_{1*} \to \mathrm{d}_{n+1*}(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1}$$

relatif au carré

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0"] \arrow[d, "\mathrm{d}_{n+1}"'] & X_1 \arrow[d, "\mathrm{d}_1"] \\ X_n \arrow[r, "\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0"] & X_0 \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme.

Théorème ([Ill1] VI 8.4.2.1). *Soit X un topos fibré simplicial, et $\mathcal{O}$ un anneau de $\mathrm{B}\,X$ qui vérifie la propriété dans la définition de ner°. Supposons que X est une bonne pseudo-catégorie, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1}$ envoie les injectifs de $\mathrm{Mod}(X_0)$ sur des injectifs de $\mathrm{Mod}(X_n)$. Alors*

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{B}\,X) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle se compose des objets Y de $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$, tels que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{H}^i(Y)$ est dans l'image essentielle du foncteur $\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{Mod}(\mathrm{B}\,X) \to \mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$.

4.6.2

On veut appliquer [Ill1] VI 8.4.2.1 pour montrer la proposition 4.11. L'idée naïve est de construire un topos fibré simplicial X, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n est le Top° du petit topos de Zariski du diagramme $\mathrm{Ner}_n(\mathrm{C}_{\bullet}\,A(1), \mathrm{C}_{\bullet}\,S(1))$. Cette idée ne marche pas parce que dans la définition de $\mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\,A(1), \mathrm{C}_{\bullet}\,S(1)))$ (*cf.* définition 4.8), les morphismes de transition sont des morphismes à valeur dans f^*M_n, mais dans $\mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$ c'est remplacé par $f^{-1}M_n$. Donc les catégories $\mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\,A(1), \mathrm{C}_{\bullet}\,S(1)))$ et $\mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ\,X)$ ne coïncident pas.

L'observation est que pour tout morphisme de schéma f, les foncteurs f^{-1} et f^* coïncident lorsque f est un morphisme de *localisation* pour le topos ambiant, i.e. f appartient au site ambiant. Le topos ambiant du diagramme $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1))$ n'est pas le petit topos de Zariski mais le topos engendré par les morphismes dans $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1))$. Ces morphismes sont d'un type très simple : ils sont égaux à $A^m \times S \to A^n \times S$ comme morphismes de schémas sur S pour certains $m, n \in \mathbb{N}$. On appelle ces morphismes des *isomorphismes locaux*, *cf.* §4.6.3. Le topos engendré par les isomorphismes locaux d'un schéma est en fait équivalent au topos de Zariski : c'est un corollaire du lemme de comparaison de [SGA4]. Donc quand on applique [Ill1] VI 8.4.2.1 au site des isomorphismes locaux, on trouve la bonne notion d'image inverse et l'égalité $\mathrm{Mod}(\mathrm{Top}^\circ X) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1)))$.

4.6.3

On définit la notion d'isomorphisme local, et on montre la comparaison entre le topos des isomorphismes locaux et le topos de Zariski.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schéma. On dit que f est un *isomorphisme local* (pour la topologie de Zariski), s'il existe un recouvrement ouvert $(V_i)_{i\in I}$ de Y, tel que pour tout i, $f_{|V_i} : V_i \to X$ est une immersion ouverte.

Définition 4.12. Pour tout schéma X, on définit le site X_{loc} de la manière suivante : comme une catégorie, on a

$$X_{\mathrm{loc}} = \{f : Y \to X \text{ isomorphisme local}\};$$

les familles couvrantes d'un objet Y de X_{loc} sont toutes les familles $(f_\alpha : Y_\alpha \to Y)_{\alpha\in A}$ de morphismes dans X_{loc} telles que $\bigcup\limits_{\alpha} f_\alpha(Y_\alpha) = Y$. On appelle X_{loc} le *site loc* de X.

On note X_{Zar} le petit site de Zariski de X. On note $\widetilde{X_{\mathrm{loc}}}, \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ les topos associés aux sites $X_{\mathrm{loc}}, X_{\mathrm{Zar}}$, respectivement. Il existe un morphisme de site naturel

$$u : X_{\mathrm{Zar}} \to X_{\mathrm{loc}}$$

qui envoie un objet $U \to X$ de X_{Zar} (donc c'est une immersion ouverte) vers le même objet dans X_{loc}. On note

$$\delta : \widetilde{X_{\mathrm{loc}}} \to \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$$

le morphisme de topos induit par u. La donné de δ consiste en deux foncteurs

$$\delta_* : \widetilde{X_{\mathrm{loc}}} \to \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$$
$$\delta^{-1} : \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}} \to \widetilde{X_{\mathrm{loc}}}$$

où δ_* est la restriction d'un faisceau sur X_{loc} à X_{Zar}, et δ^{-1} est la faisceautisation d'un faisceau sur X_{Zar} (comme un préfaisceau sur X_{loc}). Le foncteur δ^{-1} est un adjoint à gauche canonique de δ_*.

Proposition 4.13. *Les foncteurs δ_* et δ^{-1} sont quasi-inverses entre eux.*

Démonstration. C'est un cas particulier de [SGA4] III, théorème 4.1. On rappelle que la condition clé de ce théorème est que tout objet de X_{loc} est recouvert par des objets de X_{Zar}, et c'est déduit directement de la définition. Dans la preuve du théorème on trouve une construction explicite d'un quasi-inverse, et c'est δ^{-1} dans notre cas. □

Pour tout schéma X, on note $\mathcal{O}_X$ le faisceau structurel de X (pour le topos de Zariski), et $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules. On note le faisceau $\delta^{-1}\mathcal{O}_X$ sur X_{loc} par $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}}$. On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}})$ la catégorie des $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}}$-modules.

Corollaire 4.14. *Le foncteur $\delta_* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$ est une équivalence de catégorie, et δ^{-1} est un quasi-inverse de δ_*.*

Soit $f : Y \to X$ un morphisme de schéma quelconque. Comme les isomorphismes locaux sont stables par changement de base, f induit un morphisme de site

$$v : X_{\mathrm{loc}} \to Y_{\mathrm{loc}}.$$

Le foncteur v est un foncteur *continu* au sens de [SGA4] III 1.1, i.e. pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur Y_{loc}, $\mathcal{F} \circ v$ est un faisceau sur X_{loc}. D'après [SGA4] III 1.2, v induit un morphisme de topos $f : \widetilde{Y_{\mathrm{loc}}} \to \widetilde{X_{\mathrm{loc}}}$, i.e. il existe un couple de foncteurs (f^{-1}, f^*),

$$f^{-1} : \widetilde{X_{\mathrm{loc}}} \to \widetilde{Y_{\mathrm{loc}}} \qquad f_* : \widetilde{Y_{\mathrm{loc}}} \to \widetilde{X_{\mathrm{loc}}},$$

tel que f^{-1} est un adjoint à gauche de f_*. (On remarque que f_* est la restriction d'un faisceau de Y_{loc} à X_{loc} par v, et f^{-1} est défini de façon similaire à l'image inverse ensembliste usuelle pour le site de Zariski.)

Lorsque f est un isomorphisme local, on a $f^{-1}\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}} = \mathcal{O}_{Y_{\mathrm{loc}}}$, donc f^{-1} induit un foncteur $f^{-1} : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}}) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{loc}}})$. On note $f^* : \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X) \to \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y)$ le foncteur d'image inverse de $\mathcal{O}_X$-modules comme dans §4.5.

Lemme 4.15. *Si $f : Y \to X$ est un isomorphisme local de schémas, alors le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{f^*} & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_Y) \\
\big\downarrow{\scriptstyle \delta^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta^{-1}} \\
\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{X_{\mathrm{loc}}}) & \xrightarrow{f^{-1}} & \mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{loc}}})
\end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Soit M un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$. On définit d'abord un morphisme fonctoriel dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_{Y_{\mathrm{loc}}})$:

$$\varphi : f^{-1}\delta^{-1}M \to \delta^{-1}f^*M.$$

Via la propriété d'adjonction de f^{-1} et δ^{-1}, il est équivalent de définir

$$\varphi' : M \to \delta_* f_* \delta^{-1} f^* M$$

dans $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_X)$. En fait, on a $\delta_* f_* \delta^{-1} f^* M = f_* \delta_* \delta^{-1} f^* M = f_* f^* M$. D'ailleurs, si on note $f^{-1} : \widetilde{X_{\mathrm{Zar}}} \to \widetilde{Y_{\mathrm{Zar}}}$ l'image inverse ensembliste, alors il existe un morphisme naturel $M \to f_* f^{-1} M$. La composition de ce morphisme avec $f^{-1}M \to f^*M$ définit φ'.

On montre que φ est un isomorphisme. Il suffit de le vérifier pour tout ouvert V de Y tel que $f_{|V} : V \to X$ est une immersion ouverte. Or, $f^{-1}\delta^{-1}M(V) = \delta^{-1}M(V) = f^*M(V)$ parce que $f_{|V}$ est une immersion ouverte, donc $\delta^{-1}f^*M(V) = f^*M(V) = f^{-1}\delta^{-1}M(V)$. □

4.6.4

A l'aide du site loc, on peut ramener la proposition 4.11 à [Ill1] VI 8.4.2.1.

Rappelons que $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$ est l'objet de $\mathrm{Simp}_2(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}/S)$ défini dans §4.5.2. On définit un topos fibré simplicial $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \mathrm{Top}^\circ \mathrm{Ner}_n(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}}$$

le topos total de topos loc du diagramme $\mathrm{Ner}_n(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$ (où le tilde sur $\mathrm{Ner}_n(...)$ est négligé). Les morphismes $\mathrm{d}_i, \mathrm{s}_j$ de X sont induits par les morphismes correspondants dans le diagramme $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$.

On note

$$\mathcal{O} \in X_0$$

le faisceau structurel de $\mathrm{C}_\bullet S(1)_{\mathrm{loc}}$, i.e. $\mathcal{O}$ est égal à $\mathcal{O}_{S_{\mathrm{loc}}}$ sur chaque sommet de $\mathrm{C}_\bullet S(1)_{\mathrm{loc}}$, et les morphismes de transition de $\mathcal{O}$ sont $\mathrm{id}_{\mathcal{O}_{S_{\mathrm{loc}}}}$. Alors $\mathrm{d}_0^{-1}\mathcal{O}$ et $\mathrm{d}_1^{-1}\mathcal{O}$ sont canoniquement isomorphes au faisceau structurel de $(\mathrm{C}_\bullet A(1) \times \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}}$. Avec cet isomorphisme, $\mathcal{O}$ est un objet de $\mathrm{B}\, X$. Par ailleurs il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Top}^\circ X = \mathrm{Top}^\circ \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}},$$

tel que $\mathrm{ner}^\circ \mathcal{O}$ est égal au faisceau structurel de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}}$, où ner° est défini dans §4.6.1. On utilise la notation

$$\mathrm{Mod}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}})$$

pour la catégorie des $\mathrm{ner}^\circ \mathcal{O}$-modules.

Proposition 4.16. *Soit X le topos fibré simplicial associé à A et S par §4.6.4. Alors le foncteur*

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{D^b}(\mathrm{B}\,X) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))_{\mathrm{loc}})$$

est pleinement fidèle, et son image essentielle se compose des objets Y tels que pour tout i, $\mathrm{H}^i(Y)$ est dans l'image essentielle du foncteur ner° *pour les modules.*

Démonstration. D'après [Ill1] VI 8.4.2.1 il suffit de montrer :

a) X est un bon topos fibré ;

b) X est une pseudo-catégorie ;

c) $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1}$ envoie les injectifs dans les injectifs.

On a déjà vu dans §4.6.2 que les morphismes dans le diagramme $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$ sont des morphismes de localisation pour le topos loc, donc ils possèdent des adjoints à gauche. Donc a) est vrai.

Pour c), il suffit de montrer que

$$(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1} : \mathrm{Mod}(X_0) \to \mathrm{Mod}(X_n)$$

admet un adjoint à gauche *exact*. Par le même argument que précédemment, sur chaque sommet $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)^{-1}$ admet un adjoint à gauche exact $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!$. En général, cela n'implique pas que

$$(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_! : \mathrm{Mod}(X_n) \to \mathrm{Mod}(X_0)$$

est exact. Mais ici le morphisme

$$\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0 : \mathrm{C}_\bullet A(1)^n \times \mathrm{C}_\bullet S(1) \to \mathrm{C}_\bullet S(1).$$

possède une propriété très particulière : soient x_1, x_2 deux sommets de $\mathrm{C}_\bullet A(1)^n \times \mathrm{C}_\bullet S(1)$, si $\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0$ envoie x_1, x_2 sur le même sommet, alors il n'y a *pas* de flèche entre x_1 et x_2. Alors l'exactitude de $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!$ sur chaque sommet implique bien l'exactitude de $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!$ (on doit utiliser une formule pour $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!$ similaire à celle de m_* dans [Ill1] VI 5.8.2).

Pour b), on montre l'isomorphisme $(\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!\, \mathrm{d}_{n+1}^{-1} = \mathrm{d}_1^{-1} (\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0)_!$. Notons que dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{C}_\bullet A(1)^{n+1} \times \mathrm{C}_\bullet S(1) & \xrightarrow{\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0} & \mathrm{C}_\bullet A(1) \times \mathrm{C}_\bullet S(1) \\ \Big\downarrow \mathrm{d}_{n+1} & & \Big\downarrow \mathrm{d}_1 \\ \mathrm{C}_\bullet A(1)^n \times \mathrm{C}_\bullet S(1) & \xrightarrow{\mathrm{d}_0 \dots \mathrm{d}_0} & \mathrm{C}_\bullet S(1), \end{array}$$

la première ligne est une réunion disjointe de la deuxième ligne indexée par les sommets de $\mathrm{C}_\bullet A(1)$, et les morphismes verticaux sont les projections. Cela implique l'isomorphisme dont on a besoin. $\square$

Preuve de proposition 4.11. Supposons que X est le topos fibré simplicial défini dans la proposition 4.16. On peut montrer facilement (ou on applique [Ill1] VI 11.5.3.2) que

$$\mathrm{D^b}(\mathrm{B}\,X) = \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{loc}}})$$

(dans [Ill1] VI 11.5.3.2, B X est noté comme B A). Il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_S) & \xrightarrow{\mathrm{ner}^\circ} & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\,A(1), \mathrm{C}_\bullet\,S(1))) \\ \big\downarrow{\scriptstyle \delta^{-1}} & & \big\downarrow{\scriptstyle \delta^{-1}} \\ \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet\,A(1)] \otimes \mathcal{O}_{S_{\mathrm{loc}}}) & \xrightarrow{\mathrm{ner}^\circ} & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\,A(1), \mathrm{C}_\bullet\,S(1))_{\mathrm{loc}}). \end{array}$$

Les deux foncteurs verticaux sont des équivalences d'après le corollaire 4.14. Le foncteur ner° en haut est défini par p_n^*, et celui en bas est défini par p_n^{-1}. La commutativité du carré se déduit du lemme 4.15. Donc la proposition 4.11 pour le ner° en haut se déduit de la proposition 4.16 sur les mêmes propriétés du ner° en bas. □

Remarque 4.17. Une remarque sur le théorème [Ill1] VI 8.4.2.1. Dans [Ill1], ce théorème est obtenu comme un corollaire du théorème VI 8.4.2 qui décrit $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D^b}(\mathrm{Top}^\circ\,X)}(\mathrm{ner}^\circ M, \mathrm{ner}^\circ N)$ pour deux objets M, N de $\mathrm{D^b}(\mathrm{B}\,X)$. En général, le foncteur Hom dans la catégorie dérivée est calculé par le foncteur dérivé de Hom total dans la catégorie des complexes, *cf.* [W] 10.7. Le théorème VI 8.4.2 de [Ill1] est plus compliqué : il dépend de la théorie des modules induits et coinduits de [Ill1] VI 8.3.

Dans notre cas, nous ramenons la proposition 4.11 à [Ill1] VI 8.4.2.1 par une astuce élémentaire. Il existe très probablement une démonstration directe pour la proposition 4.11. Mais nous croyons que la théorie de [Ill1] VI 8.3 est toujours essentielle.

4.7 Le complexe ${}_A\ell_G^\vee$

4.7.1

A l'aide de la proposition 4.7 et 4.11, on peut définir ${}_A\ell_G^\vee$ par la même méthode que pour ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$, *cf.* [Ill1] VII 4.1.4.1 ou §4.2.2. On rappelle d'abord la notion de complexe cotangent usuel.

Soit $X \to Y$ un morphisme de schéma. Le *complexe cotangent* $\mathrm{L}_{X/Y}$ est le $\mathcal{O}_X$-module simplicial

$$\mathrm{L}_{X/Y} = \Omega_{\mathrm{P}_\bullet(\mathcal{O}_X)/\mathcal{O}_Y} \otimes_{\mathrm{P}_\bullet(\mathcal{O}_X)} \mathcal{O}_X$$

où $\mathrm{P}_\bullet(\mathcal{O}_X)$ est la résolution standard ([Ill1] I 1.5) de $\mathcal{O}_X$ sur $\mathcal{O}_Y$. L'objet de $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_X)$ qui correspond (via Dold-Kan) à $\mathrm{L}_{X/Y}$ sera aussi noté par $\mathrm{L}_{X/Y}$.

La notion de complexe cotangent s'étend aux morphismes de (multi-)diagrammes de schémas ([Ill1] VII 1.2.1). On les rappelle pour les morphismes de 1-diagrammes (et la généralisation aux r-diagrammes pour tout r sera évidente). Soit X un 1-diagramme de schémas de type I. On note X_{Zar} le petit site de Zariski de X (c'est un site fibré au-dessus de I), et $\widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ le petit topos de Zariski de X (§4.6.1). On rappelle la définition de $\mathrm{Top}\,\widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ dans §4.6.1 : les objets de $\mathrm{Top}\,\widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ sont les systèmes $(M_i, M_f)_{i\in \mathrm{ob}\, I, f\in \mathrm{fl}\, I}$, où pour tout i, M_i est un faisceau sur $X_{i,\mathrm{Zar}}$, et pour tout $f : i \to j$, $M_f : f^{-1}M_j \to M_i$ est un morphisme de faisceaux sur $X_{i,\mathrm{Zar}}$ qui vérifie la condition de cocyle. On note $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}} \in \mathrm{Top}\,\widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ le faisceau structurel de X_{Zar} : pour tout i, la restriction de $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}}$ sur X_i est égale à $\mathcal{O}_{X_i}$, et les morphismes de transition sont les morphismes induits par $f : X_i \to X_j$. On appelle un $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}}$*-module* un objet de $\mathrm{Top}\,\widetilde{X_{\mathrm{Zar}}}$ muni d'une structure de $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}}$-module.

Soit $X \to Y$ un morphisme de 1-diagramme de schémas. Par définition, le complexe cotangent $\mathrm{L}_{X/Y}$ est le $\mathcal{O}_{X_{\mathrm{Zar}}}$-module simplicial, tel que pour tout i, la restriction de $\mathrm{L}_{X/Y}$ sur X_i est égale à $\mathrm{L}_{X_i/Y_{\alpha(i)}}$, où $Y_{\alpha(i)}$ est le sommet de Y au-dessous de X_i ; le morphisme de transition $f^{-1}\,\mathrm{L}_{X_j/Y_{\alpha(j)}} \to \mathrm{L}_{X_i/Y_{\alpha(i)}}$ est défini par la fonctorialité du complexe cotangent relative au carré

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f"] \arrow[d] & X_j \arrow[d] \\ Y_{\alpha(i)} \arrow[r, "f"] & Y_{\alpha(j)} \end{tikzcd} ,$$

cf. [Ill1] II 1.2.7.2.

Maintenant on suppose que S est un schéma, et G est un schéma en groupes, plat et de présentation finie sur S. On peut considérer le complexe de Lie et de co-Lie associé à G. Par définition, le *complexe de co-Lie* de G est l'objet de $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_S)$ défini par

$$\ell_G = \mathrm{L}\, e^* \,\mathrm{L}_{G/S},$$

où e est la section unité de G. En fait, comme G est localement d'intersection complète sur S ([Ill1] VII 2.4.1), ℓ_G est un complexe parfait ([SGA6] I, [Ill1] III 3.2.6) d'amplitude $[-1, 0]$. On appelle

$$\ell_G^\vee = \mathrm{R}\,\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\ell_G, \mathcal{O}_S)$$

le *complexe de Lie* de G.

On peut étendre la définition de ℓ_G et $\ell_G^\vee$ aux diagrammes de schémas en groupes. Pour cela, il faut d'abord définir les «schémas en groupes» sur un diagramme de schémas. Comme précédemment, on le définit seulement pour les 1-diagrammes, donc on suppose que S est un 1-diagramme de schémas de type I. Soit G un 1-diagramme de schémas au-dessus de S, i.e. G est aussi de type I et $G \to S$ est un morphisme de 1-diagramme de type id_I. On dit que G est un *schéma en groupes* plat et de présentation finie sur S si pour tout objet i de I, G_i est un schéma en groupes plat et de présentation finie sur S_i, et pour tout $f : i \to j$, dans le diagramme

$$\begin{tikzcd} G_i \arrow[r, "f"] \arrow[d] & G_j \arrow[d] \\ S_i \arrow[r, "f"] & S_j \end{tikzcd}$$

le morphisme $G_i \to G_j$ est un morphisme de schémas en groupes sur S_j.

On peut utiliser les définitions suivantes :

$$\ell_G = \mathrm{L}\, e^* \, \mathrm{L}_{G/S} \in \mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_S)$$

$$\ell_G^\vee = \mathrm{R}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_S}(\ell_G, \mathcal{O}_{S_{\mathrm{Zar}}}) \in \mathrm{D}^{\geq 0}(S),$$

où $\mathcal{O}_S \in \mathrm{Top}\, \widetilde{S_{\mathrm{Zar}}}$ est l'anneau structurel de S_{Zar}, et $\mathrm{D}^{\geq 0}(S)$ est la catégorie définie dans la définition 4.8. (Si M est un objet de $\mathrm{Mod}(\mathcal{O}_S)$, alors son dual $M^\vee$ est un objet de $\mathrm{Mod}(S)$ parce que le morphisme de transition $f^{-1}M_j \to M_i$ de M, qui est un morphisme de faisceau ensembliste, est équivalent à un morphisme de $\mathcal{O}_{S_i}$-modules $f^*M_j \to M_i$.)

Pour tout objet i de I, la restriction de ℓ_G à S_i est isomorphe à ℓ_{G_i}, donc est un complexe parfait de $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_{S_i})$ d'amplitude $[-1, 0]$. On en déduit que $\mathrm{H}^n(\ell_G)$ est isomorphe à 0 pour tout $n \neq -1, 0$, et que ℓ_G est isomorphe dans $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_S)$ à sa troncation $\tau_{\geq -1}\ell_G$ en degré -1. Comme ℓ_G est seulement défini à isomorphisme près, il est raisonnable de regarder ℓ_G comme un objet de $\mathrm{D}^{[-1,0]}(\mathcal{O}_S)$. On remarque qu'en général, on ne sait pas si ℓ_G est un complexe parfait dans $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_S)$.

4.7.2

Soit A un anneau commutatif, S un schéma, et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. On note $S(1)$ le 2-diagramme de $(\mathrm{Sch}\,/S)$ défini dans §4.5.1. Quand on remplace S par G dans la définition de §4.5.1, i.e. on prend dans la définition 4.6 T égal à la catégorie des faisceaux abéliens fpqc sur S et $X = G$, on obtient le 2-diagramme $G(1)$ de $(\mathrm{Sch}\,/S)$ de type S_1. Le diagramme $G(1)$ vérifie la propriété suivante : pour tout $r \in \mathbb{N}$, $G(1)^r$ est le translaté de l'objet r-simplicial constant de valeur G.

Le même argument que §4.5.1 nous fournit une action de $A(1)$ sur $G(1)$ dans $\mathrm{Diag}_2(\mathrm{Sch}\,/S)$, puis une action de $\mathrm{C}_{\bullet}\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_{\bullet}\, G(1)$ dans $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}\,/S)$. On considère l'objet nerf

$$\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1)) \in \mathrm{Simp}_2(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}/S)$$

défini dans §4.5.2. Comme G est un schéma en groupes sur S, on voit facilement que $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))$ est un schéma en groupes plat et de présentation finie sur $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$ au sens de §4.7.1. On montre la proposition suivante, qui définit le complexe de Lie A-équivariant ${}_A\ell_G^\vee$ sur le topos de Zariski.

Proposition 4.18. *Supposons que S est* plat *sur* $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$. *Rappelons que le foncteur* $\mathrm{C}_\bullet\,\text{–}(1)$ *(*resp. ner°*) est défini dans §4.4.3 (*resp. *la définition 4.10). Alors il existe un objet*

$${}_A\ell_G^\vee \in \mathrm{D}^{[0,1]}(A \otimes \mathcal{O}_S),$$

unique à isomorphisme unique près, tel que

$$\mathrm{ner}^\circ(\mathrm{C}_\bullet\, {}_A\ell_G^\vee(1)) \cong \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1)))$.

Démonstration. On montre d'abord que $\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$ est dans l'image essentielle de

$$\mathrm{ner}^\circ : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))).$$

D'après la proposition 4.11, c'est équivalent à montrer que les H^i de $\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$ sont dans l'image essentielle de ner° pour les modules. On remarque que, par [Ill1] VI 8.1.6, un module E sur un objet nerf est dans l'image essentielle de ner° si son premier décalé ([Ill1] VI 1.3)

$$\mathrm{Dec}_1(E)$$

est un diagramme cartésien ([Ill1] VI 5.2.4). On se ramène à montrer que les H^i de

$$\mathrm{Dec}_1\, \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))} = \ell^\vee_{\mathrm{Dec}_1 \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$$

sont cartésiens. Or, le diagramme

$$\mathrm{Dec}_1 \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))$$

est défini en oubliant tous les d_0 de $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))$. Donc le diagramme de schéma $\mathrm{Dec}_1 \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))$ est cartésien au-dessus de $\mathrm{Dec}_1 \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$. Cela implique que $\ell^\vee_{\mathrm{Dec}_1 \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$ est quasi-cartésien d'après la compatibilité du complexe de Lie avec le changement de base ([Ill1] VII 3.1.1.4).

On a vu qu'il existe

$$L \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S)$$

tel que

$$\mathrm{ner}^\circ(L) \cong \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}.$$

On doit vérifier que L est dans l'image essentielle de

$$\mathrm{C}_\bullet -(1) : \mathrm{D}^{[0,1]}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)] \otimes \mathcal{O}_S).$$

D'après la proposition 4.7, il suffit de montrer la même propriété pour l'image de L dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{C}_\bullet \mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$. Or, la définition de L implique que son image dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathrm{C}_\bullet \mathrm{S}_1, \mathcal{O}_S)$ est isomorphe à $\ell^\vee_{\mathrm{C}_\bullet G(1)}$. On vérifie que la version Zariski de [Ill1] VII 4.1.3 est encore vraie. En fait, via sa démonstration, il n'est pas difficile de voir que la version Zariski de [Ill1] VII 3.1.3.1 pour un schéma en groupes commutatif est vraie. D'après [Ill1] VII 4.1.3.1, on a

$$\ell^\vee_{\mathrm{C}_\bullet G(1)} \cong \mathrm{C}_\bullet \ell^\vee_G(1).$$

Donc l'hypothèse de la proposition 4.7 est vérifiée.

On obtient un objet ${}_A\ell^\vee_G \in \mathrm{D}^{[0,1]}(A \otimes \mathcal{O}_S)$ tel que

$$\mathrm{C}_\bullet\, {}_A\ell^\vee_G(1) \cong L.$$

Cet objet est unique à un unique isomorphisme près parce que $\mathrm{C}_\bullet -(1)$ et ner° sont pleinement fidèles. □

Proposition 4.19. *Soit G un schéma en A-modules sur S comme précédemment. Si G est lisse sur S, alors il existe un isomorphisme canonique*

$${}_A\ell^\vee_G \cong \omega^\vee_G$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A \otimes \mathcal{O}_S)$, où la structure de A-module de $\omega^\vee_G$ est induite par celle de G.

Démonstration. D'après la définition de ${}_A\ell^\vee_G$, il suffit de montrer

$$\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))} \cong \omega^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}.$$

Or, le schéma en groupes $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))$ est lisse sur $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$, donc son complexe cotangent coïncide avec son module différentiel. On en déduit que son algèbre de Lie et son complexe de Lie sont isomorphes. □

Proposition 4.20. *Soit A et S comme précédemment, et*

$$0 \to G \to B \to C \to 0$$

une suite exacte de schémas en A-modules, plats et de présentation finie sur S, telle que B et C sont lisses sur S. Alors il existe un isomorphisme canonique

$${}_A\ell^\vee_G \cong [\omega^\vee_B \to \omega^\vee_C]$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A \otimes \mathcal{O}_S)$, où le complexe à droite est placé en degrés 0 et 1.

Démonstration. La suite dans la proposition induit une suite exacte de schémas en groupes sur $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1))$:

$$0 \to \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1)) \to \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet B(1)) \to \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet C(1)) \to 0,$$

d'où un triangle distingué

$$\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))} \to \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet B(1))} \to \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet C(1))} \nrightarrow$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet S(1)))$ d'après [Ill1] VII 3.1.1.5. Via la proposition 4.19, on en déduit un isomorphisme

$$\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))} \cong [\omega^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet B(1))} \to \omega^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet C(1))}],$$

où le complexe à droite est placé en degré 0 et 1. Mais $\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet G(1))}$ (*resp.* $\omega^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet B(1))}$, $\omega^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1), \mathrm{C}_\bullet C(1))}$) est l'image essentielle de ${}_A\ell_G^\vee$ (*resp.* $\omega_B^\vee$, $\omega_C^\vee$) par $\mathrm{ner}^\circ \circ \mathrm{C}_\bullet -(1)$. Comme ${}_A\ell_G^\vee$ et $[\omega_B^\vee \to \omega_C^\vee]$ sont de degré cohomologique $0, 1$, et $\mathrm{ner}^\circ \circ \mathrm{C}_\bullet -(1)$ est pleinement fidèle sur $\mathrm{D}^{[0,1]}$ (*cf.* les propositions 4.7, 4.11) on obtient

$${}_A\ell_G^\vee \cong [\omega_B^\vee \to \omega_C^\vee]$$

dans $\mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S)$. □

Remarque 4.21. En général, sans l'hypothèse de lissité il n'est pas clair que le triangle

$${}_A\ell_G^\vee \to {}_A\ell_B^\vee \to {}_A\ell_C^\vee \nrightarrow$$

existe dans $\mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S)$, car dans la démonstration le point clé est la pleine fidélité de la restriction de $\mathrm{C}_\bullet -(1)$ sur $\mathrm{D}^{[0,1]}$. Néanmoins il existe toujours un triangle distingué canonique dans $\mathrm{D}(\mathrm{N}\,\mathbb{Z}^{\mathrm{st}}[A] \otimes \mathcal{O}_S)$, *cf.* [Ill1] VII 4.1.5 c).

Proposition 4.22. *Soit G/S un schéma en A-modules comme précédemment. Soit $A' \to A$ un morphisme d'anneau. On note*

$$\mathrm{Res} : \mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D^b}(A' \otimes \mathcal{O}_S)$$

le foncteur de restriction des scalaires induit par $A' \to A$. Alors il existe un isomorphisme canonique

$$\mathrm{Res}({}_A\ell_G^\vee) \cong {}_{A'}\ell_G^\vee$$

dans $\mathrm{D^b}(A' \otimes \mathcal{O}_S)$.

Démonstration. Cette propriété est énoncée dans [Ill1] VII 4.1.5 a) pour ${}_A\ell_G^\vee$. Pour démontrer la proposition, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D^b}(A\otimes\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{C}_\bullet-(1)"] \arrow[d, "\mathrm{Res}"] & \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)]\otimes\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{ner}^\circ"] \arrow[d] & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1),\mathrm{C}_\bullet S(1))) \arrow[d] \\ \mathrm{D^b}(A'\otimes\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{C}_\bullet-(1)"] & \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A'(1)]\otimes\mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{ner}^\circ"] & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A'(1),\mathrm{C}_\bullet S(1))) \end{tikzcd},$$

où la deuxième flèche verticale est induite par le morphisme d'anneau $\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A'(1)]\to\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet A(1)]$, et la troisième est l'image inverse relative à

$$\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A'(1),\mathrm{C}_\bullet S(1))\to\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1),\mathrm{C}_\bullet S(1)).$$

Par la définition de ${}_A\ell_G^\vee$ il suffit de montrer que la flèche verticale à droite envoie $\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1),\mathrm{C}_\bullet G(1))}$ sur $\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A'(1),\mathrm{C}_\bullet G(1))}$. Or, comme le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A'(1),\mathrm{C}_\bullet G(1)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1),\mathrm{C}_\bullet G(1)) \arrow[d] \\ \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A'(1),\mathrm{C}_\bullet S(1)) \arrow[r] & \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet A(1),\mathrm{C}_\bullet S(1)) \end{tikzcd}$$

est cartésien, cette propriété se déduit de la compatibilité du complexe de Lie avec tout changement de base ([Ill1] VII 3.1.1.4). □

4.7.3

La proposition suivante ne sera utilisée que dans §5.4.

Proposition 4.23. *Soit S un schéma plat sur* $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$*, A, A' deux anneaux, et G (*resp. *G') un schéma en A-modules (*resp. *schéma en A'-modules), plat et de présentation finie sur S. Munissons le schéma en groupes $G\times_S G'$ de la structure de $A\oplus A'$-module naturelle. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$${}_{A\oplus A'}\ell^\vee_{G\times G'}\cong {}_A\ell_G^\vee\oplus {}_{A'}\ell^\vee_{G'}$$

dans $\mathrm{D^b}((A\oplus A')\otimes\mathcal{O}_S)$.

On montre d'abord le lemme suivant.

Lemme 4.24. *Soit B le schéma de base. On note $\times=\times_B, \otimes=\otimes_{\mathcal{O}_B}$ dans la suite. Soient S,T deux schémas plats sur B, et $X\to S, Y\to T$ deux morphismes plats de schémas sur B. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$(\mathrm{L}_{X/S}\otimes\mathcal{O}_Y)\oplus(\mathcal{O}_X\otimes\mathrm{L}_{Y/T})\xrightarrow{\sim}\mathrm{L}_{X\times Y/S\times T}$$

dans $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_{X\times Y})$.

Démonstration. Via le triangle fondamental du complexe cotangent ([Ill1] II 2.1.2), c'est un corollaire direct de [Ill1] II 2.3.11, le deuxième isomorphisme (appliqué à $X \times Y$ et $S \times T$ respectivement). □

On remarque que le lemme précédent reste valable lorsque B est un diagramme de schémas, et X, Y, S, T sont des diagrammes de schémas sur B de même type. Cela résulte du fait que [Ill1] II 2.3.11 est démontré plus généralement lorsque la base est un topos annelé.

Preuve de la proposition 4.23. On applique le lemme 4.24 aux produits fibrés

$$\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1)) \underset{S_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1, \mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1)}}{\times} \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A'(1), \mathrm{C}_{\bullet} G'(1)) = \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}(A \oplus A')(1), \mathrm{C}_{\bullet}(G \oplus G')(1))$$

$$\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1)) \underset{S_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1, \mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1)}}{\times} \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A'(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1)) = \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}(A \oplus A')(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1)),$$

où $S_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1, \mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1)}$ est le diagramme de type $\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1, \mathrm{C}_{\bullet}\mathrm{S}_1)$ de valeur constante S. Alors l'isomorphisme dans la proposition vient de la définition de ${}_A\ell_G^{\vee}$, ${}_{A'}\ell_{G'}^{\vee}$ et ${}_{A \oplus A'}\ell_{G \times G'}^{\vee}$. □

4.8 Le complexe $\ell_K^{M,\vee}$

4.8.1

Soit M un monoïde commutatif, S un schéma, et K/S un schéma en groupes, plat et de présentation finie muni d'une M-action. On va définir le complexe de Lie M-équivariant de K,

$$\ell_K^{M,\vee} \in \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_S)$$

par une méthode similaire à [Ill1] VII 2 (pour le complexe cotangent équivariant).

On note $\mathrm{Ner}(M, K), \mathrm{Ner}(M, S)$ les objets simpliciaux de (Sch/S) définis dans §4.5.2, où l'action de M sur S est l'action triviale. La même formule que dans la définition 4.10 nous fournit un foncteur

$$\mathrm{ner}^{\circ} : \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(M, S)).$$

On remarque que la proposition 4.11 est vraie dans ce contexte, parce que la démonstration de §4.6 reste valable. La proposition suivante est démontrée par le même argument que la proposition 4.18.

Proposition 4.25. *Soit K un schéma en groupes sur S muni d'une M-action comme précédemment. Alors il existe un objet $\ell_K^{M,\vee}$ de $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_S)$, unique à isomorphisme unique près, tel que*

$$\mathrm{ner}^{\circ}(\ell_K^{M,\vee}) \cong \ell^{\vee}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(M, S))$.

4.8.2

On donne une formule pour $\ell_K^{M,\vee}$ lorsque K s'injecte dans un schéma lisse par une immersion fermée régulière M-équivariante. Cette formule est bien connue quand M est trivial ([Ill1] III 3.2.6), et elle est démontrée dans [Ill1] VII 2.2.5 pour le complexe cotangent équivariant sur le grand topos fpqc. Notre démonstration suit le même argument que [Ill1] VII 2.2.5. Remarquons que dans la démonstration, le complexe cotangent d'un topos annelé ([Ill1] II) est utilisé d'une façon essentielle.

La notion d'une immersion fermée régulière est définie dans [SGA6] VII 1.4 et [Ill1] III 3.2.2 en utilisant le complexe de Koszul. Dans le cas noethérien, elle est équivalente à la définition usuelle qu'on rappelle ici. Soit $i : Y \to X$ une immersion fermée de schémas. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de i. On dit que i est *régulière* si localement sur X, $\mathcal{I}$ est engendré par une suite régulière de $\mathcal{O}_X$.

Pour tout complexe de $\mathcal{O}_S$-modules N, on note $N^\vee$ le complexe défini par $N_i^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(N_{-i}, \mathcal{O}_S)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$.

Proposition 4.26. *Soit K/S un schéma en groupes muni d'une M-action comme précédemment. Soit X/S un schéma lisse muni d'une M-action, et $i : K \to X$ une immersion fermée régulière M-équivariante sur S. On note $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de i, et e la section unité de K. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\ell_K^{M,\vee} \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_{X/S}]^\vee$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[M] \otimes \mathcal{O}_S)$, où le complexe de droite est placé en degrés $0, 1$ et muni de la M-action naturelle (induite par les M-structures de K et X).

Démonstration. Comme l'immersion fermée i est M-équivariante, elle définit une immersion fermée de schéma simplicial

$$i : \mathrm{Ner}(M, K) \to \mathrm{Ner}(M, X)$$

au-dessus de $\mathrm{Ner}(M, S)$. On considère le triangle fondamental de complexe cotangent ([Ill1] II 2.1.2) associé à i. On obtient un triangle distingué

$$i^* \mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,X)/\mathrm{Ner}(M,S)} \to \mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\mathrm{Ner}(M,S)} \to \mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\mathrm{Ner}(M,X)} \to$$

dans $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,K)})$, où $\mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,K)} \in \mathrm{Top}\,\mathrm{Ner}(M,K)_{\mathrm{Zar}}$ est le faisceau structurel de $\mathrm{Ner}(M,K)_{\mathrm{Zar}}$. Comme X est lisse sur S, on a

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,X)/\mathrm{Ner}(M,S)} \cong \Omega_{\mathrm{Ner}(M,X)/\mathrm{Ner}(M,S)}.$$

D'autre part, on note

$$\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}} \subset \mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,X)}$$

l'idéal de l'immersion fermée i entre schémas simpliciaux, et on applique [Ill1] III 1.2.8 pour $A = \mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,X)}, B = \mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$. On obtient un morphisme de complexes de $\mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,K)}$-modules

$$\varphi : \mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\,\mathrm{Ner}(M,X)} \to \mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}/\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}^2[1].$$

Par hypothèse, pour tout n

$$\mathrm{Ner}_n(M,K) \to \mathrm{Ner}_n(M,X)$$

est une immersion fermée régulière. Si l'on note φ_n la restriction de φ sur $\mathrm{Ner}_n(M,K)$, alors par [Ill1] III 3.2.4, φ_n est un quasi-isomorphisme. Ceci implique que φ est aussi un quasi-isomorphisme.

Par le triangle distingué, on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{L}_{\mathrm{Ner}(M,K)/\,\mathrm{Ner}(M,S)} \cong [\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}/\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}^2 \to i^*\Omega_{\mathrm{Ner}(M,X)/\,\mathrm{Ner}(M,S)}],$$

dans $\mathrm{D}^{\leq 0}(\mathcal{O}_{\mathrm{Ner}(M,K)})$, où le complexe à droite est placé en degré $-1, 0$. On en déduit que

$$\ell^{\vee}_{\mathrm{Ner}(M,K)} \cong [e^*(\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}/\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}^2) \to e^*i^*\Omega_{\mathrm{Ner}(M,X)/\,\mathrm{Ner}(M,S)}]^{\vee}.$$

On voit facilement qu'il existe un isomorphisme

$$\mathrm{ner}^{\circ}([e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_{X/S}]^{\vee}) \cong [e^*(\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}/\mathcal{I}_{\mathrm{Ner}}^2) \to e^*i^*\Omega_{\mathrm{Ner}(M,X)/\,\mathrm{Ner}(M,S)}]^{\vee}.$$

Comme ner° est pleinement fidèle, la proposition se déduit de la définition de $\ell_K^{M,\vee}$. □

4.9 La compatibilité des complexes de Lie

Soit A un anneau commutatif, S un schéma plat sur $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, et G un schéma en A-modules, plat et de présentation finie sur S. On a défini le complexe ${}_A\ell_G^{\vee} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A \otimes \mathcal{O}_S)$ dans la proposition 4.18. On note A^{mon} le monoïde multiplicatif sous-jacent à A, et on considère l'action de A^{mon} sur G. La proposition 4.25 définit le complexe

$$\ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S).$$

Le morphisme d'anneau $\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \to A$ définit un foncteur naturel

$$\mathrm{Com} : \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(A \otimes \mathcal{O}_S) \to \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S).$$

Le but de cette section est de montrer la proposition suivante, qui est très naturelle mais qui ne figure pas dans [Ill1].

Proposition 4.27. *Soit G un schéma en A-modules sur S comme précédemment. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Com}({}_A\ell_G^\vee) \cong \ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$.

Démonstration. On rappelle (*cf.* proposition 4.18) que la A-structure de ${}_A\ell_G^\vee$ est définie par l'action de $\mathrm{C}_\bullet\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_\bullet\, G(1)$. Quand on se restreint au premier sommet de $\mathrm{C}_\bullet\, G(1)$, on va retrouver l'action de A^{mon} sur G, donc la compatibilité de ${}_A\ell_G^\vee$ et $\ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$.

Plus précisément, on note $\mathrm{C}_\bullet\, S(1)$ l'objet de $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_1 \mathrm{Sch}\,/S)$ défini dans §4.5.1. Par définition, on a

$$\mathrm{C}_0\, S(1) = \coprod_{r\in\mathbb{N}} S(1)^r,$$

où $S(1)^r$ est l'objet constant de $\mathrm{Simp}_r(\mathrm{Sch}\,/S)$, et $\coprod$ est la somme de 1-diagramme. En prenant $r = 0$, on obtient un morphisme

$$i_S : S \to \mathrm{C}_\bullet\, S(1)$$

dans la catégorie $\mathrm{Diag}_2(\mathrm{Sch}\,/S)$, où S est le 2-diagramme pointé de valeur S. Le morphisme i_S est équivariant par rapport à l'action triviale de A^{mon} sur S et l'action de $\mathrm{C}_\bullet\, A(1)$ sur $\mathrm{C}_\bullet\, S(1)$. Donc i_S induit un morphisme

$$i_S : \mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, S) \to \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\, A(1), \mathrm{C}_\bullet\, S(1))$$

dans $\mathrm{Simp}_1(\mathrm{Diag}_2 \mathrm{Sch}\,/S)$.

On considère le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{D^b}(A \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{C}_\bullet\,-(1)"] \arrow[dr, "\mathrm{Com}"] & \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathrm{C}_\bullet\, A(1)] \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{ner}^\circ"] \arrow[d, "i_S^*"] & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\, A(1), \mathrm{C}_\bullet\, S(1))) \arrow[d, "i_S^*"'] \\
& \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[A^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[r, "\mathrm{ner}^\circ"] & \mathrm{D^b}(\mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, S))
\end{tikzcd}.$$

Par définition de ${}_A\ell_G^\vee$ et $\ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}$, on a

$$\mathrm{ner}^\circ(\mathrm{C}_\bullet\, {}_A\ell_G^\vee(1)) \cong \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\, A(1), \mathrm{C}_\bullet\, G(1))}$$

$$\mathrm{ner}^\circ(\ell_G^{A^{\mathrm{mon}},\vee}) \cong \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, G)}.$$

Comme ner° est pleinement fidèle, d'après le diagramme commutatif il suffit de montrer

$$i_S^*(\ell^\vee_{\mathrm{Ner}(\mathrm{C}_\bullet\, A(1), \mathrm{C}_\bullet\, G(1))}) \cong \ell^\vee_{\mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, G)}.$$

Pour cela, on considère le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, G) & \xrightarrow{i_G} & \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} G(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Ner}(A^{\mathrm{mon}}, S) & \xrightarrow{i_S} & \mathrm{Ner}(\mathrm{C}_{\bullet} A(1), \mathrm{C}_{\bullet} S(1)) \end{array},$$

où i_G est défini de façon similaire de i_S, qui envoie G au premier sommet de $\mathrm{C}_{\bullet} G(1)$. Alors l'isomorphisme qu'on cherche est un corollaire de la compatibilité du complexe de Lie avec le changement de base ([Ill1] VII 3.1.1.4). □

Chapitre 5

Modèle local de niveau $\Gamma_1(p)$

5.1 Le déterminant d'un complexe parfait

5.1.1

Nous rappelons la théorie du déterminant de Knudsen-Mumford développée dans [KM]. Le déterminant est un foncteur qui transforme un isomorphisme (dans la catégorie dérivée) entre complexes parfaits en un isomorphisme de fibrés en droites. Ce foncteur sera utilisé dans la construction du modèle local (§5.3), où on l'applique à l'isomorphisme obtenu dans le corollaire 1.3 de l'introduction. Dans cette section on montre aussi quelques lemmes relatifs à la section canonique du déterminant d'un complexe de modules localement libres, concentré en degré -1 et 0.

Soit S un schéma, et F un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules. On dit que F est un complexe *parfait* ([SGA6] I 4.7) si localement sur S, F est quasi-isomorphe à un complexe borné de $\mathcal{O}_S$-modules libres de type fini. On note

$$\mathrm{Parf}(S)$$

la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}(\mathcal{O}_S)$ qui consiste en tous les complexes parfaits. On note Parf-is(S) la sous-catégorie de Parf(S) avec les mêmes objets mais seulement les isomorphismes comme morphismes. On note Pic(S) la catégorie des fibrés en droites sur S, et Pic-is(S) la sous-catégorie de Pic(S) avec les mêmes objets mais seulement les isomorphismes comme morphismes.

Un *déterminant* est la donnée $(\det, i)$, où

$$\det : \text{Parf-is}(S) \to \text{Pic-is}(S)$$

est un foncteur, et pour tout suite exacte de complexes parfaits

$$0 \to G \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} H \to 0,$$

$i_{\alpha,\beta}$ est un isomorphisme de fibrés en droites (avec $\otimes = \otimes_{\mathcal{O}_S}$)

$$i_{\alpha,\beta} : \det G \otimes \det H \xrightarrow{\sim} \det F;$$

la donnée $(\det, i)$ doit vérifier les axiomes i) à v) de [KM] définition 1. Ici on ne répète pas les axiomes ; le lecteur trouvera dans [KM] la liste complète. Juste quelques remarques : l'axiome i) concerne la fonctorialité de $i_{\alpha,\beta}$ par rapport à la suite exacte (via des morphismes de Parf-is(S)) ; l'axiome v) implique que, si F, G, H sont des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini, alors $\det F = \bigwedge^{\max} F$ (et de même pour G, H), et si l'on suppose que F, G, H sont libres, alors $i_{\alpha,\beta}$ est défini par

$$(x_1 \wedge ... \wedge x_r) \otimes (y_1 \wedge ... \wedge y_s) \mapsto x_1 \wedge ... \wedge x_r \wedge y_1 \wedge ... \wedge y_s,$$

où x_i (*resp.* y_j) est une base de G (*resp.* H). La donnée du déterminant existe et est unique à isomorphisme canonique près, *cf.* [KM] theorem 1.

5.1.2

Dans cette thèse, on considère des complexes d'un type particulier.

Hypothèse ($\star\star$). *Soit F un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules. On dit que F est de type ($\star\star$) si $F = [F_1 \xrightarrow{d_F} F_0]$ est concentré en degrés $-1, 0$, tel que F_1, F_0 sont des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini, et* $\mathrm{rg}\, F_1 = \mathrm{rg}\, F_0$ *sur chaque composante connexe de S.*

Nous rappelons la définition du foncteur det dans [KM] pour les complexes de type ($\star\star$). Soit $F = [F_1 \xrightarrow{d_F} F_0]$ un complexe de type ($\star\star$). Alors par la définition de [KM] page 31, on a

$$\det F := (\det F_1)^{-1} \otimes \det F_0,$$

où la notion d'inverse $(\det F_1)^{-1}$ sera définie dans la démonstration du lemme 5.1 plus bas (car il faut faire attention aux signes).[1]

Soit $G = [G_1 \xrightarrow{d_G} G_0]$ un complexe du même type, et

$$\lambda : F \to G$$

un isomorphisme dans $\mathrm{D}(\mathcal{O}_S)$. (On ne suppose pas que les rangs de F_i et de G_i sont égaux.) On définit à présent un isomorphisme de fibrés en droites

$$\det(\lambda) : \det F \xrightarrow{\sim} \det G.$$

1. En fait, dans [KM] la définition est $\det F_0 \otimes (\det F_1)^{-1}$, qui n'est pas naïvement isomorphe à $(\det F_1)^{-1} \otimes \det F_0$ à cause de la convention de signe de Koszul. Mais on peut vérifier que notre définition est aussi valable (en particulier, le diagramme commutatif de [KM] page 33 est vrai).

D'abord, il existe un quasi-isomorphisme de complexe

$$\tilde{\lambda} : F \to G$$

tel que l'image de $\tilde{\lambda}$ dans $\mathrm{D}(\mathcal{O}_S)$ est égale à λ, *cf.* [KM] proposition 4 a). Pour définir $\det(\lambda)$, on va utiliser le cylindre d'un morphisme de complexe. Nous suivons la convention de [KM] page 26 ou [GM] III 3.2 pour le cône et le cylindre.[2] Par définition, le cône et le cylindre de $\tilde{\lambda}$ sont les deux complexes suivants, respectivement :

$$C = [F_1 \xrightarrow{(\tilde{\lambda},-d)} G_1 \oplus F_0 \xrightarrow{d\oplus\tilde{\lambda}} G_0]$$

$$Z = [F_1 \xrightarrow{(-\mathrm{id},\tilde{\lambda},-d)} F_1 \oplus G_1 \oplus F_0 \xrightarrow{(d\oplus 0\oplus(-\mathrm{id}),0\oplus d\oplus\tilde{\lambda})} F_0 \oplus G_0]$$

où les modules sont placés en degrés $-2, -1, 0$, et d est égal à d_F ou d_G. Il existe deux suites exactes naturelles

$$0 \to F \xrightarrow{\alpha} Z \to C \to 0$$

$$0 \to G \xrightarrow{\beta} Z \to D \to 0,$$

où D est le cône de $-\mathrm{id}_F$:

$$D = [F_1 \xrightarrow{(-\mathrm{id},-d)} F_1 \oplus F_0 \xrightarrow{d\oplus(-\mathrm{id})} F_0].$$

En appliquant le foncteur i, on obtient des isomorphismes

$$i_\alpha : \det F \otimes \det C \xrightarrow{\sim} \det Z$$

$$i_\beta : \det G \otimes \det D \xrightarrow{\sim} \det Z$$

dans $\mathrm{Pic}(S)$. Comme $\tilde{\lambda}$ et $-\mathrm{id}_F$ sont des quasi-isomorphismes, C et D sont acycliques. Donc les quasi-isomorphismes évidents

$$0_C : 0 \to C \qquad 0_D : 0 \to D$$

induisent des isomorphismes

$$\det(0_C) : \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \det C \qquad \det(0_D) : \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} \det D$$

dans $\mathrm{Pic}(S)$. L'isomorphisme $\det(\tilde{\lambda})$ est défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\det F \arrow[r, "\det(0_C)", "\sim"'] \arrow[d, "\det(\tilde{\lambda})"'] & \det F \otimes \det C \arrow[r, "i_\alpha", "\sim"'] & \det Z \arrow[d, equal] \\
\det G \arrow[r, "\det(0_D)", "\sim"'] & \det G \otimes \det D \arrow[r, "i_\beta", "\sim"'] & \det Z
\end{tikzcd}$$

En fait, la définition de $\det(\tilde{\lambda})$ ne dépend que de λ, *cf.* [KM] proposition 2, proposition 4 a). On peut donc définir $\det(\lambda) := \det(\tilde{\lambda})$.

2. Il existe des conventions différentes, par exemple dans [W] §1.5.

5.1.3

La description de $\det(\lambda)$ dans §5.1.2 nous permet de montrer des lemmes sur la section canonique du déterminant d'un complexe de type $(\star\star)$, i.e. la section induite par la différentielle. Ces lemmes sont implicites dans [KM] lorsque la différentielle est un quasi-isomorphisme. Le lemme suivant est une généralisation de la fonctorialité de det, *cf.* [KM] page 30.

Lemme 5.1. *Soient F, G deux complexes de $\mathcal{O}_S$-modules de type $(\star\star)$, et $\lambda : F \to G$ un isomorphisme dans $\mathrm{D}(\mathcal{O}_S)$. On note d_F la section de $\det F$ induite par le déterminant de la différentielle, et de même pour d_G. Alors le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S \arrow[r, "d_F"] \arrow[dr, "d_G"'] & \det F \arrow[d, "\det(\lambda)", "\wr"'] \\ & \det G \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. On suppose que S est connexe. Par la définition de $\det(\lambda)$, il suffit de vérifier que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S \arrow[r, "d_F"] \arrow[dr, "d_G"'] & \det F \arrow[r, "\det(0_C)"] & \det F \otimes \det C \arrow[r, "i_\alpha"] & \det Z \arrow[d, equal] \\ & \det G \arrow[r, "\det(0_D)"] & \det G \otimes \det D \arrow[r, "i_\beta"] & \det Z \end{tikzcd}$$

est commutatif.

On note $F = [F_1 \to F_0]$, et de même pour G. On va calculer les morphismes dans le diagramme comme des morphismes entre les fibrés $\det F_i, \det G_i$. Pour cela, on doit fixer la règle de signe et les inverses de fibrés en droites :

(i) la loi de «signe de Koszul» : soient V, W deux $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de type fini, alors on définit un isomorphisme (*cf.* [KM] page 20)

$$\psi : \det V \otimes \det W \xrightarrow{\sim} \det W \otimes \det V, \quad x \otimes y \mapsto (-1)^{\operatorname{rg} V \cdot \operatorname{rg} W} y \otimes x.$$

(ii) l'inverse de $\det V$ pour $V \in \{F_0, F_1, G_0, G_1\}$: on note $V^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}(V, \mathcal{O}_S)$, et on définit

$$\delta_V : \det V^\vee \otimes \det V \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$$
$$(f_1 \wedge ... \wedge f_n) \otimes (v_1 \wedge ... \wedge v_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot f_1(v_{\sigma(1)}) ... f_n(v_{\sigma(n)}),$$

alors l'inverse de $\det V$ est défini par $(\det V)^{-1} := \det V^\vee$ muni de l'isomorphisme δ_V, i.e. quand on identifie $(\det V)^{-1} \otimes \det V$ avec $\mathcal{O}_S$, $(\det V)^{-1}$ est toujours *devant* $\det V$.

(iii) pour tout $V, W \in \{F_0, F_1, G_0, G_1\}$, l'inverse de $\det V \otimes \det W$ est définie par $(\det V \otimes \det W)^{-1} := \det V^\vee \otimes \det W^\vee$ muni de l'isomorphisme

$$\det V^\vee \otimes \det W^\vee \otimes \det V \otimes \det W \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \psi \otimes \mathrm{id}} \det V^\vee \otimes \det V \otimes \det W^\vee \otimes \det W \xrightarrow{\delta \otimes \delta} \mathcal{O}_S.$$

(iv) pour tout V, W, on identifie $\det V \otimes \det W$ et $\det(V \oplus W)$ en appliquant le foncteur i à la suite exacte $0 \to V \xrightarrow{(\mathrm{id},0)} V \oplus W \xrightarrow{0 \oplus \mathrm{id}} W \to 0$, i.e. par l'isomorphisme

$$\det V \otimes \det W \xrightarrow{\sim} \det(V \oplus W)$$

$$(v_1 \wedge ... \wedge v_n) \otimes (w_1 \wedge ... \wedge w_m) \mapsto (v_1, 0) \wedge ... \wedge (v_n, 0) \wedge (0, w_1) \wedge ... \wedge (0, w_m).$$

On peut commencer le calcul. On note $r = \operatorname{rg} F_i, s = \operatorname{rg} G_i$. D'abord, dans le diagramme $i_\alpha^{-1} \circ i_\beta$ est calculé par

$$\Big((\det G_1)^{-1} \otimes \det G_0\Big) \otimes \Big(\det F_1 \otimes (\det F_1)^{-1} \otimes (\det F_0)^{-1} \otimes \det F_0\Big)$$

$$\xrightarrow{(-1)^{r^2+rs}} \Big((\det F_1)^{-1} \otimes \det F_0\Big) \otimes \Big(\det F_1 \otimes (\det G_1)^{-1} \otimes (\det F_0)^{-1} \otimes \det G_0\Big)$$

en échangeant les termes via la loi de Koszul. C'est un corollaire de l'axiome v) de §5.1.1 et la dernière équation de [KM] page 31 pour la définition de det.[3]

Maintenant on calcule $\det 0_D$. Comme D est un complexe acyclique de longueur 3, $\det 0_D$ se calcule via le diagramme de [KM] page 34, étape 2 pour $H = D$. Ce diagramme devient

$$\begin{tikzcd}
F_1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "(-\mathrm{id}, -d)"] & 0 \arrow[d] \\
F_1 \arrow[r, "(-\mathrm{id}, -d)"] \arrow[d] & F_1 \oplus F_0 \arrow[r, "d \oplus (-\mathrm{id})"] \arrow[d, "d \oplus (-\mathrm{id})"] & F_0 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\
0 \arrow[r] & F_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & F_0
\end{tikzcd}$$

où les trois lignes sont H_I, H, H_{II} de *loc.cit.* respectivement, et les colonnes sont exactes. Dans ce cas le morphisme $i_{\alpha,\beta}$ de [KM] page 34, carré en bas est égal à

$$\Big(\det F_1 \otimes (\det F_1)^{-1}\Big) \otimes \Big((\det F_0)^{-1} \otimes \det F_0\Big) \xrightarrow{\mathrm{id}} \det F_1 \otimes (\det F_1)^{-1} \otimes (\det F_0)^{-1} \otimes \det F_0.$$

En fait, comme les flèches verticales de coordonnée $(1, 1)$ et $(2, 3)$ sont les identités, il suffit de montrer que l'isomorphisme i associé à la deuxième colonne est aussi

3. Le premier isomorphisme dans cette équation de [KM] n'est pas décrit explicitement, mais on déduit de la commutativité de [KM] page 33, carré IV qu'il est égal à ψ.

l'identité, et c'est un calcul facile via l'axiome v) de §5.1.1. Donc par [KM] page 34, carré en bas, $\det 0_D$ est égal à la composition

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_S &\xrightarrow{\delta^{-1}\otimes\delta^{-1}} (\det F_1)^{-1}\otimes\det F_1\otimes(\det F_0)^{-1}\otimes\det F_0\\ &\xrightarrow{\psi\otimes\mathrm{id}} \det F_1\otimes(\det F_1)^{-1}\otimes(\det F_0)^{-1}\otimes\det F_0.\end{aligned}$$

On note $\det 0_D$ simplement par $(-1)^{r^2}$.

On peut utiliser un diagramme similaire pour calculer $\det 0_C$. C'est le diagramme

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & F_1 \arrow[r] \arrow[d, "(\tilde\lambda,-d)"] & 0 \arrow[d] \\ F_1 \arrow[r, "(\tilde\lambda,-d)"] \arrow[d] & G_1\oplus F_0 \arrow[r, "d\oplus\tilde\lambda"] \arrow[d, "d\oplus\tilde\lambda"] & G_0 \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ 0 \arrow[r] & G_0 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & G_0 \end{tikzcd}.$$

L'isomorphisme i associé à la suite exacte de la deuxième colonne est égal à (*cf.* l'axiome v) de §5.1.1)

$$\det F_1\otimes\det G_0 \xrightarrow{\sim} \det(G_1\oplus F_0) = \det G_1\otimes\det F_0$$

$$\begin{aligned}&(x_1\wedge\ldots\wedge x_r)\otimes((dy_1+\tilde\lambda z_1)\wedge\ldots\wedge(dy_s+\tilde\lambda z_s))\\ &\qquad\mapsto(\tilde\lambda x_1,-dx_1)\wedge\ldots\wedge(\tilde\lambda x_r,-dx_r)\wedge(y_1,z_1)\wedge\ldots\wedge(y_s,z_s).\end{aligned}$$

On note cet isomorphisme par φ. D'après [KM] page 34, carré en bas, $\det 0_C$ se calcule par

$$\begin{aligned}\mathcal{O}_S &\xrightarrow{(\psi\delta^{-1})\otimes\delta^{-1}} \det F_1\otimes(\det F_1)^{-1}\otimes(\det G_0)^{-1}\otimes\det G_0\\ &\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}\otimes\mathrm{id}} \det F_1\otimes(\det G_1)^{-1}\otimes(\det F_0)^{-1}\otimes\det G_0 = \det C.\end{aligned}$$

On le note par $(-1)^{r^2}\cdot\mathrm{id}\otimes\varphi^{-1}\otimes\mathrm{id}$.

On se ramène à montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S \arrow[r, "d_F"] \arrow[dr, "d_G"'] & (\det F_1)^{-1}\otimes\det F_0 & \det F\otimes\det C \arrow[l, "(-1)^{r^2}\cdot\mathrm{id}\otimes\varphi\otimes\mathrm{id}"'] \\ & (\det G_1)^{-1}\otimes\det G_0 \arrow[r, "(-1)^{r^2}"] & \det G\otimes\det D \arrow[u, "(-1)^{r^2+rs}"'] \end{tikzcd}$$

est commutatif, où on note

$$\det F\otimes\det C = (\det F_1)^{-1}\otimes\det F_0\otimes\det F_1\otimes(\det G_1)^{-1}\otimes(\det F_0)^{-1}\otimes\det G_0$$

$$\det G \otimes \det D = (\det G_1)^{-1} \otimes \det G_0 \otimes \det F_1 \otimes (\det F_1)^{-1} \otimes (\det F_0)^{-1} \otimes \det F_0.$$

Pour cela on peut supposer que F_i, G_i sont libres sur S. On fixe pour tout $V \in \{F_0, F_1, G_0, G_1\}$, un couple de générateurs

$$\omega_V \in \det V \qquad \omega_V^{-1} \in (\det V)^{-1}$$

tel que

$$\delta_V(\omega_V^{-1} \wedge \omega_V) = 1.$$

On va montrer que, via le diagramme précédent, $1 \in \mathcal{O}_S$ est envoyé sur

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & \omega_{F_1}^{-1} \wedge d\omega_{F_1} & (-1)^{rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{F_1} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge d\omega_{G_1} \arrow[l, mapsto] \ , \\
 & \omega_{G_1}^{-1} \wedge d\omega_{G_1} \arrow[r, mapsto] & (-1)^{r^2} \cdot \omega_{G_1}^{-1} \wedge d\omega_{G_1} \wedge \omega_{F_1} \wedge \omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

où $d\omega_{F_1} \in \det F_0$ est l'image de ω_{F_1} par d_F, et la même pour $d\omega_{G_1}$. Toutes ces flèches sont évidentes sauf celle notée par $(-1)^{r^2} \cdot \mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id}$. Il suffit de montrer

$$(\mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})(\omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{F_1} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge d\omega_{G_1}) = (-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge d\omega_{F_1},$$

où dans la partie à gauche, φ est appliqué à $\omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1}$. En fait, soit $e_1, ..., e_r$ une base de F_1, et $f_1, ..., f_s$ une base de G_1, telles que

$$e_1 \wedge ... \wedge e_r = \omega_{F_1} \qquad f_1 \wedge ... \wedge f_s = \omega_{G_1}.$$

Par la définition de φ, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega_{F_1} \wedge d\omega_{G_1}) &= \varphi(e_1 \wedge ... \wedge e_r \wedge df_1 \wedge ... \wedge df_s) \\
&= (\tilde{\lambda} e_1, -de_1) \wedge ... \wedge (\tilde{\lambda} e_r, -de_r) \wedge (f_1, 0) \wedge ... \wedge (f_s, 0) \\
&= (0, -de_1) \wedge ... \wedge (0, -de_r) \wedge (f_1, 0) \wedge ... \wedge (f_s, 0) \\
&= (-1)^{r+rs} \cdot f_1 \wedge ... \wedge f_s \wedge de_1 \wedge ... \wedge de_r \\
&= (-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{G_1} \wedge d\omega_{F_1}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&(\mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})(\omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{F_1} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge d\omega_{G_1}) \\
=&(-1)^{r^2+rs} \cdot (\mathrm{id} \otimes \varphi \otimes \mathrm{id})(\omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge \omega_{F_1} \wedge d\omega_{G_1}) \\
=&(-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge (\omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1}) \circ \varphi \wedge (\omega_{F_1} \wedge d\omega_{G_1}) \\
=&(-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge (\omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1}) \wedge \varphi(\omega_{F_1} \wedge d\omega_{G_1}) \\
=&\omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge \omega_{G_1} \wedge d\omega_{F_1} \\
=&(-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge \omega_{F_0}^{-1} \wedge \omega_{F_0} \wedge \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{G_1} \wedge d\omega_{F_1} \\
=&(-1)^{r^2+rs} \cdot \omega_{F_1}^{-1} \wedge d\omega_{F_1}.
\end{aligned}$$

□

5.1.4

Le lemme suivant est une généralisation du diagramme commutatif de [KM] page 33.

Lemme 5.2. *Soient F, G, H des complexes de $\mathcal{O}_S$-modules de type $(\star\star)$, et*

$$0 \to G \to F \to H \to 0,$$

une suite exacte. Alors le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S \arrow[r, equal] \arrow[d, "d_G \otimes d_H"] & \mathcal{O}_S \arrow[d, "d_F"] \\ \det G \otimes \det H \arrow[r, "\sim", "i"'] & \det F \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. On suppose que S est connexe, et on note $s = \operatorname{rg} G_i, t = \operatorname{rg} H_i$. On peut supposer comme précédemment que tous les fibrés sont libres. On prend ω_{G_1} (*resp.* ω_{H_1}) une base de $\det G_1$ (*resp.* $\det H_1$). On note $\omega_{G_1}^{-1}, \omega_{H_1}^{-1}$ leur bases duales. L'image de $\omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}$ dans $\det F_1$ via l'isomorphisme

$$i : \det G_1 \otimes \det H_1 \xrightarrow{\sim} \det F_1$$

est aussi notée par $\omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}$, et on définit $\omega_{F_1} := \omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}$. On note $\omega_{F_1}^{-1} \in (\det F_1)^{-1}$ la base duale de ω_{F_1}. Alors on a

$$\omega_{F_1}^{-1} = (-1)^{st} \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{H_1}^{-1}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} (\omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{H_1}^{-1}) \wedge \omega_{F_1} &= (\omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{H_1}^{-1}) \wedge (\omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}) \\ &= (-1)^{st} \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}^{-1} \wedge \omega_{H_1} \\ &= (-1)^{st}. \end{aligned}$$

On calcule l'image de $1 \otimes 1 \in \mathcal{O}_S \otimes \mathcal{O}_S$ via les flèches dans le diagramme. On a

$$d_G \otimes d_H(1 \otimes 1) = \omega_{G_1}^{-1} \wedge d\omega_{G_1} \wedge \omega_{H_1}^{-1} \wedge d\omega_{H_1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} i(d_G \otimes d_H(1 \otimes 1)) &= (-1)^{st} \omega_{G_1}^{-1} \wedge \omega_{H_1}^{-1} \wedge d\omega_{G_1} \wedge d\omega_{H_1} \\ &= \omega_{F_1}^{-1} \wedge d\omega_{F_1} \\ &= d_F(1). \end{aligned}$$

Donc le diagramme est commutatif.

□

5.1.5

Soit $[F_1 \xrightarrow{d_F} F_0]$ un complexe de $\mathcal{O}_S$-modules de type $(\star\star)$. En prenant le dual pour les modules, on obtient le complexe

$$[F_0^\vee \xrightarrow{d_F^\vee} F_1^\vee].$$

Ici on suppose que ce complexe est placé aussi *en degrés -1 et 0* (cela est en conflit avec notre définition du complexe dual dans §4.8.2). Si l'on définit $(\det F_0^\vee)^{-1}$ par $\det F_0$, alors on obtient un isomorphisme

$$\psi : \det[F_1 \xrightarrow{d_F} F_0] \xrightarrow{\sim} \det[F_0^\vee \xrightarrow{d_F^\vee} F_1^\vee],$$

où on échange les deux facteurs dans la définition de $\det[F_1 \to F_0]$ via ψ. On montre que :

Lemme 5.3. *Avec les notations précédentes, le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_S \arrow[r, "d_F"] \arrow[dr, "d_F^\vee"'] & \det[F_1 \to F_0] \arrow[d, "\psi", "\wr"'] \\
& \det[F_0^\vee \to F_1^\vee]
\end{tikzcd}$$

est commutatif.

Démonstration. Supposons que S est connexe, tous les fibrés sont libres, et que $e_1, ..., e_r$ (*resp.* $f_1, ..., f_r$) est une base de F_1 (*resp.* F_0). On note $e_i^\vee, f_i^\vee$ les bases duales de $F_1^\vee, F_0^\vee$ respectivement. On note

$$\omega_{F_1} = e_1 \wedge ... \wedge e_r.$$

Alors ω_{F_1} est une base de $\det F_1$ dont la base duale est égale à

$$\omega_{F_1}^{-1} = e_1^\vee \wedge ... \wedge e_r^\vee.$$

Donc

$$\begin{aligned} d_F(1) &= \omega_{F_1}^{-1} \wedge d\omega_{F_1} \\ &= e_1^\vee \wedge ... \wedge e_r^\vee \wedge de_1 \wedge ... \wedge de_r \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi(d_F(1)) &= (-1)^{r^2} de_1 \wedge ... \wedge de_r \wedge e_1^\vee \wedge ... \wedge e_r^\vee \\ &= (-1)^{r^2} \det(d) \cdot f_1 \wedge ... \wedge f_r \wedge e_1^\vee \wedge ... \wedge e_r^\vee, \end{aligned}$$

où $\det(d)$ est le déterminant usuel de l'application linéaire d.

D'autre part on considère la base

$$\omega_{F_0^\vee} = f_1^\vee \wedge ... \wedge f_r^\vee$$

de $\det_{F_0^\vee}$. Quand on calcule $\det[F_0^\vee \to F_1^\vee] = (\det F_0^\vee)^{-1} \otimes \det F_1^\vee$, $(\det F_0^\vee)^{-1}$ est regardé comme un inverse à gauche de $\det F_0^\vee$, i.e. on identifie $(\det F_0^\vee)^{-1} \otimes \det F_0^\vee$ et $\mathcal{O}_S$ par $\delta_{F_0^\vee}$ *cf.* le lemme 5.1, démonstration, ii). Par définition on a $(\det F_0^\vee)^{-1} = \det F_0$. Donc la base duale de $\omega_{F_0^\vee}$ dans $(\det F_0^\vee)^{-1}$ est égale à

$$\omega_{F_0^\vee}^{-1} = (-1)^{r^2} f_1 \wedge ... \wedge f_r$$

comme un élément de $\det F_0$, parce que $\delta_{F_0^\vee} = (-1)^{r^2} \cdot \delta_{F_0}$. Donc

$$\begin{aligned} d_F^\vee(1) &= \omega_{F_0^\vee}^{-1} \wedge d^\vee \omega_{F_0^\vee} \\ &= (-1)^{r^2} f_1 \wedge ... \wedge f_r \wedge d^\vee f_1^\vee \wedge ... \wedge d^\vee f_r^\vee \\ &= (-1)^{r^2} \det(d^\vee) \cdot f_1 \wedge ... \wedge f_r \wedge e_1^\vee \wedge ... \wedge e_r^\vee. \end{aligned}$$

La commutativité du diagramme vient de l'égalité $\det(d) = \det(d^\vee)$. □

5.2 Complexe de Lie d'un schéma de Raynaud

5.2.1

On utilise le complexe ${}_A\ell_G^\vee$ de §4.7 pour calculer le complexe de Lie équivariant d'un schéma en groupes de Raynaud, et on montre le corollaire 1.3 de l'introduction.

Soit $F/\mathbb{Q}$ un corps totalement réel de degré n, et p un nombre premier inerte dans F. On note $q = p^n$, et on fixe un isomorphisme $\mathcal{O}_F/p \cong \mathbb{F}_q$. On note $\chi : \mathbb{F}_q^\times \to \mathbb{Z}_q^\times$ le caractère de Teichmüller. Il s'étend en un morphisme de monoïde multiplicatif

$$\chi : \mathbb{F}_q \to \mathbb{Z}_q$$

en posant $\chi(0) = 0$. On note le morphisme de Frobenius par

$$\mathrm{Fr} : \mathbb{F}_q \to \mathbb{F}_q \qquad x \mapsto x^p.$$

Alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}_q \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{F}_q \arrow[ur, "\chi^{p^k}"] \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{(k)}"'] & \mathbb{F}_q \end{tikzcd}$$

pour $k = 0, ..., n-1$, où $\mathrm{Fr}^{(k)}$ est la composée k-fois de Fr, et χ^{p^k} est la p^k-ième puissance de χ. Comme $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_F$ est étale sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ en p, par le critère infinitésimal on sait que pour $k = 0, ..., n-1$, il existe un unique relèvement de $\mathrm{Fr}^{(k)}$, noté par

$$\mathrm{Fr}^{(k)} : \mathcal{O}_F \to \mathbb{Z}_q,$$

tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_F \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{(k)}"] \arrow[d, two heads] & \mathbb{Z}_q \arrow[d, two heads] \\ \mathbb{F}_q \arrow[r, "\mathrm{Fr}^{(k)}"] & \mathbb{F}_q \end{tikzcd}$$

commute.

On définit pour $k = 0, ..., n-1$, l'élément

$$e_k = \frac{1}{q-1} \sum_{\lambda \in \mathbb{F}_q^\times} [\lambda] \otimes \chi^{-p^k}(\lambda)$$

de $\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathbb{Z}_q$, qui est le projecteur sur la composante χ^{p^k}-isotypique. D'autre part, les morphismes $\mathrm{Fr}^{(k)}$ induisent deux isomorphismes naturels

$$\mathbb{F}_q \otimes \mathbb{Z}_q = \mathbb{F}_q \otimes_{\mathbb{F}_p} \mathbb{F}_q \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_q, \quad \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_q \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{Z}_q$$

par la même formule $x \otimes y \mapsto (xy, \mathrm{Fr}(x)y, ..., \mathrm{Fr}^{(n-1)}(x)y)$. On note (par un abus de notation)

$$e_k \in \mathbb{F}_q \otimes \mathbb{Z}_q \qquad e_k \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_q$$

les projecteurs définis par les décompositions précédentes, i.e. e_k est égal à $(0, ..., 1, ..., 0)$ avec 1 en la k-ième place. On vérifie aisément que, via les morphismes naturels

$$\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathbb{Z}_q \to \mathbb{F}_q \otimes \mathbb{Z}_q \leftarrow \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_q,$$

on a la correspondance

$$e_k \mapsto e_k \hookleftarrow e_k.$$

Maintenant on suppose que S est un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$ qui est plat sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, et que H est un schéma en groupes de Raynaud sur S. Les projecteurs e_k définissent un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[dr, "e_k"] & \mathrm{D^b}(\mathbb{F}_q \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[l, "\mathrm{Com}"'] \arrow[r, "\mathrm{Res}"] \arrow[d, "e_k"] & \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S) \arrow[dl, "e_k"'] \\ & \mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S) & \end{tikzcd},$$

où les trois flèches e_k sont définies par la multiplication par les trois éléments e_k respectivement, et Res (*resp.* Com) est défini dans la proposition 4.22 (*resp.* proposition 4.27). D'après la proposition 4.25, 4.18, on obtient deux complexes

$$\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$$

$$_{\mathcal{O}_F}\ell_H^{\vee} \in \mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S).$$

Proposition 5.4. *Pour $k = 0, ..., n-1$, il existe un isomorphisme canonique*

$$e_k(\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}) \cong e_k({}_{\mathcal{O}_F}\ell_H^{\vee})$$

dans $\mathrm{D}^{\mathrm{b}}(\mathcal{O}_S)$.

Démonstration. Par la proposition 4.27 et 4.22, on a

$$e_k(\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}) \cong e_k(\mathrm{Com}({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^{\vee})) = e_k({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^{\vee}) = e_k(\mathrm{Res}({}_{\mathbb{F}_q}\ell_H^{\vee})) \cong e_k({}_{\mathcal{O}_F}\ell_H^{\vee}).$$

□

5.2.2

Soit H/S un schéma en groupes de Raynaud comme précédemment. On note $i : H \to X$ l'immersion fermée canonique de H définie dans §4.1. On va utiliser les mêmes notations que dans §4.1 : l'algèbre affine de H (*resp.* X) est notée par $\mathcal{A}$ (*resp.* $\mathcal{S}$), et i est défini par l'idéal $\mathcal{I} \subset \mathcal{S}$. Alors X est l'espace total d'un fibré vectoriel sur S ; en particulier il est lisse sur S.

On note $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)_{k=0,...,n-1}$ le paramètre de Raynaud de H, *cf.* théorème 3.2. On rappelle que l'immersion fermée i est $\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}$-équivariante, *cf.* §4.1 et la remarque 3.3. Par ailleurs, i est une immersion fermée régulière au sens de §4.8.2. En effet, localement sur S on peut supposer que tous les fibrés $\mathcal{L}_k$ sont libres. En choisissant les trivialisations, on peut regarder les a_k comme des éléments de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$. On a des isomorphismes naturels

$$\mathcal{S} = \mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}]$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}]/(x_0^p - a_1x_1, x_1^p - a_2x_2, ..., x_{n-1}^p - a_0x_0)$$

comme dans la démonstration du lemme 4.1. Alors $x_0^p - a_1x_1, x_1^p - a_2x_2, ..., x_{n-1}^p - a_0x_0$ est une suite régulière dans $\mathcal{O}_S[x_0, ..., x_{n-1}]$ pour des raisons de dimension ([AK] III 4.3 ii)).

On voit que l'hypothèse de la proposition 4.26 est vérifiée. Cette proposition implique qu'il existe un isomorphisme

$$\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee} \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^*i^*\Omega_{X/S}]^{\vee}$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathbb{Z}[\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}}] \otimes \mathcal{O}_S)$, qui induit des isomorphismes de composantes isotypiques

$$e_k(\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}) \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^* i^* \Omega_{X/S}]^\vee_{\chi^{p^k}}$$

pour $k = 0, ..., n-1$. D'après le lemme 4.1, on a

$$[\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_k} \mathcal{L}_k]^\vee \cong [e^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2) \to e^* i^* \Omega_{X/S}]^\vee_{\chi^{p^k}},$$

donc un isomorphisme

$$e_k(\ell_H^{\mathbb{F}_q^{\mathrm{mon}},\vee}) \cong [\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_k} \mathcal{L}_k]^\vee$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$.

Soit

$$0 \to H \to B \to B/H \to 0$$

une résolution $\mathcal{O}_F$-équivariante de H, où B est un schéma abélien sur S muni d'une $\mathcal{O}_F$-action, telle que localement sur S, $\omega_{B/H}$ et ω_B sont des $\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-modules libres. D'après la proposition 4.20, il existe un isomorphisme

$$_{\mathcal{O}_F}\ell_H^\vee \cong [\omega_{B/H} \to \omega_B]^\vee$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S)$, donc un isomorphisme

$$e_k(_{\mathcal{O}_F}\ell_H^\vee) \cong [e_k\omega_{B/H} \to e_k\omega_B]^\vee$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$ pour tout k. La proposition 5.4 implique que

Corollaire 5.5. *Soit S un schéma sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$ *qui est* plat *sur* $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$, *et H/S un schéma en groupe de Raynaud de paramètre $(\mathcal{L}_k, a_k, b_k)$. Soit B un schéma abélien qui résout H comme précédemment. Alors il existe un isomorphisme canonique*

$$[\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_k} \mathcal{L}_k] \cong [e_k\omega_{B/H} \to e_k\omega_B]$$

dans $\mathrm{D^b}(\mathcal{O}_S)$ *pour* $k = 0, ..., n-1$.

On remarque que, dans le corollaire on a eu besoin de supposer que S est plat pour appliquer la proposition 4.18. Néanmoins on peut conjecturer que le corollaire reste vrai pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$. Dans la suite on n'utilisera le corollaire que pour le modèle entier $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$, qui est plat sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. Par changement de base on peut obtenir le même résultat pour tout schéma au-dessus de $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$, mais ce ne sera pas utilisé dans notre application.

On déduit du corollaire 5.5 que pour tout k, $\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes(-p)} \otimes \mathcal{L}_k$ est isomorphe au déterminant $\det[e_k\omega_{B/H} \to e_k\omega_B]$, tel que la section canonique a_k de $\mathcal{L}_{k-1}^{\otimes(-p)} \otimes \mathcal{L}_k$ est envoyée sur la section canonique de $\det[e_k\omega_{B/H} \to e_k\omega_B]$. Ainsi on peut presque entièrement reconstituer les paramètres de Raynaud de H à l'aide des formes différentielles de schémas abéliens qui résolvent H. Les paramètres b_k se trouvent d'une manière similaire par la dualité de Cartier. Visiblement on ne peut pas retrouver les $\mathcal{L}_k$ (mais juste leur puissances $(p-1)$-ièmes) avec B et B/H.

5.3 Les modèles locaux M_0^+ et M_1^+

5.3.1

Dans cette section, on va définir le modèle local M_1^+ pour le schéma de Hilbert-Siegel Y_1 de niveau $\Gamma_1(p)$, *cf.* §3.2. Comme décrit dans l'introduction, on construit d'abord un $\mathbb{G}_m^{ng}$-torseur M_0^+ au-dessus du modèle local $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ de niveau $\Gamma_0(p)$, puis on définit le modèle local M_1^+ qui est un schéma fini ramifié sur M_0^+. La nécessité de ce $\mathbb{G}_m^{ng}$-torseur vient du fait qu'on connaît les fibrés en droites $\mathcal{L}_k$ sur Y_1, mais que sur $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ on ne connaît que $\mathcal{L}_k^{\otimes(p-1)}$. On aurait pu remplacer le $\mathbb{G}_m^{ng}$-torseur par une μ_{p-1}-gerbe sur $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ (celle des racines $(p-1)$-ièmes d'un fibré en droites) mais cela introduit des champs et ne simplifie pas la présentation. On montre dans le théorème 5.8 que Y_1 et M_1^+ sont localement isomorphes pour la topologie lisse.

On rappelle que dans l'exemple 2.3, on a défini la chaîne polarisée standard $St_\bullet$ sur $\mathbb{Z}_{(p)}$. On note $St_{\bullet,\mathbb{Z}_q}$ le changement de base de $St_\bullet$ sur $\mathbb{Z}_q$. On définit une nouvelle chaîne polarisée

$$St'_{\bullet,\mathbb{Z}_q},$$

tel que $St'_{i,\mathbb{Z}_q} = St_{i,\mathbb{Z}_q}$ pour tout $i \in \{0,...,g\}$, mais dans la définition des flèches $St'_{i,\mathbb{Z}_q} \to St'_{i-1,\mathbb{Z}_q}$, on remplace p par l'élément w_p de §3.1.1. En remplaçant $St_{\bullet,\mathbb{Z}_q}$ par $St'_{\bullet,\mathbb{Z}_q}$ dans la définition de $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ (*cf.* définition 2.6), on obtient un schéma

$$M'_{0,\mathbb{Z}_q}$$

au-dessus de $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$. L'élément $u_p = \frac{w_p}{p} \in \mathbb{Z}_q^\times$ définit un isomorphisme de chaînes polarisées $St_{\bullet,\mathbb{Z}_q} \cong St'_{\bullet,\mathbb{Z}_q}$, donc un isomorphisme

$$M_{0,\mathbb{Z}_q} \cong M'_{0,\mathbb{Z}_q}$$

de schémas sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$. Dans la suite on identifie $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ avec $M'_{0,\mathbb{Z}_q}$ via cet isomorphisme, i.e. dans la définition de $M_{0,\mathbb{Z}_q}$ on utilise w_p pour les flèches.

5.3.2

On rappelle (définition 2.6) que pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, $M_{0,\mathbb{Z}_q}(S)$ est égal à l'ensemble des (classes d'isomorphismes de) diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S & \mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S \arrow[l, "\mathrm{diag}(w_p,...,1)"'] & \ldots\ldots \arrow[l] & \mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S \arrow[l, "\mathrm{diag}(1,...,w_p,...,1)"'] \\
W_0 \arrow[u, hook] & W_1 \arrow[l] \arrow[u, hook] & \ldots\ldots \arrow[l] & W_g \arrow[l] \arrow[u, hook]
\end{tikzcd},$$

où pour tout i, W_i est un sous-$\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S$-module de $\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S$ qui vérifie les hypothèses de la définition 2.6. On note pour $i = 0, ..., g$ et $k = 0, ..., n-1$,

$$W_{i,k} := e_k W_i,$$

où $e_k \in \mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_q$ est le k-ième projecteur défini dans §5.2.1. On a donc les isomorphismes

$$\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathcal{O}_S^{2g} \quad \text{et} \quad W_i = \bigoplus_{k=0}^{n-1} W_{i,k}.$$

L'hypothèse de la définition 2.6 implique que le $\mathcal{O}_S$-module $W_{i,k}$ est localement un facteur direct de $\mathcal{O}_S^{2g}$ de rang g. On en déduit que le complexe

$$[W_{i,k} \to W_{i-1,k}]$$

est de type $(\star\star)$, *cf.* §5.1.2.

Définition 5.6. On définit le schéma M_0^+ au-dessus de $M_{0,\mathbb{Z}_q}$, tel que pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$ et tout élément $W_\bullet \in M_{0,\mathbb{Z}_q}(S)$, l'ensemble de S-points de M_0^+ au-dessus de $W_\bullet$ est égal à l'ensemble des trivialisations de fibré en droites

$$v_{i,k} : \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S, \quad i = 1, ..., g, \ k = 0, ..., n-1.$$

5.3.3

On note $d_{i,k}$ la différentielle du complexe $[W_{i,k} \to W_{i-1,k}]$ pour tout i, k. Même notation pour la section induite

$$d_{i,k} : \mathcal{O}_S \to \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}].$$

Comme $W_{i,k}$ est un facteur direct de $\mathcal{O}_S^{2g}$, le complexe (concentré en degré $-1, 0$)

$$[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee]$$

est aussi de type $(\star\star)$. On note $d_{i,k}^\vee$ sa différentielle et la section induite

$$d_{i,k}^\vee : \mathcal{O}_S \to \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee].$$

On définit pour tout i et k, un accouplement canonique

$$\text{can} : \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \otimes \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$$

comme suit. Par définition, can est égal à la composition des flèches

$$\begin{tikzcd}
\det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \otimes \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee] \, , \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\psi", "\wr"'] \\
\det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \otimes \det[\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k} \to \mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k}] \arrow[d, "i", "\wr"'] \\
\det[\mathcal{O}_S^{2g} \xrightarrow{\mathrm{diag}(1,\dots,w_p,\dots,1)} \mathcal{O}_S^{2g}]
\end{tikzcd}$$

où la première flèche est définie par le lemme 5.3, et la deuxième flèche est associée à la suite exacte

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{i,k} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i,k}"] & \mathcal{O}_S^{2g} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k} \arrow[r] \arrow[d, "d_{i,k}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & W_{i-1,k} \arrow[r] & \mathcal{O}_S^{2g} \arrow[r] & \mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

par le foncteur i (§5.1.1). Par le lemme 5.3 et lemme 5.2, la section canonique

$$\mathcal{O}_S \xrightarrow{d_{i,k}\otimes d_{i,k}^\vee} \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \otimes \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee]$$

est envoyée par l'accouplement can sur l'élément $w_p \in \mathcal{O}_S$.

Soit S un schéma sur $\mathbb{Z}_q$, et $(W_i, v_{i,k})$ un S-point de M_0^+. A l'aide de l'accouplement can, on peut définir la trivialisation duale

$$v_{i,k}^\vee : \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee] \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$$

de $v_{i,k}$ par l'équation

$$v_{i,k} \otimes v_{i,k}^\vee = \mathrm{can}\, .$$

On note $v_{i,k}d_{i,k}$ (*resp.* $v_{i,k}^\vee d_{i,k}^\vee$) la composition de $v_{i,k}$ (*resp.* $v_{i,k}^\vee$) avec $d_{i,k}$ (*resp.* $d_{i,k}^\vee$). Ce sont des éléments de $\Gamma(S, \mathcal{O}_S)$.

Définition 5.7. Le modèle local M_1^+ est le M_0^+-sous-schéma de $\mathbb{A}^{2g} \times M_0^+$ défini par les équations (de variables $s_1, ..., s_g, t_1, ..., t_g$)

$$s_i^{p^n-1} = v_{i,0}d_{i,0} \cdot (v_{i,n-1}d_{i,n-1})^p \cdot ... \cdot (v_{i,1}d_{i,1})^{p^{n-1}}, \quad i = 1, ..., g$$

$$t_i^{p^n-1} = v_{i,0}^\vee d_{i,0}^\vee \cdot (v_{i,n-1}^\vee d_{i,n-1}^\vee)^p \cdot ... \cdot (v_{i,1}^\vee d_{i,1}^\vee)^{p^{n-1}}, \quad i = 1, ..., g$$

$$s_1 t_1 = ... = s_g t_g.$$

Ici $v_{i,k}, v_{i,k}^\vee, d_{i,k}, d_{i,k}^\vee$ sont des objets universels sur M_0^+, donc les $v_{i,k}d_{i,k}, v_{i,k}^\vee d_{i,k}^\vee$ appartiennent à $\Gamma(M_0^+, \mathcal{O}_{M_0^+})$.

Le théorème suivant est notre théorème principal sur le diagramme de modèle local.

Théorème 5.8. *Le schéma M_1^+ est un modèle local du schéma Y_1 (§3.2), i.e. il existe un diagramme*

$$Y_1 \xleftarrow{\pi'} Z_1^+ \xrightarrow{f'} M_1^+,$$

où Z_1^+ est un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$, et π', f' sont des morphismes lisses. De plus, on a $\dim M_1^+ = \dim Y_1 + ng$.

5.3.4

Le reste de §5.3 est consacré à la démonstration du théorème 5.8. Nous définissons d'abord Z_1^+ et π'. Soit S un schéma sur $\mathbb{Z}_q$. Prenons un S-point

$$(A, H_i, x_i, y_i)$$

de Y_1 (voir la définition 3.8 pour la notation complète). Pour tout $i \in \{1, ..., g\}$, on note $(\mathcal{L}_{i,k}, a_{i,k}, b_{i,k})_{k=0,...,n-1}$ le paramètre de Raynaud de H_i/H_{i-1}. Par définition, les générateurs de Raynaud x_i, y_i sont des morphismes de fibrés en droites

$$\mathcal{L}_{i,0} \xrightarrow{x_i} \mathcal{O}_S \qquad \mathcal{O}_S \xrightarrow{y_i} \mathcal{L}_{i,0}$$

qui vérifient les équations

$$x_i^{\otimes(p^n-1)} = a_{i,0} \cdot a_{i,n-1}^{\otimes p} \cdot ... \cdot a_{i,1}^{\otimes p^{n-1}} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{L}_{i,0}^{\otimes(p^n-1)}, \mathcal{O}_S)$$

$$y_i^{\otimes(p^n-1)} = b_{i,1}^{\otimes p^{n-1}} \cdot ... \cdot b_{i,n-1}^{\otimes p} \cdot b_{i,0} \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_S, \mathcal{L}_{i,0}^{\otimes(p^n-1)}).$$

On définit le schéma Z_1^+ comme suit : l'ensemble des S-points de Z_1^+ au-dessus de (A, H_i, x_i, y_i) est égal à l'ensemble des systèmes

$$(\phi, u_{i,k}),$$

où i (*resp.* k) parcourt $\{1, ..., g\}$ (*resp.* $\{0, ..., n-1\}$), tels que

- $\phi : \mathcal{H}^1(A/H_\bullet) \xrightarrow{\sim} St'_{\bullet,\mathbb{Z}_q} \otimes_{\mathbb{Z}_q} \mathcal{O}_S$ est un isomorphisme de chaînes polarisées (§2.2) ;
- pour tout i et k, $u_{i,k} : \mathcal{L}_{i,k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S$ est une trivialisation de fibré en droites.

Le morphisme $\pi' : Z_1^+ \to Y_1$ est la projection vers Y_1. Par définition π' est un torseur sous un schéma en groupes lisse (proposition 2.4), donc il est lisse.

5.3.5

On va définir le morphisme f' dans §5.3.5-§5.3.7. On suppose toujours que S est un schéma sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$. Soit $(\phi, u_{i,k})$ un S-point de Z_1^+ comme dans §5.3.4. Il suffit de définir l'élément $f'(\phi, u_{i,k})$ de $M_1^+(S)$. D'après la définition 5.7 pour le schéma M_1^+, $f'(\phi, u_{i,k})$ est un système

$$(W_i, v_{i,k}, s_i, t_i).$$

D'abord on définit W_i. Pour tout i, on pose

$$W_i := \phi(\omega_{A/H_i}) \subset \mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S.$$

Par la suite spectrale de Hodge-de Rham pour les schémas abéliens ([BBM] le lemme 2.5.3), il existe une suite exacte

$$0 \to \omega_{A/H_i} \to \mathcal{H}^1(A/H_i) \to \omega^\vee_{(A/H_i)^\vee} \to 0.$$

Donc ϕ induit un isomorphisme

$$\phi : \omega^\vee_{(A/H_i)^\vee} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_F^{2g} \otimes \mathcal{O}_S)/W_i.$$

5.3.6

On définit la partie $v_{i,k}$ de $f'(\phi, u_{i,k})$. On va appliquer le corollaire 5.5 pour le schéma $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$. On note $A, H_i, \mathcal{L}_{i,k}$ les objets universels sur $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$. En appliquant le déterminant, le corollaire 5.5 nous fournit un isomorphisme canonique

$$c_{i,k} : \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{a_{i,k}} \mathcal{L}_{i,k}] \xrightarrow{\sim} \det[e_k\omega_{A/H_i} \to e_k\omega_{A/H_{i-1}}]$$

dans $\operatorname{Pic}(Y_{0,\mathbb{Z}_q})$. Par changement de base, on obtient un isomorphisme de la même forme dans $\operatorname{Pic}(S)$, pour tout schéma S sur $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}_q$ et tout S-point (A, H_i) de $Y_{0,\mathbb{Z}_q}$ (où $\mathcal{L}_{i,k}$ sera le paramètre de H_i/H_{i-1}). On note cet isomorphisme aussi par $c_{i,k}$.

On a les mêmes isomorphismes pour les groupes duaux. En effet, on peut appliquer le corollaire 5.5 pour la suite exacte $0 \to (H_i/H_{i-1})^\vee \to (A/H_i)^\vee \to (A/H_{i-1})^\vee \to 0$, et on obtient un isomorphisme de fibrés en droites

$$c^\vee_{i,k} : \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \xrightarrow{b^\vee_{i,k}} \mathcal{L}^\vee_{i,k}] \xrightarrow{\sim} \det[e_k\omega_{(A/H_{i-1})^\vee} \to e_k\omega_{(A/H_i)^\vee}].$$

Soit maintenant $(A, H_i, x_i, y_i, \phi, u_{i,k})$ un S-point de Z_1^+. Par définition de $W_{i,k}$ dans §5.3.5, ϕ induit des isomorphismes

$$\phi : \det[e_k\omega_{A/H_i} \to e_k\omega_{A/H_{i-1}}] \xrightarrow{\sim} \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}]$$

$$\phi^{-1} : \det[e_k\omega_{(A/H_{i-1})^\vee} \to e_k\omega_{(A/H_i)^\vee}] \xrightarrow{\sim} \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee].$$

La définition de $v_{i,k}$ est donnée par l'équation

$$v_{i,k} \cdot \phi \cdot c_{i,k} = u_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,k},$$

où $u_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,k}$ est la trivialisation de $\det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] = \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes \mathcal{L}_{i,k}$ induite par $u_{i,k-1}$ et $u_{i,k}$ de façon évidente.

Lemme 5.9. *Supposons que $v_{i,k}$ est la trivialisation de* $\det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}]$ *définie précédemment, et que $v_{i,k}^\vee$ est sa trivialisation duale définie dans §5.3.3. Alors on a*

$$v_{i,k}^\vee \cdot \phi^{-1} \cdot c_{i,k}^\vee = (u_{i,k}^{-1} \otimes u_{i,k-1}^{\otimes p}) \cdot \psi,$$

où le morphisme à droite est la composition de

$$\det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}^\vee] \xrightarrow[\sim]{\psi} \det[\mathcal{L}_{i,k} \to \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p}] = \mathcal{L}_{i,k}^{-1} \otimes \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \xrightarrow[\sim]{u_{i,k}^{-1} \otimes u_{i,k-1}^{\otimes p}} \mathcal{O}_S.$$

Démonstration. On considère la flèche composée suivante :

$$\begin{tikzcd} \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] \otimes \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}^\vee] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \psi", "\wr"'] \\ \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] \otimes \det[\mathcal{L}_{i,k} \to \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p}] \arrow[d, "\theta", "\wr"'] \\ \mathcal{O}_S, \end{tikzcd}$$

où θ est l'isomorphisme de fibrés en droites

$$\theta : \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes \mathcal{L}_{i,k} \otimes \mathcal{L}_{i,k}^{-1} \otimes \mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_S,$$

qui envoie $t^{-1} \otimes s \otimes s^{-1} \otimes t$ sur 1, où s (*resp.* t) est un générateur local de $\mathcal{L}_{i,k}$ (*resp.* $\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p}$). On voit facilement que

$$u_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,k} \otimes u_{i,k}^{-1} \otimes u_{i,k-1}^{\otimes p} = \theta.$$

Par définition de $v_{i,k}^\vee$, il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] \otimes \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}^\vee] \arrow[r, "\theta(\mathrm{id} \otimes \psi)"] \arrow[d, "\phi c_{i,k} \otimes \phi^{-1} c_{i,k}^\vee"'] & \mathcal{O}_S \\ \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \otimes \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee] \arrow[ur, "\mathrm{can}"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

Comme toutes ces flèches sont compatibles au changement de base, il suffit de le montrer pour $S = Z_1^+$. On note $a_{i,k} \otimes b_{i,k}^\vee$ la section canonique du fibré en droites $\det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] \otimes \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}^\vee]$. Par le lemme 5.1 et le lemme 5.3 et §5.3.3, on a

$$\theta(\mathrm{id} \otimes \psi)(a_{i,k} \otimes b_{i,k}^\vee) = \theta(a_{i,k} \otimes b_{i,k}) = a_{i,k} b_{i,k} = w_p$$

$$\mathrm{can} \cdot (\phi c_{i,k} \otimes \phi^{-1} c_{i,k}^\vee)(a_{i,k} \otimes b_{i,k}^\vee) = \mathrm{can}(d_{i,k} \otimes d_{i,k}^\vee) = w_p.$$

Mais w_p est un élément régulier de $\mathcal{O}_{Z_1^+}$, *cf.* remarque 3.10. On en déduit que

$$\theta(\mathrm{id} \otimes \psi) = \mathrm{can} \cdot (\phi c_{i,k} \otimes \phi^{-1} c_{i,k}^\vee).$$

□

5.3.7

Pour finir la définition de f', il suffit de définir les racines s_i, t_i. On définit pour tout i, les éléments $s_i, t_i \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ par les équations

$$x_i = s_i \cdot u_{i,0} \qquad y_i = t_i \cdot u_{i,0}^{-1}.$$

L'équation de x_i dans §5.3.4 implique que

$$\begin{aligned} s_i^{p^n-1} &= u_{i,0} \cdot (a_{i,0} a_{i,n-1}^{\otimes p} \dots a_{i,1}^{\otimes p^{n-1}}) \cdot u_{i,0}^{\otimes(-p^n)} \\ &= u_{i,0} a_{i,0} u_{i,n-1}^{\otimes(-p)} \cdot (u_{i,n-1} a_{i,n-1} u_{i,n-2}^{\otimes(-p)})^p \cdot \dots \cdot (u_{i,1} a_{i,1} u_{i,0}^{\otimes(-p)})^{p^{n-1}} \\ &= (u_{i,n-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,0}) a_{i,0} \cdot ((u_{i,n-2}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,n-1}) a_{i,n-1})^p \cdot \dots \cdot ((u_{i,0}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,1}) a_{i,1})^{p^{n-1}}, \end{aligned}$$

où pour tout k, l'élément $(u_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,k}) a_{i,k}$ est la composition des deux flèches à gauche dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_S \arrow[d, "a_{i,k}"'] \arrow[dr, "d_{i,k}"] & . \\ \det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}] \arrow[r, "\phi c_{i,k}", "\sim"'] \arrow[dr, "u_{i,k-1}^{\otimes(-p)} \otimes u_{i,k}"'] & \det[W_{i,k} \to W_{i-1,k}] \arrow[d, "v_{i,k}"] \\ & \mathcal{O}_S \end{tikzcd}$$

Par définition de $v_{i,k}$ le triangle en bas est commutatif, et on a déjà vu (§5.3.6) que le triangle en haut est commutatif. Donc s_i vérifie l'équation

$$s_i^{p^n-1} = v_{i,0} d_{i,0} \cdot (v_{i,n-1} d_{i,n-1})^p \cdot \dots \cdot (v_{i,1} d_{i,1})^{p^{n-1}}$$

qui coïncide avec la définition 5.7.

On peut considérer la même équation pour t_i. Par le même argument on a :

$$t_i^{p^n-1} = ((u_1^{-1} \otimes u_{i,0}^{\otimes p})b_{i,1})^{p^{n-1}} \cdot \ldots \cdot ((u_{i,n-1}^{-1} \otimes u_{i,n-2}^{\otimes p})b_{i,n-1})^p \cdot (u_{i,0}^{-1} \otimes u_{i,n-1})^{\otimes p} b_{i,0}.$$

Par le lemme 5.9 le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_S \arrow[d, "b_{i,k}^\vee"'] \arrow[dr, "d_{i,k}^\vee"] & \\
\det[\mathcal{L}_{i,k-1}^{\vee,\otimes p} \to \mathcal{L}_{i,k}^\vee] \arrow[r, "\phi^{-1}c_{i,k}^\vee", "\sim"'] \arrow[dr, "(u_{i,k}^{-1}\otimes u_{i,k-1}^{\otimes p})\psi"'] & \det[(\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i-1,k})^\vee \to (\mathcal{O}_S^{2g}/W_{i,k})^\vee] \arrow[d, "v_{i,k}^\vee"] \\
& \mathcal{O}_S
\end{tikzcd}$$

est commutatif. On en déduit que

$$t_i^{p^n-1} = (v_{i,1}^\vee d_{i,1}^\vee)^{p^{n-1}} \cdot \ldots \cdot (v_{i,n-1}^\vee d_{i,n-1}^\vee)^p \cdot v_{i,0}^\vee d_{i,0}^\vee$$

qui coïncide avec la définition 5.7.

Comme $x_i y_i = s_i t_i$, on sait que les produits $s_i t_i$ sont indépendants de i, comme les $x_i y_i$. On conclut que $(W_i, v_{i,k}, s_i, t_i)$ défini par §5.3.5-§5.3.7 est bien un S-point de M_1^+.

5.3.8

On montre que f' est lisse. Comme le morphisme $f : Z_0 \to M_0$ défini dans §2.2.3 est lisse, il suffit de montrer que le morphisme

$$Z_1^+ \xrightarrow{f'} Z_0 \times_{M_0} M_1^+$$

est étale.

En fait, $Z_0 \times_{M_0} M_1^+$ est l'espace de module des systèmes

$$(A, H_\cdot, \phi, v_{i,k}, s_i, t_i),$$

où $v_{i,k}$ est une trivialisation de $\det[e_k\phi(\omega_{A/H_i}) \to e_k\phi(\omega_{A/H_{i-1}})]$, et s_i, t_i sont définis par les équations dans la définition 5.7. On définit un schéma Z_0^+ sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$, qui est l'espace de module des systèmes

$$(A, H_i, \phi, u_{i,k}),$$

où $u_{i,k}$ sont les trivialisations définies dans §5.3.4. On obtient un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Z_1^+ \arrow[r] \arrow[d, "f'"] & Z_0^+ \arrow[d, "h"] \\ Z_0 \times_{M_0} M_1^+ \arrow[r] & Z_0 \times_{M_0} M_0^+ \end{tikzcd} .$$

Il suffit de montrer que h est étale. En fait, h envoie $(A, H_i, \phi, u_{i,k})$ sur $(A, H_i, \phi, v_{i,k})$, où $v_{i,k}$ est associé à $u_{i,k}$ de la même manière de §5.3.6. Localement sur la base (et après une translation), h est égal à

$$\mathbb{G}_m^{ng} \to \mathbb{G}_m^{ng}$$

$$(u_{i,k}) \mapsto (u_{i,k-1}^{-p} u_{i,k}),$$

où i (*resp.* k) parcourt $1, ..., g$ (*resp.* $0, ..., n-1$). C'est un morphisme de groupe donc il suffit de prouver qu'il est étale en l'origine. La différentielle de h en l'origine est égale à l'application linéaire

$$(u_{i,k}) \mapsto (-p \cdot u_{i,k-1} + u_{i,k}),$$

dont le déterminant est égal à $1 - p^n$. Comme $1 - p^n$ est inversible dans $\mathbb{Z}_q$, par le critère Jacobien on sait que h est étale. Donc f' est lisse.

5.4 Le cas p décomposé

Dans cette section, on étend la construction de M_1^+ dans §5.3 au cas non-ramifié général. On suppose que $F/\mathbb{Q}$ est un corps totalement réel de degré n, et p un nombre premier non-ramifié dans F, tel que le cardinal résiduel de p dans $\mathcal{O}_F$ est égal à $q = p^{n'}$ (donc p est décomposé comme un produit de n/n' idéaux premiers). On considère d'abord la construction de Y_1 dans §3.2. Soit S un schéma sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$, et (A, H_i) un S-point de Y_0. Pour $i = 1, ..., g$, le schéma en groupes H_i est muni d'une action de l'algèbre

$$\mathcal{O}_F/p = \bigoplus_{r=1}^{n/n'} \mathbb{F}_q,$$

donc décomposé comme le produit

$$H_i = \prod_r H_{i,r}.$$

Pour tout i et tout r, $H_{i,r}/H_{i-1,r}$ est un schéma en groupes de Raynaud. La définition de générateur de Raynaud s'étend à H_i/H_{i-1} : un générateur z_i de H_i/H_{i-1} est la donnée

$$z_i = (z_{i,1}, ..., z_{i,n/n'})$$

où pour tout r, $z_{i,r}$ est un générateur de Raynaud de $H_{i,r}/H_{i-1,r}$. Donc on peut définir le modèle entier Y_1 de la même façon que dans la définition 3.8.

Pour définir le modèle local M_1^+, il suffit de trouver les paramètres de Raynaud de chaque schéma en groupes $H_{i,r}/H_{i-1,r}$ dans le complexe $[\omega_{A/H_i} \to \omega_{A/H_{i-1}}]$, où $r = 1, ..., n/n'$. C'est réalisé par la proposition 4.23. En effet, d'après la proposition 4.20 il existe un isomorphisme

$$_{\mathcal{O}_F}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}} \cong [\omega_{A/H_i} \to \omega_{A/H_{i-1}}]$$

dans $\mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathcal{O}_F \otimes \mathcal{O}_S)$. Par la proposition 4.22, $_{\mathcal{O}_F}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}}$ est isomorphe à l'image de

$$_{\mathcal{O}_F/p}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}} \in \mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathcal{O}_F/p \otimes \mathcal{O}_S)$$

par le foncteur Res. La proposition 4.23 implique qu'il existe une décomposition

$$_{\mathcal{O}_F/p}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}} \cong \bigoplus_{r=1}^{n/n'} {}_{\mathbb{F}_q}\ell^\vee_{H_{i,r}/H_{i-1,r}}$$

dans $\mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathcal{O}_F/p \otimes \mathcal{O}_S)$. Si l'on note pour tout r, ε_r le r-ième projecteur dans les anneaux $\mathcal{O}_F \otimes \mathbb{Z}_p = \bigoplus_r \mathbb{Z}_q$ et $\mathcal{O}_F/p = \bigoplus_r \mathbb{F}_q$, alors on a

$$\mathrm{Res}({}_{\mathbb{F}_q}\ell^\vee_{H_{i,r}/H_{i-1,r}}) \cong \varepsilon_r \,\mathrm{Res}({}_{\mathcal{O}_F/p}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}}) \cong \varepsilon_r({}_{\mathcal{O}_F}\ell^\vee_{H_i/H_{i-1}}) \cong \varepsilon_r[\omega_{A/H_i} \to \omega_{A/H_{i-1}}]$$

dans $\mathrm{D}^\mathrm{b}(\mathbb{Z}_q \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_S)$. Par la preuve de la proposition 5.4 et le corollaire 5.5, on sait que le k-ième paramètre de Raynaud de $H_{i,r}/H_{i-1,r}$ est isomorphe à

$$e_k\varepsilon_r[\omega_{A/H_i} \to \omega_{A/H_{i-1}}],$$

où e_k est le projecteur défini dans §5.2, $k = 0, ..., n' - 1$.

Donc on peut utiliser les mêmes idées de §5.3 pour définir les schémas M_0^+ et M_1^+ (pour définir M_0^+ il suffit de trivialiser tous les fibrés $\det[e_k\varepsilon_r W_i \to e_k\varepsilon_r W_{i-1}]$), et l'analogue du théorème 5.8 reste valable.

Bibliographie

[AK] A.Altman, S.Kleiman. — *Introduction to Grothendieck duality theory*, Lecture Notes in Math. 146, Springer-Verlag, 1970

[BBM] P.Berthelot, L.Breen, W.Messing. — *Théorie de Dieudonné cristalline, II*, Lecture Notes in Math. 930, Springer-Verlag, 1982

[dJ] A.J. de Jong. — *The moduli spaces of principally polarized abelian varieties with $\Gamma_0(p)$-level structure*, Journal of Algebraic Geometry, vol.2, 1992.

[DP] P.Deligne, G.Pappas. — *Singularités des espaces de modules de Hilbert, en les caractéristiques divisant le discriminant*, Compositio Mathematica, vol. 90, 1994.

[G] U.Görtz. — *On the flatness of local models for the symplectic group*, Advances in Mathematics, vol.176, 2003

[GM] S.Gelfand, Y.Manin. — *Methods of homological algebra, second edition*, Springer 1997

[Hai] T. Haines. — *Introduction of Shimura varieties with bad reduction of parahoric types*, Clay mathematics proceeding, vol. 4, 2005.

[HR] T.Haines, M.Rapoport. — *Shimura varieties with $\Gamma_1(p)$-level via Hecke algebra isomorphismes : the Drinfeld case*, Annales scientifiques de l'E.N.S. vol 45, fascicule 5, 2012

[HS] T.Haines, B.Stroh. — *Local models and nearby cycles for $\Gamma_1(p)$-level structure*, en préparation.

[HT] M.Harris, R.Taylor. — *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies 151, Princeton University, 2001

[Ill1] Luc Illusie. — *Complexe Cotangent et Déformation I, II*, Lecture Notes in Mathematics 239, 283, Springer-Verlag, 1971, 1972.

[Ill2] Luc Illusie. — *Déformations de groupes de Barsotti-Tate, d'après Grothendieck*, Astérisque 183, 1990

[KM] F.Knudsen, D.Mumford. — *The projectivity of the moduli space of stable curves I : preliminaries on "*det*" and "*Div*"*, Math. Scand. 89, 1976.

[Kot] ROBERT KOTTWITZ. — *Points on some Shimura varieties over finite fields*, Journal of the American Mathematical Society, vol. 5, No.2, 1992.

[Lan] KAI-WEN LAN. — *Arithmetic compactifications of PEL-type Shimura varieties*, thesis, Havard University, 2008.

[OT] F.OORT, J.TATE. — *Group schemes of prime order*, Annales scientifiques de l'E.N.S. tome 3, numéro 1, 1970.

[Pap1] G.PAPPAS. — *Arithmetic models for Hilbert modular varieties*, Compositio Mathematica, vol. 98, 1995.

[Pap2] G.PAPPAS. — *On the arithmetic moduli scheme of PEL Shimura varieties*, Journal of Algebraic Geometry, vol. 9, 2000.

[PZ] G.PAPPAS, X.ZHU. — *Local model of Shimura varieties and a conjecture of Kottwitz*, Inventiones Mathematica, vol.194, No. 1, 2013.

[Ray] M.RAYNAUD. — *Schémas en groupes de type* $(p, ..., p)$, Bulletin de la Société Mathématique de France, Tome 102, fascicule 3, 1974.

[RZ] M.RAPOPORT, TH.ZINK. — *Period Spaces for p-divisible Groups*, Annals of Mathematics Studies 141, Princeton University, 1996.

[SGA4] M.ARTIN, A.GROTHENDIECK, J.-L.VERDIER ET AL. — *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Lecture Notes in Mathematics 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972/73.

[SGA6] P.BERTHELOT, O.JUSSILA, A.GROTHENDIECK ET AL. — *Théorie des intersections et Théorème de Riemann-Roch*, Lecture Notes in Mathematics 225, Springer-Verlag, 1971.

[Sh] R.SHADRACH. — *Integral models of Shimura varieties with* $\Gamma_1(p)$*-type level structure*, Manuscripta Math. 151, no. 1-2, 2016

[W] C.WEIBEL. — *An introduction to homological algebra*, Cambridge studies in advanced mathematics 38, Cambridge University, 1994

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions la mauvaise réduction de variétés de Shimura. Plus précisément, nous construisons un modèle local des schémas de Hilbert-Siegel de niveau $\Gamma_1(p)$ sur $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$ lorsque p est non-ramifié dans le corps totalement réel, où q est le cardinal résiduel au-dessus de p. Notre outil principal est une variante sur le petit topos de Zariski du complexe de Lie anneau-équivariant ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ défini par Illusie dans sa thèse, où A est un anneau commutatif et G est un schéma en A-modules. Nous montrons aussi une compatibilité entre le complexe de Lie de G équivariant par l'anneau A, et celui équivariant par le monoïde multiplicatif sous-jacent de A. Ce complexe nous permet de calculer le complexe de Lie $\mathbb{F}_q$-équivariant d'un schéma en groupes de Raynaud, donc de relier le modèle entier et le modèle local.

Abstract

In this thesis, we study the bad reduction of Shimura varieties. More precisely, we construct a local model of Hilbert-Siegel moduli schemes in level $\Gamma_1(p)$ over $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}_q$ when p is unramified in the totally real field, where q is the residue cardinality over p. Our main tool is a variant over the small Zariski topos of the ring-equivariant Lie complex ${}_A\underline{\ell}_G^\vee$ defined by Illusie in his thesis, where A is a commutative ring and G is a scheme of A-modules. We also prove a compatibility result between the ring-equivariant Lie complex and the Lie complex equivariant by the multiplicative monoid underlying this ring. With this complex, we calculate the $\mathbb{F}_q$-equivariant Lie complex of a Raynaud group scheme, then relate the integral model and the local model.

TITLE : Local model of Hilbert-Siegel moduli schemes in $\Gamma_1(p)$-level

DISCIPLINE : Mathématiques

MOTS-CLÉS : variété de Hilbert-Siegel, modèle local, complexe cotangent équivariant, théorie de Raynaud, déterminant de complexes parfaits

---

Université Paris 13,
LAGA, Institut Galilée,
99 avenue Jean-Baptiste Clément,
93430 Villetaneuse, France