



École doctorale n° 146 : Sciences, Technologies, Santé
Galilée

Laboratoire de Physique des Lasers

THÈSE

pour obtenir le grade de docteur délivré par

l'Université Paris-XIII

Spécialité "Physique"

présentée et soutenue publiquement par

Kaci KECHADI

le 8 novembre 2019

Analyse théorique des excitations et des instabilités des condensats de Bose-Einstein spinoriels dipolaires

Jury

Mme Anna Minguzzi	Directrice de recherche, CNRS-LPMMC	Rapporteuse
M. Nicolas Pavloff	Professeur, Paris-XI - LPTMS	Président du jury
Mme Patrizia Vignolo	Professeure, UNS - INPHYNI	Rapporteuse
M. Bruno Laburthe-Tolra	Chargé de recherche, CNRS - LPL	Directeur de thèse
M. Paolo Pedri	Maître de conférences, Paris-XIII - LPL	Co-encadrant

À toi, et à toi* qui ne lirez jamais cette thèse !*

** Ma petite sœur Imene, et mon petit frère Islam partis très tôt, ... trop tôt.*

Remerciements

En toutes choses, il y a un temps pour vivre et un temps pour témoigner de vivre¹. C'est de ce second temps qu'il est question ici. Mais en vérité, il s'agit pour moi moins de témoigner que d'en témoigner une modeste reconnaissance à ceux qui ont « tenu un rôle » dans l'accomplissement de ce travail.

Celle qui est là, toujours là, doit être remerciée en premier. Le reste vient ensuite. Me concernant, il s'agit de Ilheme, ma chérie, mon épouse. S'il est vrai, comme le veut Nietzsche, que l'on ne devient que ce que l'on est, il me semble qu'on le devient surtout auprès des nôtres. Pour le dire autrement, c'est ceux qu'on aime qui précisent nos contours. Pour ma part, c'est bien auprès de toi, ma chérie, que je suis devenu ce que je suis. Merci d'avoir tenu ce rôle, le plus important, au fil des ans.

Cette thèse, si elle a eu lieu, c'est en premier grâce à Paolo. Pour autant, ce n'est pas pour cela que j'aimerais le remercier ici. Somme toute, je peux affirmer que « je me suis bien amusé » durant ma thèse. Cela n'aurait sans doute pas été possible sans la personne de Paolo. Il faut dire que Paolo est avant tout de ceux qui prennent le risque de faire confiance. Merci pour ta confiance, ta patience, et surtout, merci de m'avoir laissé la liberté de faire les choses à « ma manière » tout en étant présent lorsque les choses se « gâtaient ». Pour l'anecdote, je dois rajouter ici qu'auprès de Paolo on apprend par exemple que les calculs relèvent de la chose intime, et que, c'est bien pour cette raison qu'il faut savoir les faire soi-même ! Il faut croire que Paolo n'est pas « un encadrant » comme les autres. Dans le bon sens du terme.

J'ai élégamment été encadré par Bruno. Je dois d'abord dire que ces commentaires, suggestions et corrections ont éloigné, de beaucoup, ce manuscrit de son état « brut ». Ce qu'on peut apprécier chez Bruno, c'est son penchant à l'intuition et à vouloir expliquer, presque à tout prix, des choses complexes avec des modèles « simples ». J'ai beaucoup appris en travaillant avec toi. Merci.

Ce travail théorique a beaucoup bénéficié de la proximité d'une équipe d'expérimentateurs de talent. Dans l'équipe Gaz Quantique Magnétique qui m'a accueilli, il y a eu également comme permanents Olivier, Étienne, Laurent et Martin. Je vous remercie tous notamment pour vos précieuses questions et remarques.

Les données expérimentales présentées dans cette thèse doivent beaucoup aux doctorants et post-doctorants qui ont travaillé sur la « Manip Chrome ». Je pense notamment à Bruno, Lucas et Steven. Je vous remercie pour ce « joli travail ». Lucas, je te souhaite beaucoup de réussite pour la suite. Il va de soi que tu vas soutenir une excellente thèse ! Je souhaite également le meilleur pour les « nouveaux » thésards de l'équipe : Andrea, Pierre et Youssef.

1. Cette belle phrase est empruntée, avec liberté, à Camus (Noces).

Ce travail a également bénéficié de la collaboration de Rejish Nath (IISER Pune). Je remercie Rejish de m'avoir accueilli chaleureusement à Pune (Inde) à plusieurs reprises.

Je tiens également à remercier Mme Anna Minguzzi, M. Nicolas Pavloff et Mme Patrizia Vignolo d'avoir accepté de participer à mon jury de thèse, et cela malgré un emploi du temps chargé. J'ai fortement apprécié l'intérêt que vous avez porté à mon travail.

L'ensemble des membres du laboratoire ont contribué, d'une certaine manière, à ce travail. Je remercie tous les membres avec qui j'ai interagi ou simplement partagé un café. En particulier, je remercie l'ancien directeur Olivier Gorceix et la nouvelle directrice Anne Amy-Klein de m'avoir accueilli. Merci à Carole, Maryse et Solen d'avoir facilité certaines démarches administratives. Je remercie également Marc et Stéphane d'avoir répondu efficacement à toutes mes demandes d'ordre informatique.

J'ai partagé mon quotidien de thésard avec quelques doctorants et post-doctorants du laboratoire. Je pense en particulier à Dani et Ân, avec qui j'ai partagé mon bureau, et aux très sympathiques Joe, Louis, Isam, Safia et Sara. Je ne risquerais pas d'oublier de remercier Ali. En plus de m'avoir initié au très addictif jeu de cartes « Gabo », c'est ensemble qu'on a inventé le concept du « Bièroccino ». J'espère qu'on continuera à prendre (beaucoup) de bières ensemble ! Et puis, il y a eu également Christelle. À mon sens, il y a ceux qui cherchent le savoir vivre et ceux qui sont fait pour vire. Christelle est de ces derniers. Je te remercie pour ta vivacité contagieuse, ta sympathie, et surtout, pour ton amitié.

Je veux également remercier ceux de mes proches et de mes amis qui m'ont soutenu le long de mes études. Je remercie en premier mes parents et ma grande sœur Lamia. C'est de vous que je tiens une certaine persévérance. Somme toute, je sais que vous êtes fiers du premier docteur de la famille ! Le soutien de ma grand-mère Tassadit était déterminant. Elle ne sait ni lire ni écrire, mais elle tenait à me donner un coup de pouce pour venir étudier en France dans de bonnes conditions. Longue vie à toi grand-mère. Ma belle sœur Fatiha et son mari Amara sont de ceux qui m'ont ouvert de nombreuses portes. Merci de votre accueil, soutien et disponibilité. Je n'ai pas l'ombre d'un doute sur la réussite de vos enfants : la princesse Alexia, Ilyane le posé, Aksel le dynamique et l'adorable petit Aris ! Je tiens à remercier mon beau-père Boussad. Ta bonne humeur légendaire et ta joie communicative me sont précieux. De mes amis je veux remercier en particulier Ranou. Les hasards de la route t'ont dévié de la physique, mais ce n'est pas une fatalité : tu as bien trouvé ton bonheur ailleurs. Merci pour ton soutien et ton amitié qui dure depuis les bancs de la faculté des sciences exactes !

Il m'est difficile de conclure sans rendre hommage à la mémoire de ma petite soeur Imene et de mon petit frère Islam. Tous les deux partis à l'âge de l'innocence durant ma première et ma troisième année de thèse. Je suis convaincu qu'il y a un peu de vous deux dans ce manuscrit. Vous me manquez.

Table des matières

Table des matières	ii
Remerciements	v
Introduction	xi
1 Condensats de Bose-Einstein spinoriels	1
1.1 Éléments de description théorique des systèmes de spins	1
1.1.1 Hamiltonien en seconde quantification	3
1.1.2 Introduction de quelques opérateurs utiles	4
1.2 Hamiltonien d'interaction de contact	6
1.2.1 Interaction de contact	6
1.2.2 Système de spin f	8
1.2.3 Système de spin $f = 1$	9
1.2.4 Système de spin $f = 2$	9
1.2.5 Système de spin $f = 3$	10
1.3 Hamiltonien d'interaction dipôle-dipôle magnétique	12
1.3.1 Interaction dipôle-dipôle magnétique	12
1.3.2 Hamiltonien dipolaire d'un système de spin f	15
1.4 Théorie de champ moyen	15
1.4.1 Passage à une description en champ moyen	15
1.4.2 Énergie totale d'un condensat de Bose-Einstein spinoriel	17
1.4.3 Équation de Gross-Pitaevskii spinorielle	18
1.4.4 Équations hydrodynamiques de la densité et du spin	19
1.4.5 Définition de quelques quantités physiques utiles	20
1.5 Propriétés stationnaires des condensats de Bose-Einstein spinoriels	21
1.5.1 Condensat de densité uniforme	22
1.5.2 Condensat de densité non uniforme	25
2 Excitations élémentaires dans un condensat dipolaire ferromagnétique	33
2.1 Analyse de Bogoliubov en théorie de champ moyen	34
2.1.1 Éléments de théorie de Bogoliubov	34
2.1.2 Système d'équations de Bogoliubov	36
2.1.3 Propriétés du spectre de Bogoliubov	41
2.2 Spectre de Bogoliubov d'un condensat ferromagnétique uniforme dipolaire	44

2.2.1	Condensat uniforme de spin $f = 1$	47
2.2.2	Condensat uniforme de spin $f = 3$	53
2.2.3	Conclusion	60
3	Démagnétisation spontanée d'un condensat de chrome ferromagnétique	61
3.1	Démagnétisation spontanée d'un condensat ferromagnétique de ^{52}Cr uniforme	62
3.1.1	Description de l'expérience numérique	62
3.1.2	Textures de spin et démagnétisation spontanée	63
3.2	Démagnétisation spontanée d'un condensat ferromagnétique de ^{52}Cr piégé	67
3.2.1	Propriétés de l'état fondamental ferromagnétique	67
3.2.2	Description de l'expérience numérique	69
3.2.3	Démagnétisation et Effet Einstein–de Haas	70
3.2.4	Effet de l'interaction de contact : instabilité énergétique ?	72
3.2.5	Effet de l'interaction dipôle-dipôle : instabilités dynamiques ?	75
3.3	Conclusion	78
4	Dynamiques de spins d'un condensat de chrome à fort champ magnétique	79
4.1	Condensat spinoriel de chrome soumis à un fort champ magnétique	80
4.1.1	Modélisation du piège optique	80
4.1.2	Repère de Larmor	81
4.1.3	Énergie Zeeman moyennée	82
4.1.4	Énergie dipolaire moyennée	83
4.1.5	Dynamique dipolaire dissipative	84
4.1.6	Équation de Gross-Pitaevskii modifiée	86
4.2	Dynamiques de spin d'un condensat ferromagnétique	87
4.2.1	Calcul de l'état fondamental ferromagnétique	88
4.2.2	Comportements dynamiques attendus	89
4.2.3	Development de textures de spin	90
4.2.4	Conclusion	97
4.3	Comparaison aux mesures expérimentales	98
4.3.1	Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/4$	99
4.3.2	Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/2$	103
4.3.3	Conclusion	108
5	Protection du ferromagnétisme et modes collectifs de spin dans un ferrofluide	109
5.1	Modèle d'un fluide quantique incompressible	110
5.1.1	Un fluide incompressible	110
5.1.2	Équation hydrodynamique du spin	111
5.1.3	Équation d'évolution de la longueur de spin locale	111
5.2	Protection du ferromagnétisme	112
5.2.1	Système de densité uniforme de spin f	112
5.2.2	Système de densité uniforme de spin $f = 1$	115

5.2.3	Équations d'évolution des densités n_m et des phases φ_m	115
5.2.4	Persistance du ferromagnétisme dans un condensat piégé	118
5.3	Oscillations collectives de spins dans un ferrofluide	121
5.3.1	Equation de spin d'un ferrofluide	121
5.3.2	Recherche de modes collectifs de précession de spin	122
5.3.3	Observation expérimentale des modes de spin dans un condensat de ^{52}Cr piégé	124
5.4	Conclusion	127
Conclusion		129
A Modélisation numérique		131
A.1	Équation de Gross-Pitaevskii adimensionnée	131
A.2	Méthode de « Splitting »	132
A.2.1	Composition symplectique de second ordre « saute-mouton »	133
A.2.2	Grille spatiale	133
A.2.3	Traitement du terme cinétique H_k	133
A.2.4	Traitement du terme dipolaire H_d	134
B Complément de calculs sur l'analyse des stabilités de la phase ferromagnétique uniforme		135
B.1	Système de spin $f = 1$	135
B.2	Système de spin $f = 2$	136
B.3	Système de spin $f = 3$	138
C Complément sur l'effet des interactions de contact dépendantes du spin		141
C.1	rôle des différents termes de l'interaction de contact	141
Bibliographie		150

Introduction

Les premières réalisations expérimentales de la condensation de Bose-Einstein de gaz atomiques en 1995 par Anderson et al. [1], Davis et al. [2] et Bradley et al. [3] ont amorcé une forte activité de recherche. Ces nouveaux systèmes atomiques se caractérisaient notamment par une contrôlabilité sans précédent. Presque tous les paramètres du système comme la température, le nombre d'atomes et l'intensité des interactions peuvent être contrôlés. Pour certains systèmes, notamment les condensats d'atomes alcalins, la nature attractive ou répulsive des interactions peut aussi être contrôlée [4, 5]. D'une certaine manière, le condensat de Bose-Einstein peut être considéré comme un système « macroscopique » qui offre un terrain d'essai idéal à l'étude de la physique quantique à N corps.

La condensation de Bose-Einstein d'un gaz de bosons est une transition de phase qui se produit au-dessous d'une certaine température critique « très basse », et qui se traduit par une accumulation d'une population macroscopique de bosons dans l'état quantique de plus basse énergie. Le plus souvent, les interactions entre particules jouent un rôle important dans les phénomènes de transitions de phase. C'est le cas, par exemple, du ferromagnétisme qui est causé par les interactions d'échanges entre les spins. À l'opposé, la condensation de Bose-Einstein est une transition de phase qui se produit « sans l'aide » des interactions. Ce phénomène a été prédit par Einstein en 1925 [6] en généralisant les travaux de Bose sur la statistique des photons [7].

En pratique, les atomes du condensat interagissent entre eux. Les condensats étant des systèmes de faible densité ($n \sim 10^{17} - 10^{21} \text{m}^{-3}$), une bonne approximation consiste à ne considérer que les interactions à deux atomes. À courte distance ($r \sim 1 \text{Å}$), les atomes en interaction ressentent des forces très répulsives, tandis qu'à longue distance ($r \gtrsim 10 \text{Å}$), les atomes s'attirent à cause de la force de Van der Waals ayant pour origine un potentiel isotrope et de courte portée ($\propto 1/r^6$). À basse température, l'énergie engagée dans les collisions est faible. Dans ces conditions, le potentiel d'interaction interatomique est approximé par un potentiel de contact isotrope et complètement caractérisé par la donnée des longueurs de diffusion $a_{\mathcal{F}}$ dans chaque canal de spin total \mathcal{F} de la paire d'atomes. L'interaction de contact est l'interaction la plus dominante dans les condensats de Bose-Einstein. Les interactions jouent un rôle crucial dans la détermination des propriétés de base du système. Notamment, le profil de densité du condensat dans un piège est essentiellement fixé par les interactions de contact ².

2. Dans le cadre de l'approximation de Thomas-Fermi [8].

Le traitement théorique des condensats de Bose-Einstein en présence d'interaction a été initié en 1947 par N. N. Bogoliubov [9]. En combinant les effets des interactions à la condensation, Bogoliubov aboutit à une description en termes d'*excitations élémentaires*, et distingue un régime de propagation d'ondes sonores dans le système. Ce régime est une manifestation de la nature superfluide des condensats de Bose-Einstein, et peut être interprété en lien avec la théorie de la superfluidité de Landau [10]. L'un des faits remarquables de l'étude théorique des condensats de Bose-Einstein est le grand succès de la théorie de champ moyen proposée par Gross [11] et Pitaevskii [12] en 1961. Cette théorie, développée à température nulle ($T = 0$ K), est gouvernée par l'équation non linéaire de Gross-Pitaevskii qui décrit à la fois les propriétés stationnaires, et dynamiques du condensat. L'équation de Gross-Pitaevskii décrit aussi la propagation d'onde de matière comme les solitons [13] et la formation de vortex [14, 15] dans le système. Ce grand succès est dû notamment au nombre élevé d'atomes dans le même état quantique, les faibles interactions et la température très basse ($T \lesssim 1 \mu\text{K}$) des condensats.

Les atomes alcalins, comme le ^{87}Rb , possèdent un spin électronique $s = 1/2$ et un spin nucléaire i non nul qui composent leur spin atomique $f = i \pm 1/2$, tandis que l'atome de ^{52}Cr possède un spin d'origine purement électronique $f = 3$ avec $s = 3$ et $i = 0$. Le spin atomique est à l'origine de degrés de liberté internes associés aux $2f + 1$ états Zeeman m . Lorsque les atomes du condensat sont piégés dans un potentiel magnétique, la condensation a lieu dans l'état de spin de basse énergie Zeeman, et les spins s'alignent dans la direction du champ magnétique local. Par conséquent, les degrés de liberté de spin sont « effacés ». C'est le cas des premiers condensats de Bose-Einstein réalisés expérimentalement. Lorsque le piégeage a lieu dans un potentiel optique, les atomes ressentent la même force indépendamment de leur état Zeeman. Dit autrement, le piégeage optique « relâche » les degrés de liberté de spin internes du condensat. On parle dans ce cas de condensats spinoriels. Le premier condensat d'atomes de ^{23}Na dans un piège optique a été obtenu en 1998 au MIT³ par Stamper-Kurn *et al.* [16]. Cette réalisation a ouvert de nouvelles directions théoriques et expérimentales à l'étude des condensats bosoniques dilués. Peu après, Ho [17] et Ohmi *et al.* [18] généralisèrent l'approche champ moyen de Gross et Pitaevskii aux condensats spinoriels.

La coexistence de plusieurs états de spin dans le condensat conduit à une interaction dépendante du spin qui se manifeste par des oscillations cohérentes de spin [19, 20]. Cette interaction est fixée par des combinaisons (différences) des longueurs de diffusion $a_{\mathcal{F}}$. Par exemple, dans un condensat de spin $f = 1$, deux atomes dans l'état $m = 0$ peuvent donner lieu à une paire d'atomes dans les états $m = +1$ et $m = -1$, et réciproquement. La combinaison des interactions dépendantes du spin et d'un couplage magnétique donne lieu à une multitude de phénomènes. En présence d'un champ magnétique statique, les spins sont magnétiquement polarisés. Des textures de spin [21] et des domaines de spin métastable [22] ont été observés lorsque les spins sont soumis à un gradient de champ magnétique. Par ailleurs, à cause des degrés de liberté de spin, plusieurs phases magnétiques sont possibles au-dessous de la température critique de condensation. Dans la majorité des cas, la phase de l'état fon-

3. Massachusetts Institute of Technology

damental est fixée par une compétition entre les interactions de contact dépendantes du spin et le champ magnétique externe [21, 23–27].

Les atomes avec un moment magnétique subissent, en plus de l'interaction de contact, une interaction dipôle-dipôle de nature longue portée et anisotrope. Les effets dipolaires sont souvent plus faibles comparés aux effets de l'interaction de contact. Pour un condensat de ^{52}Cr polarisé, l'intensité de l'interaction dipôle-dipôle par rapport à l'interaction de contact est donnée par $\epsilon_{\text{dd}} \simeq 0.15$. Notons que cette valeur de ϵ_{dd} est 36 fois plus forte comparée au cas des condensats de Bose-Einstein d'atomes alcalins comme le ^{87}Rb . Le premier condensat dipolaire a été obtenu en 2005 par Griesmaier *et al.* [28] avec des atomes de ^{52}Cr polarisés. Peu après, Stuhler *et al.* [29] ont observé de faibles déformations mécaniques (de la densité) anisotropes lors de l'expansion d'un condensat de ^{52}Cr polarisé. Ces déformations dépendent de l'orientation des dipôles (effets de magnétostriction). Des effets plus notables ont été observés par Lahaye *et al.* [30] en contrôlant la valeur de ϵ_{dd} .

La production expérimentale de condensats dipolaires a entraîné une forte activité théorique, dont une partie s'est attachée au cas des condensats dipolaires spinoriels [31–34]. Par exemple, il a été montré que lorsque les interactions de contact dépendantes de spins sont très faibles et en l'absence de champ magnétique, l'interaction dipolaire peut avoir un effet notable sur les phases de l'état fondamental. C'est le cas notamment du ^{87}Rb de spin $f = 1$. En prenant en compte l'interaction dipolaire, Kawaguchi *et al.* [33] ont montré que les spins tendent à s'auto-organiser pour former plusieurs phases avec différentes textures de spin. Des transitions entre les différentes phases pourraient être observées en modifiant la taille du condensat. Expérimentalement, Eto *et al.* [35] ont observé, dans le cas d'un condensat de ^{87}Rb de spin $f = 1$ et $f = 2$, le développement de textures de spins induites par l'interaction dipolaire.

J'ai réalisé mes travaux de thèse dans le groupe gaz quantiques magnétiques du laboratoire de physique des lasers (LPL). Le groupe s'est intéressé aux effets dipolaires qui surgissent à partir de l'état *ferromagnétique* d'un condensat de ^{52}Cr de spin $f = 3$. Cet état est fortement magnétisé : les atomes du condensat sont orientés par un champ magnétique appliqué suivant l'axe z et occupent l'état de spin $m = -3$. Lorsque le champ magnétique est diminué progressivement, Pasquiou *et al.* [36], ont observé une démagnétisation instantanée du condensat à *faible champ magnétique*. Ce type de phénomène est directement lié à l'interaction dipolaire qui couple les degrés de liberté de spin aux degrés de liberté orbitaux. Il en résulte un transfert de moment cinétique de spin vers le moment cinétique orbital. Ce transfert rend possible l'observation d'un phénomène connu sous le nom de l'effet Einstein–de Haas. En parallèle, le groupe du LPL s'est aussi intéressé aux effets de l'interaction dipolaire sur les dynamiques de spin lorsque les dynamiques de démagnétisation peuvent être « négligées » [37, 38]. C'est le cas lorsque le condensat est soumis à un *fort champ magnétique*.

L'objet de cette thèse a été de caractériser du point de vue théorique ces deux situations physiques afin d'apporter une nouvelle compréhension aux observations expérimentales. Nos résultats sont présentés dans ce manuscrit composé de cinq chapitres. Le chapitre 1 pose le cadre théorique général. Les chapitres 2 et 3 abordent le régime de faible champ magnétique. Les chapitres 4 et 5 sont consacrés au régime de fort champ magnétique. De manière plus détaillée :

Le premier chapitre introduit les éléments théoriques de la description des condensats de Bose-Einstein à plusieurs degrés de liberté de spin. On écrit l'Hamiltonien des interactions de spin, puis on introduit l'équation de Gross-Pitaevskii généralisée. La dernière section du chapitre est consacrée aux propriétés de l'état fondamental. Plusieurs travaux théoriques y ont été consacrés. Ici, on discute les digrammes de phase de condensats de densité uniforme de spin $f = 1$ et $f = 3$ en fonction du champ magnétique appliqué. Pour le spin $f = 3$, nous calculons analytiquement le champ magnétique critique p_c au-dessus duquel l'état fondamental est ferromagnétique⁴. Nous obtenons $p_c = (3c_1 - 5c_3/42)n$ où n est la densité et $c_{1,2}$ des constantes d'interaction de contact. On observe numériquement que cette expression est une bonne approximation dans le cas d'un condensat de ^{52}Cr piégé et en présence d'interactions dipolaires.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse des instabilités de la phase ferromagnétique uniforme en présence d'interaction dipolaire et en fonction du champ magnétique appliqué. Cette analyse est effectuée dans le cadre de la théorie de Bogoliubov introduite dans le détail en début de chapitre. On montre que la phase ferromagnétique présente des instabilités dynamiques à champ magnétique fini p_{dd} fixé par les interactions dipolaires. Plus précisément, on montre que ces instabilités sont causées par les processus de relaxation dipolaire. La manifestation de ces instabilités dynamiques se traduit par un développement de textures de spin dans le plan transverse au champ magnétique, et par une démagnétisation du condensat. Ces instabilités sont communes aux systèmes de spin $f = 1, 2$ et 3 que nous avons étudiés. On montre que $p_{\text{dd}} = 4\pi c_{\text{dd}} f n / 3$, où c_{dd} est une constante de l'interaction dipolaire.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude de la démagnétisation de la phase ferromagnétique du ^{52}Cr en fonction du champ magnétique par le moyen de simulations numériques. Dans le cas d'un système de densité uniforme, nos simulations confirment le développement d'instabilités dynamiques : nous observons une démagnétisation pour un champ magnétique $p < p_{\text{dd}}$. Pour $p > p_{\text{dd}}$ le système est stable. Dans le cas d'un système piégé, nous obtenons le champ critique de démagnétisation numériquement. On note ce champ p_{dem} . Premièrement, nous montrons que p_{dem} dépend uniquement des interactions dipolaires. Deuxièmement, nous observons que $p_{\text{dem}} < p_{\text{dd}}$ et que p_{dem} se rapproche de p_{dd} dans le cas d'un système de grande taille. Nous proposons d'interpréter la démagnétisation du condensat piégé comme une signature des instabilités dynamiques mises en évidence pour le système uniforme.

Le quatrième chapitre est consacré à l'étude des dynamiques de spin d'un condensat de ^{52}Cr dans un piège harmonique et soumis à un fort champ magnétique. Dans ce régime, l'énergie magnétique libérée lors des processus de relaxation dipolaire est convertie en énergie cinétique. Quand cette énergie est supérieure à la profondeur du potentiel du piégeage, ces processus se soldent par des pertes d'atomes. Dans ce travail, nous développons un modèle qui prend en compte ces pertes dans l'équation de Gross-Pitaevskii dans un terme dissipatif. Les processus dipolaires d'échange de spin (qui ne causent pas de pertes d'atomes) sont pris en compte séparément à travers un champ dipolaire effectif que l'on note \mathbf{b}^{rot} . L'état initial ferromagnétique est excité

4. La valeur numérique de p_c été déjà connue [27, 39].

en provoquant une rotation globale des spins d'un angle θ_r . Pour $\theta_r \neq \pi/2$, les interactions dipôle-dipôle enclenchent des dynamiques de spin au travers d'un mécanisme de précession inhomogène du vecteur spin \mathbf{f} autour du champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} . Pour $\theta_r = \pi/2$, \mathbf{f} et \mathbf{b}^{rot} sont parallèles : la précession inhomogène ne peut pas avoir lieu. Pour ce dernier cas, on montre comment la présence d'un gradient de champ magnétique permet de favoriser le développement de dynamiques de spin. Deux nouveaux phénomènes sont mis en évidence. Premièrement, nous avons observé une persistance de la nature ferromagnétique du condensat. Cette persistance est surprenante, car les effets dipolaires ou du gradient de champ magnétique peuvent altérer la nature ferromagnétique. De plus, les interactions de contact favorisent énergiquement l'état antiferromagnétique. Deuxièmement, nous avons observé un comportement oscillatoire collectif des spins caractérisés par une fréquence inférieure aux fréquences du piège harmonique. À la fin du chapitre, des observations expérimentales de dynamiques de population de spin sont présentées. Un très bon accord avec nos calculs numériques a permis une meilleure compréhension des observations.

Le cinquième chapitre aborde la question de la persistance du ferromagnétisme. Dans cette étude, on se limite aux cas d'un système de densité uniforme et on néglige l'interaction dipolaire. Le système est soumis à un gradient de champ magnétique $\nabla\gamma$. On montre que l'énergie cinétique communiquée par le gradient aux états de spin tend à altérer la nature ferromagnétique du système. Cette effet est contrebalancé par les interactions de contact qui imposent un gap en énergie ferromagnétique $\propto |c_1|n$. Pour un temps d'évolution dynamique T , on montre que la persistance du ferromagnétisme est assurée par la condition suivante $(g\mu_B\nabla\gamma)^2T^2/M \ll 2|c_1|n$. La dernière partie du chapitre est réservée à l'étude des modes d'oscillations de spin d'un système piégé dans un potentiel harmonique. Pour ce faire, on considère un fluide ferromagnétique (ferrofluide). On résout l'équation hydrodynamique du spin \mathbf{f} dans le cas des oscillations de spin de faibles amplitudes. On montre que les modes sont caractérisés par une fréquence de l'ordre de $\hbar/M\sigma^2$ où σ est la taille du système. En particulier, on note que la fréquence du mode de plus basse énergie est inférieure aux fréquences de piège harmonique. Les oscillations de spin ont été observées expérimentalement dans le groupe du LPL. Dans la limite de gradients faibles, la fréquence du premier mode obtenue théoriquement correspond, avec une bonne précision, aux fréquences mesurées expérimentalement.

Chapitre 1

Condensats de Bose-Einstein spinoriels

Dans ce premier chapitre, nous allons introduire le matériel théorique général indispensable à l'étude des condensats de Bose-Einstein spinoriels. À titre complémentaire le lecteur pourrait consulter les références [40-43].

Les condensats gazeux dilués sont le siège d'interactions interatomiques qui déterminent, en grande partie, leurs propriétés stationnaires ainsi que leur comportement dynamique. Pour une description détaillée des processus de collision à basses énergies, le lecteur est invité à consulter l'excellent livre de C.J. Pethick et H.Smith [44]. Cette description admise, nous allons écrire le long des sections 1.2 et 1.3 l'Hamiltonien d'interactions d'un système de bosons à plusieurs degrés de liberté de spin. Dans la section 1.4, nous allons introduire la description en champ moyen, et écrire l'équation dynamique de Gross-Pitaevskii généralisée aux condensats de Bose-Einstein spinoriels. Finalement, la section 1.5 sera consacrée à l'étude des propriétés stationnaires des condensats spinoriels. Nous allons notamment discuter l'effet des interactions et le champ magnétique sur les propriétés de l'état fondamental.

1.1 Éléments de description théorique des systèmes de spins

La description d'un système de spin f se fait en introduisant l'opérateur champ vectoriel $\hat{\psi}$ de $2f + 1$ composantes $\hat{\psi}_m$. Les champs $\hat{\psi}_m$ sont indexées par le nombre quantique magnétiques m ($m = -f, \dots, f$)

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \hat{\psi}_f(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \\ \vdots \\ \hat{\psi}_{-f}(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Les opérateurs champs $\hat{\psi}_m$ sont supposés respecter les relations de commutations bosoniques suivantes

$$\left[\hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{m'}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = \delta_{mm'} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (1.2)$$

$$\left[\hat{\psi}_m(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{m'}(\mathbf{r}') \right] = \left[\hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}), \hat{\psi}_{m'}^\dagger(\mathbf{r}') \right] = 0. \quad (1.3)$$

où $\delta_{mm'}$ est le Kronecker delta qui prend la valeur 1 si $m = m'$ et 0 autrement. La fonction $\delta(\mathbf{r})$ est la distribution de Dirac. Dans (1.1), le choix de spin atomique f (qui est une composition du spin s et du moment orbitale l de l'électron et du spin nucléaire i) comme nombre quantique doit être précisé. Le spin f est, à strictement parler, un bon nombre quantique uniquement en l'absence d'un champ magnétique externe. En particulier, pour les atomes qui présentent une structure hyperfine, f reste un bon nombre quantique à condition que l'énergie Zeeman soit très faible comparée à l'énergie de séparation hyperfine [43]. À titre d'exemple, pour le ^{87}Rb dans son état fondamental électronique, le spin atomique f est un bon nombre quantique pour $|g|\mu_B B/h \ll \Delta_{\text{hf}}/h \simeq 6.8 \text{ GHz}$ où $g = \pm 1/2$ (éq. 1.8) est le facteur de Landé, μ_B le magnéton de Bohr et Δ_{hf} l'énergie de séparation hyperfine (tab. 1.1 et fig. 1.1). Pour le ^{87}Rb , on supposera que $|g|\mu_B B \ll \Delta_{\text{hf}}$. Dans ce travail, on s'intéressera essentiellement à un système d'atomes de ^{52}Cr dont le spin est purement électronique. Dans ce cas, le spin atomique f est toujours un bon nombre quantique.

Atome	s	l	j	i	f	Δ_{hf} [GHz]
^1H	1/2	0	1/2	1/2	0,1	1.4
^7Li	1/2	0	1/2	3/2	1,2	0.8
^{23}Na	1/2	0	1/2	1/2	0,1	1.8
^{87}Rb	1/2	0	1/2	3/2	1,2	6.8
^{52}Cr	3	0	3	0	3	—

TABLE 1.1 – Spin de quelques espèces atomiques. Les nombres quantiques s, l et i sont, dans l'ordre, le spin électronique, le moment cinétique électronique et le spin nucléaire. $j = s + l$ est le moment cinétiques électronique totale. $f = |j \pm i|$ est le spin atomique. La dernière colonne indique l'énergie de séparation hyperfine Δ_{hf} en GHz.

1.1.1 Hamiltonien en seconde quantification

Pour un système de bosons, dans un piège harmonique $U(\mathbf{r})$ (indépendant de l'état de spin), l'Hamiltonien total dans le cadre de la seconde quantification s'écrit

$$\hat{\mathcal{H}} = \int d\mathbf{r} \sum_m \hat{\psi}_m^\dagger \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U \right] \hat{\psi}_m + \hat{\mathcal{H}}_z + \hat{\mathcal{H}}_c + \hat{\mathcal{H}}_{\text{dd}}, \quad (1.4)$$

où M est la masse atomique. Les deux derniers termes de l'Hamiltonien (1.4) décrivent les processus d'interaction interatomique. Il s'agit de l'interaction de contact $\hat{\mathcal{H}}_c$ et de l'interaction dipôle-dipôle magnétique $\hat{\mathcal{H}}_{\text{dd}}$ qui feront l'objet des deux sections suivantes. Les deux termes sous l'intégrale (termes cinétique et potentiel), ainsi que le terme Zeeman $\hat{\mathcal{H}}_z$ représentent la partie sans interaction de l'Hamiltonien. Dans le cas où un champ magnétique uniforme B est appliqué suivant l'axe z , l'Hamiltonien Zeeman, composé d'un terme linéaire p et d'un terme quadratique q est donné par

$$\hat{\mathcal{H}}_z = p \int d\mathbf{r} \sum_m m \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) + q \int d\mathbf{r} \sum_m m^2 \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}). \quad (1.5)$$

Le terme Zeeman linéaire

$$p = g\mu_B B \quad (1.6)$$

est le produit du facteur de Landé g , du magnéton de Bohr $\mu_B = e\hbar/2M_e$ ($e > 0$ et M_e sont respectivement la charge élémentaire et la masse de l'électron) et du champ magnétique B . Pour l'atome de ^{52}Cr dont le spin total est d'origine électronique, le facteur de Landé est le même que celui de l'électron $g \simeq 2$. Plus généralement, pour les atomes ayant un moment cinétique nucléaire nul ($i = 0$), on a

$$g = \frac{3}{2} + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{2j(j+1)}, \quad (1.7)$$

où j est le moment cinétique électronique totale $j = s + l$. Pour les atomes alcalins ($s = 1/2, l = 0$ et $j = 1/2$), on a

$$g = \begin{cases} -\frac{1}{i+1/2} & \text{pour } f = i - 1/2, \\ \frac{1}{i+1/2} & \text{pour } f = i + 1/2. \end{cases} \quad (1.8)$$

L'effet quadratique peut avoir une origine hyperfine (q_{hf}) ou optique (q_{opt}). En présence du champ magnétique B , le terme Zeeman quadratique q_{hf} a pour origine la structure hyperfine

$$q_{\text{hf}} = (g\mu_B B)^2 / \Delta_{\text{hf}}, \quad (1.9)$$

où Δ_{hf} l'énergie de séparation hyperfine. Pour l'atome du ^{52}Cr , on a $q_{\text{hf}} = 0$ à cause de l'absence d'une structure hyperfine. L'effet quadratique peut aussi avoir une contribution d'origine optique : un laser polarisé exerce un effet Stark le long de l'axe de polarisation qui agit comme un effet quadratique $\propto q_{\text{opt}} m^2$ [45, 46]. Dans ce cas, la valeur q_{opt} dépend de l'intensité du faisceau lumineux, mais ne dépend pas du champ magnétique appliqué. Dans le cas général, nous avons

$$q = q_{\text{hf}} + q_{\text{opt}}. \quad (1.10)$$

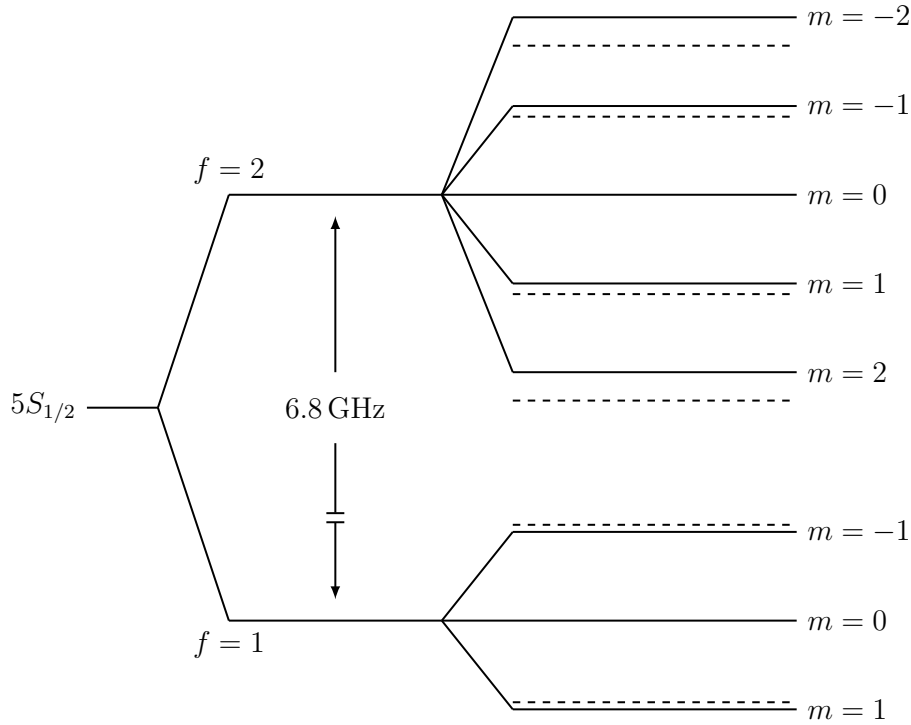


FIGURE 1.1 – Niveaux Zeeman du ^{87}Rb dans son état fondamental électronique. Les lignes pleines indiquent la séparation des niveaux d'énergie due à l'effet Zeeman linéaire, et les lignes traitillées indiquent le déplacement des niveaux Zeeman à cause de l'effet quadratique. Pour la clarté, les dimensions sont exagérées.

1.1.2 Introduction de quelques opérateurs utiles

Avant d'écrire l'Hamiltonien d'interaction, il est commode d'introduire quelques observables et opérateurs utiles à la description des systèmes de spin. La première de ces observables est l'opérateur densité totale \hat{n} défini comme suit

$$\hat{n}(\mathbf{r}) = \sum_m \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_m(\mathbf{r}). \quad (1.11)$$

La deuxième observable est l'opérateur vecteur densité de spin $\hat{\mathbf{F}}$. Les composantes $\nu = x, y$ et z de $\hat{\mathbf{F}}$ sont définies comme suit

$$\hat{F}_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{mm'} (\mathbf{f}_\nu)_{mm'} \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'}(\mathbf{r}). \quad (1.12)$$

Dans cette dernière expression, les matrices \mathbf{f}_ν sont les composantes du vecteur matrice de spin $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)^T$ où T est la transposée. Les éléments des matrices \mathbf{f}_ν sont donnés par

$$(f_x)_{mm'} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{(f-m+1)(f+m)} \delta_{m-1,m'} + \sqrt{(f+m+1)(f-m)} \delta_{m+1,m'} \right], \quad (1.13)$$

$$(f_y)_{mm'} = \frac{1}{2i} \left[\sqrt{(f-m+1)(f+m)} \delta_{m-1,m'} - \sqrt{(f+m+1)(f-m)} \delta_{m+1,m'} \right], \quad (1.14)$$

$$(f_z)_{mm'} = m \delta_{m,m'}. \quad (1.15)$$

À titre d'exemple, pour un système de spin $f = 1$, les matrices f_ν sont données par

$$f_x = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, f_y = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, f_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.16)$$

Finalement, on introduit l'opérateur d'annihilation $\hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ d'une paire de particules de spin total \mathcal{F} dans les position \mathbf{r} et \mathbf{r}'

$$\hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{mm'} \langle \mathcal{F}\mathcal{M} | f, m; f, m' \rangle \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'}(\mathbf{r}'), \quad (1.17)$$

où l'on reconnaît les coefficients de Clebsch-Gordan $\langle \mathcal{F}\mathcal{M} | f, m; f, m' \rangle$. En particulier, \hat{A}_{00} est l'opérateur annihilation d'une paire de bosons dans l'état singulet et peut être mis sous la forme suivante

$$\hat{A}_{00}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{1}{\sqrt{2f+1}} \sum_m (-1)^{f-m} \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{-m}(\mathbf{r}'). \quad (1.18)$$

L'opérateur de paire $\hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}$ est lié aux observables densité totale \hat{n} et vecteur densité de spin $\hat{\mathbf{F}}$. Pour le montrer, on commence par introduire l'opérateur de projection dans l'état à deux atomes de spin total \mathcal{F}

$$\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} = \sum_{\mathcal{M}} |\mathcal{F}, \mathcal{M}\rangle \langle \mathcal{F}, \mathcal{M}|, \quad (1.19)$$

où $\mathcal{M} = -\mathcal{F}, \dots, \mathcal{F}$ est la projection du spin total. L'opérateur $\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ vérifie la relation de complétude suivante

$$\sum_{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}} = \hat{\mathbf{1}}, \quad (1.20)$$

où $\hat{\mathbf{1}}$ est l'opérateur identité. Remarquons que le produit scalaire entre deux vecteurs matrices de spin \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 peut s'écrire à l'aide de l'opérateur $\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ comme suit

$$\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 = \sum_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - f(f + 1) \right] \hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}. \quad (1.21)$$

En utilisant la relation de complétude (1.20) que l'on multiplie à gauche par $\hat{\psi}_{m_1} \hat{\psi}_{m_2}^\dagger \langle f, m_1; f, m_2 |$ et à droite par $|f, m'_1; f, m'_2\rangle \hat{\psi}_{m'_1} \hat{\psi}_{m'_2}^\dagger$, puis en sommant sur les indices m_1, m_2, m'_1 et m'_2 on obtient

$$: \hat{n}^2(\mathbf{r}) := \sum_{\mathcal{F}=0}^{2f} \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}), \quad (1.22)$$

où $:$ représente l'ordre normal qui place les opérateurs d'annihilation à droite des opérateurs de création. De la même manière en utilisant la relation (1.21) à la place de (1.20), on montre que

$$: \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) := \sum_{\mathcal{F}=0}^{2f} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - f(f + 1) \right] \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}). \quad (1.23)$$

1.2 Hamiltonien d'interaction de contact

1.2.1 Interaction de contact

Les condensats de Bose-Einstein sont des systèmes très dilués. Par conséquent, les collisions à trois particules ou plus sont rares et peuvent être négligées. Aussi, du fait des faibles énergies engagées lors de la collision entre deux atomes, les interactions interatomiques de type Van der Waals sont habituellement approximées par des interactions de contact en onde s . D'après un résultat de la théorie de diffusion [47], nous savons que les composantes sphériques de la fonction d'onde subissent un glissement de phase $\delta_l(k)$ où k est le nombre d'onde. Pour un potentiel décroissant à grandes distances en $1/r^n$, le déphasage $\delta_l(k)$ est donné asymptotiquement dans la limite des collisions de faibles énergies ($k \sim 0$) par

$$\delta_l(k) = \begin{cases} k^{2l+1} & l < (n-3)/2, \\ k^{n-2} & l \geq (n-3)/2. \end{cases} \quad (1.24)$$

Dans le cas d'un potentiel de Van der Waals décroissant à longue distance en $1/r^6$, le déphasage est de $\delta_0 \sim k$ pour les ondes s , $\delta_1 \sim k^3$ pour les ondes p et $\delta_l \sim k^4$ pour $l \geq 2$. Par conséquent, seules les ondes s ($l = 0$) sont sensiblement déphasées par $\delta_0 \sim k$. Dans ce cas, l'interaction est caractérisée par un seul paramètre qui est la longueur de diffusion $a_{\mathcal{F}}$ où $0 \leq \mathcal{F} \leq 2f$ est le spin total des deux atomes en collisions. Autrement dit, la collision entre deux atomes ne dépend pas de l'orientation des spins des deux particules, mais uniquement de leur spin total \mathcal{F} , qui se trouve conservé après collision. D'après ce qui précède, le potentiel d'interaction de contact peut être écrit sous la forme suivante [17, 18]

$$\hat{\mathcal{V}}_c^{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') a_{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}, \quad (1.25)$$

où $\hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}$ est l'opérateur de projection dans l'état à deux atomes de spin total \mathcal{F} (éq. 1.19). Pour obtenir l'interaction totale à partir (1.25), il convient de sommer uniquement sur les valeurs paires de $\mathcal{F} = 0, 2, \dots, 2f$

$$\hat{\mathcal{V}}_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_{\mathcal{F}} \hat{\mathcal{V}}_c^{\mathcal{F}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.26)$$

En effet, lors de l'échange de deux bosons identiques de spin f , la fonction d'onde du système à deux particules est modifiée d'un facteur de phase $(-1)^{2f}$ [47]. Par la même opération, la partie spin de la fonction d'onde du système à deux particules est modifiée de $(-1)^{2f-\mathcal{F}}$. La partie orbitale de la fonction d'onde du système à deux particules n'est pas modifiée car ne nous considérons que des collisions de paires de bosons en onde s . Ainsi, le facteur de phase $(-1)^{2f}$ doit être égal à $(-1)^{2f-\mathcal{F}}$, et par conséquent \mathcal{F} doit être paire. Prenons l'exemple d'un système de spin $f = 1$. L'interaction de contact est complètement caractérisée par la donnée de deux paramètres : les longueurs de diffusion a_0 et a_2 . À partir de (1.26), nous avons

$$\hat{\mathcal{V}}_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(a_0 \hat{\mathcal{P}}_0 + a_2 \hat{\mathcal{P}}_2 \right). \quad (1.27)$$

Remarquons qu'en utilisant la relation (1.21), on peut récrire le potentiel de l'interaction de contact (1.27) comme suit

$$\hat{\mathcal{V}}_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{4\pi\hbar^2}{M} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left(\frac{a_0 + 2a_2}{3} + \frac{a_2 - a_0}{3} \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 \right), \quad (1.28)$$

où \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_1 sont les vecteurs matrices de spin (éq. 1.13 à éq. 1.15). Sous cette dernière forme, le potentiel d'interaction de contact pour $f = 1$ se présente comme la somme d'un terme indépendant du spin et d'un terme dépendant du spin. Nous allons voir dans la suite que le second terme en $(a_2 - a_0)\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2/3$ (invariant par rotation), donne lieu à des processus d'échange de spin. Plus généralement, pour un système de spin f , il est toujours possible d'écrire l'interaction de contact (1.26) sous la forme [17, 18]

$$\hat{\mathcal{V}}_c(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_k \tilde{c}_k (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)^k. \quad (1.29)$$

où l'indice k prend les valeurs $k = 0, 1, \dots, f$. Les constantes \tilde{c}_k sont une combinaison des longueurs de diffusion $a_{\mathcal{F}}$. Ces constantes d'interaction peuvent être obtenues en utilisant (1.25), (1.26), (1.29) et la relation

$$(\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)^k = \sum_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - f(f + 1) \right]^k \hat{\mathcal{P}}_{\mathcal{F}}. \quad (1.30)$$

Pour un système de spin $f = 1$, à partir de l'équation (1.28), nous avons

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{3}(g_0 + 2g_2), \quad (1.31)$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{3}(g_2 - g_0). \quad (1.32)$$

où les constantes de couplages $g_{\mathcal{F}}$ sont reliées aux longueurs de diffusions $a_{\mathcal{F}}$ comme suit

$$g_{\mathcal{F}} = \frac{4\pi\hbar^2}{M} a_{\mathcal{F}}. \quad (1.33)$$

Les valeurs expérimentales des longueurs de diffusions $a_{\mathcal{F}}$ pour les atomes de ^{23}Na , ^{87}Rb et ^{52}Cr sont données dans le tableau (1.2).

Pour un système de spin $f = 2$, les trois constantes c_0, c_1 et c_2 sont obtenues comme suit

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{35}(-14g_0 + 40g_2 + 9g_4), \quad (1.34)$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{210}(-7g_0 - 20g_2 + 27g_4), \quad (1.35)$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{210}(7g_0 - 10g_2 + 3g_4). \quad (1.36)$$

Pour un système de spin $f = 3$, les quatre constantes c_0, c_1, c_2 et c_3 sont obtenues comme suit

$$\tilde{c}_0 = \frac{1}{385}(99g_0 - 220g_2 + 486g_4 + 20g_6), \quad (1.37)$$

$$\tilde{c}_1 = \frac{1}{6930}(891g_0 - 1870g_2 + 729g_4 + 250g_6), \quad (1.38)$$

$$\tilde{c}_2 = \frac{1}{20790}(-66g_0 + 275g_2 - 324g_4 + 115g_6), \quad (1.39)$$

$$\tilde{c}_3 = \frac{1}{20790}(-33g_0 + 55g_2 - 27g_4 + 5g_6) \quad (1.40)$$

Pour éviter toute ambiguïté, précisons ici qu'à l'exception du spin $f = 1$, les constantes \tilde{c}_k sont différentes des constantes d'interaction c_k que l'on retrouve habituellement dans la littérature [17, 42, 44, 48, 49]. La relation entre les \tilde{c}_k et les c_k est donnée par les équations (1.54) à (1.56) pour $f = 2$ et par les équations (1.63) à (1.64) pour $f = 3$.

1.2.2 Système de spin f

L'Hamiltonien de contact est obtenu en utilisant l'opérateur de paire $\hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}$ (éq. 1.17) et le potentiel d'interaction de contact $\hat{\mathcal{V}}_c$ (éq. 1.25 et éq. 1.26) comme suit

$$\hat{\mathcal{H}}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \sum_{\mathcal{F}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') g_{\mathcal{F}} \sum_{\mathcal{M}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \quad (1.41)$$

Après intégration sur \mathbf{r}' , on obtient

$$\hat{\mathcal{H}}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{m_1, m_2, m'_1, m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} \hat{\psi}_{m_1}^\dagger \hat{\psi}_{m_2}^\dagger \hat{\psi}_{m'_2} \hat{\psi}_{m'_1}, \quad (1.42)$$

où l'on a introduit le tenseur d'interaction de contact

$$C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \sum_{\mathcal{F}} g_{\mathcal{F}} \langle f, m_1; f, m_2 | \mathcal{P}_{\mathcal{F}} | f, m'_1; f, m'_2 \rangle. \quad (1.43)$$

Le tenseur $C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est symétrique par échange de deux particules $C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = C_{m'_2 m'_1}^{m_2 m_1}$ et par renversement du temps $C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = C_{m_1 m_2}^{m'_1 m'_2}$. Alternativement, l'Hamiltonien d'interaction de contact peut être obtenue en utilisant l'expression (1.29) comme suit

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_c &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \sum_k \tilde{c}_k \sum_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} \langle f, m_1; f, m_2 | (\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2)^k | f, m'_1; f, m'_2 \rangle \times \\ &\quad \hat{\psi}_{m_1}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m_2}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'_2}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{m'_1}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (1.44)$$

Après intégration sur \mathbf{r}' , on obtient

$$\hat{\mathcal{H}}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_k \tilde{c}_k \sum_{\mathcal{F}} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - f(f + 1) \right]^k \sum_{\mathcal{M}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}), \quad (1.45)$$

où l'on a utilisé les relations (1.17) et (1.30). Finalement, en séparant dans l'Hamiltonien (1.45) les termes $k = 0, 1$ du reste de la somme, puis en utilisant les relations (1.22) et (1.23), on obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_c &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\tilde{c}_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + \tilde{c}_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{k \geq 2}^f \tilde{c}_k \sum_{\mathcal{F}=0}^{2f} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - f(f + 1) \right]^k \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

1.2.3 Système de spin $f = 1$

L'Hamiltonien de contact d'un système de spin $f = 1$ est donné directement par la première ligne de l'équation (1.46)

$$\hat{\mathcal{H}}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : \right]. \quad (1.47)$$

Les constantes d'interaction $c_{0,1}$ sont données en fonction des constantes $\tilde{c}_{0,1}$ et des constantes $g_{0,2}$ comme suit

$$c_0 = \tilde{c}_0 = \frac{1}{3}(g_0 + 2g_2), \quad (1.48)$$

$$c_1 = \tilde{c}_1 = \frac{1}{3}(g_2 - g_0). \quad (1.49)$$

L'introduction des constantes c_k sera plus claire pour le spin $f = 2$ et 3. Sous la forme (1.47), l'Hamiltonien de contact $f = 1$ est la somme d'un terme de densité et d'un terme de spin. En développant l'Hamiltonien (1.47) en terme de $\hat{\psi}_m$, la constante c_1 apparait comme un paramètre qui fixe les processus d'échange de spin. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_c &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[g_2 \left(\hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_1 + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_{-1} \hat{\psi}_{-1} \right) + \frac{g_0 + 2g_2}{3} \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0 \hat{\psi}_0 \right. \\ &+ 2g_2 \left(\hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_{-1} \hat{\psi}_0 + \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_{-1} \right) \\ &\left. + \frac{g_2 - g_0}{3} \left(\hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_0^\dagger \hat{\psi}_1 \hat{\psi}_{-1} + \hat{\psi}_1^\dagger \hat{\psi}_{-1}^\dagger \hat{\psi}_0 \hat{\psi}_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

La première ligne de (1.50) contient des termes d'auto-collisions. La deuxième ligne contient des termes de collisions croisées. Finalement, la dernière ligne décrit des processus de changement de spin.

1.2.4 Système de spin $f = 2$

Pour un système de spin $f = 2$, l'Hamiltonien de contact est obtenu à partir de l'équation (1.46) en sommant jusqu'à $k = 2$. On obtient

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_c &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\tilde{c}_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + \tilde{c}_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : \right] \\ &+ \frac{\tilde{c}_2}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\mathcal{F}=0,2,4} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F} + 1) - 6 \right]^2 \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.51)$$

En utilisant les relations (1.22) et (1.23), les termes sous l'intégrale de la seconde ligne de (1.51) peuvent être mis sous la forme

$$12 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : + 30 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}). \quad (1.52)$$

Avec cette dernière équation, l'Hamiltonien de contact d'un système de spin $f = 2$ devient

$$\hat{\mathcal{H}}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.53)$$

Les constantes d'interaction $c_{0,1,2}$ sont données en fonction des $\tilde{c}_{0,1,2}$ et des $g_{0,2,4}$ comme suit

$$c_0 = \tilde{c}_0 + 12\tilde{c}_2 = \frac{1}{7}(4g_2 + 3g_4), \quad (1.54)$$

$$c_1 = \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = \frac{1}{7}(g_4 - g_2), \quad (1.55)$$

$$c_2 = 30\tilde{c}_2 = \frac{1}{7}(7g_0 - 10g_2 + 3g_4). \quad (1.56)$$

1.2.5 Système de spin $f = 3$

En dernier, en sommant jusqu'à $k = 3$ dans l'Hamiltonien (1.46), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\tilde{c}_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + \tilde{c}_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : \right] \\ &+ \frac{\tilde{c}_2}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\mathcal{F}=0,2,4,6} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F}+1) - 12 \right]^2 \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{\tilde{c}_3}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\mathcal{F}=0,2,4,6} \left[\frac{1}{2} \mathcal{F}(\mathcal{F}+1) - 12 \right]^3 \sum_{\mathcal{M}=-\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1.57)$$

En utilisant les relations (1.22) et (1.23), les termes sous l'intégrale de la deuxième et troisième ligne de (1.57) peuvent être mises respectivement sous la forme

$$18 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + 7 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : + 210 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) + 126 \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 \hat{A}_{2\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2\mathcal{M}}(\mathbf{r}), \quad (1.58)$$

et

$$126 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + 67 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : - 1050 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) - 256 \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 \hat{A}_{2\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2\mathcal{M}}(\mathbf{r}). \quad (1.59)$$

Finalement, avec ces deux dernières équations, l'Hamiltonien d'interaction de contact d'un système de spin $f = 3$ s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[\sum_{\mathcal{M}=-2}^2 c_0 : \hat{n}^2(\mathbf{r}) : + c_1 : \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) : + c_2 \hat{A}_{00}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{00}(\mathbf{r}) \right. \\ \left. + c_3 \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 \hat{A}_{2\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{A}_{2\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \right]. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Les constantes d'interaction $c_{0,1,2,3}$ sont données en fonction des $\tilde{c}_{0,1,2,3}$ et des $g_{0,2,4,6}$ comme suit

$$c_0 = \tilde{c}_0 + 18\tilde{c}_2 + 126\tilde{c}_3 = \frac{1}{11}(9g_4 + 2g_6), \quad (1.61)$$

$$c_1 = \tilde{c}_1 + 7\tilde{c}_2 + 67\tilde{c}_3 = \frac{1}{11}(g_6 - g_4), \quad (1.62)$$

$$c_2 = 210\tilde{c}_2 - 1050\tilde{c}_3 = \frac{1}{11}(11g_0 - 21g_4 + 10g_6), \quad (1.63)$$

$$c_3 = 126\tilde{c}_2 - 252\tilde{c}_3 = \frac{1}{11}(11g_2 - 18g_4 + 7g_6). \quad (1.64)$$

Atome	Spin	$a_{\mathcal{F}} [a_B]$	$c_k [4\pi\hbar^2 a_B/M]$	Références
^{23}Na	$f = 1$	$a_0 = 47.36 \pm 0.80$	$c_0 \simeq 51.11$	[50]
		$a_2 = 52.98 \pm 0.40$	$c_1 \simeq 1.87$	
^{87}Rb	$f = 1$	$a_2 = 101.80 \pm 0.2$	$c_0 \simeq 100.87$	[51]
		$a_2 = 100.40 \pm 0.1$	$c_1 \simeq -0.47$	
	$f = 2$	$a_2 - a_0 = 3.51 \pm 0.54$	$c_1 \simeq 0.99$	[52]
		$a_4 - a_2 = 6.95 \pm 0.35$	$c_2 \simeq -0.53$	
^{52}Cr	$f = 3$	$a_0 = 13.50 \pm 11$	$c_0 \simeq 66.09$	[53]
		$a_2 = -7.00 \pm 20$	$c_1 \simeq 4.05$	[54]
		$a_4 = 58.00 \pm 6$	$c_2 \simeq -4.05$	[54]
		$a_6 = 102.50 \pm 4$	$c_3 \simeq -36.68$	[36]

TABLE 1.2 – Longueurs de diffusions de ^{23}Na , ^{87}Rb et ^{52}Cr en unité $a_B \simeq 0.0529$ nm (Rayon de Bohr). Les constantes d'interaction $c_k (\neq \tilde{c}_k)$ sont définies par (1.48) et (1.49) pour $f = 1$, par (1.54) à (1.56) pour $f = 2$ et par (1.61) à (1.64) pour $f = 3$.

1.3 Hamiltonien d'interaction dipôle-dipôle magnétique

1.3.1 Interaction dipôle-dipôle magnétique

L'interaction dipolaire entre deux dipôles magnétique $\hat{\mathbf{d}}_1$ et $\hat{\mathbf{d}}_2$ séparés d'une distance relative $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ s'écrit

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2 - 3(\hat{\mathbf{d}}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\hat{\mathbf{d}}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3}, \quad (1.65)$$

où $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ et $r = |\mathbf{r}|$. La constante μ_0 est la perméabilité magnétique du vide. L'interaction dipôle-dipôle que nous considérons ici a pour origine le spin électronique et ne prend pas en compte les effet nucléaires (couplage entre le spin électronique et le spin nucléaire). Dans la base du spin atomique f , les dipôles magnétiques $\hat{\mathbf{d}}_i$ ($i = 1, 2$) s'écrivent $\hat{\mathbf{d}}_i = g\mu_B \mathbf{f}_i$ où g est le facteur de Landé, μ_B le magnéton de Bohr et \mathbf{f}_i le vecteur matrice de spin dont les composantes sont définies par les équations (1.13) à (1.15). L'expression (1.65) devient

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = c_{\text{dd}} \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 - 3(\mathbf{f}_1 \cdot \hat{\mathbf{r}})(\mathbf{f}_2 \cdot \hat{\mathbf{r}})}{r^3} = c_{\text{dd}} \sum_{\nu\nu'} \mathbf{f}_{1\nu} Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r}) \mathbf{f}_{2\nu'}. \quad (1.66)$$

où $\nu\nu' = x, y, z$. La constante d'interaction dipolaire c_{dd} est définie comme suit

$$c_{\text{dd}} = \mu_0 \frac{(g\mu_B)^2}{4\pi}. \quad (1.67)$$

Les noyaux dipolaire $Q_{\nu\nu'}$ sont définis comme suit

$$Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r}) = \frac{\delta_{\nu\nu'} - 3\hat{r}_\nu \hat{r}_{\nu'}}{r^3}, \quad (1.68)$$

où $\delta_{\nu\nu'}$ est le Kronecker delta qui prend la valeur 1 si $\nu = \nu'$ et 0 autrement.

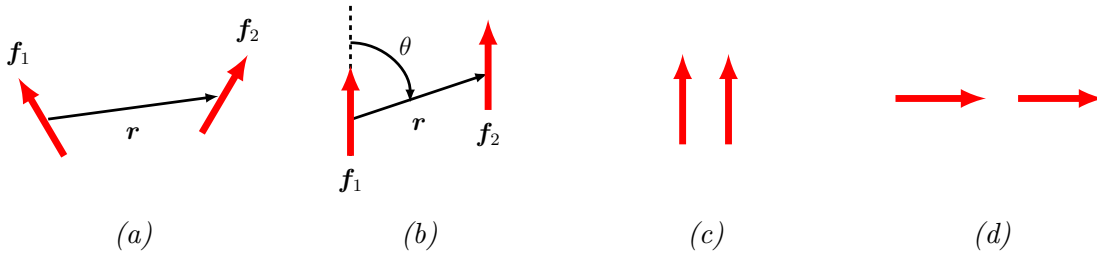


FIGURE 1.2 – Interaction entre deux dipôles non polarisés (a) et deux dipôles polarisés (b). La figure (c) représente des dipôles côte à côte (configuration la plus répulsive) et la figure (d) représente des dipôles en tête-à-queue (configuration la plus attractive).

Nature longue portée

L'interaction dipôle-dipôle est de nature longue portée et décroît à grande distance comme $1/r^3$. Notons que cette nature longue portée est propre aux systèmes à trois dimensions. Pour les systèmes à une ou deux dimensions, l'interaction dipôle-dipôle est de courte portée [40, 55].

Propriétés de collisions

L'interaction dipôle-dipôle exhibe des propriétés de collisions différentes de celles de l'interaction de contact. Pour un potentiel en $1/r^n$ avec $n = 3$, comme c'est le cas de l'interaction dipôle-dipôle, toutes les composantes sphériques l sont déphasées de $\delta_l \sim k$ (éq. 1.24). Cela implique que toutes les ondes l contribuent à la section efficace. Par ailleurs, comme nous allons le voir ci-dessous, la nature anisotrope de l'interaction dipôle-dipôle induit un couplage entre les différentes ondes l .

Nature anisotrope

L'interaction dipôle-dipôle peut être attractive ou répulsive selon la position et l'orientation des dipôles magnétique. On peut illustrer cette nature anisotrope en considérant des dipôles polarisés dans la direction \hat{e}_z (fig. 1.2b). Dans ce cas, d'après l'expression (1.66) nous avons,

$$\hat{V}_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = c_{\text{dd}} f^2 Q_{zz}(\mathbf{r}) = c_{\text{dd}} f^2 \frac{1 - 3\hat{r}_z^2}{r^3}. \quad (1.69)$$

En écrivant $\hat{r}_z = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{e}_z = \cos \theta$ où θ représente dans ce cas l'angle entre la direction de polarisation et la position relative r entre les deux dipôles, l'expression (1.69) devient

$$\hat{V}_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = c_{\text{dd}} f^2 \frac{1 - 3 \cos^2 \theta}{r^3} = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \frac{c_{\text{dd}} f^2}{r^3} Y_{2,0}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.70)$$

où l'on a identifié l'Harmonique sphérique $Y_{2,0} = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{5}{\pi}} (1 - 3 \cos^2 \theta)$. D'après (1.70), l'angle θ pour lequel l'interaction dipôle-dipôle est la plus répulsive est $\theta = \pi/2$ qui correspond à la configuration dipôles côte à côte (fig. 1.2c). L'interaction la plus attractive est obtenue pour $\theta = 0$ et correspond à la configuration en tête-à-queue (fig. 1.2d). Le signe de l'interaction change à l'angle dit *magique*

$$\theta_m = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 54.7^\circ. \quad (1.71)$$

Plus généralement, l'interaction (1.66) peut être écrite en terme d'harmoniques sphériques de moment orbital $l = 2$. Pour ce faire, nous écrivons $\hat{\mathbf{r}}$ comme suit

$$\hat{\mathbf{r}} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta), \quad (1.72)$$

où $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi[$ sont respectivement l'angle polaire et azimutale des coordonnées sphériques. En introduisant les matrices de spins $f_{\pm} = f_x \pm if_y$ et en identifiant

les Harmoniques sphériques $Y_{2,\Delta m}$, l'interaction dipolaire (1.66) s'écrit

$$\hat{\mathcal{V}}_{\text{dd}}(\mathbf{r}) = - \left(\frac{24\pi}{5} \right)^{1/2} \frac{c_{\text{dd}}}{r^3} \sum_{\Delta m=-2}^2 Y_{2,\Delta m}^*(\hat{\mathbf{r}}) \Sigma_{2,\Delta m}, \quad (1.73)$$

où les tenseurs $\Sigma_{2,\Delta m}$ sont donnés par

$$\Sigma_{2,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}} (f_{1z}f_{2z} - \mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 / 3), \quad (1.74)$$

$$\Sigma_{2,\pm 1} = \pm \frac{1}{2} (f_{1z}f_{2\pm} + f_{1\pm}f_{2z}), \quad (1.75)$$

$$\Sigma_{2,\pm 2} = -\frac{1}{2} f_{1\pm}f_{2\pm}. \quad (1.76)$$

Le tenseur $\Sigma_{2,0}$ contient les processus d'*échange de spin* qui conservent la projection du spin total atomique, soit $\Delta m = 0$. Les tenseurs $\Sigma_{2,\pm 1}$ et $\Sigma_{2,\pm 2}$ contiennent les processus de *relaxation de spin*. La projection du spin total d'un atome peut être modifiée de $\Delta m = 1$, pour un maximum de $\Delta m = 2$ pour la paire d'atomes en collision. L'interaction dipolaire possède donc la même symétrie orbitale que les harmoniques sphériques $Y_{2\Delta m}$. Par conséquent, l'interaction dipôle-dipôle peut induire des transitions en onde d ($l = 2$) : deux atomes incidents dans l'état s peuvent être diffusés dans l'état d . En effet, l'intégrale angulaire

$$\int d\Omega Y_{L,M_L}^*(\hat{\mathbf{r}}) Y_{2,\Delta m}(\hat{\mathbf{r}}) Y_{l,m_l}(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.77)$$

est différente de zéro seulement pour $M_L = m_l + m$ et $L = l$ ou $L = l \pm 2$. Par conséquent, l'onde partielle de moment angulaire orbital (l, m_l) est couplé aux états ($l, m_l + \Delta m$) et ($l \pm 2, m_l + \Delta m$). Notons que, dans le cas de spins polarisés, la projection du moment angulaire orbital total sur l'axe de quantification est conservée. Par conséquent, l'interaction dipôle-dipôle couple l'état (l, m_l) aux états ($l \pm 2, m_l$). Ces processus font intervenir uniquement le tenseur $\Sigma_{2,0}$ (1.73). L'interaction dipôle-dipôle est invariante sous toute rotation simultanée dans l'espace des coordonnées spatiales et dans l'espace des spins. Autrement dit, l'interaction dipôle-dipôle conserve le moment cinétique total, mais ne conserve pas séparément le moment cinétique de spin et le moment cinétique orbital des ondes partielles.

Finalement, il peut se révéler commode pour les calculs d'écrire les noyaux dipolaires $Q_{\nu\nu'}$ en fonction des harmoniques sphériques $Y_{2,\Delta m}$.

$$\mathbf{Q} = \sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{2,0} - Y_{2,2} - Y_{2,-2} & iY_{2,2} - iY_{2,-2} & Y_{2,1} - Y_{2,-1} \\ iY_{2,2} - iY_{2,-2} & \sqrt{\frac{2}{3}} Y_{2,0} + Y_{2,2} + Y_{2,-2} & -iY_{2,1} - iY_{2,-1} \\ Y_{2,1} - Y_{2,-1} & -iY_{2,1} - iY_{2,-1} & -2\sqrt{\frac{2}{3}} Y_{2,0} \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

1.3.2 Hamiltonien dipolaire d'un système de spin f .

Pour un système de spin f , l'Hamiltonien dipôle-dipôle dans le cadre de la seconde quantification est obtenue comme suit

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{dd}} = \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \sum_{m_1 m_2 m'_1 m'_2 = -f}^f \langle f, m_1; f, m_2 | \hat{\mathcal{V}}_{\text{dd}} | f, m'_1; f, m'_2 \rangle \times \hat{\psi}_{m_1}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m_2}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'_2}(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{m'_1}(\mathbf{r}'). \quad (1.79)$$

En utilisant l'expression de l'interaction dipolaire (1.66) et la définition de l'opérateur densité de spin $\hat{\mathbf{F}}$ donnée par (1.12), l'Hamiltonien dipolaire (1.79) peut être mis sous la forme suivante

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{dd}} = \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \sum_{\nu\nu'} \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}) Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\mathbf{F}}(\mathbf{r}'). \quad (1.80)$$

1.4 Théorie de champ moyen

La description en champ moyen des condensats de Bose-Einstein spinoriels a été développée initialement par Ho [17] et Ohmi *et al* [18]. Leur approche est une généralisation de la description de E. P. Gross [11] et L. P. Pitaevskii [12] des condensats de Bosons identiques sans spin et à température nulle. Dans cette section, nous proposons une introduction sommaire de la description en champ moyen des condensats spinoriels. Pour une approche plus complète, le lecteur peut consulter la référence [56].

1.4.1 Passage à une description en champ moyen

Pour obtenir une description en champ moyen d'un condensat à N bosons, la procédure consiste à développer l'opérateur $\hat{\psi}_m(\mathbf{r})$ dans la base orthonormée des fonctions $\{\varphi_{mi}(\mathbf{r})\}$ comme suit

$$\hat{\psi}_m(\mathbf{r}) = \sum_i \hat{a}_{mi} \varphi_{mi}(\mathbf{r}), \quad (1.81)$$

où l'on a introduit l'opérateur annihilation \hat{a}_{mi} et création \hat{a}_{mi}^\dagger qui agissent sur un boson de nombre quantique m et de fonction spatiale φ_{mi} . Ces opérateurs sont supposés vérifier les relations de commutations suivantes

$$\left[\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{m'j}^\dagger \right] = \delta_{mm'} \delta_{ij}, \quad (1.82)$$

$$\left[\hat{a}_{mi}, \hat{a}_{m'j} \right] = 0, \quad (1.83)$$

$$\left[\hat{a}_{mi}^\dagger, \hat{a}_{m'j}^\dagger \right] = 0. \quad (1.84)$$

Les conditions d'orthonormalité et de complétude qui vérifiées par les fonctions $\varphi(\mathbf{r})$ sont données par

$$\int d\mathbf{r} \varphi_{mi}^*(\mathbf{r}) \varphi_{mj}(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \quad (1.85)$$

et

$$\sum_i \varphi_{mi}^*(\mathbf{r}) \varphi_{mi}(\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (1.86)$$

À l'aide de ces dernières relations, on peut vérifier que les opérateurs champ $\hat{\psi}_m$ vérifient les relations de commutations (1.2) et (1.3). Ce qui nous intéresse ici, c'est de décrire un système de N particules qui partagent le même état φ_{m0} . S'agissant de bosons, on peut construire cette état à partir du vide $|\text{vac}\rangle$ comme suit

$$|\zeta\rangle = \frac{1}{N!} \left(\sum_m \zeta_m \hat{a}_{m0}^\dagger \right)^N |\text{vac}\rangle, \quad (1.87)$$

où les ζ_m vérifient la condition de normalisation

$$\sum_m |\zeta_m|^2 = 1. \quad (1.88)$$

Premièrement, on peut vérifier que la moyenne de l'opérateur $\hat{\psi}_m$ est nulle comme cela doit être pour que le nombre de particules soit conservé

$$\langle \zeta | \hat{\psi}_m(\mathbf{r}) | \zeta \rangle = \langle \zeta | \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) | \zeta \rangle = 0. \quad (1.89)$$

En utilisant (1.87), on peut également démontrer les relations suivantes

$$\langle \zeta | \hat{\psi}_m^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m'}(\mathbf{r}') | \zeta \rangle = \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_{m'}(\mathbf{r}'), \quad (1.90)$$

$$\langle \zeta | \hat{\psi}_{m_1}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_{m_2}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}_{m_2}(\mathbf{r}'') \hat{\psi}_{m_3}(\mathbf{r}''') | \zeta \rangle = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \psi_{m_1}^*(\mathbf{r}) \psi_{m_2}^*(\mathbf{r}') \psi_{m_2}(\mathbf{r}'') \psi_{m_3}(\mathbf{r}'''), \quad (1.91)$$

où

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{N} \zeta_m \varphi_{m0}(\mathbf{r}). \quad (1.92)$$

D'après (1.91), il apparait que pour un nombre de particules suffisamment grand $N \gg 1$, on peut négliger le terme en $1/N$. Par conséquent, lorsqu'on fait le choix d'ansatz du type (1.87) les différentes quantités physiques peuvent être obtenues en remplaçant simplement l'opérateur $\hat{\psi}_m$ par le nombre complexe ψ_m donné par (1.92) [17, 18]. Notons qu'avec cette procédure, la relation (1.89) assurant la conservation du nombre de particule n'est plus respectée [49]. En pratique, pour $N \gg 1$, l'ajout ou la soustraction d'une particule ne modifie pas les propriétés physiques du système : l'état $|\zeta\rangle$ à N particules et les états $\propto a_m^\dagger |\zeta\rangle$ et $\propto a_m |\zeta\rangle$, respectivement, à $N + 1$ et $N - 1$ particules sont physiquement équivalents à $1/N$ près. Dans ces conditions, le remplacement de $\hat{\psi}_m$ par ψ_m est une très bonne approximation. Pour une discussion plus détaillée sur la validé de la l'approximation en champ moyen, le lecteur peut consulter les références [44, 49].

1.4.2 Énergie totale d'un condensat de Bose-Einstein spinoriel

En substituant dans l'expression de l'Hamiltonien (1.4), l'opérateur $\hat{\psi}_m$ par le nombre complexe ψ_m (éq. 1.92), on obtient l'énergie totale du système

$$E[\psi] = \int d\mathbf{r} \sum_m \psi_m^* \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U \right] \psi_m + E_z[\psi] + E_c[\psi] + E_{\text{dd}}[\psi]. \quad (1.93)$$

Les trois derniers termes sont, dans l'ordre, l'énergie Zeeman et les énergies d'interaction de contact et d'interaction dipolaire.

Énergie Zeeman

L'énergie Zeeman est obtenue à partir de (1.5)

$$E_z = p \int d\mathbf{r} \sum_m m |\psi_m(\mathbf{r})|^2 + q \int d\mathbf{r} \sum_m m^2 |\psi_m(\mathbf{r})|^2, \quad (1.94)$$

où p et q sont défini, respectivement, par (1.6) et (1.9).

Énergie d'interaction de contact

L'énergie d'interaction de contact pour un spin f est obtenue à partir de (1.42)

$$E_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} \psi_{m_1}^*(\mathbf{r}) \psi_{m_2}^*(\mathbf{r}) \psi_{m'_2}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}(\mathbf{r}). \quad (1.95)$$

Le tenseur d'interaction de contact $C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est donné par l'expression (1.43).

Pour $f = 1$, on obtient à partir de l'équation (1.47)

$$E_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [c_0 n^2(\mathbf{r}) + c_1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})]. \quad (1.96)$$

La densité totale n et le vecteur densité de spin \mathbf{F} s'obtiennent avec la même procédure de remplacement à partir de (1.11) et (1.12), respectivement, comme suit

$$n(\mathbf{r}) = \sum_m \psi_m^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}), \quad (1.97)$$

et

$$F_\nu(\mathbf{r}) = \sum_{mm'} (f_\nu)_{mm'} \psi_{m'}^*(\mathbf{r}) \psi_m(\mathbf{r}). \quad (1.98)$$

Pour $f = 2$, on obtient à partir de l'équation (1.53)

$$E_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [c_0 n^2(\mathbf{r}) + c_1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) + c_2 A_{00}^*(\mathbf{r}) A_{00}(\mathbf{r})], \quad (1.99)$$

avec

$$A_{\mathcal{F}\mathcal{M}}(\mathbf{r}) = \sum_{mm'} \langle \mathcal{F}\mathcal{M} | f, m; f, m' \rangle \psi_m(\mathbf{r}) \psi_{m'}(\mathbf{r}). \quad (1.100)$$

Cette dernière expression est obtenue à partir de (1.17).

Pour $f = 3$, on obtient à partir de l'équation (1.60)

$$E_c = \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \left[c_0 n^2(\mathbf{r}) + c_1 \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) + c_2 A_{00}^*(\mathbf{r}) A_{00}(\mathbf{r}) + c_3 \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 A_{2\mathcal{M}}^*(\mathbf{r}) A_{2\mathcal{M}}(\mathbf{r}) \right]. \quad (1.101)$$

Énergie dipolaire

Finalement, l'énergie dipolaire est obtenue à partir de (1.80)

$$E_{\text{dd}} = \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \sum_{\nu\nu'} F_\nu(\mathbf{r}) Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_{\nu'}(\mathbf{r}'). \quad (1.102)$$

où c_{dd} est la constante dipolaire donnée par (1.67). Les noyaux dipolaires $Q_{\nu\nu'}$ sont définis par l'équation (1.68).

1.4.3 Équation de Gross-Pitaevskii spinorielle

L'évolution dynamique du système est décrite par l'équation de Gross-Pitaevskii généralisée au condensats spinoriels

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\delta E}{\delta \psi_m^*}, \quad (1.103)$$

où δ représente la dérivée fonctionnelle. En portant l'expression de l'énergie totale (1.93) dans (1.103), on obtient

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U + pm + qm^2 \right] \psi_m + \sum_{m_2 m_1' m_2'} C_{m_1' m_2'}^{m m_2} \psi_{m_2}^* \psi_{m_2'} \psi_{m_1'} + c_{\text{dd}} \sum_{m'} \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_{m'}, \quad (1.104)$$

où \mathbf{f} est le vecteur matrices de spin (éq. 1.13 à éq. 1.15). Dans (1.104), il apparaît dans le dernier terme que l'interaction dipôle-dipôle agit à travers un champ effectif dipolaire \mathbf{b} donné par

$$b_\nu(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \sum_{\nu'} Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_{\nu'}(\mathbf{r}'), \quad (1.105)$$

où $\nu, \nu' = x, y, z$. Ce champ effectif peut être interprété comme un champ magnétique inhomogène $c_{\text{dd}} \mathbf{b} / g\mu_B$.

En considérant un état stationnaire

$$\psi_m(\mathbf{r}, t) = \psi_m^0(\mathbf{r}) e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (1.106)$$

où μ est le potentiel chimique, on obtient l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire

$$\begin{aligned} \mu\psi_m^0 &= \left[-\frac{\hbar^2\nabla^2}{2M} + U + pm + qm^2 \right] \psi_m^0 \\ &+ \sum_{m_2m_1'm_2'} C_{m_1'm_2}^{mm_2} \psi_{m_2}^{0*} \psi_{m_2}^0 \psi_{m_1'}^0 + c_{\text{dd}} \sum_{m'} \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_{m'}^0. \end{aligned} \quad (1.107)$$

1.4.4 Équations hydrodynamiques de la densité et du spin

À partir de l'équation de Gross-Pitaevskii (1.104) il est possible d'obtenir directement les équations hydrodynamiques de la densité n et de la densité de spin \mathbf{F} . Premièrement, on écrit les fonctions d'onde ψ_m sous la forme suivante

$$\psi_m(\mathbf{r}) = \sqrt{n(\mathbf{r})} \zeta_m(\mathbf{r}), \quad (1.108)$$

Les fonctions ζ_m sont les composantes du vecteur $\boldsymbol{\zeta} = (\zeta_f, \dots, \zeta_{-f})^T$ qui contient le caractère spinoriels du condensat. Le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ est normalisé comme suit

$$\sum_m |\zeta_m(\mathbf{r})|^2 = 1. \quad (1.109)$$

En prenant la dérivé de la densité totale n (éq. 1.97), on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\hbar} \sum_m \left[\psi_m^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m \right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m^* \right) \psi_m \right]. \quad (1.110)$$

En utilisant l'équation de de Gross-Pitaevskii (1.104) et l'expression (1.108), on obtient l'équation de continuité pour la densité

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}) + \nabla \cdot [n(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r})] = 0, \quad (1.111)$$

où $n\mathbf{v}$ est le flux de masse et \mathbf{v} la vitesse de masse définie comme suit

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2Mi} \sum_m [\zeta_m^* (\nabla \zeta_m) - (\nabla \zeta_m^*) \zeta_m]. \quad (1.112)$$

L'évolution de la densité de spin \mathbf{F} peut être obtenue de la même manière. En dérivant les composantes F_ν (éq. 1.98), on obtient

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_\nu(\mathbf{r}) = \frac{1}{i\hbar} \sum_{mm'} (f_\nu)_{mm'} \left[\psi_m^* \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m \right) - \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_m^* \right) \psi_m \right]. \quad (1.113)$$

En utilisant l'équation de de Gross-Pitaevskii (1.104) et l'expression (1.108) on obtient après quelques étapes de calculs

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial t} F_\nu(\mathbf{r}) + \nabla \cdot [n(\mathbf{r})\mathbf{v}_\nu(\mathbf{r})] &= \frac{p}{\hbar} [\hat{e}_z \times \mathbf{F}(\mathbf{r})]_\nu + \frac{c_{\text{dd}}}{\hbar} [\mathbf{b}(\mathbf{r}) \times \mathbf{F}(\mathbf{r})]_\nu \\ &+ \frac{2q}{\hbar} n (\hat{e}_z \times \mathcal{N}_z)_\nu, \end{aligned} \quad (1.114)$$

où $n\mathbf{v}_\nu$ est le flux de spin et \mathbf{v}_ν la vitesse de spin définie comme suit

$$\mathbf{v}_\nu(\mathbf{r}) = \frac{\hbar}{2Mi} \sum_{mm'} (\mathbf{f}_\nu)_{mm'} [\zeta_m^* (\nabla \zeta_{m'}) - (\nabla \zeta_m^*) \zeta_{m'}]. \quad (1.115)$$

Dans l'équation (1.114), \mathcal{N} est le tenseur nématique qui décrit l'anisotropie des fluctuations de spin

$$\mathcal{N}_{\nu\mu}(\mathbf{r}) = \sum_{mm'} \left(\frac{\mathbf{f}_\nu \mathbf{f}_\mu + \mathbf{f}_\mu \mathbf{f}_\nu}{2} \right)_{mm'} \zeta_m^*(\mathbf{r}) \zeta_{m'}(\mathbf{r}). \quad (1.116)$$

Faisons remarquer que dans cette sous-section nous avons introduit uniquement les équations utiles à notre travail. Une description plus complète à l'aide des équations hydrodynamiques peut être trouvée dans la référence [57] dans le cas d'un système de spin $f = 1$. Aux équations de n et F , s'ajoutent les équations de la vitesse de masse et du tenseur nématique. Avec la relation de Mermin-Ho généralisée [17, 57] qui décrit la rotation du courant de masse, cet ensemble d'équations est complètement équivalent à l'équation de Gross-Pitaevskii.

1.4.5 Définition de quelques quantités physiques utiles

Population des états de spin

Le nombre d'atomes total N dans le condensat est obtenu à partir de la densité totale n (éq. 1.97)

$$N = \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}). \quad (1.117)$$

De la même manière, le nombre d'atomes dans l'état de spin m peut être calculé à partir de la densité $n_m = |\psi_m|^2$ comme suit

$$N_m = \int d\mathbf{r} n_m(\mathbf{r}). \quad (1.118)$$

Dans la suite de ce travail, nous appellerons *dynamiques des populations de spin*, l'évolution dans le temps des N_m .

Magnétisation et moment cinétique

À partir de l'expression du vecteur densité de spin \mathbf{F} (éq. 1.98), on peut calculer la magnétisation du condensat par atome, définie suivant l'axe de quantification z , comme suit

$$M_z = g\mu_B \langle F_z \rangle, \quad (1.119)$$

où $\langle F_z \rangle$ est le moment cinétique de spin par atome

$$\langle F_z \rangle = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} F_z(\mathbf{r}). \quad (1.120)$$

Notons que pour un système de spin f , la magnétisation prend ses valeurs dans l'intervalle

$$-f \leq M_z \leq f. \quad (1.121)$$

Finalement, on définit le moment cinétique orbital par atome comme suit

$$\langle L_z \rangle = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} \sum_m \psi_m^*(\mathbf{r}) \left(-i \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \psi_m(\mathbf{r}), \quad (1.122)$$

où ϕ est l'angle azimutal autour de l'axe z .

Textures de spin et longueur de spin

À partir du vecteur densité de spin \mathbf{F} (éq. 1.98), on définit le vecteur spin \mathbf{f} comme suit

$$f_\nu(\mathbf{r}) = F_\nu(\mathbf{r})/n(\mathbf{r}). \quad (1.123)$$

Ce vecteur donne accès aux variations spatiales de l'orientation et de la longueur des spins. Dans la suite de ce travail, on appellera ces variations spatiales *textures de spin*. En particulier, on définit *la longueur de spin locale* comme le module de \mathbf{f}

$$|\mathbf{f}(\mathbf{r})| = \sqrt{f_x^2(\mathbf{r}) + f_y^2(\mathbf{r}) + f_z^2(\mathbf{r})}. \quad (1.124)$$

Pour un condensat de spin f , la longueur de spin locale prend ses valeurs dans l'intervalle

$$0 \leq |\mathbf{f}(\mathbf{r})| \leq f. \quad (1.125)$$

Finalement, on définit la longueur de spin moyenne

$$\Pi = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) |\mathbf{f}(\mathbf{r})|. \quad (1.126)$$

Cette quantité donne une information quantitative sur la longueur de spin du condensat.

1.5 Propriétés stationnaires des condensats de Bose-Einstein spinoriels

Dans cette section nous allons discuter les propriétés de l'état fondamental des condensats de Bose-Einstein spinoriels. L'état fondamental est fixé par la contribution des différents termes de l'énergie totale du système (éq. 1.93). À cause de leurs degrés de liberté de spin, les condensats de Bose-Einstein spinoriels présentent un diagramme de phase très riche. Notamment, les interactions de contact et dipôle-dipôle dépendantes du spin jouent un rôle important dans la détermination de l'état fondamental du système. Plus généralement, l'état fondamental dépend aussi du potentiel de piégeage et des termes Zeeman p et q et doit donc être obtenu en minimisant numériquement l'énergie totale du système. En adoptant l'approximation de Thomas-Fermi qui consiste à négliger l'énergie cinétique, ou en considérant un système de densité uniforme, il est parfois possible d'analyser analytiquement l'effet des interactions sur l'état fondamental.

Dans la sous-section 1.5.1, nous allons discuter le diagramme de phase d'un condensat uniforme de spin $f = 1$ et $f = 3$ en fonction du champ magnétique appliqué et en négligeant l'interaction dipolaire. Pour le spin $f = 2$, le lecteur peut consulter les références [24–26, 58]. Dans la sous-section 1.5.2, nous allons discuter l'état fondamental d'un condensat de ^{52}Cr non uniforme.

1.5.1 Condensat de densité uniforme

Pour discuter l'effets des interactions de contact et du champ magnétique sur l'état fondamental des condensat de Bose-Einstein de spin $f = 1$ et $f = 3$, nous allons considérer un système uniforme de densité n . Pour le système uniforme l'expression (1.108) devient

$$\psi_m = \sqrt{n}\zeta_m, \quad (1.127)$$

En remplaçant cette dernière expression dans l'énergie totale (1.93) et en négligent l'interaction dipole-dipole et l'effet Zeeman quadratique, l'énergie totale par atome est donnée par

$$E/N = \sum_m pm|\zeta_m|^2 + E_c/N, \quad (1.128)$$

où E_c/N est l'énergie d'interaction de contact par atome et dépend du spin f du système (éq. 1.96 et éq. 1.101). Les différentes phases sont données par les vecteurs ζ qui minimisent l'énergie totale par atomes E/N .

Condensat de spin $f = 1$

En utilisant (1.96), l'énergie totale par atome (1.128) pour un système de densité uniforme de spin $f = 1$ s'écrit

$$E/N = \sum_m pm|\zeta_m|^2 + \frac{c_0}{2}n + \frac{c_1}{2}n|\mathbf{f}|^2. \quad (1.129)$$

Les différentes phases peuvent être caractérisées par la longueur de spin locale $|\mathbf{f}|$ qui prend ses valeurs dans l'intervalle suivant

$$0 \leq |\mathbf{f}| \leq 1. \quad (1.130)$$

On distingue deux cas de figure. Une longueur de spin maximale $|\mathbf{f}| = 1$ caractérise la phase *ferromagnétique*. Le vecteur ζ de la phase ferromagnétique est donné par $\zeta^F = (0,0,1)^T$. Une longueur de spin nulle $|\mathbf{f}| = 0$ caractérise la phase *polaire* ou *antiferromagnétique*. Le vecteur ζ de la phase polaire s'écrit $\zeta^P = (0,1,0)^T$ et celui de la phase antiferromagnétique est obtenue par rotation de ce dernier d'un angle $\pi/2$ autour de l'axe x et s'écrit $\zeta^A = (1,0,1)^T/\sqrt{2}$. Ces deux phases sont équivalentes. D'après (1.129), pour $p = 0$ une constante d'interaction c_1 positive favorise l'état polaire. C'est le cas du ^{23}Na (tab. 1.2). Une constante d'interaction c_1 négative favorise l'état ferromagnétique. C'est le cas du ^{87}Rb (tab. 1.2). L'application d'un champ magnétique $p/g\mu_B\hat{e}_z$ aura pour effet d'aligner les spins dans la direction \hat{e}_z et favoriser la phase ferromagnétique (même pour $c_1 > 0$). Plus précisément, l'énergie (1.129) est minimisée par $\zeta^F = (0,0,1)^T$ si le champ magnétique p appliqué dans la direction \hat{e}_z est supérieur au champ critique p_c donné par

$$p_c = c_1n. \quad (1.131)$$

Les effets des interactions de contact sur l'état fondamental des condensats spinoriels ont fait l'objet de plusieurs études. L'état fondamental de condensats de spin $f = 1$ est obtenue par Ho [17] et Ohmi *et al.* [18] pour $p = q = 0$. Le digramme de phase en fonctions des termes Zeeman p et q et discuté par Stenger *et al.* [21] et Murata *et al.* [23].

Condensat de spin $f = 3$

En utilisant (1.101), l'énergie totale par atome (1.128) pour un système de densité uniforme de spin $f = 3$ s'écrit

$$E/N = \sum_m pm |\zeta_m|^2 + \frac{c_0 n}{2} + \frac{c_1 n}{2} |\mathbf{f}|^2 + \frac{c_2 n}{2} |\Theta|^2 + \frac{c_3 n}{2} \Upsilon, \quad (1.132)$$

où $\Theta = A_{00}/n$ et $\Upsilon = \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 |A_{2\mathcal{M}}/n|$. A_{00} et $A_{2\mathcal{M}}$ sont donnés par l'équation (1.100). L'état fondamental est fixé par le champ magnétique p , la longueur de spin locale $|\mathbf{f}|$, et les termes Θ et Υ . Pour ces trois quantités nous avons,

$$0 \leq |\mathbf{f}| \leq 3, \quad 0 \leq |\Theta| \leq 1/\sqrt{7}, \quad 0 \leq \Upsilon \leq 25/84. \quad (1.133)$$

Le digramme de phase de condensat de spin $f = 3$ est très riche et complexe [27, 39, 59]. Ici, nous allons nous intéresser uniquement au cas d'un condensat de ^{52}Cr en posant $c_{\text{dd}} = 0$. L'énergie par particule (1.132) est minimisée numériquement. Les valeurs numériques des constantes d'interactions c_1, c_2 et c_3 que nous utilisons sont données dans le tableau (1.2). En particulier, nous avons $c_1 > 0$ et $c_{2,3} < 0$ avec $c_2 \simeq -c_1$ et $c_3 \simeq -9c_1$. Le diagramme de phase que nous obtenons est présenté sur la figure 1.3. Pour $p > p_c$, où p_c est donné par l'équation (1.137), c'est l'état ferromagnétique $\zeta^{\text{F}} = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^{\text{T}}$ qui minimise l'énergie avec $|\mathbf{f}| = 3$, $|\Theta| = 0$ et $\Upsilon = 0$. L'énergie par atome de la phase ferromagnétique est donnée par

$$E/N = -3p + \frac{1}{2}(c_0 + 9c_1)n = -3p + \frac{1}{2}g_6 n. \quad (1.134)$$

Pour $0.53 \lesssim p/p_c < 1$, l'état fondamental est cyclique $\zeta^{\text{C}} = (0, a, 0, 0, 0, b)^{\text{T}}$ où a et b sont des nombres réels. La phase cyclique est caractérisée par $1.7 \lesssim |\mathbf{f}| < 3$, $|\Theta| = 0$ et $0 < \Upsilon \lesssim 0.23$. Pour calculer le champ critique p_c qui fixe la transition entre la phase ferromagnétique à la phase cyclique nous substituons dans l'expression de l'énergie (1.132) le vecteur $\zeta = (0, \gamma, 0, 0, 0, \sqrt{1-\gamma^2})^{\text{T}}$ où $0 \leq \gamma \leq 1$. À l'ordre 2 en γ , nous obtenons,

$$E/N \simeq -3p + \frac{1}{2}(c_0 + 9c_1)n + 5 \left[\left(\frac{5}{42}c_3 - 3c_1 \right) n + p \right] \gamma^2. \quad (1.135)$$

D'après cette dernière expression, si

$$\left(\frac{5}{42}c_3 - 3c_1 \right) n + p > 0, \quad (1.136)$$

l'énergie par particule est minimisée en posant $\gamma = 0$. Par conséquent, l'état fondamental est ferromagnétique. La condition (1.136) est réalisée pour $p > p_c$ avec

$$p_c = \left(3c_1 - \frac{5}{42}c_3 \right) n = \left[\frac{13}{66}(g_6 - g_4) + \frac{5}{42}(g_4 - g_2) \right] n. \quad (1.137)$$

Ainsi, la transition vers la phase cyclique ($\gamma \neq 0$) est obtenue pour $p < p_c$.

Pour un champ magnétique très faible $p/p_c \lesssim 0.53$, à cause de la présence de plusieurs minimums locaux, la minimisation de E/N est délicate. Les résultats qui

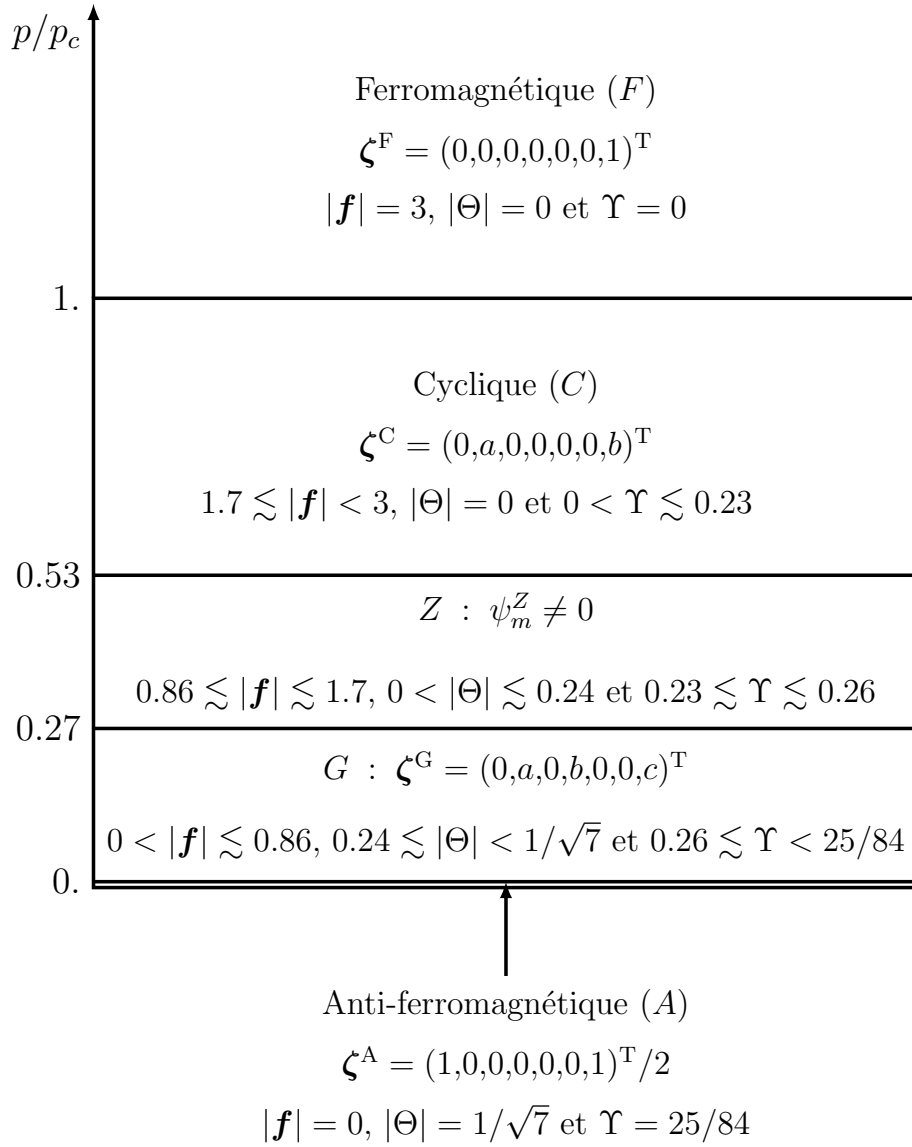


FIGURE 1.3 – Digramme de phase d'un condensat uniforme de ^{52}Cr en fonction de p/p_c . Le champ magnétique critique p_c est définie par (1.137).

vont suivre sont à considérer à titre qualitatif. Précisons, néanmoins que nos calculs sont qualitativement en bon accord avec [27, 39]. Pour $0.27 \lesssim p/p_c \lesssim 0.53$, l'énergie est minimisée par la phase Z caractérisée par le vecteur ζ^Z tel que $\zeta_m^Z \neq 0$. Pour cette phase nous avons, $0.86 \lesssim |\mathbf{f}| \lesssim 1.7$, $0 < |\Theta| \lesssim 0.24$ et $0.23 \lesssim \Upsilon \lesssim 0.26$. Pour un champ magnétique plus faible $0 \lesssim p/p_c \lesssim 0.27$, l'énergie par particule (1.132) est minimisée par la phase G de vecteur $\zeta^G = (0, a, 0, b, 0, 0, c)^T$ où a, b et c sont des nombres réels. Cette phase est caractérisée par $0 < |\mathbf{f}| \lesssim 0.86$, $0.24 \lesssim |\Theta| < 1/\sqrt{7}$ et $0.26 \lesssim \Upsilon < 25/84$. Finalement, pour $p/p_c \simeq 0$, l'énergie (1.132) est minimisée par l'état antiferromagnétique $\zeta^A = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 1)^T$ qui annule la longueur de spin locale $|\mathbf{f}| = 0$ et maximise les termes $|\Theta| = 1/\sqrt{7}$ et $\Upsilon = 25/84$. Notons qu'au voisinage de $p/p_c \sim 0$, il n'est pas encore sûr que nous avons trouvé toutes les phases.

1.5.2 Condensat de densité non uniforme

Dans cette sous-section, on considère un condensat de ^{52}Cr dans un piège harmonique U . Pour simplifier le potentiel de piégeage est supposé à symétrie sphérique

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2. \quad (1.138)$$

où $\omega/2\pi$ est la présence du potentiel de piégeage. On suppose aussi qu'un champ magnétique p est appliqué dans la direction \hat{e}_z . Les calculs que nous allons présenter sont réalisés pour un condensat de $N = 40 \times 10^3$ atomes piégés dans un potentiel de fréquence $\omega/2\pi = 260$ Hz. Précisons que l'état fondamental est obtenu par évolution en temps imaginaire de l'équation de Gross-Pitaevskii. Les détails de la modélisation numériques peuvent être trouvés dans l'annexe A.

Condensat de ^{52}Cr non dipolaire

Dans un premier temps, on néglige l'interaction dipôle-dipôle ($c_{\text{dd}} = 0$). Pour le condensat uniforme, nous avons vu que pour $p/p_c > 1$, où p_c est donné par (1.137), l'état fondamental est ferromagnétique. Nous allons voir dans ce qui suit que cette condition reste valable dans le cas d'un système non uniforme.

Pour un condensat ferromagnétique, il est possible d'obtenir la densité de l'état fondamental analytiquement en négligeant le terme cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (éq. 1.107). Cette approximation est appelée limite de Thomas-Fermi. Notons que le condensat de ^{52}Cr dans l'état fondamental ferromagnétique, peut être assimilé à un condensat scalaire de constante d'interaction $g_6 = 4\pi\hbar^2 a_6/M$, où a_6 est la longueur de collision dans le canal $\mathcal{F} = 6$. Dans ce cas, la densité Thomas-Fermi est donnée par

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{g_6} [\mu_{\text{TF}} - U(\mathbf{r})], \quad (1.139)$$

pour $u_{\text{TF}} > U$ et zéro ailleurs. Cette solution est obtenue par Baym et Pethick [8]. Dans (1.139), le potentiel chimique u_{TF} est donné par

$$u_{\text{TF}} = \frac{\hbar\omega}{2} \left(\frac{15Na_6}{l_0} \right)^{2/5}. \quad (1.140)$$

où $l_0 = \sqrt{\hbar/M\omega}$ est la longueur caractéristique de l'oscillateur harmonique. Finalement, dans l'approximation de Thomas-Fermi, le rayon du condensat est donné par

$$R_{\text{TF}} = \sqrt{\frac{2\mu_{\text{TF}}}{M\omega^2}} = l_0 \left(\frac{15Na_6}{l_0} \right). \quad (1.141)$$

En utilisant ces dernières relations, on peut facilement approximer la densité et le rayon du condensat. Pour le système considéré ici ($N = 40 \times 10^3$ et $\omega/2\pi = 260$ Hz), le rayon de Thomas-Fermi vaut $R_{\text{TF}} \simeq 4.49 \mu\text{m}$ et la densité au centre vaut $n_{\text{TF}}(0) \simeq 2.64 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Nous avons utilisé $a_6 = 102.5 a_{\text{B}}$ (tab. 1.2). Finalement, pour transposer les résultats obtenus dans le cas du condensat uniforme, on peut utiliser la valeur de $n_{\text{TF}}(0)$ pour calculer le champ critique p_c au centre du condensat. On obtient

$$p_c/g\mu_{\text{B}} \simeq 0.19 \text{ mG}. \quad (1.142)$$

Ce résultat peut être confirmé en calculant l'état fondamental numériquement en fonction de p . L'état fondamental obtenu pour $p/g\mu_{\text{B}} = 0.24 \text{ mG}$ est porté sur la figure 1.4. La longueur de spin locale est de $|\mathbf{f}| = 3$ sur tout le volume du condensat. La magnétisation vaut $M_z/g\mu_{\text{B}} = -3$. Autrement dit, le condensat est ferromagnétique et les spins sont polarisés dans la directions $-\hat{e}_z$ (fig. 1.4a). Le rayon du condensat $R \simeq 4.5 \mu\text{m}$ et la densité au centre $n_0 \simeq 2.65 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ sont en bon accord avec

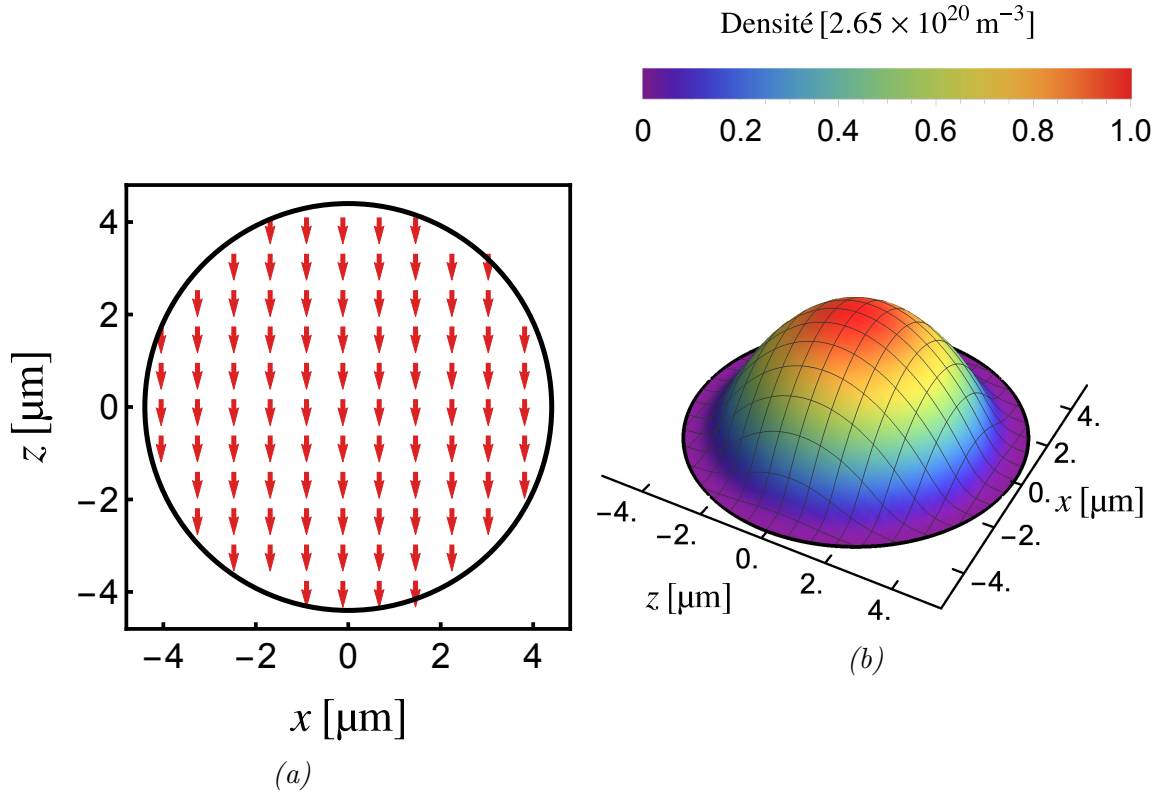


FIGURE 1.4 - État fondamental pour $c_{\text{dd}} = 0$ et $p/g\mu_{\text{B}} \simeq 0.24 \text{ mG}$. (a) : Projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan xz . La couleur rouge des flèches indique que $|\mathbf{f}| = 3$. (b) : Coupe de densité totale ($n = n_{-3}$) dans le plan xz . Le condensat est sphérique de rayon $R \simeq 4.5 \mu\text{m}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 40 \times 10^3$ et $\omega/2\pi = 260$ Hz.

l'approximation Thomas-Fermi. L'état fondamental obtenu pour $p/g\mu_B = 0.12$ mG est porté sur les figures 1.6 et 1.7. Les densités des états de spin $m = -3$ et $m = 2$ sont non nulles (fig. 1.6a et fig. 1.6b). En particulier, la densité de l'état $m = 2$ est non nulle uniquement au centre condensat $R \lesssim 2 \mu\text{m}$. Pour cette région, on peut constater sur la figure 1.7 que longueur de spin $|\mathbf{f}| \lesssim 2$. Autrement dit, dans la région centrale, le condensat présente une phase cyclique. Finalement, sur la figure 1.5 nous avons porté le nombre d'atomes $N_{m=2}$ dans l'état fondamental en fonction du champ magnétique appliqué p . D'après nos calculs, l'état fondamental ferromagnétique qui correspond à $N_{m=2}/N \simeq 0$ et $N_{m=3}/N \simeq 1$ est obtenue pour

$$p/g\mu_B \gtrsim 0.18 \text{ mG}. \quad (1.143)$$

Ce résultat est en bon accord avec le champ critique p_c obtenu en (1.142). Notons que la coexistence de deux phases différentes indique l'existence d'effets de surface qu'il pourrait être intéressant d'étudier.

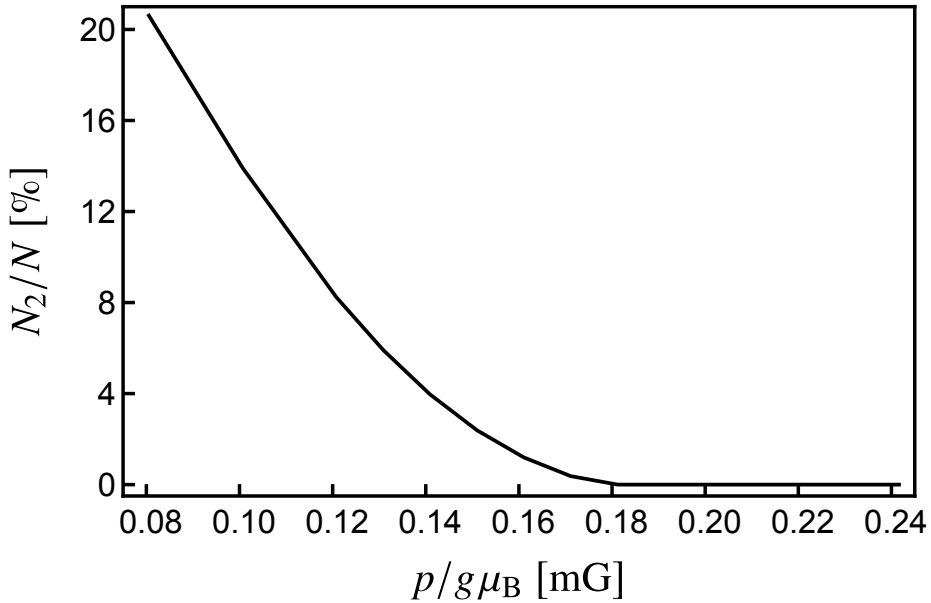


FIGURE 1.5 – Fraction N_2/N dans l'état fondamental en fonction du champ magnétique p appliqué. Pour $p/g\mu_B \gtrsim 0.18$ mG, on a $N_2/N \simeq 0$. Dans ce cas $N_{-3}/N \simeq 1$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 40 \times 10^3$ et $\omega/2\pi = 260$ Hz.

Condensat de ^{52}Cr dipolaire

Les effets dipolaires sur l'état fondamental ferromagnétique sont faibles. Ces effets sont atténués à la fois par un champ magnétique dominant ($p \gg c_{\text{dd}}|\mathbf{b}|$) et par une interaction de contact dominante. L'intensité de l'interaction dipôle-dipôle par rapport à l'interaction de contact est donnée par

$$\epsilon_{\text{dd}} = 12\pi c_{\text{dd}}/g_6 \simeq 0.15. \quad (1.144)$$

Dans ces conditions, l'interaction dipôle-dipôle peut-être considérée comme une faible perturbation. En supposant que les spins sont parfaitement polarisés suivant l'axe z , il est possible d'obtenir analytiquement l'expression de la densité du condensat dans le cadre de l'approximation Thomas-Fermi. Eberlein *et al.* [60] ont montré que la densité du condensat est donnée par

$$n_{\text{TF}}(\mathbf{r}) = n(0) \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R_{x,y}^2} - \frac{z^2}{R_z^2} \right). \quad (1.145)$$

La densité au centre est donnée par

$$n(0) = \frac{15}{8\pi} \frac{N}{R_{\perp}^2 R_z}, \quad (1.146)$$

où $R_x = R_y$ sont les rayons Thomas-Fermi suivant les axes x et y . R_z est le rayon Thomas-Fermi suivant l'axe de polarisation z . En général, $R_{x,y}$ et R_z doivent être calculés numériquement. Au premier ordre en ϵ_{dd} le rapport en $R_{x,y}/R_z$ est donné par

$$R_{x,y}/R_z \simeq 1 - 3\epsilon_{\text{dd}}/5 \simeq 0.91. \quad (1.147)$$

Ces résultats indiquent que le condensat présente une forme allongée (*prolate*) dans la direction de polarisation z . Ces effets dipolaires ont été observés expérimentalement dans le cas d'un condensat de ^{52}Cr . Stuhler *et al.* [29] ont observé de faibles déformations mécaniques anisotropes lors de l'expansion d'un condensat ^{52}Cr polarisé. Ces déformations dépendent de l'orientation des dipôles (effets de magnétostriction). Des effets plus notables sont observés par Lahaye *et al.* [30] en contrôlant la valeur de ϵ_{dd} .

Numériquement, nous avons vérifié que pour $c_{\text{dd}} \neq 0$ et $p/g\mu_B \gtrsim 0.18$ mG (équ. 1.143), l'état fondamental est ferromagnétique. Pour $p/g\mu_B = 0.24$ mG, la densité totale de l'état fondamental est portée sur la figures 1.8. La densité au centre du condensat est de $n_0 \simeq 2.69 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$. La densité est légèrement allongée suivant l'axe z . Plus précisément, on a $R_{x,y}/R_z \simeq 0.93$ en bon accord avec (1.147). Cela est dû au fait que pour minimiser l'énergie du condensat, les spins (dipôles) ont tendance à s'aligner en tête-à-queue (fig. 1.2d).

Sur la figure (1.9), nous avons porté la projection du vecteur spin \mathbf{f} et du champ dipolaire \mathbf{b} dans le plan xz . La longueur de spin locale est maximale $|\mathbf{f}| = 3$ sur tout le volume du condensat. On constate sur la figure 1.9a que les spins s'écartent légèrement de la direction de polarisation $-\hat{e}_z$ sur le bord du condensat. La magnétisation vaut $M_z/g\mu_B \simeq -3$. Cela est dû au fait que les spins sont soumis localement à un

champ dipolaire inhomogène. Au centre et aux bords du condensat, nous avons respectivement $c_{\text{dd}}g\mu_{\text{B}}|\mathbf{b}| \sim 0.01 \text{ mG}$ et $c_{\text{dd}}g\mu_{\text{B}}|\mathbf{b}| \sim 0.04 \text{ mG}$. Par conséquent, les spins sont orientés localement suivant la direction opposée du champ magnétique total

$$p/g\mu_{\text{B}}\hat{e}_z + c_{\text{dd}}g\mu_{\text{B}}\mathbf{b}(\mathbf{r}). \quad (1.148)$$

Le champ dipolaire présente des composantes b_x et b_y non nulles sur les bords du condensat. Ce faible effet sur la magnétisation est spécifique au système de taille fini (en présence de piégeage). Dans le chapitre suivant, nous allons voir que pour un système ferromagnétique uniforme le champ dipolaire est nul (sect. 2.2).

Finalement, notons qu'à champ magnétique nul ($p = 0$), les effets dipolaires sur l'état fondamental peuvent être plus conséquent. Dans ce cas, les spins (dipôles) peuvent avoir tendance à s'auto-organiser pour former une riche variété de textures de spin. Pour le voir, il commode d'écrire l'énergie dipolaire (1.102) dans l'espace de Fourier

$$E_{\text{dd}} = \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{k} \sum_{\nu\nu'} \tilde{F}_{\nu}(\mathbf{k}) \tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{k}) \tilde{F}_{\nu'}(-\mathbf{k}), \quad (1.149)$$

$$= \frac{c_{\text{dd}}}{2} \frac{4\pi}{3} \int d\mathbf{k} [3|\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k}/k|^2 - |\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k})|^2], \quad (1.150)$$

où $\tilde{\mathbf{F}}$ et $\tilde{Q}_{\nu\nu'}$ sont, respectivement, les transformées de Fourier du vecteur densité de spin \mathbf{F} (éq. 1.98) et des noyaux dipolaires $Q_{\nu\nu'}$ (éq. 1.68). L'expression des $\tilde{Q}_{\nu\nu'}$ est donné par l'équation (2.23). D'après (1.150), l'énergie dipolaire est minimisée en minimisant le premier terme et en maximisant le dernier terme sous l'intégrale. Dans l'espace réel, la première condition est réalisée pour $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$. Autrement dit, lorsque les textures de spin présentent une fermeture de flux (*flux-closure*) [47]. La seconde condition est satisfaite en maximisant la longueur de spin $|\mathbf{f}| = |\mathbf{F}|/n = 3$. Les textures de spin de l'état fondamental pour c_{dd} et $p = 0$ sont discutés par Kawaguchi *et al.* [33].

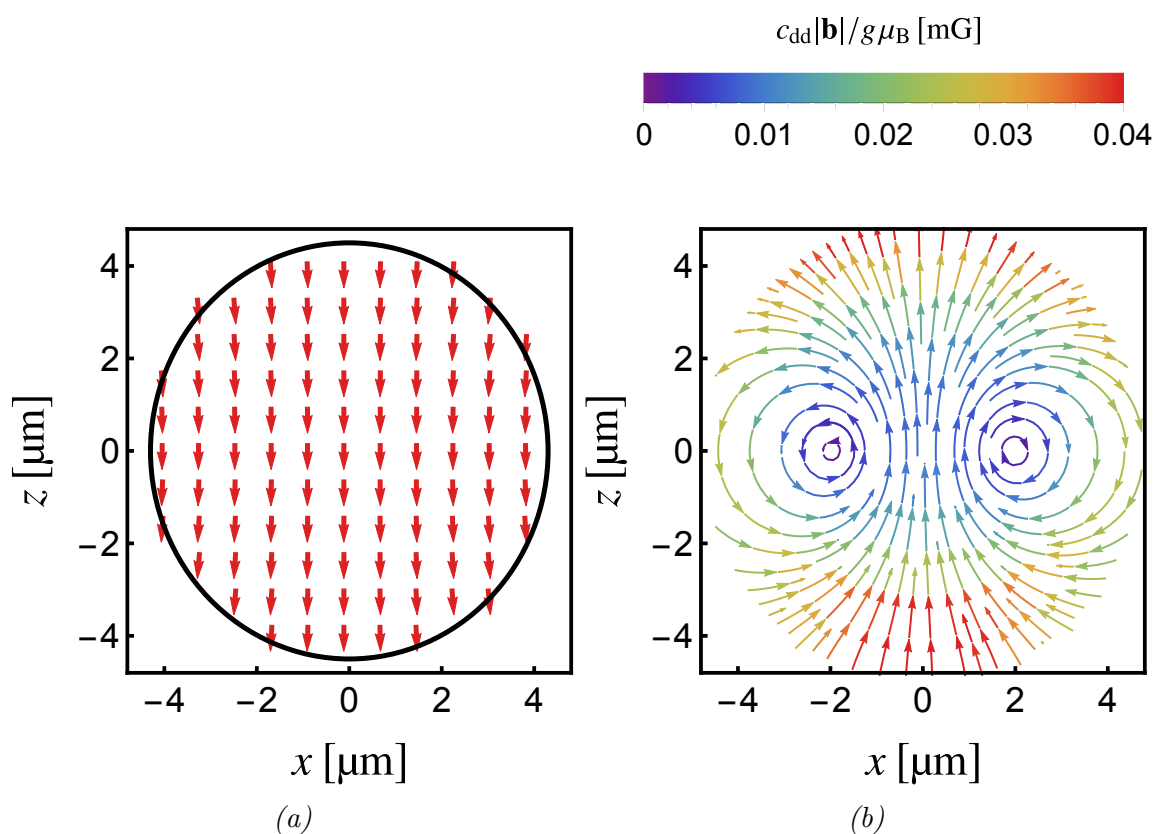


FIGURE 1.9 – État fondamental pour $c_{dd} \neq 0$ et $p/g\mu_B = 0.24 \text{ mG}$. (a) : Projections du vecteur \mathbf{f} , dans les plan xz . (b) : Projections du champ dipolaire \mathbf{b} , dans les plan xz . Le code couleur indique $c_{dd}|\mathbf{b}|$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 40 \times 10^3$ et $\omega/2\pi = 260 \text{ Hz}$.

Chapitre 2

Excitations élémentaires dans un condensat dipolaire ferromagnétique

Ce chapitre est consacré à l'analyse de stabilité de la phase ferromagnétique d'un condensat de bosons dipolaires. Partant de l'équation de Gross-Pitaevskii qui régit la dynamique de ce système en interaction (chap. 1), notre approche consistera à chercher des oscillations de faible amplitude qui s'écartent de la configuration ferromagnétique stationnaire. L'analyse des oscillations de faible amplitude que nous considérons dans ce travail est similaire à la théorie des excitations élémentaires développée par Bogoliubov en 1947 [9] en considérant un condensat scalaire et sans interactions dipolaires.

Dans la première section de ce chapitre (sect. 2.1), nous allons présenter la théorie de Bogoliubov généralisée à l'analyse du comportement collectif des condensats spinoriels et dipolaires.

Les condensats de Bose-Einstein spinoriels présentent des modes collectifs associés aux $2f + 1$ états de spin m . Plusieurs travaux théoriques sont consacrés à l'étude des modes collectifs des condensats non dipolaires de spin $f = 1$ [17, 18, 23, 61–63] et de spin $f = 2$ [48]. À titre d'exemple, en l'absence d'interaction dipolaire, la phase ferromagnétique uniforme de spin $f = 1$ présente trois modes associés aux composantes de spin $m = \pm 1$ et $m = 0$ [17, 18]. Un mode de *densité* semblable au mode que l'on trouve dans les condensats scalaires [9]. Deux modes, dits de *précession* de spin et de *déformation* de spin. Ces deux modes sont liés à la nature spinorielle du système. Dans ce travail, on s'intéresse en particulier à l'effet des interactions dipolaires sur les modes collectifs de la phase ferromagnétique. À notre connaissance, la plupart des travaux théoriques sur le comportement collectif des condensats dipolaires considèrent un système de spin $f = 1$ de dimensions réduites (2D) et négligent les termes de relaxation dipolaire [64–70].

Dans la deuxième sous-section (sect. 2.2), nous allons considérer un condensat de Bose-Einstein ferromagnétique uniforme où tous les spins sont polarisés suivant l'axe z avec $M_z/g\mu_B = -f$ (magnétisation). Pour notre système la longueur de spin est maximale $|\mathbf{f}| = f$. Le condensat est soumis à un champ magnétique p dans la direction \hat{e}_z . L'analyse des modes collectifs de la phase ferromagnétique de spin $f = 1$

en fonction de p , va nous permettre de mettre en évidence l'existence d'instabilités dynamiques liées au mode de précession spin. Nous allons notamment voir que ces instabilités ont pour origine les processus de relaxation dipolaire qui couple l'état de spin $m = -1$ à $m = 0$ (éq. 1.75 et éq. 1.76). Le développement de ces instabilités dynamiques induit un accroissement exponentiel de textures de spin $\delta \mathbf{f}_\perp$ dans le plan transverse à l'axe z , et par conséquent une démagnétisation du condensat. Nous allons aussi voir que ces instabilités dynamiques conservent la nature ferromagnétique du système ($|\mathbf{f}| \simeq 1$). Finalement, nous allons montrer que ce comportement instable est commun aux différents systèmes de spin que nous avons analysés $f = 1, 2$ et 3 . On montrera notamment que ces systèmes de spin sont instables pour $p < p_{\text{dd}}$ où p_{dd} est le champ critique d'instabilité dynamique donné par

$$p_{\text{dd}} = \frac{4\pi}{3} f c_{\text{dd}} n. \quad (2.1)$$

Afin d'éviter des lourdeurs de lecture, certains détails de calculs pour le spin $f = 1$ et tous les détails de calculs dans le cas de spin $f = 2$ ont été portés à l'annexe B.

2.1 Analyse de Bogoliubov en théorie de champ moyen

La théorie de Bogoliubov à été développée initialement pour comprendre le phénomène de la superfluidité dans le cadre d'un modèle de gaz de bosons en faibles interactions [9]. Dans son article sur la superfluidité, Bogoliubov aboutit à une description de ce système en termes d'*excitations élémentaires* (*quasi-particules*) indépendantes (ss-sect. 2.1.1). Plus généralement, la théorie de Bogoliubov permet d'étudier la réponse d'un condensat de bosons en interactions aux faibles perturbations externes. La théorie initiale de Bogoliubov requiert le formalisme de la seconde quantification. Dans la suite de ce chapitre, nous allons travailler dans le cadre de la théorie de champ moyen qui néglige les fluctuations quantiques [42]. Dans ce cas, l'approche de Bogoliubov consiste à chercher des oscillations de faibles amplitudes qui s'écartent de l'état stationnaire du condensat de Bose-Einstein.

2.1.1 Éléments de théorie de Bogoliubov

Dans cette partie, nous allons discuter, sans aller dans les détails des calculs, les principaux résultats de la théorie de Bogoliubov introduite dans son article original sur la superfluidité. Pour une présentation plus complète, le lecteur est invité à consulter les références [9, 49, 71]. La généralisation de la théorie de Bogoliubov aux condensats de bosons spinoriels est détaillée dans [42]. Bogoliubov considère un système de Bosons sans spin en interactions à travers un potentiel $\hat{\mathcal{V}}$. En seconde quantification, l'Hamiltonien de ce système de bosons dans un piège U s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = & \int d\mathbf{r} \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left[\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U(\mathbf{r}) \right] \hat{\psi}(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \mathcal{V}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}'). \end{aligned} \quad (2.2)$$

L'opérateur champ $\hat{\psi}$ peut être développé comme suit

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i, \quad (2.3)$$

où \hat{a}_i est l'opérateur d'annihilation. L'opérateur $\hat{\psi}$ d'annihile un boson dans l'état φ_i qui se trouve à la position \mathbf{r} . La première étape consiste à séparer dans l'expression de l'opérateur champ $\hat{\psi}$ le terme $i = 0$ qui correspond à l'état fondamental du condensat des autres termes qui correspondent aux états excités

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \varphi_0(\mathbf{r}) \hat{a}_0 + \sum_{i \neq 0} \varphi_i(\mathbf{r}) \hat{a}_i. \quad (2.4)$$

L'idée de base de la théorie de Bogoliubov consiste à remplacer $\varphi_0 \hat{a}_0$ par le champ classique $\psi = \sqrt{N} \varphi_0$ où N est le nombre de bosons dans le condensat et de considérer $\delta\hat{\psi}_m = \sum_{i \neq 0} \varphi_i \hat{a}_i$ comme une faible déviation par rapport à ψ . La suite de la procédure consiste à substituer dans l'Hamiltonien en seconde quantification (2.2) l'opérateur champ $\hat{\psi}$ par

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) + \delta\hat{\psi}(\mathbf{r}), \quad (2.5)$$

et de ne garder que les termes de premier et de second ordre en \hat{a}_i et \hat{a}_i^\dagger . En particulier, pour un système uniforme ($U = 0$) de N particules, il est plus commode de faire cette analyse dans l'espace de Fourier en introduisant les opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ d'annihilation et de création d'un boson de vecteur d'onde \mathbf{k} . L'Hamiltonien obtenu avec l'approximation (2.5) est diagonalisé par le moyen des transformations de Bogoliubov. Cela consiste à écrire les opérateurs $\hat{a}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ comme une combinaison linéaire de nouveaux opérateurs $\hat{b}_{\mathbf{k}}$ et $\hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger$ d'annihilation et de création d'une particule bosonique (*excitation*) de vecteur d'onde \mathbf{k} . En dernière analyse, l'Hamiltonien du système de bosons est approché par le l'Hamiltonien de Bogoliubov suivant

$$\hat{\mathcal{H}}_B = E_0 + \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \mathcal{E}_{\mathbf{k}} \hat{b}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{k}}, \quad (2.6)$$

où $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ est l'énergie des excitations

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}} (\varepsilon_{\mathbf{k}} + 2gn)}, \quad (2.7)$$

avec $\varepsilon_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / 2M$ l'énergie d'une particule (boson) libre. E_0 est l'énergie de l'état fondamental qui s'écrit

$$E_0 = g \frac{N^2}{2V} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k} \neq 0} \left[\mathcal{E}_{\mathbf{k}} - gn - \varepsilon_{\mathbf{k}} + \frac{(gn)^2}{2\varepsilon_{\mathbf{k}}} \right], \quad (2.8)$$

où $n = N/V$ est la densité du système et g la constante d'interaction de contact. Le dernier terme en $(gn)^2$ est une correction de l'approximation de Born dans le cas de fortes interactions ou de corrélations entre particules.

Excitations élémentaires

L'Hamiltonien (2.6) est constitué de l'énergie de l'état fondamental et d'un terme qui est la somme des énergies individuelles $\mathcal{E}_{\mathbf{k}}$ des excitations sans interactions. Autrement dit, les quasi-particules forment un gaz idéal de bosons. La théorie de Bogoliubov permet de décrire le système de bosons en interaction en terme *d'excitations élémentaires* (*quasi-particules*) indépendantes.

Critère de superfluidité

À partir de l'énergie \mathcal{E}_k des excitations élémentaires on peut distinguer deux régimes. Pour $\varepsilon_k \ll gn$, \mathcal{E}_k peut être approchée par

$$\mathcal{E}_k \simeq c\hbar k, \quad (2.9)$$

où $c = \sqrt{gn/m}$ est la vitesse du son dans le condensat [49]. Dans ce régime de grandes longueurs d'ondes ($\lambda = 2\pi/k \gg 2\pi\hbar/Mc$), les excitations élémentaires sont des ondes phononiques. Pour $\varepsilon_k \gg gn$ l'énergie des excitations élémentaires (2.7) s'approche de l'énergie de la particule libre

$$\mathcal{E}_k \simeq \varepsilon_k + gn. \quad (2.10)$$

Dans sa théorie de la superfluidité, Landau postule l'existence des excitations élémentaires en termes de phonons et de rotons pour expliquer les propriétés des superfluides [10]. Landau abouti à un critère sur la vitesse du fluide v qui détermine le régime superfluide. Ce critère est donné par $v < v_c$ où v_c est une vitesse critique au-dessous de laquelle le fluide coule sans friction. Dans la théorie de Bogolibov la vitesse critique correspond à la vitesse du son $v_c = c$. Notons que, dans la théorie de Bogolibov, la description en termes d'excitations élémentaires n'est pas postulée, mais ressort à partir des équations de bases qui régissent les condensats de bosons en interactions.

2.1.2 Système d'équations de Bogoliubov

Dans ce chapitre nous considérons un condensat de Bose-Einstein dipolaire de spin f . Ce système de spin est soumis à un champ magnétique uniforme $\mathbf{B} = p/g\mu_B\hat{e}_z$ où p est l'effet Zeeman linéaire. Pour des atomes piégés dans par un potentiel U et soumis à un champ magnétique externe, l'équation de Gross-Pitaevskii s'écrit comme suit

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m(\mathbf{r})}{\partial t} = \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U(\mathbf{r}) + pm \right] \psi_m(\mathbf{r}) + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} \psi_{m_2}^*(\mathbf{r}) \psi_{m'_2}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}(\mathbf{r}) + c_{\text{dd}} \sum_{m'} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{m m'} \psi_{m'}(\mathbf{r}). \quad (2.11)$$

Notons que le champ magnétique est supposé appliqué dans la direction \hat{e}_z . Le terme à droite de la première ligne est associé aux processus non interactifs. Les deux termes de la seconde ligne font intervenir des processus d'interaction de contact et d'interaction dipôle-dipôle. Le tenseur $C_{m'_1 m'_2}^{m m_2}$ défini par (1.43) fixe les processus d'échanges de spin par interaction de contact. L'interaction dipôle-dipôle agit à travers le champ dipolaire \mathbf{b} (éq. 1.105). La constante c_{dd} définie par (1.67) fixe l'intensité de l'interaction dipolaire. Les composantes du vecteur matrice de spin \mathbf{f} sont définies par les équations (1.13) à (1.15). Pour les calculs qui vont suivre, il est plus commode de réécrire le terme dipolaire de l'équation (2.11) comme suit

$$\sum_{m'} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_{m m'} \psi_{m'} = \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{m_2}^*(\mathbf{r}') \psi_{m'_2}(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}(\mathbf{r}'), \quad (2.12)$$

où l'on a introduit le tenseur d'interaction dipôle-dipôle

$$D_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{r}) = c_{\text{dd}} \sum_{\nu\nu'} Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r})(f_\nu)_{m_1 m'_1} (f_{\nu'})_{m_2 m'_2}. \quad (2.13)$$

Ce tenseur fixe les différents processus d'interaction dipôle-dipôle d'échange et de relaxation de spin. Dans cette dernière équation, f_ν sont les trois composantes du vecteur matrice de spin \mathbf{f} (éq. 1.13 à éq. 1.15). Les composantes du noyau dipolaire $Q_{\nu\nu'}$ sont données par l'équation (1.68).

Le point de départ de l'analyse des instabilités dans le cadre de la théorie de Bogoliubov consiste à développer la fonction d'onde du condensat comme suit

$$\psi_m(\mathbf{r}, t) = [\psi_m^0(\mathbf{r}) + \delta\psi_m(\mathbf{r}, t)] e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2.14)$$

où μ est le potentiel chimique (éq. 1.107) et $\delta\psi_m$ est une faible perturbation

$$\delta\psi_m/\sqrt{n} \ll 1. \quad (2.15)$$

La fonction d'onde ψ_m^0 est une solution stationnaire de l'équation de de Gross-Pitaevskii. En substituant (2.14) dans (2.11) et en gardant uniquement les termes de premier ordre en $\delta\psi_m$, nous obtenons

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \delta\psi_m}{\partial t} &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{trap}}(\mathbf{r}) - \mu + pm \right] \delta\psi_m \\ &+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} \left[\delta\psi_{m_2}^* \psi_{m'_2}^0 \psi_{m'_1}^0 + \psi_{m_2}^{0*} \delta\psi_{m'_2} \psi_{m'_1}^0 + \psi_{m_2}^{0*} \psi_{m'_2}^0 \delta\psi_{m'_1} \right] \\ &+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\delta\psi_{m_2}^*(\mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') \right. \\ &\left. + \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \delta\psi_{m'_2}(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') + \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') \delta\psi_{m'_1}(\mathbf{r}') \right]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

La seconde étape de cette analyse est de chercher des excitations de fréquence $\omega = \mathcal{E}/\hbar$ en écrivant $\delta\psi_m$ sous la forme

$$\delta\psi_m(\mathbf{r}) = u_m(\mathbf{r}) e^{-i\mathcal{E}t/\hbar} + v_m^*(\mathbf{r}) e^{i\mathcal{E}t/\hbar}, \quad (2.17)$$

où les fonctions u_m et v_m sont les paramètres de Bogliuobov. En substituant (2.17)

dans (2.16) nous obtenons le système d'équation suivant

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}u_m(\mathbf{r}) &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) - \mu + pm + qm^2 \right] u_m(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \left[C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} + C_{m'_2 m'_1}^{mm_2} \right] \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) u_{m'_2}(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} \psi_{m'_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) v_{m_2}(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{mm_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') u_{m'_2}(\mathbf{r}') \right. \\
&+ \left. \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') u_{m'_1}(\mathbf{r}') \right] \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{mm_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') v_{m_2}(\mathbf{r}'), \tag{2.18}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\mathcal{E}^* v_m^*(\mathbf{r}) &= \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) - \mu + pm + qm^2 \right] v_m^*(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \left[C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} + C_{m'_2 m'_1}^{mm_2} \right] \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) v_{m'_2}^*(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} \psi_{m'_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) u_{m_2}^*(\mathbf{r}) \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{mm_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \left[\psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') v_{m'_2}^*(\mathbf{r}') \right. \\
&+ \left. \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') v_{m'_1}^*(\mathbf{r}') \right] \\
&+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{mm_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}') \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}') u_{m_2}^*(\mathbf{r}'), \tag{2.19}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé les propriétés de symétrie du tenseur d'interaction de contact (éq. 1.43). L'information sur le comportement perturbatif du système est donnée par les solution u_m, v_m et \mathcal{E} du système d'équation de Bogoliubov (2.18) et (2.19).

L'interaction dipolaire dans l'espace de Fourier

Pour les besoins des calculs qui vont suivre, il s'avère commode d'écrire l'interaction dipolaire dans l'espace de Fourier. Pour ce faire, il convient de calculer la transformée de Fourier des noyaux dipolaires $Q_{\nu\nu'}$ que l'on définit comme suit

$$\tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{k}) = \int d\mathbf{r} Q_{\nu\nu'}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \tag{2.20}$$

Avant de calculer cette intégrale, rappelons que les noyaux dipolaire $Q_{\nu\nu'}$ peuvent être écrits en terme d'harmonique sphérique $Y_{2m}(\hat{\mathbf{r}})$ où $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ et $r = |\mathbf{r}|$ (éq. 1.68). Pour cette raison, il est plus adapté d'utiliser les coordonnées sphériques en écrivant

CHAPITRE 2. EXCITATIONS ÉLÉMENTAIRES DANS UN CONDENSAT
DIPOLAIRE FERROMAGNÉTIQUE

$d\mathbf{r} = r^2 dr d\Omega$, où Ω regroupe les variables angulaires. L'intégrale sur les variables angulaires se calcule en premier en utilisant le fait que

$$\int d\Omega Y_{2m}(\hat{\mathbf{r}}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = 4\pi i^2 j_2(kr) Y_{2m}(\hat{\mathbf{k}}), \quad (2.21)$$

où j_2 est la fonction de Bessel sphérique et $\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{k}/k$ et $k = |\mathbf{k}|$. L'intégration sur la variable radiale r est obtenue comme suit

$$\int_0^\infty dr \frac{j_2(kr)}{r^3} r^2 = \frac{1}{3}. \quad (2.22)$$

En dernier, le noyau dipolaire (2.20) dans l'espace de Fourier s'écrit

$$\tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{3} (\delta_{\nu\nu'} - 3\hat{k}_\nu \hat{k}_{\nu'}) \quad (2.23)$$

où les \hat{k}_ν avec $\nu = x, y$ et z sont les composantes du vecteur $\hat{\mathbf{k}}$. À partir de (2.13) et (2.23) le tenseur de l'interaction dipolaire s'obtient facilement

$$\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{k}) = c_{\text{dd}} \sum_{\nu\nu'} \tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{k}) (f_\nu)_{m_1 m'_1} (f_{\nu'})_{m_2 m'_2}. \quad (2.24)$$

De la même manière, les transformées de Fourier des composantes b_ν du champ dipolaire sont données par

$$\tilde{b}_\nu(\mathbf{k}) = \sum_{\nu'} \tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{k}) \tilde{F}_{\nu'}(\mathbf{k}), \quad (2.25)$$

où les $\tilde{F}_{\nu'}$ sont les transformées de Fourier des composantes $F_{\nu'}$ de la densité de spin \mathbf{F} définie en (1.98).

Condensat de densité non uniforme

Les atomes piégés dans un potentiel U présentent une densité $n(\mathbf{r})$ non uniforme. Dans ce cas, le système (2.19) doit être résolu numériquement. En pratique, l'évaluation des intégrales en \mathbf{r}' qui apparaissent dans les termes dipolaires nécessite le calcul d'une transformée de Fourier $\hat{\mathcal{F}}\{\cdot\}$ et d'une transformée de Fourier inverse $\hat{\mathcal{F}}^{-1}\{\cdot\}$. Plus précisément, cela consiste à récrire le système d'équations précédent comme suit

$$\begin{aligned} E u_m(\mathbf{r}) = & \dots + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) u_{m'_2}(\mathbf{r}) \} \right\} \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}) \} \right\} u_{m'_1}(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}) v_{m_2}(\mathbf{r}) \} \right\} \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} -E^* v_m^*(\mathbf{r}) = & \dots + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) v_{m'_2}^*(\mathbf{r}) \} \right\} \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m_2}^{0*}(\mathbf{r}) \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}) \} \right\} v_{m'_1}^*(\mathbf{r}) \\ & + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} \hat{\mathcal{F}}^{-1} \left\{ \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m m_2}(\mathbf{k}) \hat{\mathcal{F}} \{ \psi_{m'_2}^0(\mathbf{r}) u_{m_2}^*(\mathbf{r}) \} \right\} \psi_{m'_1}^0(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

où l'on a gardé uniquement les termes dipolaire afin d'alléger les écritures. Le tenseur $\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est la transformé de Fourier du tenseur d'interaction dipolaire donné par l'équation (2.24).

Condensat de densité uniforme

Dans la suite de ce chapitre nous allons considérer un condensat uniforme de densité n en posant $U = 0$. Pour ce système uniforme, le spectre de Bogoliubov peut être obtenu analytiquement. Nous écrivons les fonctions d'onde stationnaires ψ_m^0 comme suit

$$\psi_m^0 = \sqrt{n} \zeta_m, \quad (2.28)$$

avec

$$\sum_m |\zeta_m|^2 = 1. \quad (2.29)$$

En développant les paramètres u_m et v_m en ondes planes

$$u_m(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k},m} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.30)$$

$$v_m(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k},m} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad (2.31)$$

le système d'équation de Bogoliubov (2.16) prend la forme suivant

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix} = \sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \\ \mathbf{v}_{\mathbf{k}} \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

où $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k}}$ sont des vecteurs de $2f + 1$ composantes de spin

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} u_{\mathbf{k},f} \\ \vdots \\ u_{\mathbf{k},-f} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} v_{\mathbf{k},f} \\ \vdots \\ v_{\mathbf{k},-f} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

σ_z est une matrice diagonale de taille $(4f + 2) \times (4f + 2)$ donnée par

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

où $\mathbf{1}$ et $\mathbf{0}$ sont respectivement la matrice identité et la matrice nulle de taille $(2f + 1) \times (2f + 1)$. $\Sigma_{\mathbf{B}}$ est la matrice de Bogoliubov de taille $(4f + 2) \times (4f + 2)$ et elle est donnée par

$$\Sigma_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{\mathbf{k}} & \mathcal{B}_{\mathbf{k}} \\ \mathcal{B}_{\mathbf{k}}^* & \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^* \end{pmatrix}, \quad (2.35)$$

où $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}$ sont des matrices de taille $(2f + 1) \times (2f + 1)$. La matrice $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}$ est la somme d'un terme sans interaction $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^0$, d'un terme de contact $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^c$ et d'un terme dipolaire $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^d$

$$\mathcal{A}_{\mathbf{k}} = \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^0 + \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^c + \mathcal{A}_{\mathbf{k}}^d, \quad (2.36)$$

avec

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^0)_{m_1 m_2} = \left[-\frac{\hbar^2 k^2}{2M} - \mu + p m_1 \right] \delta_{m_1 m_2}, \quad (2.37)$$

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^c)_{m_1 m_2} = n \sum_{m'_1 m'_2} \left[C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} + C_{m_2 m'_2}^{m_1 m'_1} \right] \zeta_{m'_2}^* \zeta_{m'_1}, \quad (2.38)$$

$$(\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^d)_{m_1 m_2} = n \sum_{m'_1 m'_2} \left[\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{k}) + \tilde{D}_{m_2 m'_2}^{m_1 m'_1}(\mathbf{0}) \right] \zeta_{m'_2}^* \zeta_{m'_1}, \quad (2.39)$$

où $\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{k})$ est donné par (2.24). Le tenseur $\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{0})$ est défini comme suit

$$\tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{0}) = \int d\mathbf{r}' D_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = c_{\text{dd}} \sum_{\nu \nu'} \tilde{Q}_{\nu \nu'}(\mathbf{0}) (\mathbf{f}_{\nu})_{m_1 m'_1} (\mathbf{f}_{\nu'})_{m_2 m'_2} \quad (2.40)$$

La matrice $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}$ est la somme d'un terme de contact $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^c$ et d'un terme dipolaire $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^d$

$$\mathcal{B}_{\mathbf{k}} = \mathcal{B}_{\mathbf{k}}^c + \mathcal{B}_{\mathbf{k}}^d, \quad (2.41)$$

avec

$$(\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^c)_{m_1 m_2} = n \sum_{m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} \zeta_{m'_1} \zeta_{m'_2}, \quad (2.42)$$

$$(\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^d)_{m_1 m_2} = n \sum_{m'_1 m'_2} \tilde{D}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}(\mathbf{k}) \zeta_{m'_2} \zeta_{m'_1}. \quad (2.43)$$

2.1.3 Propriétés du spectre de Bogoliubov

La matrice $\sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}}$ donnée par (2.35) possède $4f+2$ énergies propres $\mathcal{E}_{k,\alpha}$ et vecteurs propres $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}$ que l'on indexe par α . Premièrement, notons que la matrice $\sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}}$ n'étant pas Hermitienne, elle peut admettre des valeurs propres réelles ou imaginaires. Nous allons voir que selon la nature des valeurs propres, le spectre de Bogoliubov peut présenter des instabilités énergétiques ou dynamiques. Deuxièmement, notons que pour chaque vecteur propre $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}$ solution de la matrice $\sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}}$ avec l'énergie propre $\mathcal{E}_{k,\alpha}$, il existe un autre vecteur propre $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,\alpha}^* \\ \mathbf{u}_{k,\alpha}^* \end{pmatrix}$ solution de la matrice $\sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}}$ avec l'énergie propre $-\mathcal{E}_{k,\alpha}^*$. Ces deux solutions décrivent la même oscillation comme on peut le vérifier avec (2.17). Nous allons maintenant examiner les propriétés des énergies et vecteurs propres de la matrice $\sigma_z \Sigma_{\mathbf{B}}$. Pour ce faire, réécrivons le système d'équations (2.16) comme suit

$$\Sigma_{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix} = \mathcal{E}_{k,\alpha} \sigma_z \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

En prenant la transconjuguée (\dagger) de (2.44), et en remplaçant α par α' , on obtient

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger & \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger \end{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{B}} = \mathcal{E}_{k,\alpha'}^* \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger & \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger \end{pmatrix} \sigma_z, \quad (2.45)$$

où l'on a utilisé le fait que Σ_B est une matrice Hermitienne ($\Sigma_B = \Sigma_B^\dagger$). En multipliant l'équation (2.44) à gauche par $(\mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger, \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger)$, et l'équation (2.45) à droite par $(\mathbf{u}_{k,\alpha})$, puis en soustrayant (2.45) de (2.44) on obtient

$$(\mathcal{E}_{k,\alpha'}^* - \mathcal{E}_{k,\alpha}) (\mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha}) = 0. \quad (2.46)$$

À partir de la relation (2.46), nous pouvons distinguer trois situations. Si $\alpha = \alpha'$, alors

$$\text{Im} \{ \mathcal{E}_{k,\alpha} \} (\mathbf{u}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha}) = 0. \quad (2.47)$$

Si $\mathcal{E}_{k,\alpha} \neq \mathcal{E}_{k,\alpha'}^*$, alors

$$\mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha} = 0. \quad (2.48)$$

Finalement, si

$$\mathbf{u}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha'}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha} \neq 0. \quad (2.49)$$

alors la matrice admet un couple d'énergies propres complexes conjuguées

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \mathcal{E}_{k,\alpha'}^*. \quad (2.50)$$

Instabilités énergétiques

D'après (2.47), si le vecteur propre $(\mathbf{u}_{k,\alpha})$ vérifie la relation suivante

$$\mathbf{u}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha} = c^{\text{st}} \neq 0, \quad (2.51)$$

alors l'énergie propre associée est réelle ($\text{Im} \{ \mathcal{E}_{k,\alpha} \} = 0$). Remarquons que dans ce cas, le vecteur propre $(\mathbf{v}_{k,\alpha}^*, \mathbf{u}_{k,\alpha}^*)$, aussi solution de la matrice $\sigma_z \Sigma_B$ avec la valeurs propre réelle $-\mathcal{E}_{k,\alpha}$, doit vérifier la même relation en remplaçant c^{st} par $-c^{\text{st}}$. En imposant $c^{\text{st}} = 1$ la relation (2.51) ne sera vérifiée que par l'une des deux solutions. Finalement, en utilisant la relations (2.48), on montre que les vecteurs propres de deux modes α et α' d'énergies réelles vérifient la relation suivante

$$\mathbf{u}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha'} - \mathbf{v}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha'} = \delta_{\alpha',\alpha}. \quad (2.52)$$

Ce choix de normalisation peut être compris dans le cadre de la seconde quantification : la relation (2.52) s'obtient en imposant les relations de commutations (1.84) aux quasi-particules afin de préserver leur nature bosonique. Finalement, avec le choix (2.52), une énergie positive signifie que le mode α est énergiquement stable. À l'inverse, une énergie négative signifie que le mode α est énergiquement instable [71, 72]. Les instabilités énergétiques (instabilités de Landau) sont essentielles à l'étude de stabilité du condensat en présence de dissipation. Dans ce cas, le condensat peut diminuer son énergie en excitant ces modes d'énergies négatives. Cependant, dans les expériences d'atomes froids, le système est isolé sous vide. De ce fait, la dissipation de l'énergie est faible (idéalement nulle). Même en présence d'instabilités énergétiques,

CHAPITRE 2. EXCITATIONS ÉLÉMENTAIRES DANS UN CONDENSAT
DIPOLAIRE FERROMAGNÉTIQUE

le système peut demeurer stable. Pour un mode α d'énergie propre réelle $\mathcal{E}_{k,\alpha}$, l'évolution de la fonction d'onde $\boldsymbol{\psi} = (\psi_f, \dots, \psi_m, \dots, \psi_{-f})^T$ du système peut être approchée par

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = \boldsymbol{\psi}^0 e^{-i\mu t/\hbar} + \lambda_{k,\alpha} [\mathbf{u}_{k,\alpha} e^{-i(\mathcal{E}_{k,\alpha}t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \mathbf{v}_{k,\alpha}^* e^{i(\mathcal{E}_{k,\alpha}t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}] e^{-i\mu t/\hbar}, \quad (2.53)$$

où $\boldsymbol{\psi}^0 = \sqrt{n}\boldsymbol{\zeta}$ (éq. 2.28). Dans l'expression (2.53) $\lambda_{k,\alpha}$ est l'amplitude du mode avec $\lambda_{k,\alpha}/\sqrt{n} \ll 1$. Les amplitudes $\lambda_{k,\alpha}$ sont calculées à $t = 0$. Pour ce faire, on considère un système contenu dans un volume V avec des conditions aux limites périodiques. En posant $t = 0$ dans (2.53) et en utilisant la condition de normalisation (2.52), on montre que

$$\lambda_{k,\alpha} = \frac{1}{\sqrt{V}} \int d\mathbf{r} [\mathbf{u}_{k,\alpha}^\dagger \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, 0) - \mathbf{v}_{k,\alpha}^\dagger \boldsymbol{\psi}^*(\mathbf{r}, 0)] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.54)$$

Instabilités dynamiques

D'après (2.47), si l'énergie propre $\mathcal{E}_{k,\alpha}$ possède une partie imaginaire non-nulle ($\text{Im}\{\mathcal{E}_{k,\alpha}\} \neq 0$) alors, le vecteur propre $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}$ vérifie la relation suivante

$$\mathbf{u}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{k,\alpha} - \mathbf{v}_{k,\alpha}^\dagger \mathbf{v}_{k,\alpha} = 0. \quad (2.55)$$

Dans ce cas, le vecteur propre $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_{k,\alpha}^* \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}$ associé à l'énergie propre $-\mathcal{E}_{k,\alpha}^*$ vérifie aussi la relation (2.55). Contrairement au cas précédent, il n'est pas possible de normaliser les vecteurs propres séparément. Néanmoins, dans le cas où les valeurs propres imaginaires apparaissent par paires conjuguées, il est possible de les normaliser en considérant la bonne combinaison linéaire. Pour le voir, supposons que la matrice $\boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\Sigma}_B$ présente deux énergies propres \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b tel que $\mathcal{E}_a = \mathcal{E}_b^*$. Pour cela, une condition suffisante est que les vecteurs propres associés $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_a \\ \mathbf{v}_a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{v}_b \end{pmatrix}$ vérifient la relation (2.49). Avec (2.55), on peut écrire

$$\mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_a^\dagger \mathbf{v}_a = \mathbf{u}_b^\dagger \mathbf{u}_b - \mathbf{v}_b^\dagger \mathbf{v}_b = 0, \quad (2.56)$$

$$\mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{u}_b - \mathbf{v}_a^\dagger \mathbf{v}_b = \mathbf{u}_b^\dagger \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_b^\dagger \mathbf{v}_a \neq 0. \quad (2.57)$$

À présent, on définit les vecteurs propres $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha'} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha'} \end{pmatrix}$ comme suit

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b \\ \mathbf{v}_a + \mathbf{v}_b \end{pmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_{k,\alpha'} \\ \mathbf{v}_{k,\alpha'} \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a^* - \mathbf{v}_b^* \\ \mathbf{u}_a^* - \mathbf{u}_b^* \end{pmatrix}. \quad (2.59)$$

En imposant

$$\mathbf{u}_a^\dagger \mathbf{u}_b - \mathbf{v}_a^\dagger \mathbf{v}_b = \mathbf{u}_b^\dagger \mathbf{u}_a - \mathbf{v}_b^\dagger \mathbf{v}_a = 1, \quad (2.60)$$

on peut facilement vérifier que ces vecteurs propres vérifient les relations suivantes

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha} - \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha} = 1, \quad (2.61)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha'}^\dagger \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha'}^\dagger \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha'} = 1, \quad (2.62)$$

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}^\top \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha'} - \mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha}^\top \mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha'} = 0. \quad (2.63)$$

L'interprétation des vecteurs propres en termes de quasi-particules nécessite le formalisme de la seconde quantification. Le lecteur peut consulter la revue de Kawaguchi et Ueda [42]. En utilisant (2.53), la contribution des modes complexes a à l'évolution de la fonction d'onde ψ du condensat peut s'écrire comme suit

$$\lambda_a \left[\mathbf{u}_a e^{-i(\mathcal{E}_a t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \mathbf{v}_a^* e^{i(\mathcal{E}_a^* t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right], \quad (2.64)$$

où λ_a est l'amplitude du a avec $\lambda_a/n \ll 1$. De la même manière, la contribution des modes complexe b d'amplitude λ_b avec $\lambda_b/n \ll 1$ est donnée par

$$\lambda_b \left[\mathbf{u}_{b,m} e^{-i(\mathcal{E}_b t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} + \mathbf{v}_{b,m}^* e^{i(\mathcal{E}_b^* t/\hbar - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \right]. \quad (2.65)$$

Pour un système contenue dans un volume V , les amplitudes des modes λ_a et λ_b s'obtiennent à $t = 0$ en utilisant les relations (2.56) et (2.60). On obtient

$$\lambda_{a,b} = \frac{1}{V} \int d\mathbf{r} \left[\mathbf{u}_{b,a}^\dagger \psi(\mathbf{r},0) - \mathbf{v}_{b,a}^\dagger \psi^*(\mathbf{r},0) \right] e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (2.66)$$

D'après ces deux dernières équations, si $\text{Im}\{\mathcal{E}_a\} > 0$ ($\text{Im}\{\mathcal{E}_b\} > 0$), le mode a (b) va croître exponentiellement. Dans ce cas, on dit que les énergies propres imaginaires sont associées à des instabilités dynamiques du système. Les instabilités dynamiques peuvent se développer à partir d'un état stationnaire de l'équation de l'équation de Gross-Pitaevskii (champ moyen), mais qui n'est plus l'état fondamental du système. Finalement, notons que les instabilités dynamiques peuvent se développer en l'absence de dissipation. Pour ces raisons, les instabilités dynamiques sont cruciales pour comprendre les conditions de stabilité des systèmes d'atomes froids.

2.2 Spectre de Bogoliubov d'un condensat ferromagnétique uniforme dipolaire

Nous nous proposons dans cette section d'analyser le spectre d'excitations de la phase ferromagnétique uniforme de spin $f = 1$ et $f = 3$. Pour éviter la redondance, le cas la phase ferromagnétique uniforme de spin $f = 2$ est discuté dans l'annexe B.

Le cas d'un système de spin $f = 1$ est traité dans la sous-section 2.2.1. Dans un premier temps, nous allons discuter le spectre d'excitations en l'absence d'interaction dipôle-dipôle ($c_{dd} = 0$). Par la suite, nous allons voir comment ce spectre est modifié en présence de l'interaction dipolaire. Pour $c_{dd} = 0$, le spectre d'excitation de ce système est formé de trois modes indépendants [17, 18]. Un mode de *densité* qui détermine les conditions de stabilité mécanique du système. Un mode de *précession de spin* qui décrit les fluctuations de la direction de polarisation des spins. Un mode de *déformation* qui décrit les fluctuations de la longueur de spin locale. Nous

allons voir que l'interaction dipôle-dipôle couple les modes de densité et de précession de la phase ferromagnétique. Notamment, nous allons discuter les conditions de stabilité dynamique de la phase ferromagnétique uniforme en fonction du champ magnétique p appliqué. Nous allons montrer l'existence d'un champ magnétique critique p_{dd} (éq. 2.112) au dessous duquel la phase ferromagnétique devient dynamiquement instable. Dans la sous-section suivante nous allons analyser le spectre de Bogoliubov de condensats ferromagnétiques de spin $f = 3$. Nous allons voir que le comportement dynamique instable est une propriété générale des systèmes de spins dipolaires. Le champ critique p_{dd} dépend du spin f système de spin considéré, de la densité n et de la constante d'interaction dipolaire c_{dd} comme suit

$$p_{\text{dd}} = \frac{4\pi f c_{\text{dd}} n}{3}. \quad (2.67)$$

La phase ferromagnétique uniforme

On considère un système uniforme de longueur spin locale maximale $|\mathbf{f}| = f$. Les spins sont polarisés dans la direction $-\hat{e}_z$. Le vecteur spin de cette phase ferromagnétique s'écrit

$$\mathbf{f} = -f\hat{e}_z, \quad (2.68)$$

Le vecteur $\boldsymbol{\zeta}$ de $2f + 1$ composantes ζ_m s'écrit comme suit

$$\boldsymbol{\zeta} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.69)$$

Champ dipolaire résiduel de la phase ferromagnétique

Avant de diagonaliser la matrice $\boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\Sigma}_B$ et de calculer le spectre d'excitation de Bogoliubov, il convient préciser le traitement des termes de noyau dipolaire $\tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{0})$ qui apparaissent dans la matrice $\mathcal{A}_k^{\text{dd}}$ (éq. 2.39). En effet, d'après (2.23) ces termes sont indéfinis. En substituant (2.69) dans (2.39), le terme qui fait intervenir $\tilde{Q}_{\nu\nu'}(\mathbf{0})$ devient

$$-f c_{\text{dd}} n \sum_{\nu=x,y,z} \hat{Q}_{\nu z}(\mathbf{0}) \mathbf{f}_\nu. \quad (2.70)$$

Par conséquent, nous avons besoin de calculer uniquement les noyaux dipolaires $\hat{Q}_{\nu z}(\mathbf{0})$. Pour ce faire, rappelons que l'interaction dipolaire est invariante par rotations simultanées dans l'espace de spin et des coordonnées spatiales autour d'un axe arbitraire. Le champ dipolaire \mathbf{b} possède la même symétrie. Par conséquent, pour la configuration ferromagnétique (2.68), le champ dipolaire généré par les dipôles est invariant par rotation autour de l'axe \hat{e}_z . Autrement dit, nous avons

$$\mathbf{b} \parallel \hat{e}_z. \quad (2.71)$$

Par ailleurs, en utilisant l'expression (2.25), les composantes du champ dipolaire dans l'espace de Fourier pour la configuration ferromagnétique (2.69) de taille infinie, nous

avons

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{0}) = -fn\tilde{Q}_{xz}(\mathbf{0})\hat{e}_x - fn\tilde{Q}_{yz}(\mathbf{0})\hat{e}_y - fn\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0})\hat{e}_z. \quad (2.72)$$

Par conséquent, d'après (2.71) et (2.72), nous avons

$$\tilde{Q}_{xz}(\mathbf{0}) = \tilde{Q}_{yz}(\mathbf{0}) = 0. \quad (2.73)$$

Ainsi, le champ dipolaire dans l'espace de Fourier est donné par

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{0}) = -fn\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0})\hat{e}_z. \quad (2.74)$$

Ce champ dipolaire peut être interprété comme un champ magnétique résiduel dirigé suivant l'axe z

$$-fc_{\text{dd}}n\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0})/g\mu_B\hat{e}_z. \quad (2.75)$$

Notons que l'absence de composantes de champ dipolaire résiduel suivant les axes x et y assure que l'état ferromagnétique uniforme décrit précédemment est toujours un état stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii. Cela peut être facilement vérifié à partir de (1.107). Dans certains cas particuliers, il est possible de calculer le terme $\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0})$ qui apparait dans (2.75). Ronen *et al.* [73] proposent de limiter la portée de l'interaction dipôle-dipôle. En particulier, pour un système de spins contenus dans une boîte cubique de côté $2R_c$ nous pouvons négliger les effets dipolaires en tous points situés à la distance $r > R_c$ du centre de la boîte. Cela revient à poser

$$Q_{\nu\nu'}(r > R_c) = 0. \quad (2.76)$$

Pour obtenir les termes du noyau dipolaire dans l'espace de Fourier, il convient de recalculer l'intégrale radiale (2.22) comme suit

$$\int_0^{R_c} dr \frac{j_2(kr)}{r^3} r^2 = \frac{1}{3} + \frac{\cos(kR_c)}{k^2 R_c^2} - \frac{\sin(kR_c)}{k^3 R_c^3}. \quad (2.77)$$

Ainsi, le noyau dipolaire \tilde{Q}_{zz} est donné par

$$\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{3}(3\cos^2\theta_k - 1) \left(1 + 3\frac{\cos(kR_c)}{k^2 R_c^2} - 3\frac{\sin(kR_c)}{k^3 R_c^3} \right), \quad (2.78)$$

où θ_k est l'angle entre le vecteur \mathbf{k} et \hat{e}_z . En prenant la limite $k = 0$ de cette dernière expression et en utilisant l'équation (2.75), on montre que le champ magnétique dipolaire résiduel est nul. Il est important de préciser que le champ résiduel dépend de la géométrie choisie. Pour un système en forme de cigare contenu dans un cylindre, le champ résiduel n'est pas nul [73]. Dans ce travail nous allons poser $\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0}) = 0$. Les résultats de ce chapitre peuvent être facilement généralisés en remplaçant dans les formules p par $p - fc_{\text{dd}}n\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{0})$. Notons que l'expression (2.78) du noyau dipolaire à portée finie R_c montre que pour un système contenu dans une boîte suffisamment grande ($kR_c \gg 1$), il est possible d'approcher (2.78) par

$$\tilde{Q}_{zz}(\mathbf{k}) \simeq \frac{4\pi}{3}(3\cos^2\theta_k - 1). \quad (2.79)$$

En dernier, dans la suite de ce travail nous allons poser

$$\hat{Q}_{zz}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{4\pi}{3}(3\cos^2\theta_k - 1) & \text{si } \mathbf{k} \neq \mathbf{0}, \\ 0 & \text{si } \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (2.80)$$

2.2.1 Condensat uniforme de spin $f = 1$

Le vecteur ζ de la phase ferromagnétique dans le cas d'un condensat de spin $f = 1$ s'écrit comme suit

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

En substituant ce vecteur dans (2.37), (2.38) et (2.39), on obtient les composantes des matrices \mathcal{A}_k^0 , \mathcal{A}_k^c et \mathcal{B}_k^c qui regroupent les termes sans interaction et les termes d'interaction de contact

$$\mathcal{A}_k^0 + \mathcal{A}_k^c = \begin{pmatrix} \varepsilon_k + 2p - \frac{2}{3}n(g_2 - g_0) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_k + p & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_k + g_2n \end{pmatrix}, \quad (2.82)$$

$$\mathcal{B}_k^c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_2n \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

où l'on a posé

$$\varepsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}. \quad (2.84)$$

Dans (2.82), on a remplacé le potentiel chimique μ par

$$\mu = -p + g_2n. \quad (2.85)$$

Cette dernière expression du potentiel chimique est obtenue à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (1.107) en annulant le potentiel de piégeage et le champ dipolaire ($U = 0$ et $b_\nu = 0$) et en remplaçant ψ_m par $\sqrt{n}\zeta$ où ζ est donné par (2.81). Finalement, les matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d contiennent les termes dipolaire et s'obtiennent en utilisant (2.81) et (2.23) comme suit

$$\mathcal{A}_k^d = \frac{4\pi c_{dd}n}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1 - 3\cos^2\theta_k) & -3\sqrt{2}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & -3\sqrt{2}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{i\phi_k} & -(1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}, \quad (2.86)$$

$$\mathcal{B}_k^d = \frac{4\pi c_{dd}n}{3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\sin^2\theta_k e^{-2i\phi_k} & -3\sqrt{2}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & -3\sqrt{2}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} & -(1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Pour obtenir cette dernière expression, nous avons exprimé les noyaux dipolaires (éq. 2.23) en coordonnées sphériques en posant

$$\hat{\mathbf{k}} = (\sin\theta_k \cos\phi_k, \sin\theta_k \sin\phi_k, \cos\theta_k), \quad (2.88)$$

où $\theta_k \in [0, \pi]$ et $\phi_k \in [0, 2\pi[$ sont respectivement l'angle polaire et azimutal des coordonnées sphériques. Notons que la dépendance en ϕ_k , qui apparaît dans certains éléments des matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d , a pour origine les transformées de Fourier des harmoniques sphériques $Y_{2,1} \propto e^{-i\phi_k}$ et $Y_{2,2} \propto e^{-2i\phi_k}$. Ces termes interviennent dans les processus de relaxation dipolaire (voir éq. 1.73 et éq. 1.78).

Condensat sans interaction dipolaire

Pour $c_{\text{dd}} = 0$, la matrice $\sigma_z \Sigma_M$ est formée uniquement des matrices $\mathcal{A}_k^0, \mathcal{A}_k^c$ et \mathcal{B}_k^c . Ces matrices ne contiennent que des termes diagonaux. Par conséquent, les trois modes $\alpha = \pm 1$ et $\alpha = 0$ qui vérifient les relations (2.52), sont associés aux états de spin $m = \pm 1$ et $m = 0$.

Mode de densité. Le spectre énergétique du mode $\alpha = -1$ est donné par

$$\mathcal{E}_{k,-1} = \sqrt{\varepsilon_k (\varepsilon_k + 2g_2 n)}. \quad (2.89)$$

On retrouve ici le même résultat que pour un condensat scalaire [9]. Ce mode décrit les excitations de densité. Pour que le condensat soit mécaniquement stable, le spectre du mode densité doit être réel pour toutes les valeurs de k . Pour cela, la constante de collision doit être positive $g_2 > 0$. Les vecteurs $\mathbf{u}_{k,-1}$ et $\mathbf{v}_{k,-1}$ associés sont donnés par

$$\mathbf{u}_{k,-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{u}_{k,-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{k,-1} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{v}_{k,-1} \end{pmatrix}. \quad (2.90)$$

avec

$$\tilde{u}_{k,-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n}{2\mathcal{E}_{k,-1}} + \frac{1}{2}}, \quad (2.91)$$

$$\tilde{v}_{k,-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n}{2\mathcal{E}_{k,-1}} - \frac{1}{2}}. \quad (2.92)$$

Mode de précession. Le mode $\alpha = 0$ présente un spectre énergétique de particule libre $\mathcal{E}_{k,0} = \varepsilon_k$ avec un gap énergétique pour $p \neq 0$

$$\mathcal{E}_{k,0} = \varepsilon_k + p. \quad (2.93)$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_{k,0}$ et $\mathbf{v}_{k,0}$ associés sont donnés par

$$\mathbf{u}_{k,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{k,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.94)$$

Ce mode décrit des fluctuations de la direction de polarisation. Pour le voir nous allons calculer l'évolution du vecteur spin \mathbf{f} . Considérons des excitations de nombre d'onde k et d'amplitude $\lambda_0/\sqrt{n} \ll 1$. En utilisant (2.53) et (2.94) l'évolution de \mathbf{f} peut être écrite comme suit

$$\mathbf{f}(t) \simeq \mathbf{f}(0) + \delta \mathbf{f}_\perp(t), \quad (2.95)$$

où $\mathbf{f}(0) = -\hat{e}_z$ est le vecteur spin à $t = 0$ (éq. 2.68) et $\delta \mathbf{f}_\perp$ l'évolution de \mathbf{f} dans le plan transverse à l'axe de polarisation z

$$\delta \mathbf{f}_\perp(t) = |\delta \mathbf{f}_\perp| [\cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{E}_{k,0}t/\hbar) \hat{e}_x - \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \mathcal{E}_{k,0}t/\hbar) \hat{e}_y]. \quad (2.96)$$

où $|\delta \mathbf{f}_\perp| = \sqrt{2}(\lambda_0/\sqrt{n})$. D'après ces deux dernières expressions, \mathbf{f} précesse autour de l'axe de polarisation z . En particulier, pour $k = 0$ ($\varepsilon_k = 0$) et $p \neq 0$, les excitations décrites par (2.93) et (2.94) subissent une précession autour de l'axe z à la fréquence de Larmor $\omega_L = p/\hbar$. Pour ces raisons, ce mode est dit de *précession* ou *onde de spin*. Nous allons voir dans la suite que l'interaction dipolaire modifie fortement les conditions de stabilité de ce mode. Notons que ce mode de précession conserve la nature ferromagnétique du système. En effet, en utilisant (2.95) et (2.96), la longueur de spin locale $|\mathbf{f}|$ au premier ordre en $|\delta \mathbf{f}_\perp|$ est donnée par

$$|\mathbf{f}| \simeq 1. \quad (2.97)$$

Mode de déformation. Le mode $\alpha = 1$ présente un spectre de particule libre avec un gap énergétique fixé par les constantes d'interactions g_2 et g_0

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k},1} = \varepsilon_k + 2p - \frac{2}{3}(g_2 - g_0)n = \varepsilon_k + 2p - 2c_1n. \quad (2.98)$$

où c_1 est donné par (1.49). Les vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{k},1}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k},1}$ associés sont donnés par

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k},1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k},1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Ce mode décrit des excitations qui modifient la longueur de spin $|\mathbf{f}|$, et par conséquent la nature ferromagnétique du système. Pour cette raison, Ce mode est dit de *déformation* de spin. En utilisant (2.95) et (2.99) on obtient

$$\mathbf{f} \simeq \mathbf{f}(0) + \delta \mathbf{f}_z, \quad (2.100)$$

avec $\delta \mathbf{f}_z = (\lambda_1/\sqrt{n})^2 \hat{e}_z$ et $\lambda_1/\sqrt{n} \ll 1$. D'après (2.100), la direction de polarisation n'est pas modifiée. Ce mode est interprété comme une onde de spin longitudinale et décrit les excitations de l'état $m - 1$ à l'état $m = 1$ [17, 23, 57]. La longueur de spin locale au premier ordre en ordre $|\delta \mathbf{f}_z|$ est donnée par

$$|\mathbf{f}| \simeq 1 - |\delta \mathbf{f}_z|. \quad (2.101)$$

Le mode de déformation (2.98) est énergiquement instable pour un champ magnétique $p < p_c = (g_2 - g_0)n/3$ où p_c correspond au champ critique obtenu en (1.131). Cette instabilité énergétique signifie que la phase ferromagnétique n'est plus l'état fondamental du condensat.

Système avec interaction dipolaire

Pour $c_{\text{dd}} \neq 0$, les matrices $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^d$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^d$ présentent des termes hors diagonale. Par conséquent, le mode de densité noté précédemment $\alpha = -1$ est couplé¹ au mode de

1. Rappelons que pour $f = 1$, les vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{k},\alpha}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k},\alpha}$ possède trois composantes de spin m . Si plus d'une composantes de spin m est non nul, ces vecteurs « mélangent » les états de spin m . Le mode α ne peut être associé à un état de spin m . Le couplage des modes est à comprendre dans ce sens.

spin $\alpha = 0$. Néanmoins, remarquons que les termes hors diagonale s'annulent pour les angles particuliers $\theta_k = 0$ et $\theta_k = \pi/2$. Pour ces deux cas particuliers, les modes $\alpha = \pm 1$ et $\alpha = 0$ sont découplés et sont associés, respectivement, aux états de spin $m = \pm 1$ et $m = 0$. Le premier cas ($\theta_k = 0$) correspond aux excitations dont le vecteur $\mathbf{k}_{\parallel} = (0, 0, k_z)^T$ est parallèle (\parallel) à l'axe de polarisation z . Le second cas ($\theta_k = \pi/2$) correspond aux excitations dont le vecteur $\mathbf{k}_{\perp} = (k_x, k_y, 0)^T$ est perpendiculaire (\perp) à l'axe z . Avec $\theta_k = 0$ et $\theta_k = \pi/2$, les matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d se simplifient considérablement. Le mode $\alpha = 1$ n'est pas modifié par l'interaction dipôle-dipôle. Son spectre énergétique est identique à (2.98).

Mode de densité pour $\theta_k = 0$ et $\theta_k = \pi/2$. Après diagonalisation de la matrice $\sigma_z \Sigma_B$, dans le cas des excitations \parallel et \perp nous obtenons, pour le mode $\alpha = -1$, les spectres énergétique suivants

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}} [\varepsilon_{\mathbf{k}_{\parallel}} + 2g_2 n (1 + 2\varepsilon_{\text{dd}})]}, \quad (2.102)$$

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}_{\perp}} [\varepsilon_{\mathbf{k}_{\perp}} + 2g_2 n (1 - \varepsilon_{\text{dd}})]}, \quad (2.103)$$

avec

$$\varepsilon_{\text{dd}} = \frac{4\pi c_{\text{dd}}}{3g_2}. \quad (2.104)$$

Le paramètre ε_{dd} détermine l'intensité de l'interaction dipôle-dipôle par rapport à l'interaction de contact. Avec $g_2 > 0$ et par conséquent $\varepsilon_{\text{dd}} > 0$, le spectre $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1}$ des excitations \parallel est toujours stable. Ce n'est pas toujours le cas pour les excitations \perp . En effet, avec $g_2 > 0$, le spectre $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1}$ doit être réel afin d'assurer la stabilité mécanique du système. Pour cela, ε_{dd} doit être dans l'intervalle $-1/2 < \varepsilon_{\text{dd}} < 1$. Nous allons voir dans la suite que cette condition reste valable pour toutes les excitations de vecteur d'onde \mathbf{k} . Les vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1}$ associés aux excitations \parallel sont donnés par

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{u}_{\parallel, -1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{v}_{\parallel, -1} \end{pmatrix}. \quad (2.105)$$

avec

$$\tilde{u}_{\parallel, -1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n (1 + 2\varepsilon_{\text{dd}})}{2\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1}}} + \frac{1}{2}, \quad (2.106)$$

$$\tilde{v}_{\parallel, -1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n (1 + 2\varepsilon_{\text{dd}})}{2\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel}, -1}}} - \frac{1}{2}. \quad (2.107)$$

Les vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1}$ associés aux excitations \perp sont donnés par

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{u}_{\perp, -1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\perp}, -1} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{v}_{\perp, -1} \end{pmatrix}. \quad (2.108)$$

avec

$$\tilde{u}_{\perp,-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n (1 - \epsilon_{\text{dd}})}{2\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp,-1}}} + \frac{1}{2}}, \quad (2.109)$$

$$\tilde{v}_{\perp,-1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_k + g_2 n (1 - \epsilon_{\text{dd}})}{2\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp,-1}}} - \frac{1}{2}}. \quad (2.110)$$

Mode de précession pour $\theta_k = 0$. Le mode $\alpha = 0$ des excitations \parallel présente un spectre de particule libre gappé

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel},0} = \varepsilon_{k_{\parallel}} + p - p_{\text{dd}}, \quad (2.111)$$

avec

$$p_{\text{dd}} = \frac{4\pi c_{\text{dd}} n}{3}. \quad (2.112)$$

Notons que ce spectre est énergiquement stable pour $p > p_{\text{dd}}$. Les vecteurs $\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\parallel},0}$ et $\mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\parallel},-1}$ associés sont données par

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}_{\parallel},0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{\mathbf{k}_{\parallel},0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.113)$$

Comme précédemment, il est possible de vérifier que ces excitations décrivent des modifications de la direction de polarisation qui garde constante la longueur de spin. L'évolution du vecteur spin \mathbf{f} peut être obtenue simplement en remplaçant $\mathcal{E}_{\mathbf{k},0}$ par $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\parallel},0}$ dans (2.96).

Mode de précession pour $\theta_k = \pi/2$. En dernier, le spectre $\alpha = 0$ des excitations \perp est donné par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp},0} = \sqrt{(\varepsilon_{k_{\perp}} + p - p_{\text{dd}})(\varepsilon_{k_{\perp}} + p + 2p_{\text{dd}})}, \quad (2.114)$$

où p_{dd} est donné par (2.112). La stabilité dynamique de ces excitations dépend du champ magnétique p appliqué. Pour $p > p_{\text{dd}}$, le spectre $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp},0}$ (2.114) est dynamiquement stable. Pour un champ magnétique $p < p_{\text{dd}}$, l'énergie $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_{\perp},0}$ est imaginaire pour des excitations de nombre d'onde

$$\sqrt{2M \max\{-p - p_{\text{dd}}, 0\}} < k_{\perp} < \sqrt{2M(p_{\text{dd}} - p)/\hbar^2}. \quad (2.115)$$

Par conséquent, la phase ferromagnétique uniforme est dynamiquement instable. Pour voir l'évolution du système en présence de ces instabilités dynamiques calculons l'évolution du vecteur spin \mathbf{f} . Pour $p < p_{\text{dd}}$, la matrice $\sigma_z \Sigma_{\text{B}}$ présente un couple d'énergies propres complexes conjuguées. Notons ces deux énergies propres \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b avec $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_a^*$. Le spectre \mathcal{E}_a est donné par

$$\mathcal{E}_a = i\sqrt{|(\varepsilon_{k_{\perp}} + p - p_{\text{dd}})(\varepsilon_{k_{\perp}} + p + 2p_{\text{dd}})|}. \quad (2.116)$$

Avec ce choix $\text{Im}\{\mathcal{E}_a\} > 0$ et $\text{Im}\{\mathcal{E}_b\} < 0$. Les vecteurs $\mathbf{u}_{a,b}$ et $\mathbf{v}_{a,b}$ associés sont donnés par

$$\mathbf{u}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u}_{a,b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_{a,b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v}_{a,b} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.117)$$

avec

$$\tilde{u}_{a,b} = \left[\frac{\varepsilon_{k_\perp} + p + p_{\text{dd}}/2}{2\mathcal{E}_{a,b}} + \frac{1}{2} \right]^{1/2} e^{-2i\phi_k}, \quad (2.118)$$

$$\tilde{v}_{a,b} = \left[\frac{\varepsilon_{k_\perp} + p + p_{\text{dd}}/2}{2\mathcal{E}_{a,b}} - \frac{1}{2} \right]^{1/2}. \quad (2.119)$$

Notons la signature des termes de relaxation dipolaire à travers la dépendance en ϕ_k . Le lien entre les instabilités dynamiques et les processus de relaxation dipolaire sera discuté dans la suite. En utilisant ces deux dernières expressions et les équations (2.64) et (2.65) nous obtenons

$$\mathbf{f}(t) \simeq \mathbf{f}(0) + \delta\mathbf{f}_\perp(t), \quad (2.120)$$

avec

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{f}_\perp(t) &= \sqrt{2} [\tilde{\lambda}_a \tilde{\rho}_a e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_a\}t/\hbar} + \tilde{\lambda}_b \tilde{\rho}_b e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_b\}t/\hbar}] \hat{e}_x \\ &\quad - \sqrt{2} [\tilde{\lambda}_a \tilde{\eta}_a e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_a\}t/\hbar} + \tilde{\lambda}_b \tilde{\eta}_b e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_b\}t/\hbar}] \hat{e}_y \end{aligned} \quad (2.121)$$

où $\tilde{\lambda}_{a,b} = \lambda_{a,b}/\sqrt{n} \ll 1$ ($\lambda_{a,b}$ sont les amplitudes des modes a et b), $\tilde{\rho}_{a,b} = \text{Re}\{(\tilde{u}_{a,b} + \tilde{v}_{a,b})e^{ik_\perp \cdot r}\}$ et $\tilde{\eta}_{a,b} = \text{Im}\{(\tilde{u}_{a,b} - \tilde{v}_{a,b})e^{ik_\perp \cdot r}\}$. D'après l'équation (2.121) si $\text{Im}\{\mathcal{E}_a\} > 0$, on peut s'attendre à un développement de textures de spin dans le plan transverse à l'axe de polarisation z . La longueur de spin locale dans le plan transverse $|\delta\mathbf{f}_\perp|$ est donnée au premier ordre en $\tilde{\lambda}_{a,b}$ par

$$|\delta\mathbf{f}_\perp(t)| \simeq \tilde{\lambda}_a \frac{\tilde{\rho}_a \tilde{\rho}_b + \tilde{\eta}_a \tilde{\eta}_b}{\sqrt{(\tilde{\rho}_b)^2 + (\tilde{\eta}_b)^2}} e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_a\}t/\hbar} + \tilde{\lambda}_b \sqrt{(\tilde{\rho}_b)^2 + (\tilde{\eta}_b)^2} e^{\text{Im}\{\mathcal{E}_b\}t/\hbar}. \quad (2.122)$$

Dans cette dernière expression, le premier terme à droite croit de façon exponentielle, tandis que le dernier terme décroît exponentiellement. Finalement, notons que ces instabilités dynamiques ne modifient pas la nature ferromagnétique du système. Au premier ordre en $|\delta\mathbf{f}_\perp|$, on a

$$|\mathbf{f}(t)| \simeq 1. \quad (2.123)$$

L'analyse des excitations de vecteur d'onde \mathbf{k}_\perp montrent que la phase ferromagnétique uniforme de spin $f = 1$ est dynamiquement instable pour $p < p_{\text{dd}}$. Dans la sous-section suivante, nous allons considérer un condensat de ^{52}Cr de spin $f = 3$, et nous allons mettre en évidence le même comportement instable en présence d'interaction dipolaire. Pour le ^{52}Cr , nous allons aussi traiter le cas général (pour tout les \mathbf{k}). Pour le système de spin $f = 1$, des calculs complémentaires sont portés dans l'annexe B.

2.2.2 Condensat uniforme de spin $f = 3$

Dans cette sous-section nous considérons un condensat ferromagnétique de ^{52}Cr de spin $f = 3$. Dans ce cas, le vecteur ζ comporte 7 composantes. Pour des spins polarisés dans la directions $-\hat{e}_z$, le vecteur ζ s'écrit comme suit

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.124)$$

En substituant ce vecteur dans (2.37), (2.38) et (2.39), on obtient les composantes des matrices \mathcal{A}_k^0 , \mathcal{A}_k^c et \mathcal{B}_k^c qui regroupent les termes sans interactions et les termes d'interaction de contact. Ces matrices sont de taille 7×7 , mais seuls les termes diagonaux sont non nuls. Les diagonales $\text{Diag}\{\cdot\}$ de ces trois matrices sont données comme suit

$$\text{Diag}\{\mathcal{A}_k^0 + \mathcal{A}_k^c\} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k + 6p - \frac{461}{462}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n + \frac{2}{7}(g_4 - g_0)n \\ \varepsilon_k + 5p - \frac{65}{66}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k + 4p - \frac{31}{33}(g_6 - g_4)n + \frac{5}{21}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k + 3p - \frac{9}{11}(g_6 - g_4)n \\ \varepsilon_k + 2p - \frac{6}{11}(g_6 - g_4)n \\ \varepsilon_k + p \\ \varepsilon_k + g_6n \end{pmatrix}, \quad (2.125)$$

$$\text{Diag}\{\mathcal{B}_k^c\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_6n \end{pmatrix}, \quad (2.126)$$

où nous avons remplacé le potentiel chimique par

$$\mu = -3p + g_6n. \quad (2.127)$$

Cette dernière expression du potentiel chimique est obtenue à partir de l'équation de Gross-Pitaevskii stationnaire (1.107) en annulant le potentiel de piégeage et le champ dipolaire ($U = 0$ et $b_\nu = 0$) et en remplaçant ψ_m par $\sqrt{n}\zeta$ où ζ est donné par (2.124). Les matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d de taille 7×7 contiennent uniquement des termes dipolaires.

Elles s'obtiennent en utilisant (2.124) comme suit

$$\frac{\mathcal{A}_k^d}{12\pi c_{dd}n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{6}(1 - 3\cos^2\theta_k) & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{i\phi_k} & -(1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}, \quad (2.128)$$

$$\frac{\mathcal{B}_k^d}{12\pi c_{dd}n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2}\sin^2\theta_k e^{-2i\phi_k} & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & \dots & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}}\cos\theta_k\sin\theta_k e^{-i\phi_k} & -(1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}. \quad (2.129)$$

Pour obtenir cette dernière expression, nous avons exprimé les noyaux dipolaires (éq. 2.23) en coordonnées sphériques en utilisant (2.88).

Condensat sans interaction dipolaire

La matrice $\sigma_z \Sigma_B$ possède 14 vecteurs et valeurs propres. Néanmoins seuls 7 de ces vecteurs propres vérifient la condition de normalisation (2.52). Les modes propres sont indexés par $\alpha = \pm 3, \pm 2, \pm 1$ et $\alpha = 0$. Le mode $\alpha = -3$ décrit des excitations de densité. Son spectre énergétique $\mathcal{E}_{k,-3}$ est donné par (2.130). L'énergie $\mathcal{E}_{k,-3}$ doit être réel afin d'assurer la stabilité mécanique du système. Pour cela, la longueur de diffusion a_6 doit être positive ($g_6 = 4\pi\hbar^2 a_6 / 2M > 0$).

$$\mathcal{E}_{k,-3} = \sqrt{\varepsilon_k (\varepsilon_k + 2g_6 n)}. \quad (2.130)$$

Le mode $\alpha = -2$ présente un spectre de particule libre avec un gap en p . Ce mode décrit des excitations de précession de spin. Son spectre est donné par

$$\mathcal{E}_{k,-2} = \varepsilon_k + p. \quad (2.131)$$

Finalement, les modes $\alpha = -1, \dots, +3$ présentent des spectres de particule libre avec un gap en énergie δ_α

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \varepsilon_k + \delta_\alpha. \quad (2.132)$$

Le gap δ_α dépend du champ magnétique p et des constantes d'interaction g_0, g_2, g_4 et g_6 . Nous avons,

$$\delta_{-1} = 2p - \frac{6}{11}(g_6 - g_4)n, \quad (2.133)$$

$$\delta_0 = 3p - \frac{9}{11}(g_6 - g_4)n, \quad (2.134)$$

$$\delta_1 = 4p - \frac{31}{33}(g_6 - g_4)n + \frac{5}{21}(g_4 - g_2)n, \quad (2.135)$$

$$\delta_2 = 5p - \frac{65}{66}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n, \quad (2.136)$$

$$\delta_3 = 6p - \frac{461}{462}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n + \frac{2}{7}(g_4 - g_0)n. \quad (2.137)$$

Le spectre énergétique de ces 5 modes devient négatif au dessous d'un champ critique donné par $\delta_\alpha = 0$. Au dessous de ces champs critiques, le condensat ferromagnétique est énergiquement instable. En particulier, en remplaçant les valeurs des constantes d'interaction $g_{\mathcal{F}}$ par celles d'un condensat de ^{52}Cr (tab. 1.2), il est facile de vérifier que le mode $\alpha = 2$ est le premier à devenir énergiquement instable. Plus précisément, le mode $\alpha = 2$ devient négatif au dessous du champ critique

$$p_c = \left[\frac{13}{66}(g_6 - g_4) + \frac{5}{42}(g_4 - g_2) \right] n = \left(3c_1 - \frac{5}{42}c_3 \right) n, \quad (2.138)$$

où c_1 et c_3 sont donnés par les équations (1.62) et (1.64). Le champ p_c correspond au champ critique de la transition de phase entre la phase ferromagnétique et la phase cyclique donné par l'équation (1.137).

Condensat avec interaction dipolaire

En présence d'interaction dipolaire, le spectre des modes $\alpha = -1, \dots, +3$ n'est pas modifié et reste identique à (2.132). Les matrices $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{\text{d}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^{\text{d}}$ données par (2.128) et (2.129) montrent que le mode de densité, noté précédemment $\alpha = -3$ est couplé au mode de précession de spin $\alpha = -2$.

Analyse de stabilité des excitations pour $\theta_{\mathbf{k}} = \pi/2$. Pour les excitations de vecteur d'onde \mathbf{k}_\perp , les matrices $\mathcal{A}_{\mathbf{k}}^{\text{d}}$ et $\mathcal{B}_{\mathbf{k}}^{\text{d}}$ se simplifient. Après diagonalisation de la matrice $\boldsymbol{\sigma}_z \boldsymbol{\Sigma}_{\text{B}}$, nous obtenons le spectre énergétique des modes de densité et de précession. Le spectre énergétique du mode de densité $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\perp, -3}$ est donné par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\perp, -3} = \sqrt{\varepsilon_{\mathbf{k}_\perp} [\varepsilon_{\mathbf{k}_\perp} + 2g_6 n (1 - \epsilon_{\text{dd}})]}, \quad (2.139)$$

avec

$$\epsilon_{\text{dd}} = \frac{12\pi c_{\text{dd}}}{g_6}. \quad (2.140)$$

D'après le spectre (2.139) et pour $g_6 > 0$, le paramètre ϵ_{dd} doit être dans l'intervalle $-1/2 < \epsilon_{\text{dd}} < 1$ afin d'assurer la stabilité des excitations de densité. Le spectre $\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\perp, 0}$ des excitations de précession est donné par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}_\perp, -2} = \sqrt{(\varepsilon_{\mathbf{k}_\perp} + p - p_{\text{dd}}) (\varepsilon_{\mathbf{k}_\perp} + p + 2p_{\text{dd}})}, \quad (2.141)$$

où p_{dd} est donné dans ce cas par

$$p_{\text{dd}} = 4\pi c_{\text{dd}} n. \quad (2.142)$$

D'après (2.141), les excitations de vecteur d'onde \mathbf{k}_{\perp} , et par conséquent la phase ferromagnétique uniforme est dynamiquement instable pour $p < p_{\text{dd}}$ où p_{dd} est donné par (2.142). Si $-2p_{\text{dd}} < p < p_{\text{dd}}$, le nombre d'onde des excitations instables est compris dans l'intervalle

$$k_{\perp} < \sqrt{2M(p_{\text{dd}} - p)/\hbar^2}. \quad (2.143)$$

Si $p < -2p_{\text{dd}}$, le nombre d'onde des excitations instables est compris dans l'intervalle

$$\sqrt{-2M(p + p_{\text{dd}})} < k_{\perp} < \sqrt{2M(p_{\text{dd}} - p)/\hbar^2}. \quad (2.144)$$

Comme nous l'avons vue dans le détail pour dans le cas d'un condensat dipolaire de spin $f = 1$, ces instabilités dynamiques engendrent un accroissement exponentiel des textures de spin $\delta\mathbf{f}_{\perp}$ dans le plan transverse à l'axe de polarisation z . L'évolution du vecteur $\delta\mathbf{f}_{\perp}$ et de la longueur de spin locale dans le plan transversal $|\delta\mathbf{f}_{\perp}|$ s'obtiennent à partir de (2.121) et (2.122) en remplaçant par le champ critique p_{dd} par (2.142) et les énergies $\mathcal{E}_{a,b}$ par celles obtenues à partir de (2.141).

Analyse de stabilité des excitations en fonction de θ_k . Dans le cas général, les matrices présentent des termes hors diagonales. Les deux modes qui couplent les états de spin $m = -3$ et $m = -2$ sont indexés par $\alpha = \pm$. Après diagonalisation de la matrice $\boldsymbol{\sigma}_z \Sigma_{\text{B}}$, on obtient les deux spectres énergétiques suivant

$$\mathcal{E}_{k,\pm} = \sqrt{\mathcal{L}(k,\theta_k) \pm \sqrt{\mathcal{I}(k,\theta_k)}}. \quad (2.145)$$

Les fonctions \mathcal{L} et \mathcal{I} peuvent être écrites sous forme polynomiale. \mathcal{L} est un polynôme d'ordre 2 en p

$$\mathcal{L}(k,\theta_k) = \frac{1}{2} [p - p_+(k,\theta_k)] [p - p_-(k,\theta_k)], \quad (2.146)$$

où les fonctions p_{\pm} sont données par

$$p_{\pm}(k,\theta_k) = -\varepsilon_k - 2\pi c_{\text{dd}} n (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \pm i \sqrt{\varepsilon_k \{ \varepsilon_k + 2g_2 n [1 - \epsilon_{\text{dd}} (1 - 3 \cos^2 \theta_k)] \} - (6\pi c_{\text{dd}} n \sin^2 \theta_k)^2}. \quad (2.147)$$

\mathcal{I} est un polynôme d'ordre 4 en p donné par

$$\mathcal{I}(k,\theta_k) = \eta_1(k,\theta_k)p^4 + \eta_2(k,\theta_k)p^3 + \eta_3(k,\theta_k)p^2 + \eta_4(k,\theta_k)p + \eta_5(k,\theta_k). \quad (2.148)$$

Les paramètres $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ et η_5 sont donnés par

$$\eta_1 = \frac{1}{4}, \quad (2.149)$$

$$\eta_2 = \varepsilon_k + (2\pi c_{\text{dd}})(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \quad (2.150)$$

$$\eta_3 = \varepsilon_k^2 - g_6 n \left[1 - \frac{3}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} \right] \varepsilon_k - 3(2\pi c_{\text{dd}} n)^2 (1 - \cos^4 \theta_k), \quad (2.151)$$

$$\begin{aligned} \eta_4 = & -2g_6 n \left[1 - \frac{7}{3} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} \right] \varepsilon_k^2 \\ & + (2g_6 n)^2 \left[\left(\frac{1}{24} + \cos^2 \theta_k - \frac{5}{8} \cos^4 \theta_k \right) \varepsilon_{\text{dd}}^2 - \frac{1}{12} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} \right] \varepsilon_k \\ & - (2\pi c_{\text{dd}} n)^3 (8 - 36 \cos^2 \theta_k + 36 \cos^3 \theta_k), \end{aligned} \quad (2.152)$$

$$\begin{aligned} \eta_5 = & (2g_6 n)^2 \left[\left(\frac{49}{144} - \frac{13}{24} \cos^2 \theta_k + \frac{25}{16} \cos^4 \theta_k \right) \varepsilon_{\text{dd}}^2 \right. \\ & - \frac{7}{12} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} + \frac{1}{4} \left. \right] \varepsilon_k^2 - (2g_6 n)^3 \left[\left(\frac{7}{216} + \frac{5}{48} \cos^2 \theta_k \right. \right. \\ & - \left. \left. \frac{5}{48} \cos^4 \theta_k \right) \varepsilon_{\text{dd}}^3 + \left(-\frac{1}{36} + \frac{1}{24} \cos^2 \theta_k \right) \varepsilon_{\text{dd}}^2 \right] \varepsilon_k \\ & + 4(2\pi c_{\text{dd}} n)^4 (2 - 3 \cos^2 \theta_k)^2. \end{aligned} \quad (2.153)$$

Analyse de stabilité. L'analyse stabilité des modes \pm nécessite l'étude de variation des polynômes \mathcal{L} et \mathcal{I} . Le calcul analytique des racines de ces polynômes n'est pas toujours possible. Pour cette raison, nous adoptons ici une approche semi-analytique. Pour $k = 0$, les polynômes \mathcal{L} et \mathcal{I} possèdent les mêmes racines p_{\pm} que l'on obtient à partir de (2.147)

$$p_+ = p_{\text{dd}}, \quad (2.154)$$

$$p_- = (3 \cos^2 \theta_k - 2)p_{\text{dd}}, \quad (2.155)$$

où p_{dd} est défini en (2.142). Notons que p_- dépend de θ_k et prend ses valeurs dans l'intervalle $-2p_{\text{dd}} \leq p_- \leq p_{\text{dd}}$. Dans ce cas particulier ($k = 0$), les énergies $\mathcal{E}_{0,\pm}$ s'écrivent

$$\mathcal{E}_{0,\pm} = \sqrt{\mathcal{L}(\theta_k) \pm |\mathcal{L}(\theta_k)|}, \quad (2.156)$$

avec $\mathcal{L}(\theta_k) = (p - p_{\text{dd}})(p - p_-)/2$. Pour $p > p_{\text{dd}}$ ou $p < p_-$, on a $\mathcal{L}(\theta_k) > 0$. Par conséquent les énergies $\mathcal{E}_{0,\pm}$ sont réelles ($\mathcal{E}_{0,+} > 0$ et $\mathcal{E}_{0,-} = 0$). Pour $p_- < p < p_{\text{dd}}$ et $0 < \theta_k \leq \pi/2$, on $\mathcal{L}(\theta_k) < 0$. Par conséquent le mode $+$ est stable ($\mathcal{E}_{0,+} = 0$) et le mode $-$ est dynamiquement instable ($\mathcal{E}_{0,-} = i\sqrt{2|\mathcal{L}(\theta_k)|}$). Plus généralement, il est possible de vérifier numériquement que pour $p < p_{\text{dd}}$, il existe des valeurs de $k \geq 0$ et de $0 < \theta_k \leq \pi/2$ pour lesquelles $\mathcal{L} - \sqrt{I} < 0$ ou $\mathcal{I} < 0$. Dans le premier cas, le spectre $\mathcal{E}_{k,-}$ est imaginaire pur. Dans le deuxième cas, les deux spectres $\mathcal{E}_{k,\pm}$ sont imaginaires et en particulier $\mathcal{E}_{k,+} = \mathcal{E}_{k,-}^*$. Cela peut être constaté sur la figure 2.1 où nous avons représenté les parties imaginaires des énergies $\mathcal{E}_{k,\pm}$ dans le plan $k_x k_z$. Les sous-figures (a) et (c) montrent que la partie imaginaire du mode $\mathcal{E}_{k,-}$ est maximale pour $k_z = 0$. Autrement dit, les excitations de vecteur d'onde \mathbf{k}_{\perp} sont les

plus instables. En utilisant l'expression (2.141), on peut écrire

$$\text{Im} \{ \mathcal{E}_{k,-} \}_{\max} = \sqrt{(\varepsilon_k + p - p_{\text{dd}})(\varepsilon_k + p + 2p_{\text{dd}})} \quad (2.157)$$

Les sous-figures (b) et (d) montrent que $\mathcal{E}_{k,+} \ll \mathcal{E}_{k,-}$. Finalement, ces figures montrent que le nombre d'onde des excitations instables est contenu dans un disque de rayon k_c donné par

$$k_c = \sqrt{2M(p_{\text{dd}} - p)/\hbar^2}. \quad (2.158)$$

Cette expression est obtenue directement à partir de (2.143).

Origine des instabilités dynamiques. Les instabilités dynamiques mis en évidence précédemment ont pour origine les processus de relaxation dipolaires. Nous allons montrer qu'en l'absence des termes de relaxation, la phase ferromagnétique est dynamique stable. Dans ce cas, les matrices A_k^{d} et B_k^{d} sont diagonales et ne comportent pas de dépendance en ϕ_k . On obtient

$$\text{Diag} \{ \mathcal{A}_k^{\text{d}} \} = 12\pi c_{\text{dd}} n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{6}(1 - 3\cos^2\theta_k) \\ (1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}, \quad (2.159)$$

$$\text{Diag} \{ \mathcal{B}_k^{\text{d}} \} = 12\pi c_{\text{dd}} n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (1 - 3\cos^2\theta_k) \end{pmatrix}. \quad (2.160)$$

Les états de spin $m = -3$ et $m = -2$ sont découplés et les modes associés sont notés, respectivement, $\alpha = -3$ et $\alpha = -2$. Pour le mode $\alpha = -3$, nous retrouvons le spectre d'excitations de densité anisotrope connue pour les condensats scalaires dipolaires [74, 75] :

$$\mathcal{E}_{k_{\perp},-3} = \sqrt{\varepsilon_k \{ \varepsilon_k + 2g_6 n [1 - \epsilon_{\text{dd}}(1 - 3\cos^2\theta_k)] \}}. \quad (2.161)$$

Notons que ce spectre est indépendant du champ magnétique p . Avec $g_6 > 0$, l'expression (2.163) montre que la phase ferromagnétique est stable pour $0 < \epsilon_{\text{dd}} < 1$. Pour $\epsilon_{\text{dd}} > 1$ et un angle $\theta_k > \arccos(1/\sqrt{3}) \simeq 54,7^\circ$, l'énergie des excitations de nombre d'onde k qui vérifie

$$k < \sqrt{4g_6 n M [\epsilon_{\text{dd}}(1 - 3\cos^2\theta_k) - 1] / \hbar^2}, \quad (2.162)$$

est imaginaire. La nature attractive des interactions dipolaire ($\theta_k > 54,7^\circ$) rend le système uniforme instable pour $\epsilon_{\text{dd}} > 1$. Pour le mode $\alpha = -2$ nous retrouvons un spectre de particule libre gapé

$$\mathcal{E}_{k,-2} = \varepsilon_k + p - 2p_{\text{dd}}(1 - 3\cos^2\theta_k). \quad (2.163)$$

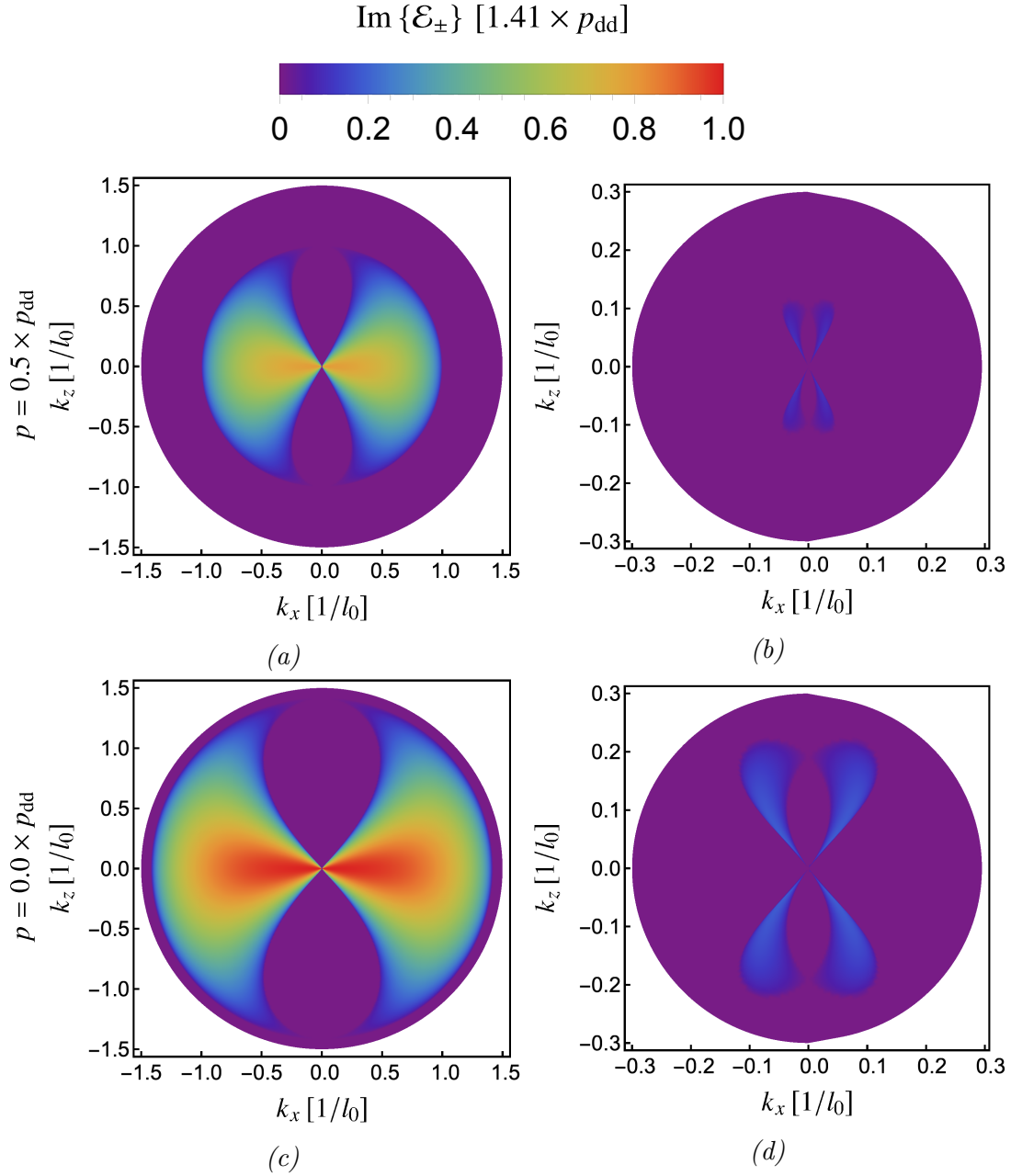


FIGURE 2.1 – Parties imaginaires des spectres énergétiques \mathcal{E}_{\pm} dans le plan $k_x k_z$. Pour certaines valeurs de k_x et k_z seule l'énergie \mathcal{E}_- est imaginaire : $\text{Im}\{\mathcal{E}_+\} = 0$ et $\text{Im}\{\mathcal{E}_-\} > 0$. Pour d'autres valeurs de k_x et k_y les énergies \mathcal{E}_{\pm} sont complexes conjuguées : $\text{Im}\{\mathcal{E}_+\} > 0$ et $\text{Im}\{\mathcal{E}_-\} = -\text{Im}\{\mathcal{E}_+\}$. Pour la clarté, nous avons représenté uniquement les valeurs positives de $\text{Im}\{\mathcal{E}_{\pm}\}$. (a) et (c) : partie imaginaire positive de $\mathcal{E}_{k,-}$, respectivement pour $p = 0.5 \times p_{\text{dd}}$ et $p = 0.0 \times p_{\text{dd}}$. (b) et (d) : partie imaginaire de \mathcal{E}_+ , respectivement pour $p = 0.5 \times p_{\text{dd}}$ et $p = 0.0 \times p_{\text{dd}}$. Ces calculs sont réalisés pour un condensat de ^{52}Cr uniforme de densité $n = 1.54 \times 10^{21} \text{m}^{-3}$. L'unité d'énergie est $p_{\text{dd}} \simeq 1 \text{Hz}$ et l'unité de longueur est $l_0 = \sqrt{\hbar^2/2Mp_{\text{dd}}} \simeq 0.44 \mu\text{m}$.

Les spectres énergétiques des modes $\alpha = -3$ et $\alpha = -2$, montrent que la phase ferromagnétique uniforme est toujours dynamiquement stable pour $g_6 > 0$, $0 < \epsilon_{\text{dd}} < 1$ et en l'absence de relaxation dipolaire.

2.2.3 Conclusion

Dans cette section nous avons mis en évidence la présence d'instabilités dynamiques à champ magnétique $p < p_{\text{dd}}$ dans le cas de la phase ferromagnétique de spin $f = 1$ et $f = 3$. Les calculs présentés dans l'annexe B montrent le même comportement instable dans le cas de la phase ferromagnétique de spin $f = 2$. En conclusion, pour les systèmes de spin étudiés dans ce travail, on peut écrire le champ critique d'instabilités dynamiques comme suit

$$p_{\text{dd}} = \frac{4\pi}{3} f c_{\text{dd}} n, \quad (2.164)$$

où l'on a utilisé les expressions (2.112) (2.142) et (B.27). Notons que le champ critique est indépendant des constantes d'interaction de contact. La présence d'instabilités dynamiques dans le système indique que la phase ferromagnétique polarisée et de magnétisation maximale ($M_z/g\mu_B = -f$) n'est pas l'état fondamental du condensat pour $p < p_{\text{dd}}$. Nous avons vu que les instabilités liées au mode de précession de spin amorcent des dynamiques de démagnétisation dans le système uniforme. Dans le chapitre suivant, nous allons étudier le développement dynamique de ces instabilités en résolvant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii. En considérera un condensat de ^{52}Cr uniforme et non uniforme (piégé).

Chapitre 3

Démagnétisation spontanée d'un condensat de chrome ferromagnétique

Ce chapitre est consacré à l'étude des dynamiques de démagnétisation d'un condensat de ^{52}Cr à faible champ magnétique. Ce travail est motivé, en premier, par nos précédents résultats sur la stabilité dynamique de la phase ferromagnétique uniforme. La deuxième motivation est de donner une nouvelle interprétation aux observations expérimentales de dynamiques de démagnétisation du groupe du LPL. La stabilité du condensat sera analysée en résolvant numériquement l'équation dynamique de Gross-Pitaevskii. Cette étude dynamique permet de confirmer, et d'aller au-delà de l'analyse de Bogoliubov considérée au chapitre précédent.

Dans la section 3.1, nous allons considérer un condensat de ^{52}Cr uniforme et initialement polarisé. Nous allons étudier la dynamique du condensat après une trempe (*quench*) du champ magnétique à une valeur p_{tr} . Nos calculs numériques confirment l'instabilité de la phase ferromagnétique pour $p_{\text{tr}} < p_{\text{dd}}$, où p_{dd} est le champ critique calculé précédemment (éq. 2.142). L'évolution dynamique du système s'accompagne d'un développement de textures de spin dans le plan transverse à la direction de polarisation, et d'une démagnétisation du condensat. Nous allons montrer que le développement de ces dynamiques est le résultat de dynamiques de précession des spins qui conservent la nature ferromagnétique du condensat. La taille caractéristique des domaines spatiaux dans le plan transverse est en bon accord avec la longueur d'onde des modes prédite par l'analyse de Bogoliubov. Finalement, l'évolution dynamique au temps long montre que la nature ferromagnétique peut ne pas se conserver. C'est le cas à champ magnétique nul où le système est fortement instable.

Dans section 3.2, nous allons considérer un condensat de ^{52}Cr ferromagnétique dans un piège harmonique. La stabilité de ce système après une trempe de champ magnétique a été étudiée numériquement par Kawaguchi *et al.* [32]. Les auteurs ont montré notamment la possibilité d'observer l'effet Einstein–de Haas dans le condensat de ^{52}Cr . Dans notre travail, nous proposons d'abaisser le champ magnétique p lentement depuis sa valeur initiale p_0 , jusqu'à atteindre la valeur p_{tr} . Cette procédure est proche des travaux expérimentaux sur la démagnétisation spontanée du ^{52}Cr de Pasquiou *et al.* [76]. L'interprétation de ces travaux expérimentaux suggère que la

démagnétisation du condensat a lieu spontanément au-dessous du champ critique de transition de phase p_c (éq. 1.137). En réalisant une étude systématique, nous allons déterminer numériquement un champ critique de démagnétisation, que l'on notera p_{dem} . Premièrement, nous allons montrer que ce champ critique ne dépend que des interactions dipôle-dipôle. Deuxièmement, nous allons voir que $p_{\text{dem}} < p_{\text{dd}} \ll p_c$, et que p_{dem} se rapproche de p_{dd} dans le cas d'un condensat piégé dans grande taille. Ce résultat nous suggère d'interpréter les dynamiques de démagnétisation du condensat piégé comme une trace des instabilités dynamiques mises en évidence dans le cas du condensat uniforme.

3.1 Démagnétisation spontanée d'un condensat ferromagnétique de ^{52}Cr uniforme

Dans cette section, nous allons étudier l'évolution dynamique d'un condensat uniforme de ^{52}Cr polarisé (ferromagnétique) à faible champ magnétique. Pour ce faire, on considère un système de densité uniforme

$$n = 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}. \quad (3.1)$$

Les spins sont polarisés dans la direction $-\hat{e}_z$, et sont soumis à un champ magnétique appliqué dans la direction \hat{e}_z . L'évolution dynamique est obtenue en résolvant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii (éq. 2.11) sans potentiel de piégeage ($U = 0$). Précisons que le condensat est contenu dans une boîte cubique de coté

$$2R_u = 18 \mu\text{m} \quad (3.2)$$

avec des conditions aux limites périodiques¹. La portée de l'interaction dipolaire est limitée à un rayon R_u depuis le centre de la boîte (sect. 2.2).

Dans la suite de cette section, nous allons étudier la stabilité du système après une trempe (*quench*) de champ magnétique. Les détails de cette expérience numérique sont présentés dans la sous-section 3.1.1 et nos résultats sont discutés dans la sous-section 3.1.2.

3.1.1 Description de l'expérience numérique

Le condensat ferromagnétique uniforme que nous considérons ici est, initialement, parfaitement polarisé suivant l'axe z . La longueur de spin locale et la magnétisation sont données par

$$|\mathbf{f}| = 3 \quad \text{et} \quad M_z/g\mu_B = -3. \quad (3.3)$$

Ce système est toujours un état stationnaire de l'équation de Gross-Pitaevskii en l'absence de potentiel de piégeage ($U = 0$). Cela est dû au fait que le champ dipolaire résiduel induit par les spins (dipôles) est nul (sect. 2.2). Pour initier une dynamique à partir de cette état, il convient d'introduire une graine (*seed*) dans le système à

1. Les conditions aux limites périodiques sont imposées par la transformation de Fourier rapide.

$t = 0$ ms. Dans notre cas, nous allons introduire un faible bruit gaussien dans la composante de spin $m = -2$. Cette procédure peut être réalisée en écrivant dans l'espace de Fourier [62]

$$\mathcal{F}\{\psi_{-2}\} = \alpha + i\beta, \quad (3.4)$$

où α et β sont des nombres aléatoires générés à partir d'une distribution gaussienne.

Au chapitre 2, nous avons montré que le condensat ferromagnétique uniforme est dynamiquement instable au-dessous du champ critique p_{dd} (éq. 2.142). Pour la densité n donnée par (3.1), on obtient

$$p_{\text{dd}}/g\mu_{\text{B}} = 4\pi c_{\text{dd}}n \simeq 0.35 \text{ mG}. \quad (3.5)$$

Dans ce présent chapitre, la stabilité du condensat est analysée par évolution dynamique de l'équation de Gross-Pitaevskii. Notre expérience numérique consiste à faire une trempe de champ magnétique à une valeur $p_{\text{tr}} < p_{\text{dd}}$ dès le début de l'évolution dynamique à $t = 0$ ms.

3.1.2 Textures de spin et démagnétisation spontanée

Nous avons réalisé plusieurs simulations numériques en variant le champ magnétique p_{tr} dans l'intervalle $0 \leq p_{\text{tr}} \leq p_{\text{dd}}$. Dans ce qui suit, on note $\mathbf{f}_{\perp} = (f_x, f_y, 0)^{\text{T}}$, la projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan transverse (\perp) à la direction de polarisation z . L'évolution de \mathbf{f}_{\perp} nous renseigne sur le développement des textures de spin dans ce plan. Le module $|\mathbf{f}_{\perp}|$ nous renseigne sur la longueur de spin locale dans le même plan. Notons que $|\mathbf{f}_{\perp}|$ prend ses valeurs dans l'intervalle

$$0 \leq |\mathbf{f}_{\perp}| \leq |\mathbf{f}|, \quad (3.6)$$

où $|\mathbf{f}|$ est la longueur de spin locale définie en (1.124).

Nous présentons ici les résultats de nos calculs pour $p_{\text{tr}} = 0.9 \times p_{\text{dd}}$ (fig. 3.1b à fig. 3.1c) et $p_{\text{tr}} = 0.0 \times p_{\text{dd}}$ (fig. 3.1d à fig. 3.1f). Nos simulations confirment l'instabilité de la phase ferromagnétique uniforme pour $p < p_{\text{dd}}$. Pour $p > p_{\text{dd}}$, nos simulations montrent que le système est stable. D'après les résultats discutés au chapitre précédent, on peut s'attendre à un développement de texture de spin dans le plan transverse à l'axe z . La longueur caractéristique de ces textures de spin est donnée par

$$\lambda_{\text{c}} \sim 2\pi [2M(p_{\text{dd}} - p_{\text{tr}})/\hbar^2]^{-1/2}. \quad (3.7)$$

Cette dernière expression est obtenue à partir de (2.158) en écrivant $k_{\text{c}} = 2\pi/\lambda_{\text{c}}$ et en remplaçant p par p_{tr} . Le temps caractéristique des instabilités peut être estimé par

$$\tau_{\text{c}} \sim h/\text{Im}\{\mathcal{E}_{k_{\text{c}},-}\}_{\text{max}}, \quad (3.8)$$

où $\text{Im}\{\mathcal{E}_{k_{\text{c}},-}\}_{\text{max}}$ est donné par (2.157). À partir de l'expression (3.7) on trouve $\lambda_{\text{c}} \sim 6 \mu\text{m}$ pour $p_{\text{tr}} = 0.9 \times p_{\text{dd}}$ et $\lambda_{\text{c}} \sim 2 \mu\text{m}$ pour $p_{\text{tr}} = 0.0 \times p_{\text{dd}}$. La taille des excitations attendue est en bon accord avec celle des domaines observés sur la figure 3.1.

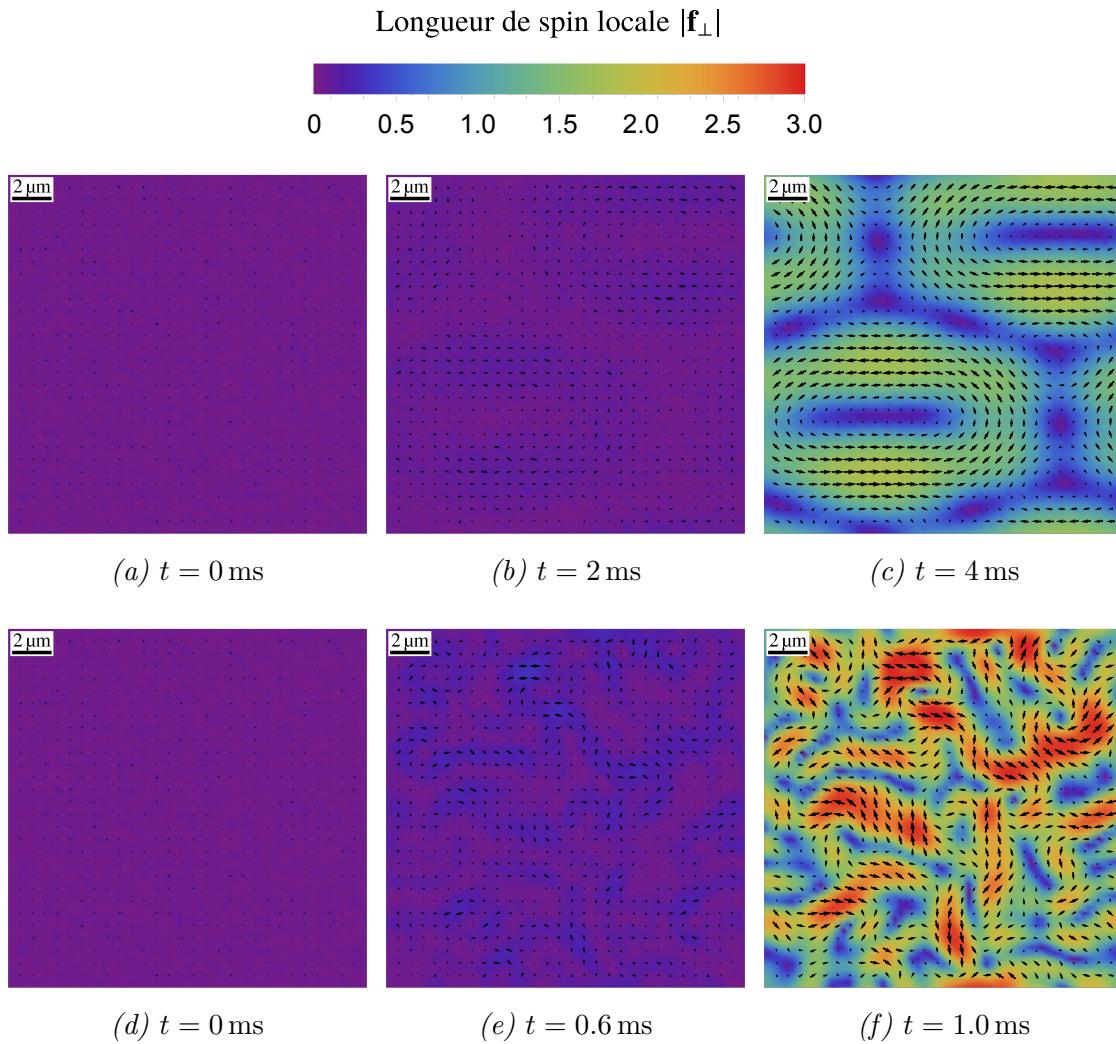


FIGURE 3.1 – Development de texture de spin dans le plan transverse. Pour les figures (b) à (c), $p_{\text{tr}} = 0.9 \times p_{\text{dd}}$. Pour les figures (d) à (f), $p_{\text{tr}} = 0.0 \times p_{\text{dd}}$. Le code couleur indique la longueur de spin locale dans le plan transverse $|\mathbf{f}|$.

Pour avoir une information quantitative sur l'évolution des propriétés magnétique sur tout le volume du système, on calcule l'évolution de la magnétisation M_z (éq. 1.119), de la longueur de spin moyenne Π (éq. 1.126) et la longueur de spin moyenne dans le plan \perp définie comme suit

$$\Pi_{\perp} = \frac{1}{N} \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) |\mathbf{f}_{\perp}(\mathbf{r})|, \quad (3.9)$$

où N est le nombre d'atomes total. Les résultats de nos calculs sont présentés sur la figure 3.2. Pour $p_{\text{tr}} = 0.9 \times p_{\text{dd}}$, la figure 3.2a montre que l'accroissement de Π_{\perp} ne modifie par la longueur de spin moyenne ($\Pi = 3$) aux temps courts. Par conséquent, les dynamiques qui se développent dans le système sont des dynamiques de précessions de spin qui conservent la nature ferromagnétique. Sur la figure 3.2a, nous avons ajusté (*fitté*) l'évolution de Π_{\perp} par la fonction suivante

$$\Pi_{\perp}^{\text{fit}}(t) = \Pi_{\perp}(0) + \lambda e^{\gamma t/\hbar}. \quad (3.10)$$

Avec cet ajustement, on obtient un temps caractéristique $\hbar/\gamma \simeq 2.2$ ms. Ce temps caractéristique est en bon accord avec le temps caractéristique de développement des instabilités dynamiques $\tau_c \sim 1.8$ ms (éq. 3.8). La figure 3.2b montre que le développement des textures de spin dans le plan \perp s'accompagne d'une variation maximale de la magnétisation de l'ordre de 10%. Pour $p_{\text{tr}} = 0.0 \times p_{\text{dd}}$, le système se démagnétise plus rapidement comme le montrent les figures 3.2c et 3.2d. Dans ce cas, on a $\hbar/\gamma \simeq 0.85$ ms qui est en bon accord avec $\tau_c \sim 0.7$ ms. La figure 3.2c, montre que pour $t < 1.2$ ms, les spins sont entraînés dans des dynamiques de précessions qui conservent la nature ferromagnétique. Pour $t > 1.2$ ms, la longueur de spin moyenne Π décroît très fortement indiquant que le système n'est plus ferromagnétique. Ce résultat va au-delà de ce que prédit par l'analyse de Bogoliubov, qui au contraire prévoit une conservation de la longueur de spin. Il s'avère donc que la conservation de Π n'est valable que dans la limite des faibles perturbations. Dans la section suivante, nous allons considérer un condensat piégé. Nous allons voir que dans ce cas aussi, le condensat exhibe des dynamiques analogues qui peuvent être interprétées en terme d'instabilités dynamiques.

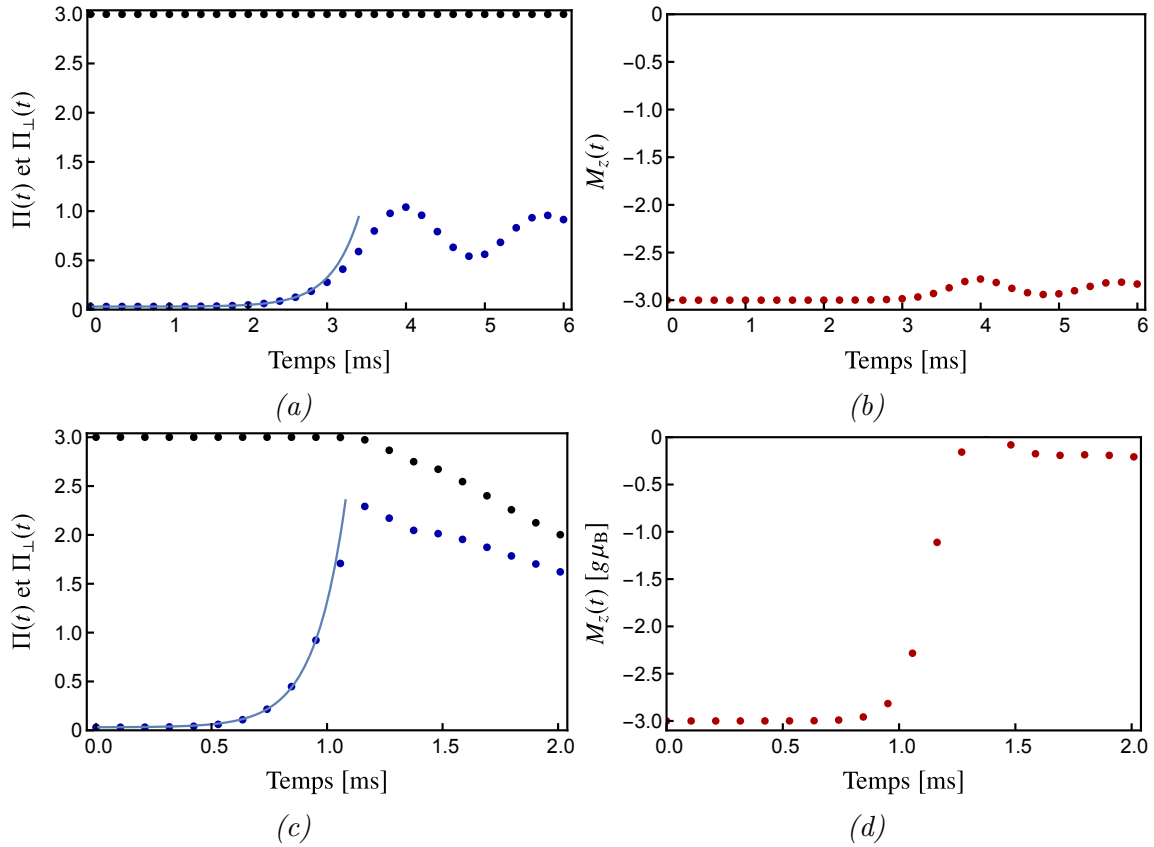


FIGURE 3.2 – Évolution de M_z , Π et Π_{\perp} pour $p = 0.9 \times p_{\text{ad}}$ ((a) et (b)) et $p = 0.0 \times p_{\text{ad}}$ ((c) et (d)). La courbe pleine est obtenue à partir de (3.10). (a) : $\Pi_{\perp}(0) \simeq 0.03$, $\lambda = 0.6 \times 10^{-4}$ et $h/\gamma \simeq 2.2$ ms. Les données sont fittées jusqu'à $t \simeq 3.4$ ms (c) : $\Pi_{\perp}(0) \simeq 0.03$, $\lambda = 0.7 \times 10^{-3}$ et $h/\gamma \simeq 0.85$ ms. Les données sont fittées jusqu'à $t \simeq 1.2$ ms. Ces calculs ont été réalisés pour un condensat de ^{52}Cr uniforme de densité $n = 1.54 \times 10^{21} \text{m}^{-3}$.

3.2 Démagnétisation spontanée d'un condensat ferromagnétique de ^{52}Cr piégé

Dans cette section, on s'intéresse au développement des dynamiques de démagnétisation dans un condensat de ^{52}Cr ferromagnétique piégé. Les atomes du condensat sont piégés dans un potentiel harmonique de fréquence $\omega/2\pi$ à symétrie sphérique

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2. \quad (3.11)$$

Dans l'état fondamental, le condensat est soumis à un champ magnétique p_0 suivant l'axe de polarisation z . Les propriétés de l'état fondamental ferromagnétique qu'on considère sont discutées dans la sous-section 3.2.1. Pour étudier la stabilité dynamique de ce condensat piégé, nous proposons de faire un suivi adiabatique des spins en abaissant suffisamment lentement le champ magnétique p jusqu'à p_{tr} à partir de sa valeur initiale p_0 . Cette expérience numérique est motivée dans la sous-section 3.2.2. Les résultats de nos simulations sont discutés dans la sous-section 3.2.3. Finalement, dans les sous-sections 3.2.4 et 3.2.5 nous allons discuter l'effet des interactions de contact et des interactions dipôle-dipôle sur les développements des dynamiques de démagnétisation.

3.2.1 Propriétés de l'état fondamental ferromagnétique

L'état fondamental de ce système en fonction du champ magnétique externe est discuté au premier chapitre (ss-sect. 1.5.2). Pour un condensat de $N = 10^5$ atomes et un potentiel de fréquence $\omega/2\pi = 820$ Hz, nous obtenons l'état fondamental ferromagnétique en appliquant un champ magnétique homogène p_0 dans la direction \hat{e}_z , avec

$$p_0/g\mu_B = 1.41 \text{ mG}. \quad (3.12)$$

Des coupes de la densité totale dans les plans xy et xz sont présentées sur la figure 3.3. La densité centrale et le rayon du condensat valent approximativement

$$n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3} \quad \text{et} \quad R \simeq 3.4 \mu\text{m}. \quad (3.13)$$

En plus du champ externe p_0 , les spins (dipôles) ressentent localement un champ magnétique inhomogène induit $c_{\text{dd}}|\mathbf{b}|/g\mu_B$. Par conséquent, l'orientation locale des spins est fixée par le champ magnétique total

$$p_0\hat{e}_z/g\mu_B + c_{\text{dd}}\mathbf{b}(\mathbf{r})/g\mu_B. \quad (3.14)$$

Sur la figure 3.4 nous avons porté la projection du vecteur spin \mathbf{f} et du champ magnétique dipolaire $c_{\text{dd}}\mathbf{b}/g\mu_B$ dans le plan xz . Notons que le champ dipolaire dans le plan transverse $\mathbf{b}_\perp = (b_x, b_y, 0)^T$ est sensiblement non nul sur les bords du condensat. Par conséquent, les spins sont légèrement écartés de l'axe z (fig. 3.4a). L'état fondamental obtenu est purement ferromagnétique. La longueur de spin locale, et la magnétisation suivant l'axe z sont de

$$|\mathbf{f}(\mathbf{r})| = 3 \quad \text{et} \quad M_z/g\mu_B \simeq -3. \quad (3.15)$$

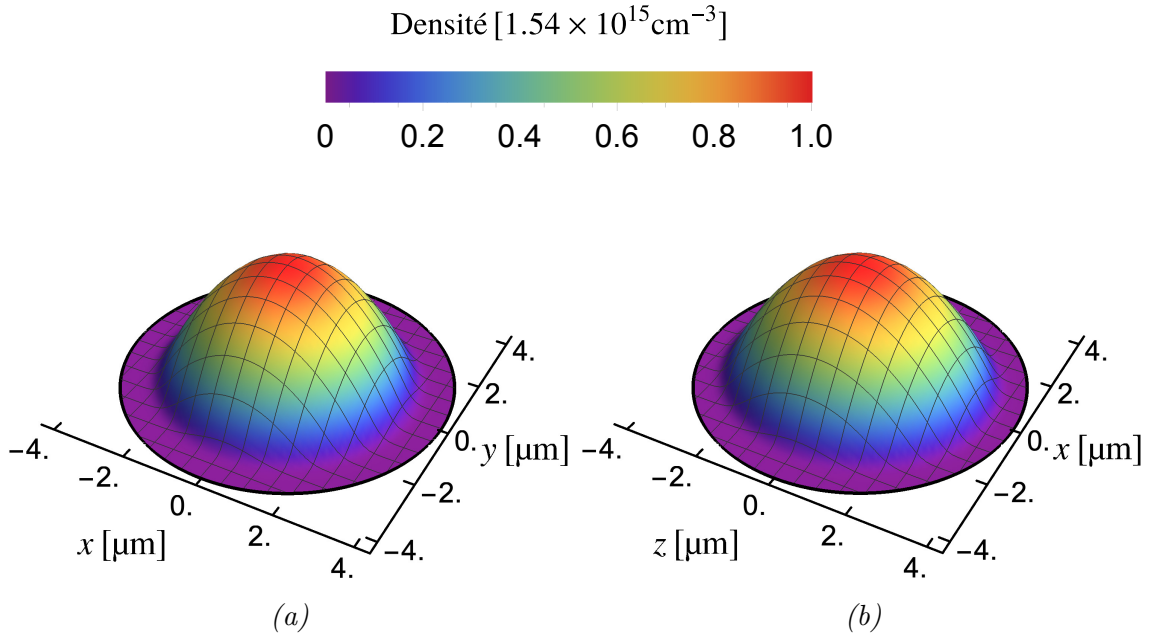


FIGURE 3.3 – Coupes de la densité totale dans les plans xy (a) et xz (b). $N = 10^5$, $\omega/2\pi = 820 \text{ Hz}$ et $p_0/g\mu_B = 1.41 \text{ mG}$. On a : $n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$ et $R_x, R_y \simeq 3.3 \mu\text{m}$ et $R_z \simeq 3.5 \mu\text{m}$.

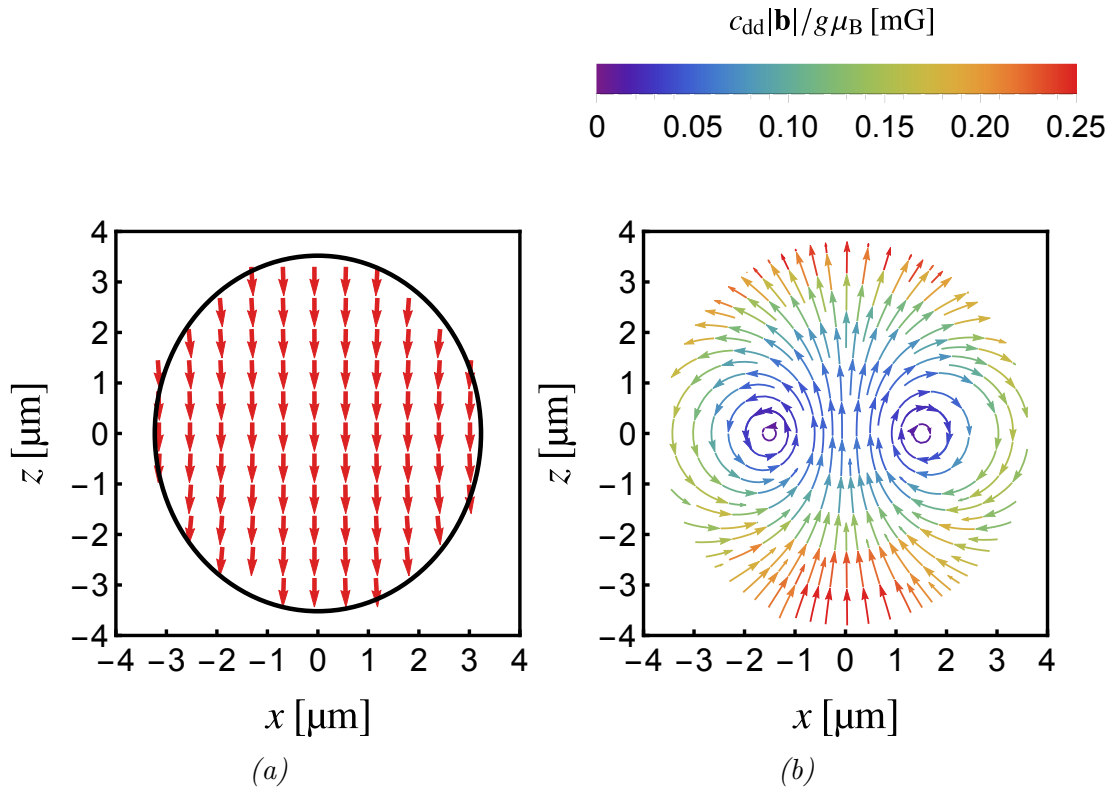


FIGURE 3.4 – Projection du vecteur spin \mathbf{f} (a) et du champ dipolaire \mathbf{b} (b) dans le plan xz . La figure (b) montre l'orientation (flèches) et l'intensité (couleur) du champ dipolaire. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 10^5$ et $\omega/2\pi = 820 \text{ Hz}$.

3.2.2 Description de l'expérience numérique

À cause du champ dipolaire transverse \mathbf{b}_\perp , le condensat ferromagnétique piégé est toujours instable après une trempe de champ magnétique à une valeur $p_{\text{tr}} < p_0$, où p_0 est le champ magnétique initial. En effet, après la trempe, les spins sont entraînés, à partir de $t = 0$ ms, dans une précession autour du nouveau champ magnétique local

$$p_{\text{tr}}\hat{e}_z + c_{\text{dd}}\mathbf{b}(\mathbf{r},t) = [p_{\text{tr}} + c_{\text{dd}}b_z(\mathbf{r},t)]\hat{e}_z + c_{\text{dd}}\mathbf{b}_\perp(\mathbf{r},t), \quad (3.16)$$

où b_z est la composante dans champ dipolaire suivant l'axe z . Tant que p_{tr} domine, les spins subissent une dynamique de précession rapide fixée essentiellement par la fréquence de Larmor p_{tr}/h . Pour le montrer nous avons réalisé plusieurs simulations en variant p_{tr} dans l'intervalle

$$0 \text{ mG} \leq p_{\text{tr}}/g\mu_B \leq p_0/g\mu_B = 1.41 \text{ mG}. \quad (3.17)$$

Nos calculs montrent que pour $p_{\text{tr}}/g\mu_B \gtrsim 0.3 \text{ mG}$, les spins présentent des oscillations quasi-régulières. La période de ces oscillations en fonction de p_{tr} est portée sur la figure 3.5a (voir aussi les courbes traitillées des figures 3.5b et 3.5d). La courbe en pointillés rouge correspond à la période obtenue après la trempe. La courbe en pointillés vert correspond à la période de Larmor h/p_{tr} . On constate que la période des précessions des spins s'écarte légèrement de h/p_{tr} au-dessous de $p_{\text{tr}}/g\mu_B \simeq 0.4 \text{ mG}$. En résumé, si la variation du champ magnétique est brusque, les dynamiques dipolaires sont masquées par la précession de Larmor pour $p_{\text{tr}}/g\mu_B > 0.4 \text{ mG}$. Soulignons que pour $p_{\text{tr}}/g\mu_B > 0.4 \text{ mG}$, même si la fréquence des oscillations est fixée par le champ p_{tr} , les oscillations sont absentes si $\mathbf{b}_\perp = \mathbf{0}$.

Dans ce travail, on s'intéresse en particulier aux effets dipolaires à champ magnétique faible. Pour éviter la précession à la fréquence de Larmor, nous proposons de faire un suivi adiabatique des spins en abaissant le champ magnétique suffisamment lentement à partir de p_0 jusqu'à p_{tr} . Pour ce faire, nous considérons la fonction suivante

$$p(t) = (p_0 - p_{\text{tr}}) e^{-(t/\tau)^3/(1+t/\tau)} + p_{\text{tr}}, \quad (3.18)$$

où τ est un temps qui caractérise la variation du champ magnétique. Nous avons $p(t = \tau) - p_{\text{tr}} = (p_0 - p_{\text{tr}})/\sqrt{e}$. Notons qu'au bout d'un temps d'évolution $t = 3\tau$, le champ magnétique $p(t)$ converge suffisamment vers la valeur p_{tr} . La fonction (3.18) est portée sur la figure 3.5c. Les spins sont soumis localement à un champ magnétique total donné par

$$p(t)\hat{e}_z + c_{\text{dd}}\mathbf{b}(\mathbf{r},t) = [p(t) + c_{\text{dd}}b_z(\mathbf{r},t)]\hat{e}_z + c_{\text{dd}}\mathbf{b}_\perp(\mathbf{r},t). \quad (3.19)$$

En choisissant convenablement le temps caractéristique τ , le condensat reste dans un état quasi-stationnaire jusqu'à atteindre un régime où les effets dipolaires deviennent importants. En réalisant une étude systématique en fonction de τ , nous observons qu'un choix de temps caractéristique de l'ordre de $\tau \sim 1 \text{ ms}$ suffit à éliminer les oscillations de Larmor. Les figures 3.5b et 3.5d montrent l'évolution de la magnétisation pour $\tau = 0.5 \text{ ms}$ et $\tau = 1 \text{ ms}$. Dans le premier cas ($\tau = 0.5 \text{ ms}$), de faibles oscillations subsistent au bout d'un temps $t = 4\tau$ d'évolution. Les simulations présentées dans la suite de ce chapitre sont réalisées pour $\tau = 1 \text{ ms}$.

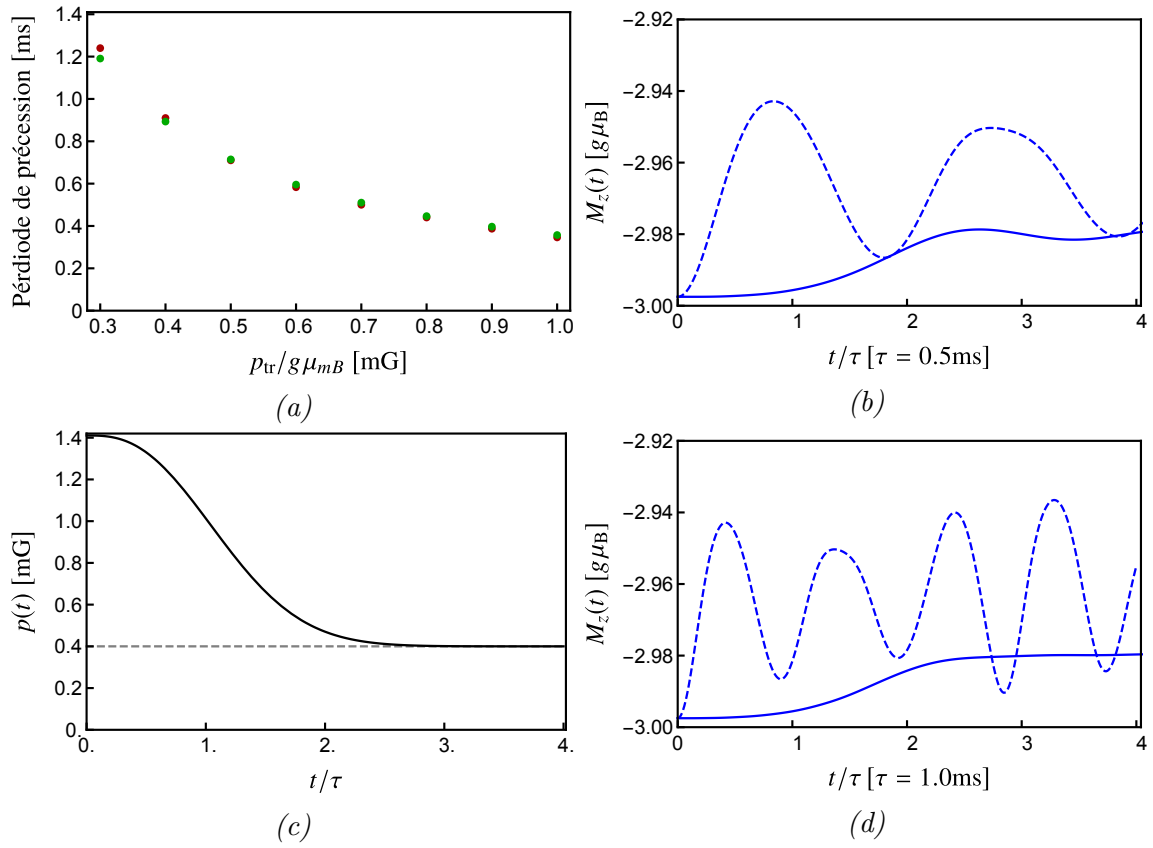


FIGURE 3.5 – (a) : période de précession des spins après une trempe de champ magnétique (rouge) comparée à la période de Larmor (vert). (c) : Variation du champ magnétique. (b) et (d) : Évolution de la magnétisation, respectivement, pour $\tau = 0.5$ ms et $\tau = 1$ ms. Les courbes en lignes pleines correspondent au cas d'une variation lente du champ magnétique (voir (c)). Les courbes en traitillées correspondent au cas d'une trempe de champ magnétique. Dans les deux cas, $p_{tr}/g\mu_B = 0.4$ mG. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 10^5$ et $\omega/2\pi = 820$ Hz.

3.2.3 Démagnétisation et Effet Einstein–de Haas

Suivant la procédure décrite dans la sous-section précédente, nous avons réalisé plusieurs simulations en variant le champ magnétique p_{tr} entre $p_0/g\mu_B = 1.41$ mG et 0 mG. La démagnétisation du condensat peut être examinée par l'évolution du moment cinétique de spin $\langle F_z \rangle = M_z/g\mu_B$ (éq. 1.119 et éq. 1.120). La figure 3.6 montre l'évolution du moment cinétique de spin $\langle F_z \rangle$ (courbe en pointillés rouge) pour plusieurs valeurs du champ magnétique p_{tr} . Sur ces mêmes figures, nous avons porté l'évolution du moment cinétique orbital $\langle L_z \rangle$ (courbe en pointillés bleu). Comme cela a été discuté initialement par Kawaguchi² *et al.* [32], la démagnétisation du condensat s'accompagne d'un transfert du moment cinétique de spin vers le moment cinétique orbital. Ce transfert est rendu possible par les termes de relaxation dipolaire qui ne

2. Précisons que dans leurs simulations, les auteurs ont remplacé la fonction d'onde ψ_m par une ansatz invariante par rotation autour de l'axe z . En pratique, leurs résultats pour le système 3D ont été obtenus par des calculs numériques réalisés sur un système 2D. Dans notre travail, nous avons réalisé des simulation 3D sans imposé l'invariance par rotation dans les calculs numériques.

CHAPITRE 3. DÉMAGNÉTISATION SPONTANÉE D'UN CONDENSAT DE CHROME FERROMAGNÉTIQUE

conservent pas séparément $\langle F_z \rangle$ et $\langle L_z \rangle$, mais qui conservent le moment cinétique total $\langle F_z \rangle + \langle L_z \rangle$ (sect. 1.3.1). Ce phénomène est connu sous le nom de l'Effet Einstein–de Haas [77]. Notons que cet effet n'a pas été observé dans le cas du condensat uniforme étudié à la section précédente. Cela est dû au fait que le système considéré (boite cubique) ne présentait pas de symétrie cylindrique.

On définit le champ critique de démagnétisation p_{dem} comme le champ magnétique maximal pour lequel la variation de la magnétisation pourrait être observée expérimentalement. Dans ce travail, on ne tient compte que des variations de magnétisation supérieures à 5%. Nos calculs montrent que la démagnétisation du condensat ne peut avoir lieu que pour des champs magnétiques très faibles. Plus précisément, la démagnétisation devient significative au-dessous du champ magnétique

$$p_{\text{dem}}/g\mu_B \simeq 0.11 \text{ mG.} \quad (3.20)$$

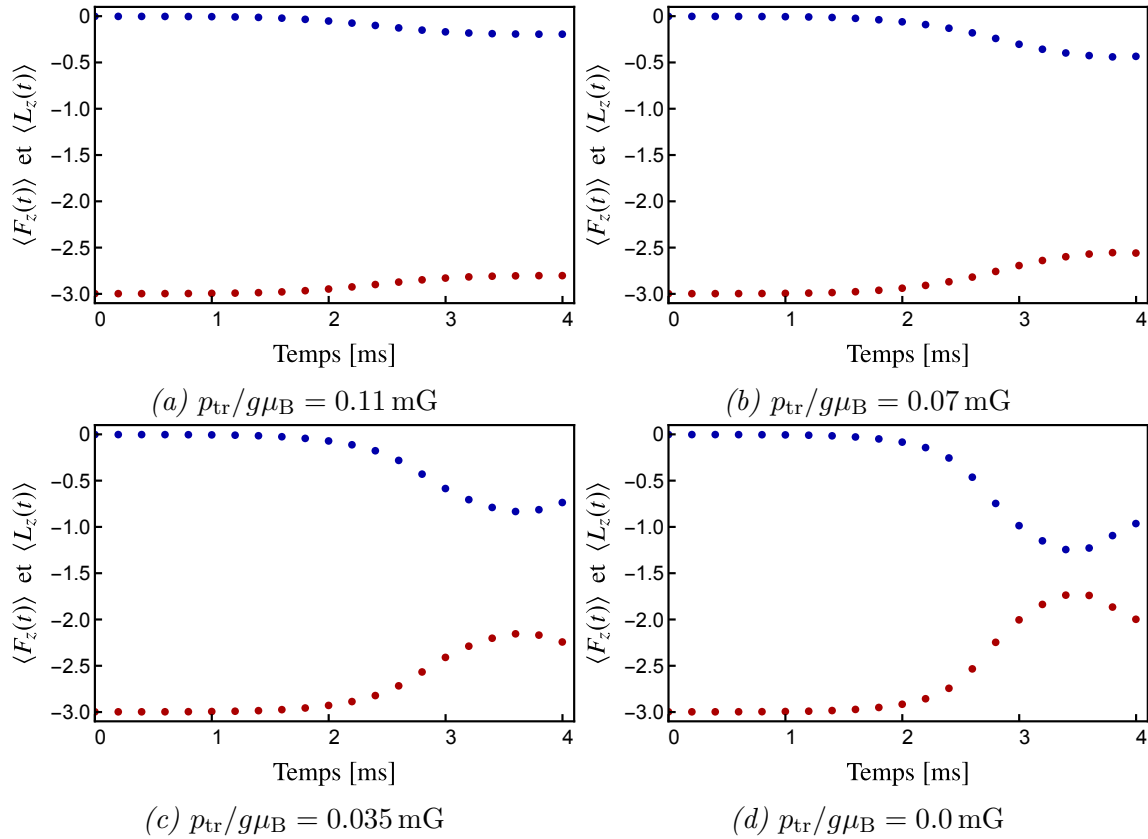


FIGURE 3.6 – Évolution du moment cinétique de spin (rouge) et du moment cinétique orbital (bleu). Les figures (a), (b), (c) et (d) correspondent, dans l'ordre, aux dynamiques obtenues pour les champs $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.11 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.07 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.035 \text{ mG}$ et $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.0 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 10^5$ et $\omega/2\pi = 820 \text{ Hz}$.

3.2.4 Effet de l'interaction de contact : instabilité énergétique ?

Afin de préciser le rôle des interactions de contact dans la déclenchement et l'évolution des dynamiques de démagnétisation, nous proposons « d'effacer » dans nos simulations les processus d'interaction de contact dépendantes du spin. C'est processus sont fixés par les constantes c_1, c_2 et c_3 (éq. 1.61 à éq. 1.64). Pour ce faire, il convient d'égaliser les constantes d'interaction g_0, g_2 et g_4 à g_6 . On obtient,

$$c_0 = g_6 \quad \text{et} \quad c_1 = c_2 = c_3 = 0. \quad (3.21)$$

Notons que le choix de $c_0 = g_6$ permet de s'assurer que l'état fondamental du condensat est identique à l'état ferromagnétique décrit dans la sous-section 3.2.1.

Effet sur la démagnétisation

Les résultats de nos calculs pour $c_{1,2,3} = 0$ (courbes en pointillés noirs), comparés aux simulations « réalistes » de la sous-section précédente (courbes en pointillés rouges), sont portés sur la figure 3.7. Les sous-figures 3.7a à 3.7d correspondent à différentes valeurs du champ p_{tr} . Premièrement, dans le cas $c_{1,2,3} = 0$, comme dans le cas réaliste, nous observons une démagnétisation significative pour

$$p_{\text{dem}}/g\mu_B \simeq 0.11 \text{ mG}. \quad (3.22)$$

Ce résultat montre que l'enclenchement des dynamiques de démagnétisation est dû uniquement aux effets de l'interaction dipôle-dipôle. Deuxièmement, nos calculs montrent que l'évolution de la magnétisation du condensat aux temps longs est sensible aux effets de l'interaction de contact. Cette dernière observation peut s'expliquer en examinant l'évolution de la nature ferromagnétique du condensat. En effet, si durant l'évolution dynamique le condensat restait purement ferromagnétique $|\mathbf{f}| = 3$, les processus de collision par interaction de contact seraient fixés uniquement par la constante g_6 du canal de collision de spin total $\mathcal{F} = 6$. Dit autrement, la dynamique du condensat est indépendante des valeurs des constantes $g_{\mathcal{F} \neq 6}$, et par conséquent, la dynamique est aussi indépendante des valeurs de c_1, c_2 et c_3 . Sur la figure 3.8, nous avons porté l'évolution de la longueur de spin moyenne Π . Nous constatons qu'aux temps longs la nature ferromagnétique n'est pas conservée, ce qui explique la dépendance des dynamiques de démagnétisation des valeurs des constantes c_1, c_2 et c_3 .

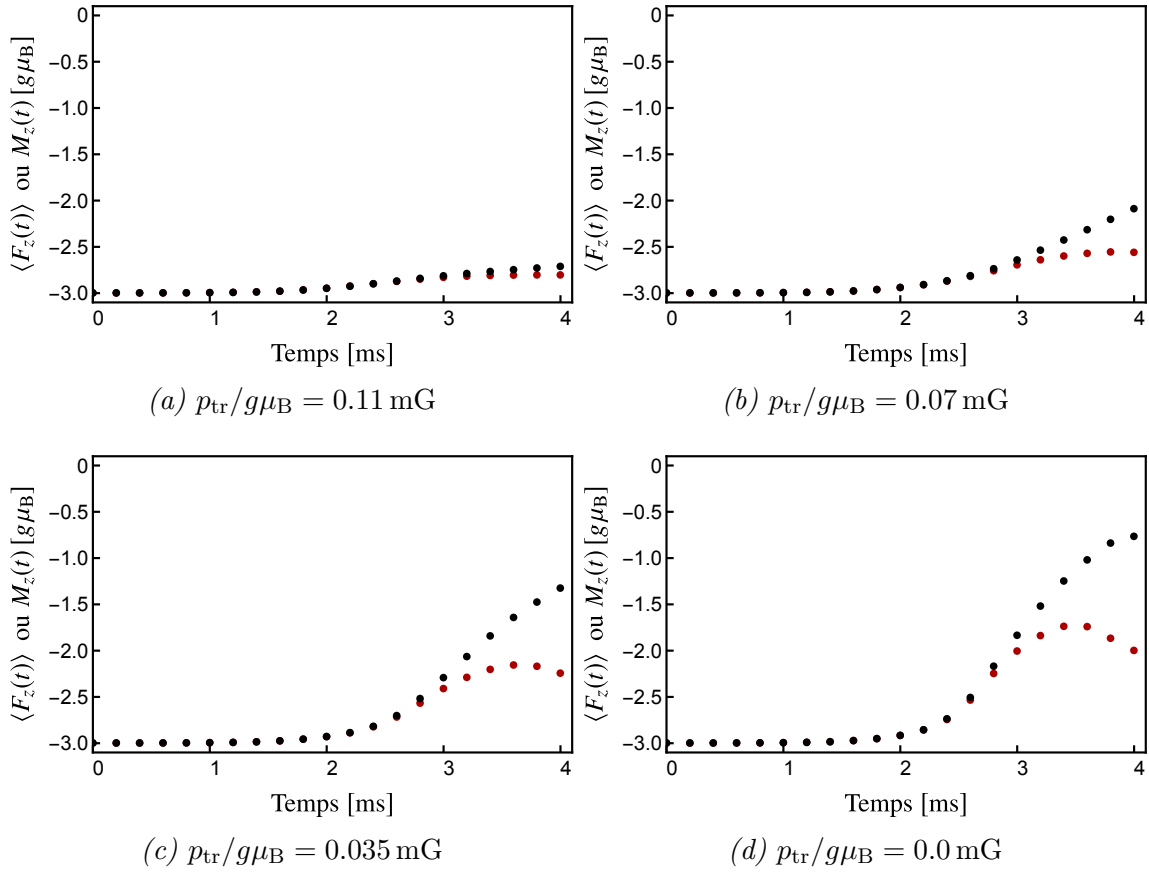


FIGURE 3.7 – Évolution du moment cinétique de spin (magnétisation). Les figures (a), (b), (c) et (d) correspondent, dans l'ordre, aux dynamiques obtenues pour les champs $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.11$ mG, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.07$ mG, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.035$ mG et $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.0$ mG. Pour chaque figure, la courbe rouge correspond au cas « réaliste » et la courbe noire montre l'évolution dynamique en l'absence d'interaction de contact dépendante de spin ($c_{1,2,3} = 0$). Ces résultats montrent que le début de la dynamique de démagnétisation est indépendant des interactions de contact dépendantes du spin. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 10^5$ et $\omega/2\pi = 820$ Hz.

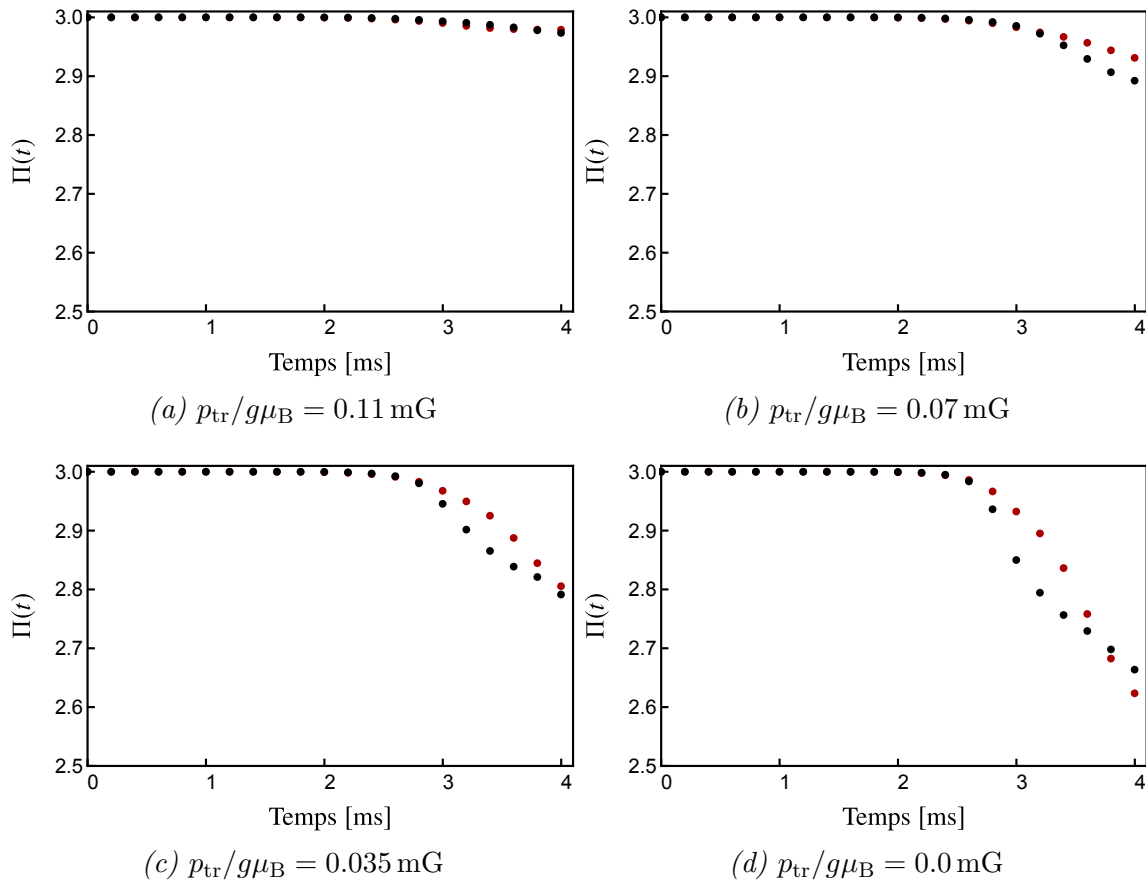


FIGURE 3.8 – Évolution de la longueur de spin moyenne $\Pi(t)$. Les figures (a), (b), (c) et (d) correspondent, dans l'ordre, aux dynamiques obtenues pour les champs $p_{\text{tr}}/g\mu_{\text{B}} = 0.11 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_{\text{B}} = 0.07 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_{\text{B}} = 0.035 \text{ mG}$ et $p_{\text{tr}}/g\mu_{\text{B}} = 0.0 \text{ mG}$. Pour chaque figure, la courbe rouge correspond au cas « réaliste » et la courbe noire montre l'évolution dynamique en l'absence d'interaction de contact dépendante de spin ($c_{1,2,3} = 0$). Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 10^5$ et $\omega/2\pi = 820 \text{ Hz}$.

Effet sur la stabilité du condensat

Au chapitre précédent, nous avons montré que la phase ferromagnétique uniforme est énergiquement instable pour $p < p_c$ où p_c est le champ critique donnée par l'équation (2.138). Pour la commodité de la lecture récrivons ici l'expression de p_c pour un condensat de chrome

$$p_c = \left(3c_1 - \frac{5}{42}c_3 \right) n = \left[\frac{13}{66}(g_6 - g_4) + \frac{5}{42}(g_4 - g_2) \right] n. \quad (3.23)$$

Cette instabilité énergétique nous indique que la phase ferromagnétique n'est pas favorable énergiquement. Au premier chapitre, nous avons vu que le champ critique p_c fixe la transition de phase entre l'état ferromagnétique et l'état cyclique dans le cas d'un condensat uniforme ou piégé (fig. 1.3). Les travaux expérimentaux de Pasquiou *et al.* [76] suggéraient que l'enclenchement des dynamiques de démagnétisations peut avoir lieu pour $p_{\text{dem}} < p_c$, où p_c est calculé en considérant la densité centrale n_0 . Pour le condensat considéré dans ce travail $n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. Nous obtenons

$$p_c/g\mu_B \simeq 1.10 \text{ mG}, \quad (3.24)$$

où nous avons les valeurs numériques de c_1 et c_2 données dans le tableau 1.2. Premièrement, notons que p_c est 10 fois plus grand que le champ de démagnétisation calculé précédemment. On a

$$p_{\text{dem}}/p_c \simeq 0.1. \quad (3.25)$$

Deuxièmement, pour $c_{1,2,3} = 0$, on a $p_c = 0$. Or, dans ce cas aussi nous avons observé une démagnétisation significative à champ non nul.

En conclusion, nos résultats montrent clairement que la dynamique de démagnétisation n'a pas de lien avec le champ d'instabilité énergétique p_c . Il semble donc qu'il y a eu une erreur d'interprétation dans [76]. Il est possible par exemple que les auteurs aient mal défini la valeur du champ magnétique. En effets, les auteurs supposaient que la démagnétisation est maximale quand $p = 0$. Or les travaux théoriques de Kawaguchi *et al.* [32], et par la suite ceux de Gawryluk *et al.* [78] et Swisocki *et al.* [79] montrent que la démagnétisation est maximale pour $p < 0$. Une autre hypothèse difficile à explorer théoriquement serait que la température non nulle dans les expériences favoriserait une démagnétisation pour un champ magnétique de l'ordre de p_c par l'intermédiaire d'un mécanisme de dissipation.

3.2.5 Effet de l'interaction dipôle-dipôle : instabilités dynamiques ?

Dans cette sous-section, on propose d'interpréter les dynamiques de démagnétisation observées dans le cas du condensat piégé en rapport avec les instabilités dynamiques mises en évidence pour la phase ferromagnétique uniforme. En particulier, ce qui nous intéresse ici est de déterminer un critère quantitatif, sur le champ magnétique, qui fixerait le régime de démagnétisation spontanée. Avant de commencer, remarquons que

$$n \simeq n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}, \quad (3.26)$$

où n est la densité du système uniforme étudié à la première section, et n_0 la densité au centre du condensat piégé dans cette section. Pour le système uniforme, le champ critique d'instabilité dynamique p_{dd} est donné par (3.5). Pour le condensat piégé, le champ critique de démagnétisation p_{dem} (déterminé numériquement) est donné par (3.20). Le rapport entre ces deux champs critiques est de

$$p_{dem}/p_{dd} \simeq 0.31. \quad (3.27)$$

Dans ce qui suit, nous allons voir que le rapport p_{dem}/p_{dd} , dépend de la taille du condensat. Pour ce faire, nous allons analyser les dynamiques de démagnétisation d'un condensat piégé de plus grande taille, et de même densité centrale $n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$. On considère un système de $N = 8 \times 10^5$ atomes dans un piège de fréquence $\omega/2\pi = 410 \text{ Hz}$. Le rayon du condensat est approximativement de $R \simeq 6.8 \mu\text{m}$. La densité de l'état fondamental et la projection du champ dipolaire dans le plan xz sont portés sur la figure 3.9.

Pour ce système, les simulations de dynamiques de démagnétisation, portées sur la figure 3.10, indiquent que le champ critique de démagnétisation p_{dem} vaut approximativement $p_{dem} \simeq 0.17 \text{ mG}$. En comparant avec p_{dd} , on obtient

$$p_{dem}/p_{dd} \simeq 0.49. \quad (3.28)$$

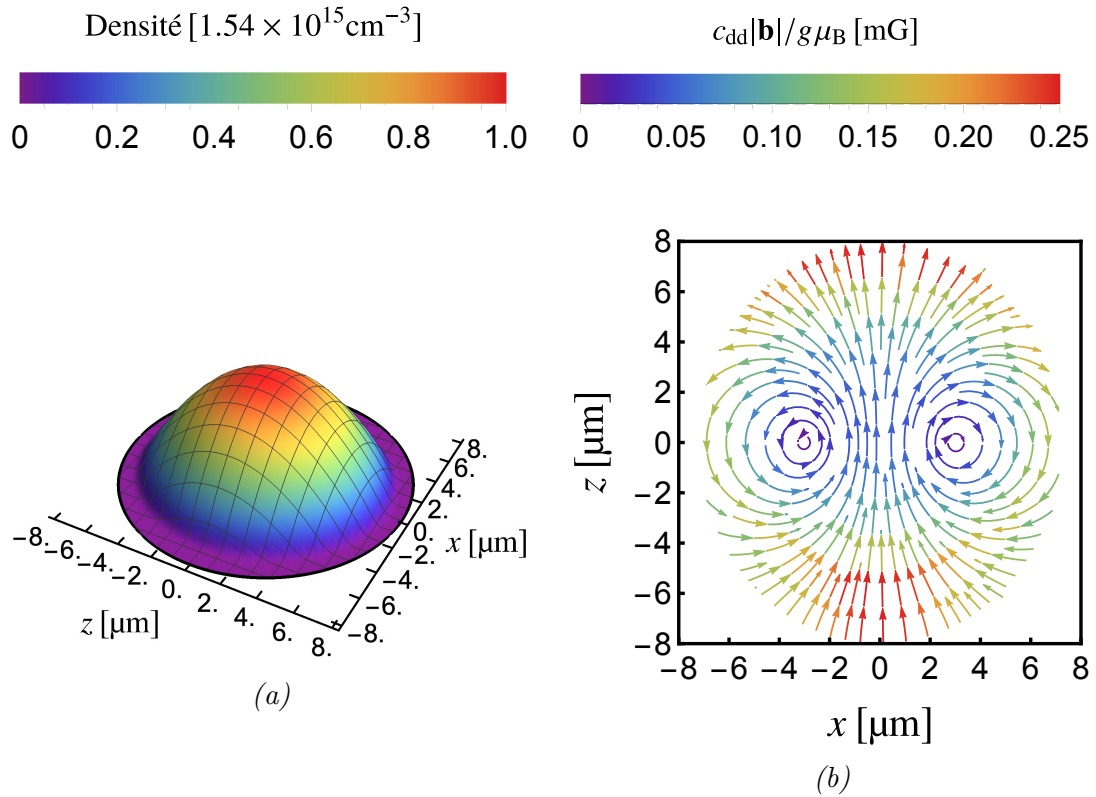


FIGURE 3.9 – Coupe de densité totale (a) et projection du champ dipolaire \mathbf{b} (b) dans le plan xz . $N = 8 \times 10^5$, $\omega/2\pi = 410 \text{ Hz}$ et $p_0/g\mu_B = 1.41 \text{ mG}$. On a $n_0 \simeq 1.54 \times 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

CHAPITRE 3. DÉMAGNÉTISATION SPONTANÉE D'UN CONDENSAT DE CHROME FERROMAGNÉTIQUE

Le rapport $p_{\text{dd}}/p_{\text{dem}}$ obtenu en (3.27) et en (3.28), montre que p_{dem} tend à se rapprocher de p_{dd} si taille du condensat augmente. Ainsi, le champ critique de démagnétisation peut être estimé en considérant la densité centrale n_0

$$p_{\text{dem}} \lesssim 4\pi c_{\text{dd}} n_0. \quad (3.29)$$

Ce résultat pourrait être confirmé en réalisant une étude systématique en fonction de la taille du condensat. Signalons que pour des systèmes de grandes tailles il est nécessaire d'augmenter la résolution spatiale de la grille de calculs numériques (nombre de points). Cela peut nécessiter des moyens, et des temps de calcul considérables.

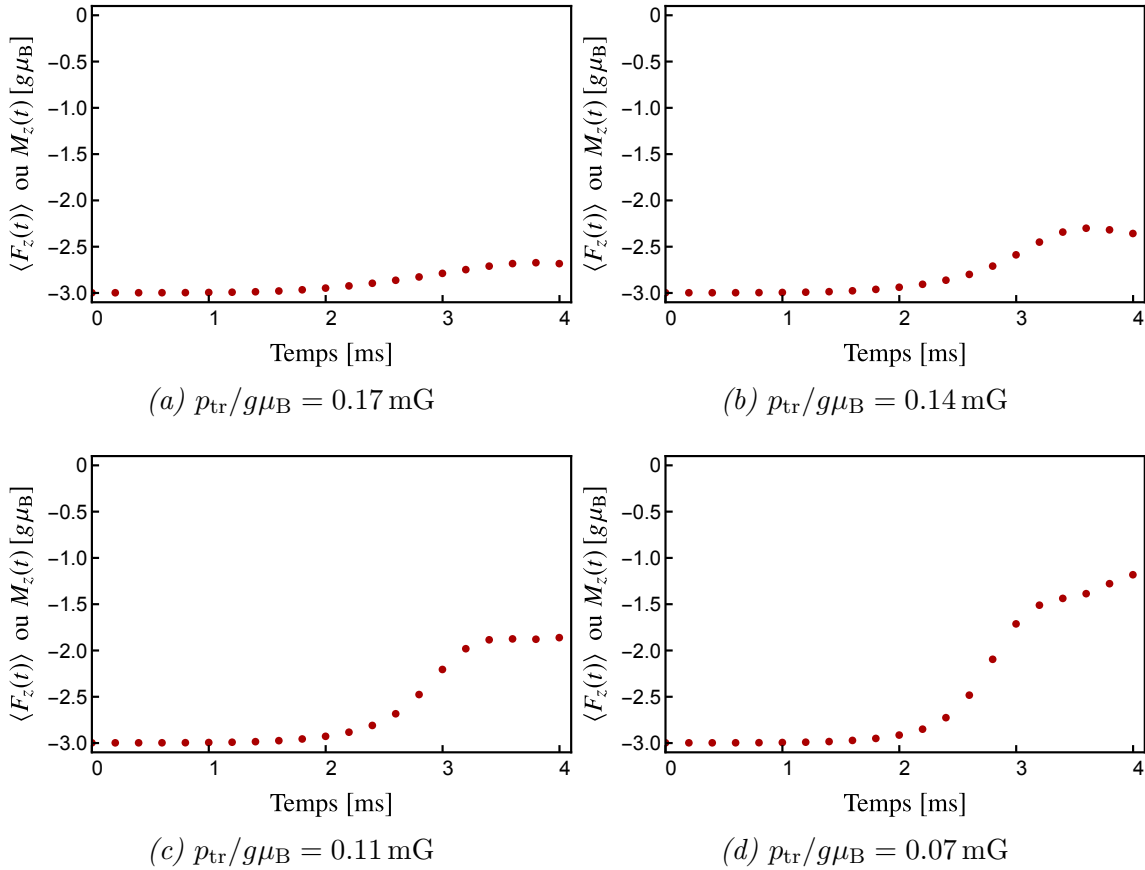


FIGURE 3.10 – Évolution du moment cinétique de spin (magnétisation). Les figures (a), (b), (c) et (d) correspondent, dans l'ordre, aux dynamiques obtenues pour les champs $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.17 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.14 \text{ mG}$, $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.11 \text{ mG}$, et $p_{\text{tr}}/g\mu_B = 0.07 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 8 \times 10^5$ et $\omega/2\pi = 410 \text{ Hz}$.

3.3 Conclusion

Les résultats discutés dans ce chapitre montrent que le condensat uniforme et le condensat piégé présentent des dynamiques de démagnétisation analogues. Il y a néanmoins quelques différences. Premièrement, dans le cas uniforme, les dynamiques sont initiées par l'ajout d'un bruit gaussien (graine), et que dans le cas piégé les dynamiques sont initiées par le champ dipolaire transverse. Deuxièmement, l'effet Einstein-de Hass n'est observé que dans le cas du condensat piégé qui possède une symétrie cylindrique. Ces dynamiques se manifestent à champ magnétique faible, et ont pour origine les processus de relaxation dipolaire. En nous basant sur ces résultats, nous proposons d'interpréter les dynamiques de démagnétisation dans le cas du condensat piégé comme une réminiscence des instabilités dynamiques mises en évidence dans le cas du condensat uniforme.

Nos simulations numériques dans le cas d'un système uniforme montrent une démagnétisation pour $p < p_{dd}$, soit dans ce cas $p_{dem}/p_{dd} \simeq 1$. Pour le condensat piégé, nous avons vu que $p_{dem} < p_{dd}$ et que p_{dem} se rapproche de p_{dd} dans le cas d'un système de grande taille. Ainsi p_{dem} peut être estimé en calculant simplement p_{dd} au centre du condensat (éq. 3.29).

Chapitre 4

Dynamiques de spins d'un condensat de chrome à fort champ magnétique

Ce chapitre est consacré à l'étude de la dynamique de spin d'un condensat dipolaire dans un régime de fort champ magnétique. L'état fondamental ferromagnétique est excité en appliquant une rotation collective des spins depuis leur direction initiale d'un angle $\theta_r \in]0, \pi/2]$. Ce travail est motivé par l'observation expérimentale des dynamiques de population du spin dans un condensat de ^{52}Cr au sein du groupe du LPL.

La section 4.1 est réservée à la modélisation du système. À fort champ magnétique appliqué suivant l'axe z , les spins subissent une précession de Larmor rapide. La fréquence de Larmor est $10^3 - 10^4$ fois supérieure à la fréquence de précession des spin autour du champ dipolaire \mathbf{b} . Dans ces conditions, le champ dipolaire peut être approximé par le champ \mathbf{b}^{rot} qui est la moyenne de \mathbf{b} sur une période de Larmor [34]. Dans cette approximation, les processus de relaxation dipolaire sont ignorés. Précisons que le champ \mathbf{b}^{rot} conserve la magnétisation M_z du condensat. En pratique, dans les expériences les processus de relaxation dipolaire se traduisent, néanmoins, par la décroissance du nombre d'atomes total N_{tot} du condensat [36, 80]. Dans notre modèle, ces pertes sont prises en compte dans l'équation de Gross-Pitaevskii dans un terme dissipatif.

La section 4.2 est consacrée à l'étude des dynamiques de spin à N_{tot} constant. La dynamique du système de spins tournés hors de l'état d'équilibre est déterminée par les interactions de contact et les interactions dipolaires. Pour une rotation $\theta_r \neq \pi/2$, les dynamiques de spin sont enclenchées par les interactions dipolaires à travers un mécanisme de précession inhomogène du vecteur spin \mathbf{f} autour du champ \mathbf{b}^{rot} . Pour le cas particulier d'une rotation $\theta_r = \pi/2$, les vecteurs \mathbf{f} et \mathbf{b}^{rot} sont parallèles : la précession inhomogène ne peut avoir lieu. Dans ce cas, nous allons montrer qu'un gradient de champ magnétique ou un effet Zeeman quadratique est nécessaire pour favoriser le développement des dynamiques de spin.

Pour aller plus loin, nous avons analysé l'évolution des propriétés magnétiques du système. Premièrement, l'évolution de la longueur de spin moyenne Π montre une tendance du système à se maintenir dans son état ferromagnétique initial. Ce résultat

est surprenant. En effet, les mécanismes liés à l'interaction dipolaire, aux gradients de champ magnétique et à l'effet quadratique ne conservent pas la longueur de spin. De plus, la nature des interactions de contact du ^{52}Cr ne favorise pas, du point de vue énergétique, l'état ferromagnétique. Deuxièmement, l'évolution de la magnétisation totale M_{tot} met en évidence un comportement oscillatoire collectif des spins. Ces deux observations seront étudiées dans le détail dans le chapitre 5.

Pour finir, dans la section 4.3 nous allons présenter les résultats d'observations expérimentales de dynamiques de populations de spin. Nous allons voir que nos simulations permettent de reproduire ces observations expérimentales avec un très bon accord. En particulier, les simulations vont nous permettre de mettre en évidence le rôle des interactions dipolaires dans les dynamiques d'échange de populations de spin observées.

4.1 Condensat spinoriel de chrome soumis à un fort champ magnétique

Dans cette section, on se propose de modéliser un condensat de Bose-Einstein de chrome ^{52}Cr de spin $f = 3$ dans le régime de fort champ magnétique. Les atomes du condensat sont supposés piégés dans un potentiel optique $U_{\text{opt}}(\mathbf{r})$ et soumis à un champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. L'énergie totale du système s'écrit

$$\begin{aligned}
 E[\boldsymbol{\psi}] = & \int d\mathbf{r} \sum_m \psi_m^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) + qm^2 + \frac{c_0}{2} n^2 \right] \psi_m(\mathbf{r}) \\
 & + g\mu_B \int d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \\
 & + \int d\mathbf{r} \left[\frac{c_1}{2} |\mathbf{F}(\mathbf{r})|^2 + \frac{c_2}{2} |A_{00}(\mathbf{r})|^2 + \frac{c_3}{2} \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 |A_{2\mathcal{M}}(\mathbf{r})|^2 \right] \\
 & + \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{b}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}), \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\psi} = (\psi_{m=+3}, \dots, \psi_{m=-3})^T$ est le vecteur fonction d'onde à 7 composantes notées ψ_m et $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ est le vecteur densité de spin défini par l'équation (1.98). Un effet Zeeman quadratique d'origine optique est pris en compte par le paramètre $q = q_{\text{opt}}$ (éq. 1.10). Les termes A_{00} et $A_{2\mathcal{M}}$ sont donnés par (1.100). Les constantes c_k avec $k = 0, 1, 2, 3$ pour un système de spin $f = 3$ sont données par les équations (1.61) à (1.64). Les interactions dipôle-dipôle interviennent à travers le champ dipolaire \mathbf{b} défini en (1.105).

4.1.1 Modélisation du piège optique

Dans le cas d'un laser de profil gaussien, le piège optique $U_{\text{opt}}(\mathbf{r})$ peut être approché en son centre, où l'intensité du laser est maximale, par un potentiel harmonique [81]. Le potentiel U_{opt} prend la forme suivante

$$U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) \approx -U_P \left[1 - 2(x/w_x^0)^2 - 2(y/w_y^0)^2 - (z/z_R)^2 \right], \tag{4.2}$$

où U_P est la profondeur du potentiel optique. Les quantités w_x^0 et w_y^0 sont les largeurs du faisceau laser dans les directions x et y . z_R est la longueur de Rayleigh. Dans notre modèle, on considère un potentiel harmonique de la forme

$$U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (4.3)$$

où M désigne la masse atomique et $\omega_{x,y,z}/2\pi$ sont les fréquences du piège données par

$$\omega_x = \sqrt{4U_P/Mw_x^2}, \quad \omega_y = \sqrt{4U_P/Mw_y^2}, \quad \omega_z = \sqrt{2U_P/Mz_R^2}. \quad (4.4)$$

4.1.2 Repère de Larmor

Dans le repère du laboratoire que l'on note $(\hat{e}_x^{\text{lab}}, \hat{e}_y^{\text{lab}}, \hat{e}_z^{\text{lab}})$, le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ prend la forme suivante

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \gamma_x(\mathbf{r})\hat{e}_x^{\text{lab}} + \gamma_y(\mathbf{r})\hat{e}_y^{\text{lab}} + [B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})]\hat{e}_z^{\text{lab}}, \quad (4.5)$$

où B_0 représente la partie homogène et dominante du champ magnétique dirigé dans la direction \hat{e}_z^{lab} . Les termes $\gamma_x(\mathbf{r})$, $\gamma_y(\mathbf{r})$ et $\gamma_z(\mathbf{r})$ sont de faibles variations spatiales du champ magnétique dans les trois directions spatiales x, y et z . Dans la situation qui nous occupe¹, la composante homogène B_0 du champ magnétique est de l'ordre de 200 mG. Dans ce régime à fort champ magnétique, les spins atomiques sont entraînés dans une dynamique de précession rapide à une fréquence de l'ordre de

$$\omega_L/2\pi = g\mu_B B_0/h \sim 500 \text{ kHz}. \quad (4.6)$$

Dans ce régime il s'avère commode de travailler dans le repère $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ tournant à la fréquence de Larmor homogène $\omega_L/2\pi$ autour de l'axe z dirigé suivant \hat{e}_z^{lab} . Avec cette définition $\hat{e}_z = \hat{e}_z^{\text{lab}}$. Dans ce nouveau repère, le vecteur fonction d'onde $\boldsymbol{\psi}^{\text{rot}} = (\psi_{+3}^{\text{rot}}, \dots, \psi_{-3}^{\text{rot}})^T$ peut être obtenu à partir de $\boldsymbol{\psi} = (\psi_{+3}, \dots, \psi_{-3})^T$ défini dans le repère du laboratoire en lui appliquant la matrice de rotation $e^{if_z\omega_L t}$

$$\boldsymbol{\psi}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = e^{if_z\omega_L t} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t), \quad (4.7)$$

où f_z est la matrice de spin définie par 1.15. Après calcul, cette procédure se traduit par l'ajout d'une phase $m\omega_L t$ aux composantes ψ_m

$$\psi_m^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = \psi_m(\mathbf{r}, t) e^{im\omega_L t}. \quad (4.8)$$

À partir de (4.8) et de la définition (1.98), on obtient les composantes du vecteur densité de spin $\mathbf{F}^{\text{rot}} = (F_x^{\text{rot}}, F_y^{\text{rot}}, F_z^{\text{rot}})^T$ dans le repère de Larmor

$$F_{\pm}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = e^{\pm i\omega_L t} F_{\pm}(\mathbf{r}, t), \quad (4.9)$$

où $F_{\pm} = F_x \pm iF_y$ et $F_{\pm}^{\text{rot}} = F_x^{\text{rot}} \pm iF_y^{\text{rot}}$. La composante F_z reste inchangée

$$F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) = F_z(\mathbf{r}, t). \quad (4.10)$$

1. C'est le cas des expériences dont nous allons discuter dans la suite de ce chapitre.

Dans le repère de Larmor, la première et troisième ligne de l'énergie totale E (éq. 4.1) peuvent être obtenues en remplaçant ψ_m par ψ_m^{rot} . Les expressions de la deuxième et quatrième ligne qui représentent respectivement l'énergie Zeeman linéaire et l'énergie dipolaire vont être modifiées. Les dynamiques de précessions induites d'une part par les termes $\gamma_{x,y,z}$ du champ magnétique, et d'autre part par le champ dipolaire \mathbf{b} sont très lentes comparées à la précession de Larmor. Pour cette raison, dans notre modèle nous allons remplacer l'énergie Zeeman et l'énergie dipolaire par leur moyenne sur une période de Larmor $2\pi/\omega_L$ (ss-sect. 4.1.3 et ss-sect. 4.1.4).

4.1.3 Énergie Zeeman moyennée

En remplaçant le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ par son expression (4.5), la partie linéaire de l'énergie Zeeman s'écrit

$$\begin{aligned} E_z[\psi] &= g\mu_B \int d\mathbf{r} \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{g\mu_B}{2} \int d\mathbf{r} \{ [\gamma_x(\mathbf{r}) - i\gamma_y(\mathbf{r})] F_+(\mathbf{r}, t) + [\gamma_x(\mathbf{r}) + i\gamma_y(\mathbf{r})] F_-(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + 2[B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] F_z(\mathbf{r}, t) \}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

En utilisant les équations (4.9) et (4.10), l'énergie Zeeman se réécrit comme suit

$$\begin{aligned} E_z[\psi] &= \frac{g\mu_B}{2} \int d\mathbf{r} \{ e^{-i\omega_L t} [\gamma_x(\mathbf{r}) - i\gamma_y(\mathbf{r})] F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) + e^{+i\omega_L t} [\gamma_x(\mathbf{r}) + i\gamma_y(\mathbf{r})] F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + 2[B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nous considérons des variations spatiales du champ magnétique de l'ordre de 0.5 mG sur tout le volume du condensat. Par conséquent, la précession des spins liées à la partie inhomogène du champ magnétique est très lente comparée à la précession de Larmor fixée par le champ $B_0 \sim 200$ mG. Ainsi, pour chaque instant t_0 , on peut écrire

$$F_{\pm}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0 + 2\pi/\omega_L) \approx F_{\pm}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0) \quad \text{et} \quad F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0 + 2\pi/\omega_L) \approx F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0), \quad (4.13)$$

où $2\pi/\omega_L$ est la période de Larmor fixée par le champ B_0 . En utilisant cette dernière approximation, et en moyennant l'énergie (4.12) sur une période $2\pi/\omega_L$, les termes en $e^{\pm i\omega_L t}$ s'annulent. On obtient

$$\begin{aligned} \langle E_z[\psi] \rangle &\approx \frac{\omega_L g\mu_B}{2\pi} \frac{1}{2} \int_0^{2\pi/\omega_L} dt \int d\mathbf{r} \{ e^{-i\omega_L t} [\gamma_x(\mathbf{r}) - i\gamma_y(\mathbf{r})] F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0) \\ &\quad + e^{+i\omega_L t} [\gamma_x(\mathbf{r}) + i\gamma_y(\mathbf{r})] F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0) + 2[B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] F_z(\mathbf{r}, t_0) \}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\approx g\mu_B \int d\mathbf{r} [B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t_0). \quad (4.15)$$

Dans la suite, l'énergie Zeeman E_z sera remplacée par sa moyenne $\langle E_z \rangle$ donnée par (4.15). Le champ magnétique ressenti par les atomes dans notre modèle s'écrit

$$\mathbf{B}^{\text{rot}}(\mathbf{r}) = [B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] \hat{e}_z. \quad (4.16)$$

Sur la taille du condensat ($R \sim 5 \mu\text{m}$), on ne retient que les variations linéaires du champ magnétique et on néglige les termes d'ordres supérieurs

$$\gamma_z(\mathbf{r}) \approx \gamma_{zx}x + \gamma_{zy}y + \gamma_{zz}z, \quad (4.17)$$

où γ_{zx} , γ_{zy} et γ_{zz} sont des gradients.

4.1.4 Énergie dipolaire moyennée

En utilisant (4.9) et (4.10), l'énergie dipolaire donnée par (1.102) devient

$$\begin{aligned}
 E_{\text{dd}}[\psi] = & -\sqrt{\frac{6\pi}{5}} \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \left[\frac{Y_{20}(\mathbf{e})}{\sqrt{6}} \{4F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}') - F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}') \right. \\
 & - F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}')\} + e^{-i\omega_L t} Y_{2-1}(\mathbf{e}) \{F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}') + F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}')\} \\
 & - e^{i\omega_L t} Y_{21}(\mathbf{e}) \{F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}') + F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}')\} \\
 & \left. + e^{-2i\omega_L t} Y_{2-2}(\mathbf{e})F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}')F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}') + e^{2i\omega_L t} Y_{22}(\mathbf{e})F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}')F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}') \right], \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

où $\mathbf{e} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. $Y_{2,0}$, $Y_{2,\pm 1}$, $Y_{2,\pm 2}$ sont les harmoniques sphériques d'ordre 2.

Les dynamiques dipolaires sont de l'ordre de $c_{\text{dd}}n/h \sim 100$ Hz, et sont donc beaucoup plus lentes que la précession de Larmor qui est de l'ordre de $\hbar\omega_L \sim 500$ kHz. Dans ce régime où

$$c_{\text{dd}}n/h \ll \hbar\omega_L \quad (4.19)$$

la modification des composantes F_{\pm}^{rot} de la densité de spin par le champ dipolaire \mathbf{b} après un temps correspondant à une période de Larmor $2\pi/\omega_L$ peuvent être négligées. Suivant le même raisonnement que celui de la sous-section précédent, on calcule la moyenne de l'énergie dipolaire sur une période de Larmor. En utilisant (4.13), on obtient

$$\begin{aligned}
 \langle E_{\text{dd}}[\psi] \rangle \approx & -\sqrt{\frac{\pi}{5}} \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{Y_{20}(\mathbf{e})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \{4F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_z^{\text{rot}}(\mathbf{r}') - F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r}') \\
 & - F_-^{\text{rot}}(\mathbf{r})F_+^{\text{rot}}(\mathbf{r}')\} \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

$$\approx \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{b}^{\text{rot}}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{F}^{\text{rot}}(\mathbf{r}), \quad (4.21)$$

où l'on a introduit le champ dipolaire moyenné \mathbf{b}^{rot} et dont les composantes sont données par

$$b_{\nu}^{\text{rot}}(\mathbf{r}) = \int d\mathbf{r}' \sum_{\nu'} Q_{\nu\nu'}^{\text{rot}}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') F_{\nu'}^{\text{rot}}(\mathbf{r}'), \quad (4.22)$$

avec $\nu = x, y, z$. Le noyau dipolaire moyenné $Q^{\text{rot}}(\mathbf{r})$ est défini comme suit

$$Q_{\nu\nu'}^{\text{rot}}(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \frac{Y_{2,0}(\hat{\mathbf{r}})}{r^3} \frac{\delta_{\nu\nu'} - 3\delta_{\nu z}\delta_{\nu' z}}{2} = -\frac{1 - 3\hat{r}_z^2}{r^3} \frac{\delta_{\nu\nu'} - 3\delta_{\nu z}\delta_{\nu' z}}{2}. \quad (4.23)$$

où $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ et $r = |\mathbf{r}|$. Notons que l'expression du noyau dipolaire moyenné Q^{rot} fait apparaître uniquement l'harmonique sphérique $Y_{2,0}$. Par conséquent, $Q_{\nu\nu'}^{\text{rot}}$ décrit des processus dipolaires qui conservent la magnétisation M_z (éq. 1.74). Faisons remarquer que le noyau dipolaire Q^{rot} peut être obtenu en posant $Y_{2\pm 1} = 0$ et $Y_{2\pm 2} = 0$ dans l'expression (1.78).

Dans la suite de ce travail, l'énergie dipolaire E_{dd} sera remplacée par sa moyenne $\langle E_{\text{dd}} \rangle$ obtenue en (4.21). Cette approximation a été introduite initialement² pour les condensats dipolaires par Kawaguchi *et al.* [34] et permet de faire des prédictions sur le développement de dynamiques de spin liées aux interactions dipolaires

2. Voir aussi le livre de magnétisme nucléaire de A. Abragam [82]

(ss-sect. 4.2.2). Signalons néanmoins que dans cette approximation les processus de relaxation dipolaire sont ignorés. Dans la sous-section suivante, nous allons voir que la relaxation dipolaire introduit des pertes d'atomes en présence d'un fort champ magnétique. Finalement, dans la sous-section 4.1.6 nous allons écrire l'Gross-Pitaevskii avec un terme dissipatif qui prend en compte les pertes.

4.1.5 Dynamique dipolaire dissipative

Le traitement des interactions dipolaires pendant l'évolution dynamique du système demande une attention particulière. Rappelons ici que les processus dipolaires peuvent être de deux sortes. Des processus à magnétisation constante décrits par le terme (1.74) et des processus de relaxation décrits par les termes (1.75) et (1.76). Dans l'approximation (4.21), nous avons négligé les processus de relaxation. Néanmoins, en présence d'un champ magnétique B_0 , un processus de relaxation de spin d'une paire d'atomes en collision libre une énergie magnétique proportionnelle à $g\mu_B B_0$ [36, 80]. Pour respecter la conservation de l'énergie totale, l'énergie magnétique est transformée en énergie cinétique.

Processus de relaxation dipolaire exoénergétiques

Si l'on considère une paire d'atomes dans l'état $|m_1, m_2\rangle$, il n'y a que deux sortes de canaux de relaxation exoénergétiques : soit c'est seulement l'un des deux atomes qui change d'état de spin, soit ce sont les deux atomes qui relaxent. En indexant ces deux canaux par j , on peut écrire

$$j = 1 : |m_1, m_2\rangle \rightarrow |m_1 - 1, m_2\rangle \text{ ou } |m_1, m_2 - 1\rangle, \quad (4.24)$$

$$j = 2 : |m_1, m_2\rangle \rightarrow |m_1 - 1, m_2 - 1\rangle. \quad (4.25)$$

L'énergie libérée est donnée pour $j = 1, 2$ par

$$\Delta E_j = jg\mu_B B_0. \quad (4.26)$$

Dans le cas que nous considérons, cette énergie est de l'ordre de ~ 500 kHz. En comparaison, la profondeur du piège optique dans le cas des expériences que nous souhaitons modéliser est de l'ordre de $U_P \sim 20$ kHz [83]. Par conséquent, en raison du gain en énergie cinétique, les deux atomes vont être éjectés du piège optique.

Coefficient du taux de relaxation dipolaire

Pour deux atomes dans l'état $|m_1, m_2\rangle$ qui diffusent vers l'état $|m'_1, m'_2\rangle$ le changement des densités n_{m_1} et n_{m_2} , qui accompagne cet événement, est donné par

$$\frac{dn_{m_1}}{dt} = \frac{dn_{m_2}}{dt} = -\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} n_{m_1} n_{m_2}, \quad (4.27)$$

où $\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est un coefficient associé aux taux de transitions par interaction dipolaire, et a l'unité d'un volume divisé par un temps. L'expression de $\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est obtenue à partir de la règle d'or de Fermi

$$\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \sigma_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} v_i, \quad (4.28)$$

où v_i est la vitesse initiale de la paire d'atomes. La section efficace totale $\sigma_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ peut être calculée dans le cadre de l'approximation de Born. Pour plus de détails de calculs, le lecteur peut consulter le livre de C.J. Pethick et H.Smith [44] et la référence [80]. Le coefficient $\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ est donnée par³

$$K_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \frac{8\pi}{15} \left(\frac{c_{\text{dd}} M}{\hbar^2} \right)^2 v_f \sum_{\Delta m = -2}^2 |\langle m_1, m_2 | \Sigma_{2, \Delta m} | m'_1, m'_2 \rangle|^2. \quad (4.29)$$

Les tenseurs $\Sigma_{2, \Delta m}$ sont définis par les équations (1.74) à (1.76). Dans (4.29) v_f est la vitesse finale de la paire d'atomes qui dépend du champ magnétique B_0 à travers l'énergie libérée ΔE_j (éq. 4.26). La vitesse v_f est donnée par

$$v_f = \sqrt{4\Delta E_j / M}. \quad (4.30)$$

Les états de spin initiaux et finaux à deux atomes doivent être symétrisés comme suit :

$$m_1 = m_2 \text{ et } m'_1 \neq m'_2 : |m_1, m_2\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|m'_1, m'_2\rangle + |m'_2, m'_1\rangle), \quad (4.31)$$

$$m_1 \neq m_2 \text{ et } m'_1 = m'_2 : \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1, m_2\rangle + |m_2, m_1\rangle) \rightarrow |m'_1, m'_2\rangle, \quad (4.32)$$

$$m_1 \neq m_2 \text{ et } m'_1 \neq m'_2 : \frac{1}{\sqrt{2}} (|m_1, m_2\rangle + |m_2, m_1\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} (|m'_1, m'_2\rangle + |m'_2, m'_1\rangle). \quad (4.33)$$

Pour ces états symétrisés, le coefficient du taux de transition que l'on note $\mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ peut être déduit à partir de $\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$. Pour les processus exoénergétiques avec $j = 1$ (éq. 4.24), on obtient

$$m_1 = m_2 \text{ et } m'_1 \neq m'_2 : \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = 2 \times \mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}, \quad (4.34)$$

$$m_1 \neq m_2 \text{ et } m'_1 = m'_2 : \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = 2 \times \mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}, \quad (4.35)$$

$$m_1 \neq m_2 \text{ et } m'_1 \neq m'_2 : \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}. \quad (4.36)$$

Pour les processus exoénergétiques avec $j = 2$ (éq. 4.25), on obtient

$$m_1 = m_2 \text{ et } m'_1 = m'_2 : \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}, \quad (4.37)$$

$$m_1 \neq m_2 \text{ et } m'_1 \neq m'_2 : \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2} = \mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}. \quad (4.38)$$

Taux de dissipation total

Premièrement, pour obtenir le changement totale de la densité n , il convient de remplacer dans l'équation (4.27), le coefficient $\mathcal{K}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$ par $\mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}$, puis sommer sur m_1, m_2, m'_1 et m'_2 . On obtient

$$\frac{dn}{dt} = -2 \sum_{m_1 m_2} \beta_{m_1 m_2}^{\text{rd}} n_{m_1} n_{m_2}. \quad (4.39)$$

3. Nos calculs sont en accord avec [80] et diffèrent d'un facteur 4π du résultat donné dans [44].

Le facteur 2 est ajouté pour tenir compte du fait que deux atomes sont perdus. Le coefficient de relaxation dipolaire $\beta_{m_1 m_2}^{\text{rd}}$ est défini comm suit

$$\beta_{m_1 m_2}^{\text{rd}} = \sum_{m'_1 m'_2} \mathcal{S}_{m'_1 m'_2}^{m_1 m_2}. \quad (4.40)$$

Après la somme sur m'_1 et m'_2 , on obtient

$$\beta^{\text{rd}} \simeq \left(\frac{c_{\text{dd}} M}{2\hbar^2} \right)^2 \sqrt{\frac{g\mu_B B_0}{M}} \begin{pmatrix} 111.80 & 93.34 & 90.40 & 87.89 & 75.76 & 54.00 & 22.62 \\ 93.34 & 126.26 & 99.57 & 91.19 & 80.18 & 62.35 & 37.70 \\ 90.40 & 99.57 & 105.41 & 90.33 & 80.30 & 65.27 & 45.24 \\ 87.89 & 91.19 & 90.33 & 85.30 & 81.14 & 62.76 & 45.24 \\ 75.76 & 80.18 & 80.30 & 81.14 & 75.99 & 71.57 & 37.70 \\ 54.00 & 62.35 & 65.27 & 62.76 & 71.57 & 61.54 & 45.24 \\ 22.62 & 37.70 & 45.24 & 45.24 & 37.70 & 45.24 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

Finalement, pour obtenir le taux de dissipation total, on intègre l'équation locale (4.39) sur tout le volume du condensat. Soit,

$$\Gamma_{\text{rd}} = -2 \sum_{m_1 m_2} \int d\mathbf{r} \beta_{m_1 m_2}^{\text{rd}} n_{m_1} n_{m_2}. \quad (4.42)$$

4.1.6 Équation de Gross-Pitaevskii modifiée

Nous allons à présent écrire l'équation dynamique du système. Dans l'expression de l'énergie totale E (éq. 4.1), l'énergie Zeeman linéaire E_z et l'énergie dipolaire E_{dd} sont remplacées par leur moyenne $\langle E_z \rangle$ (éq. 4.15) et $\langle E_{\text{dd}} \rangle$ (éq. 4.21). La dissipation de l'énergie due à la perte d'atomes est prise en compte en ajoutant « à la main » le terme $-i\hbar\Gamma_{\text{rd}}$.

$$\begin{aligned} E[\psi] - i\hbar\Gamma_{\text{rd}} &= \int d\mathbf{r} \sum_m \psi_m^{\text{rot}*} \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}} + qm^2 + \frac{c_0}{2} n^2 \right] \psi_m^{\text{rot}} \\ &+ g\mu_B \int d\mathbf{r} [B_0 + \gamma_z(\mathbf{r})] F_z^{\text{rot}}. \\ &+ \int d\mathbf{r} \left[\frac{c_1}{2} |\mathbf{F}^{\text{rot}}|^2 + \frac{c_2}{2} |A_{00}^{\text{rot}}|^2 + \frac{c_3}{2} \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 |A_{2\mathcal{M}}^{\text{rot}}|^2 \right] \\ &+ \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \mathbf{b}^{\text{rot}} \cdot \mathbf{F}^{\text{rot}} - 2i\hbar \sum_{m_1 m_2} \int d\mathbf{r} \beta_{m_1 m_2}^{\text{rd}} n_{m_1} n_{m_2}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Dans cette dernière expression A_{00}^{rot} et $A_{2\mathcal{M}}^{\text{rot}}$ sont obtenus à partir de l'équation (1.100) en écrivant $\psi_m = \psi_m^{\text{rot}} e^{-im\omega_L t}$ (éq. 4.8). L'équation de Gross-Pitaevskii avec perte s'obtient comme suit

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \frac{\delta(E - i\hbar\Gamma_{\text{rd}})}{\delta \psi_m^*}. \quad (4.44)$$

En utilisant l'équation (4.8), on obtient

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m^{\text{rot}}}{\partial t} + g\mu_B B_0 \psi_m^{\text{rot}} = \frac{\delta(E - i\hbar\Gamma_{\text{rd}})}{\delta\psi_m^{\text{rot}*}}. \quad (4.45)$$

Afin d'alléger les notations, l'exposant « rot » sera omis dans la suite. Néanmoins, nous allons conserver la notation « \mathbf{b}^{rot} » afin de distinguer le champ dipolaire effectif moyenné \mathbf{b}^{rot} (éq. 4.22), du champ dipolaire effectif \mathbf{b} (éq. 1.105). Après quelques étapes de calcul, on obtient

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = & \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}} + g\mu_B \gamma_z + qm^2 + c_0 n \right] \psi_m \\ & + c_1 \sum_{m'} \mathbf{F} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_{m'} + c_2 \frac{(-1)^{3-m}}{\sqrt{7}} A_{00} \psi_{-m}^* \\ & + c_3 \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 \sum_{m'} \langle \mathcal{F}, \mathcal{M} | 3, m; 3, m' \rangle A_{2\mathcal{M}} \psi_{m'}^* \\ & + c_{\text{dd}} \sum_{m'} \mathbf{b}^{\text{rot}} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_{m'} - 4i\hbar \sum_{m'} \beta_{mm'}^{\text{rd}} n_{m'} \psi_m. \end{aligned} \quad (4.46)$$

où $\langle \mathcal{F}, \mathcal{M} | 3, m; 3, m' \rangle$ sont les coefficients de Clebsch-Gordan.

4.2 Dynamiques de spin d'un condensat ferromagnétique

On considère un condensat de ^{52}Cr dans l'état fondamental ferromagnétique. Les spins sont alignés dans la direction $-\hat{e}_z$ et occupent l'état de spin $m = -3$. La fonction d'onde vectorielle du condensat ferromagnétique polarisé est notée $\boldsymbol{\psi}^{\text{F}} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, \sqrt{n})^{\text{T}}$.

Partons de cet état initial, nous allons exciter le système afin d'enclencher des dynamiques de spin. Notre expérience consiste à dévier les spins de leur direction initiale d'un angle $\theta_r \in]0, \pi/2]$ autour de l'axe y . Cette procédure est schématisée sur la figure 4.1. Après rotation, tous les spins sont orientés dans la direction $\hat{e}_r = -\sin\theta_r \hat{e}_x - \cos\theta_r \hat{e}_z$. Pour un angle de rotation θ_r fixé, les fonctions d'ondes ψ_m sont déterminées par

$$\begin{pmatrix} \psi_{+3} \\ \psi_{+2} \\ \psi_{+1} \\ \psi_0 \\ \psi_{-1} \\ \psi_{-2} \\ \psi_{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^6 \frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \sin^4 \frac{\theta}{2} \sin \theta \\ \sqrt{\frac{15}{16}} \sin^2 \frac{\theta}{2} \sin^2 \theta \\ -\sqrt{\frac{5}{16}} \sin^3 \theta \\ \sqrt{15} \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos^4 \frac{\theta}{2} \\ -\sqrt{6} \sin \frac{\theta}{2} \cos^5 \frac{\theta}{2} \\ \cos^6 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \sqrt{n} \quad (4.47)$$

Cette dernière expression est obtenue en appliquant la matrice de rotation $e^{-if_y\theta}$ sur le vecteur de l'état fondamental ferromagnétique $\boldsymbol{\psi}^{\text{F}}$. La matrice de spin f_y est définie par l'équation (1.14).

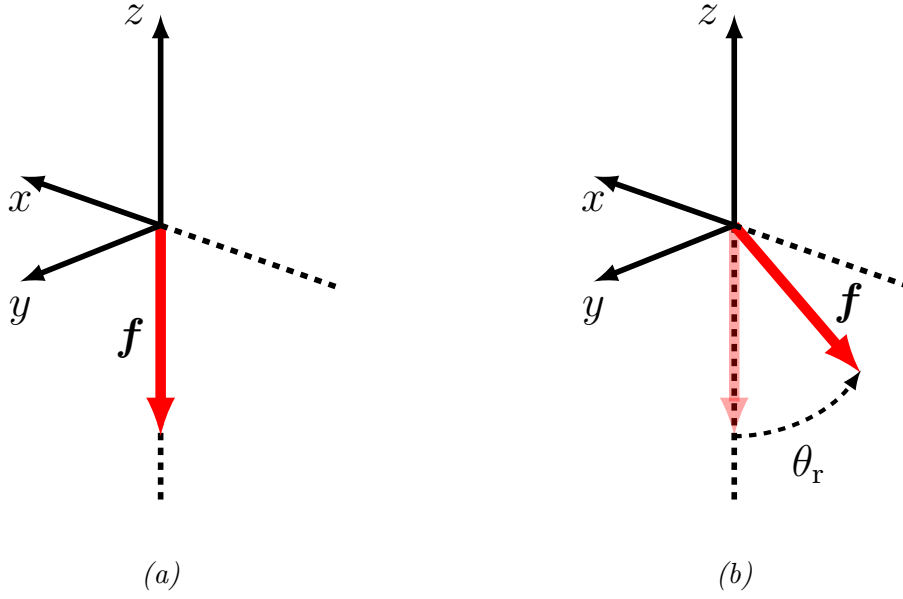


FIGURE 4.1 – La figure (a) montre l’orientation des spins dans l’état fondamental : tous les pins sont orientés dans la direction $-\hat{e}_z$. La figure (b) montre l’orientation des spins à $t = 0$ ms.

4.2.1 Calcul de l’état fondamental ferromagnétique

Dans la sous-section 1.5.2 du premier chapitre, nous avons vu que l’état fondamental d’un condensat de ^{52}Cr piégé est ferromagnétique si le champ magnétique appliqué est de l’ordre de 0.1 mG. Dans le régime que nous considérons ici, le champ magnétique est largement dominant ($B_0 \sim 200$ mG). Dans ce cas, l’état fondamental ferromagnétique peut être obtenu numériquement en minimisant l’énergie dans le sous-espace de spin $m = -3$. Dans ce sous-espace, l’énergie totale est donnée par

$$E[\psi] = \int d\mathbf{r} \psi_{-3}^*(\mathbf{r}) \left[-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + U_{\text{opt}}(\mathbf{r}) - 3g\mu_B B_0 + \frac{1}{2}g_6 |\psi_{-3}(\mathbf{r})|^2 + \frac{9}{2}c_{\text{dd}} \int d\mathbf{r}' Q_{zz}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') |\psi_{-3}(\mathbf{r}')|^2 \right] \psi_{-3}(\mathbf{r}), \quad (4.48)$$

où g_6 est la constante d’interaction de contact (éq. 1.33). Q_{zz} est le noyau dipolaire dans le cas où les spins sont polarisés dans la même direction (éq. 1.69). Notons que l’état fondamental est calculé sans prendre en compte les variations spatiales du champ magnétique. En effet, sans modifier l’état fondamental, la présence d’un gradient va avoir l’effet de décaler le condensat du centre de la grille de calculs. Du point de vue numérique, cet effet n’est pas souhaitable.

Pour les simulations nous considérons un potentiel harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Sur la figure 4.2 nous avons porté trois coupes de la densité de l’état fondamental suivant les trois axes x , y et z du piège. La densité centrale est de $n_0 \simeq 2,51 \times 10^{-20} \text{ m}^{-3}$ pour un nombre d’atomes total de $N_{\text{tot}} = 38 \times 10^3$.

4.2.2 Comportements dynamiques attendus

Au premier chapitre, nous avons vu que l'interaction de contact entre deux atomes dépend du spin total \mathcal{F} des deux atomes, mais ne dépend pas de l'orientation de leurs spins (sect. 1.2). À cause de cette symétrie de rotation, si l'état initial est polarisé dans $m = -3$, les processus de contact dans l'état tourné sont déterminés uniquement par la longueur de diffusion a_6 du canal de spin total $\mathcal{F} = 6$. Comme toutes les paires d'atomes sont dans un état propre de l'Hamiltonien de contact, aucune dynamique liée aux interactions de contact dépendantes du spin n'est attendue.

À l'opposé, les interactions dipolaires brisent cette symétrie de rotation et couplent le spin total $\mathcal{F} = 6$ de l'état ferromagnétique aux états de spin total $\mathcal{F} = 4$. En raison de ce couplage, on peut s'attendre dans l'état tourné à des effets dipolaires qui s'accompagnent de dynamiques de populations de spin. Ce couplage peut aussi entraînés une altération de la nature ferromagnétique du condensat, et par conséquent favoriser les dynamiques de population par interaction de contact dépendante du spin qui font intervenir a_6 et a_4 .

En plus des interactions, le gradient de champ magnétique et l'effet quadratique peuvent influencer sur la dynamique du condensat. Pour voir comment tous ces effets font sortir le système de son état stationnaire et favorisent l'observation de dynamique de spin, il s'avère commode d'utiliser l'équation hydrodynamique du spin introduite au premier chapitre. En écrivant $\mathbf{F} = n\mathbf{f}$, l'équation (1.114), écrite dans le repère de Larmor, devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial(nf_\nu)}{\partial t} + \nabla \cdot (n\mathbf{v}_\nu^{\text{spin}}) &= \frac{g\mu_B}{\hbar} n (\gamma_z \hat{e}_z \times \mathbf{f})_\nu + \frac{c_{\text{dd}}}{\hbar} n (\mathbf{b}^{\text{rot}} \times \mathbf{f})_\nu \\ &+ \frac{2q}{\hbar} n (\hat{e}_z \times \mathcal{N}_z)_\nu, \end{aligned} \quad (4.49)$$

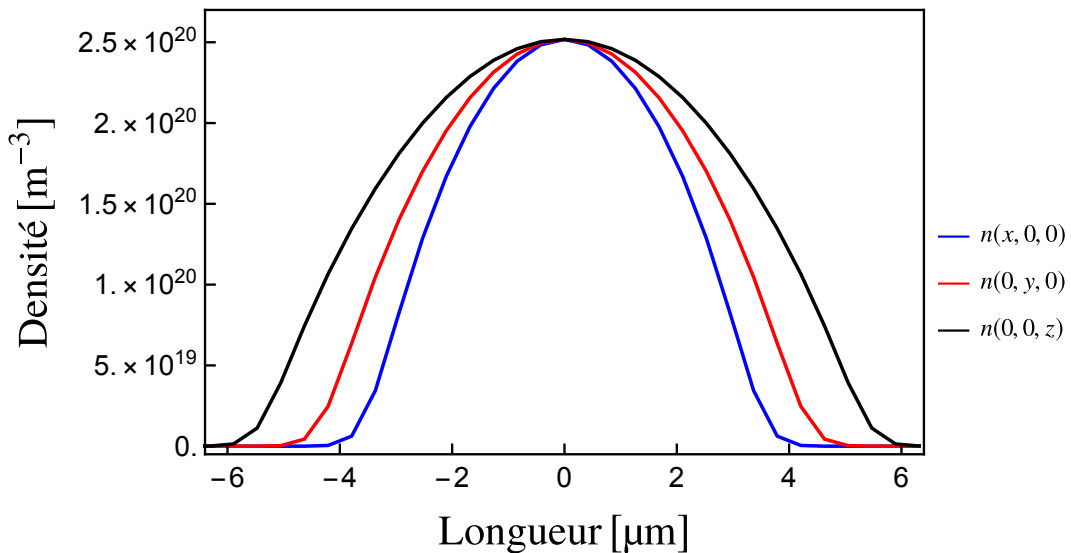


FIGURE 4.2 – Densité totale de l'état fondamental. Les trois courbes représentent des coupes de densité suivant les trois axes x , y et z du piège. La densité centrale $n_0 \simeq 2,51 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Le nombre d'atomes total est $N_{\text{tot}} = 38 \times 10^3$. Les fréquences du potentiel harmonique sont $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

où \mathcal{N} est le tenseur nématique défini par l'équation (1.116). Le flux de spin $n\mathbf{v}_\nu$ est donné par l'équation (1.115).

À présent, regardons l'effet des différents termes de l'équation (4.49) :

- L'interaction dipolaire désaligne les spins dans le plan perpendiculaire à \mathbf{b}^{rot} sous la condition

$$\mathbf{b}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \neq 0 \Leftrightarrow \mathbf{b}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t) \nparallel \mathbf{f}(\mathbf{r}, t). \quad (4.50)$$

Initialement, les spins sont orientés de façon uniforme suivant $\hat{e}_f = -\sin\theta \hat{e}_x - \cos\theta \hat{e}_z$. En calculant le champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} à $t = 0$ ms, on obtient

$$\mathbf{b}^{\text{rot}}(\mathbf{r}) \times \mathbf{f}(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2} \int d\mathbf{r}' \frac{1 - (\mathbf{e} \cdot \hat{e}_z)^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} n(\mathbf{r}') [-3f \cos\theta_r \hat{e}_z \times \mathbf{f}(\mathbf{r})], \quad (4.51)$$

où l'on a remplacé $f_z(\mathbf{r}')$ par $-f \cos\theta_r$. L'expression (4.51) montre que les effets dipolaires sont absents pour un pivotement maximal des spins correspondant à un angle $\theta_r = \pi/2$. Pour des rotations intermédiaires $\theta_r \neq \pi/2$, le champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} introduit à $t = 0$ une précession inhomogène des spins dans le plan transverse

$$\mathbf{b}^{\text{rot}}(\mathbf{r}, t = 0) \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t = 0) \perp \hat{e}_z. \quad (4.52)$$

Dans le même temps, cette précession inhomogène va modifier le champ \mathbf{b}^{rot} . On peut donc s'attendre à un développement de textures de spin complexe dans le condensat.

- Le champ magnétique $\gamma_z(\mathbf{r})$ désaligne aussi les spins dans le plan transverse par précession inhomogène

$$g\mu_B/\hbar (\gamma_z(\mathbf{r})\hat{e}_z \times \mathbf{f}(\mathbf{r}, t)) \perp \hat{e}_z. \quad (4.53)$$

En désalignant les spins, ce qui va avoir comme conséquence de modifier l'orientation locale de \mathbf{b}^{rot} , le champ γ_z pourrait favoriser les effets dipolaires pour $\theta_r = \pi/2$.

- L'effet quadratique q peut modifier⁴ la norme de $|f_\pm| = |f_x \pm if_y|$, tout en gardant la composante f_z constante. Par conséquent, la longueur de spin locale $|\mathbf{f}|$ peut évoluer (décroître) et favoriser des dynamiques de spin qui font intervenir les différentes longueurs de diffusion $a_{\mathcal{F}}$ (interactions de contact dépendantes du spin).

4.2.3 Développement de textures de spin

Nous allons à présent étudier les dynamiques de spin en résolvant numériquement l'équation de Gross-Pitaevskii. Nous allons présenter des résultats pour $\theta_r = \pi/4$ et $\theta_r = \pi/2$. Afin de simplifier cette étude, nous allons travailler à nombre d'atomes constants. Cela veut dire qu'on néglige l'action de la relaxation dipolaire qui induit des pertes du nombre d'atomes total. Ces effets seront discutés dans la section 4.3.

4. L'effet quadratique agit également sur le tenseur nématique \mathcal{N} [57]. En particulier, pour $t \sim 0$ ms on a $\mathcal{N}_{zy} \sim (q/2) \sin\theta_r t$.

Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/4$

On s'intéresse ici à la dynamique du système après une rotation globale des spins d'un angle $\theta_r = \pi/4$ à $t = 0$ ms. Nous avons vu précédemment que cette configuration est favorable au développement de dynamiques de spin de nature dipolaire (ss-sect. 4.2.2). Pour distinguer des effets dipolaires, on pose

$$\gamma_z(\mathbf{r}) = 0 \quad \text{et} \quad q = 0. \quad (4.54)$$

Pour commencer, analysons le comportement des spins au début de l'évolution dynamique. Sur la figure 4.3 on a porté la projection du vecteur \mathbf{f} dans le plan transverse pour $t = 1.5$ ms (fig. 4.3). Les deux sous-figures montrent une modification non uniforme de l'orientation locale des spins dans le plan transverse. Précisons qu'en l'absence d'interaction dipolaire ($c_{dd} = 0$), le condensat reste dans un état stationnaire. La précession des spins reflète donc la nature non uniforme du champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} .

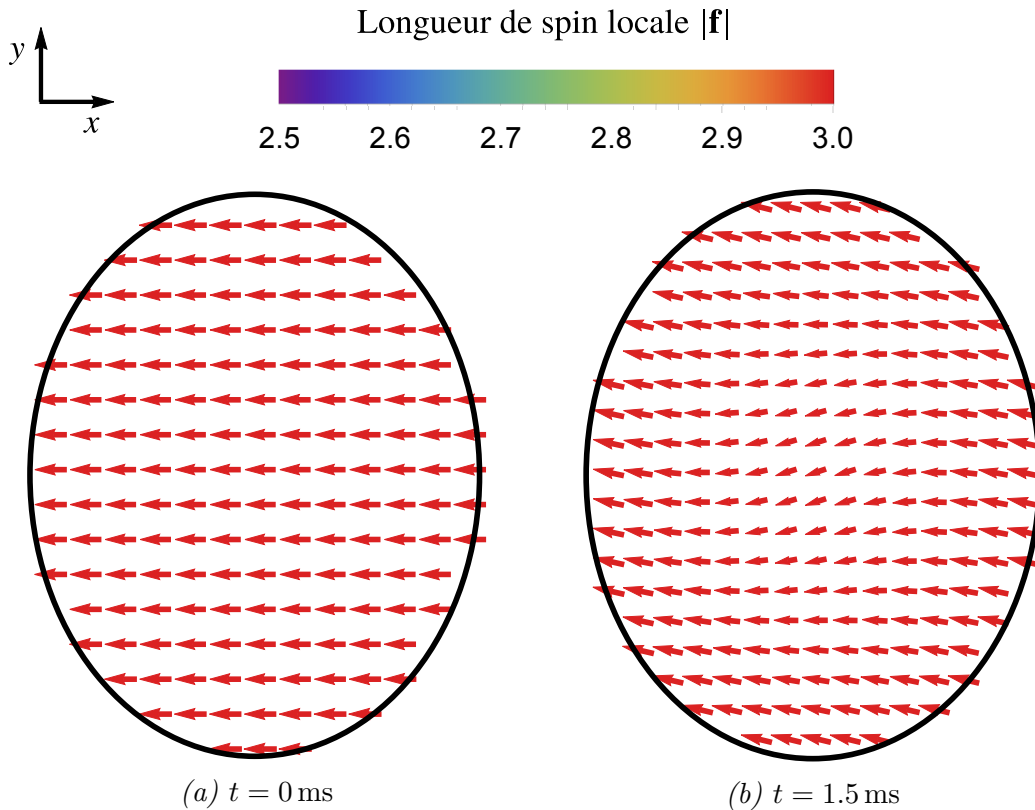


FIGURE 4.3 – Projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan xy à $t = 0$ ms (a) et $t = 1.5$ ms (b). L'échelle de couleur indique la longueur local du spin $|\mathbf{f}(x,y,0)|$. Sur ces deux figures, on observe les effets dipolaires dans le système aux temps courts. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulation, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_z = 0$ et $q = 0$.

Sur la figure 4.4, on a représenté la projection du vecteur \mathbf{f} dans le plan xz pour $t = 7$ ms (fig. 4.4b) et $t = 15$ ms (fig. 4.4c). Les deux sous-figures montrent le développement de textures de spin complexes. En particulier, on observe que la l'évolution de l'orientation locale des spins s'accompagne d'une diminution de la longueur locale des spins $|\mathbf{f}|$. Autrement dit, la nature ferromagnétique du système est altérée au fur et à mesure de l'évolution dynamique.

Pour avoir une information globale sur l'évolution de la nature ferromagnétique du système, on calcule l'évolution de la longueur de spin moyenne Π (éq. 1.126), ainsi que la magnétisation totale par atomes M_{tot} que l'on définit comme suit

$$M_{\text{tot}} = \sqrt{\langle F_x \rangle^2 + \langle F_y \rangle^2 + \langle F_z \rangle^2}, \quad (4.55)$$

où $\langle F_\nu \rangle = \int d\mathbf{r} F_\nu(\mathbf{r})/N$. Dans le cas d'une orientation uniforme des spins, on a l'égalité $M_{\text{tot}} = \Pi$. Dans le cas général $0 \leq M_{\text{tot}} \leq \Pi$.

L'évolution de M_{tot} et Π est portée sur la figure 4.5. La courbe rouge montre que M_{tot} évolue entre une valeur maximale, qui indique une orientation des spins quasi-uniforme, et une valeur minimale qui reflète un désalignement des spins. L'évolution de Π (courbe bleue) montre une altération progressive de l'état ferromagnétique pendant l'évolution dynamique de système. Il est intéressant de noter que la diminution

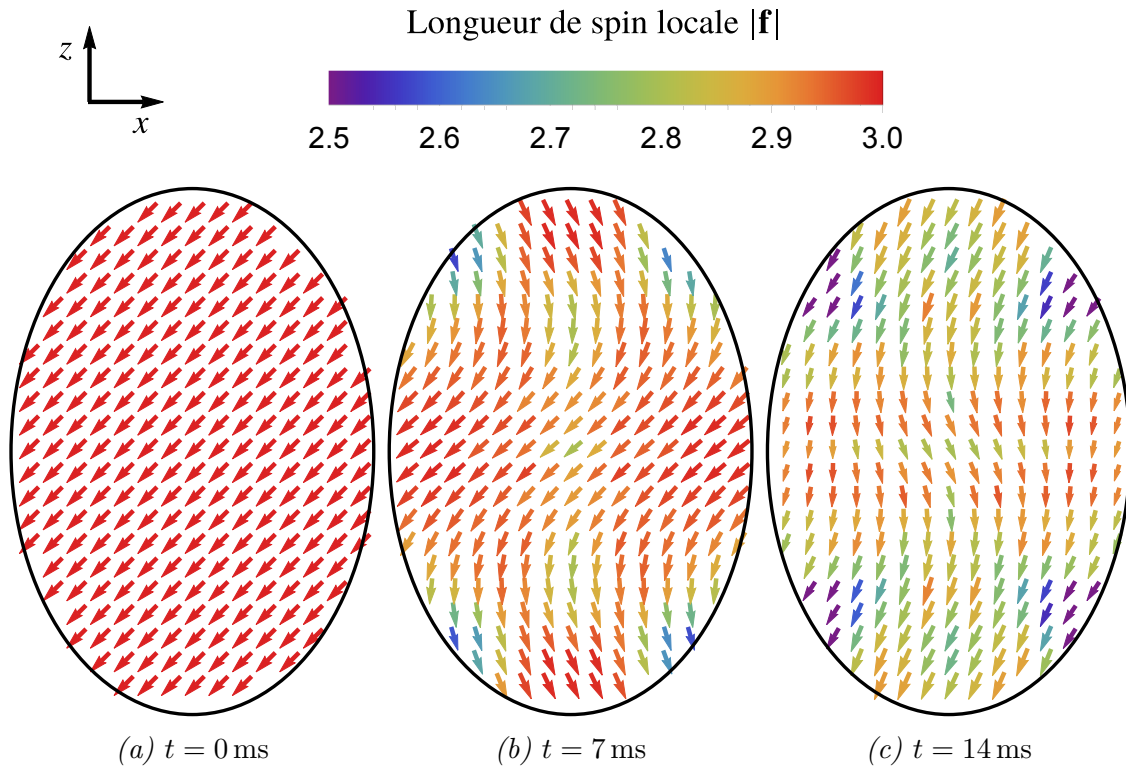


FIGURE 4.4 – Projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan xz . L'échelle de couleur indique la longueur locale du spin $|\mathbf{f}(x,0,z)|$. Les figure montrent l'évolution des textures de spin. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulation, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_z = 0$ et $q = 0$.

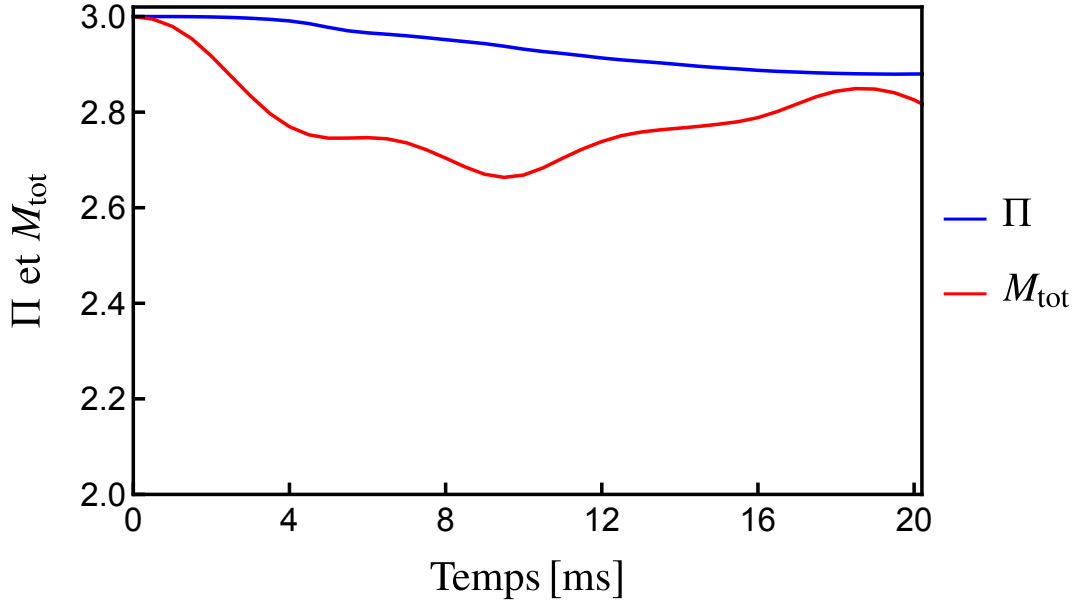


FIGURE 4.5 – Évolution de la longueur de spin moyenne Π (courbe bleue) et de la magnétisation totale M_{tot} (courbe rouge). Ce résultat montre que la variation maximale de Π est inférieure à 5%. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulation, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_z = 0$ et $q = 0$.

de Π reste relativement faible $\Pi(t) \gtrsim 2,87$. Cela correspond à une variation maximale inférieure à 5%. Cette observation suggère une persistance locale de la nature ferromagnétique. Rappelons ici que les processus dipolaires ne conservent pas nécessairement la nature ferromagnétique du condensat. D'autre part, du point de vue énergétique les interactions de contact du ^{52}Cr ne favorisent pas l'état ferromagnétique (sect. 1.5). La persistance du ferromagnétique est donc surprenante. On s'intéressera aux conditions de cette persistance au chapitre 5.

Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/2$

À présent, nous allons analyser le comportement dynamique du système pour un pivotement des spins d'un angle $\theta_r = \pi/2$. Cette configuration n'est pas favorable au déclenchement de dynamiques de spin par un mécanisme dipolaire (ss-sect. 4.2.2). Numériquement, on vérifie que le champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} à $t = 0$ ms est parallèle au vecteur spin \mathbf{f} en chaque point \mathbf{r} du condensat : tous les spins sont orientés dans la direction $-\hat{e}_x$, tandis que les lignes du champ dipolaire sont orientées localement dans les directions $\pm\hat{e}_x$. Pour $\gamma_z = 0$ et $q = 0$, on observe numériquement un comportement stationnaire. Dans ce cas, on soumet le condensat à l'action d'un gradient de champ magnétique. Pour simplifier, on prend $\gamma_{zx} \neq 0$ et $\gamma_{zy} = \gamma_{zy} = 0$. La partie inhomogène du champ magnétique pris en compte s'écrit

$$\gamma_z(\mathbf{r})\hat{e}_z = \gamma_{zx}x\hat{e}_z. \quad (4.56)$$

Dans nos simulations, on prend $\gamma_{zx} = 36$ mG cm $^{-1}$. Ainsi, le long de l'axe x , le condensat de rayon $R \sim 4$ μm est soumis à une variation de champ magnétique de l'ordre de ~ 0.03 mG.

La projection du vecteur \mathbf{f} dans le plan xy , après 2 ms d'évolution dynamique, est portée sur la figure 4.6a. Sur cette figure on observe une précession inhomogène des spins le long de l'axe x sous l'effet du gradient γ_{zx} . À cause de cette précession inhomogène, le champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} évolue. La modification du champ dipolaire est montrée sur la figure 4.6b. En comparant les deux figures, on constate la formation de régions où le champ dipolaire n'est plus parallèle au vecteur spin. Ces résultats montrent comment le gradient rend possible l'action des interactions dipolaires. Notons que le gradient favorise aussi le développement de dynamiques de spin liées au processus d'interaction de contact dépendant du spin. Nous reviendrons sur ce point dans la suite (sect. 4.3.1).

Le développement des textures de spin dans le plan xz est montré par la figure 4.7. Pour distinguer le rôle des interactions des effets induits par le gradient, nous réalisons une deuxième simulation où l'on efface les effets des interactions dépendantes du spin. Pour ce faire, on pose lors de l'évolution dynamique $c_{\text{dd}} = 0$, ce qui annule l'interaction dipolaire. On égale aussi toutes les longueurs de diffusions à a_6 . De cette façon, on conserve la valeur de $c_0 = 4\pi\hbar^2 a_6/M$ qui détermine la densité de l'état

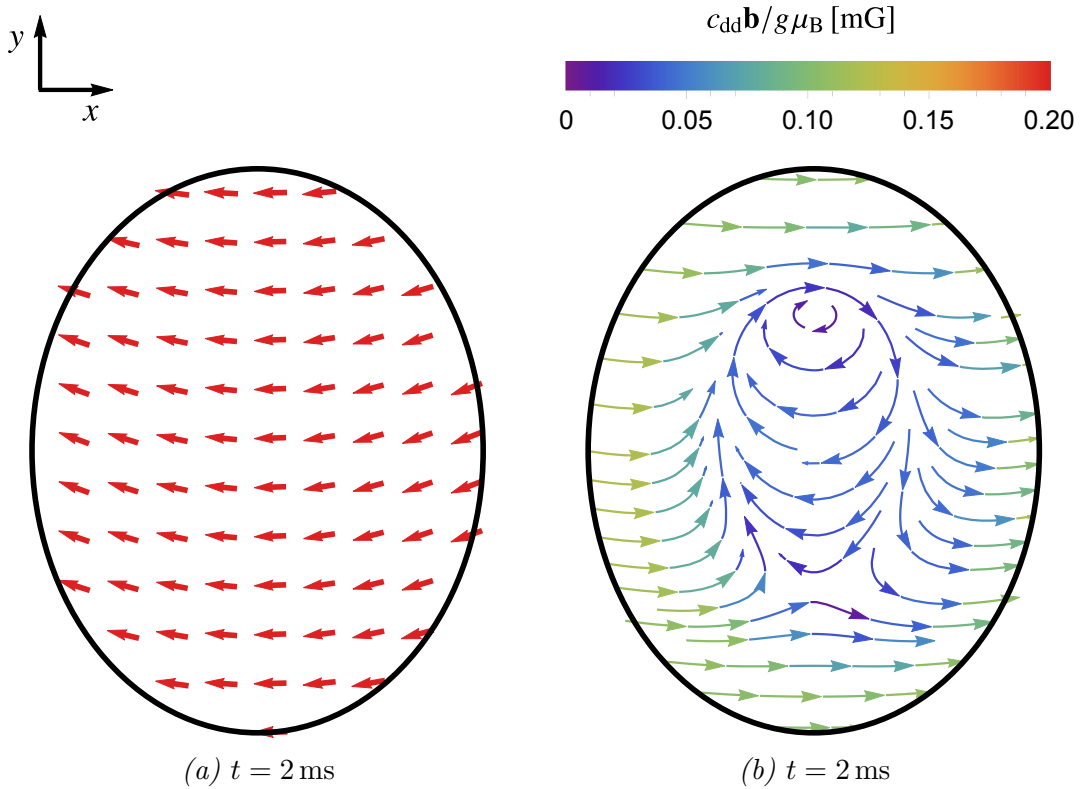


FIGURE 4.6 – La figure (a) représente la projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan transverse après 2 ms d'évolution. La figure (b) montre l'évolution du champ dipolaire $\mathbf{b}_{xy}^{\text{rot}}$ projeté dans le même plan. On observe que le désalignement des spins modifie localement le champ dipolaire. L'échelle de couleur du fond indique le module du champ dipolaire $|\mathbf{b}_{xy}^{\text{rot}}|/\max(|\mathbf{b}^{\text{rot}}|)$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 3.8 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/2$, $\gamma_{zx} = 36$ mG cm $^{-1}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{zz} = 0$ et $q = 0$.

fondamental, et on efface les processus d'interaction de contact dépendants du spin $c_{1,2,3} = 0$. Pour ces deux situations, la projection de \mathbf{f} dans le plan xz , après 8 ms d'évolution, sont portés sur la figure 4.7 :

- Pour $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$, les figures 4.7a et 4.7b montrent l'apparition de textures complexes. Ces textures évoluent dans le temps. En particulier, autour de l'axe central $x = 0 \mu\text{m}$, plusieurs régions de longueur de spin différentes se succèdent.
- Pour $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} = 0$, les figures 4.7c et 4.7d montrent la précession inhomogène des spins suivant l'axe x causée par le gradient γ_{zx} . Par un effet mécanique le gradient décale les composantes de spin $m = +3, \dots, -3$ d'un coté ou de l'autre de l'axe x selon leur état de spin positif ou négatif. Ce mécanisme explique l'observation d'une longueur de spin $\mathbf{f} < 3$ au centre, et qui augmente continuellement en se rapprochant des bords.

En dernière analyse, on s'intéresse à la modification de la nature magnétique du condensat pour les deux situations décrites précédemment. On a porté sur la figure 4.8 l'évolution de la longueur de spin moyenne Π (courbes bleues) et de la magnétisation totale M_{tot} (courbes rouges) :

- Pour $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$, la courbe bleue pleine montre une très faible modification de la longueur de spin moyenne $\Pi(t) > 2,9$. L'évolution maximale de Π est inférieure à 5%. Cela indique que la nature ferromagnétique persiste pendant la dynamique. L'évolution de M_{tot} , portée sur la courbe rouge pleine, met en évidence un comportement oscillatoire : le système oscille entre une configuration où l'orientation des spins est pratiquement homogène et une configuration où les spins sont fortement désalignés. À partir de cette courbe, on peut extraire une fréquence d'oscillation $\omega_s/2\pi \simeq 62 \text{ Hz}$. Faisons remarquer que cette fréquence est inférieure aux fréquences du potentiel de piégeage $\omega_s < \omega_{x,y,z}$.
- Pour $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} = 0$, la courbe bleue en traitillées montre une nette altération de l'état ferromagnétique. La variation maximale de Π est d'environ 40%. Dans ce cas, l'évolution de M_{tot} , portée sur la courbe rouge en traitillées, ne présentent pas d'oscillations régulières.

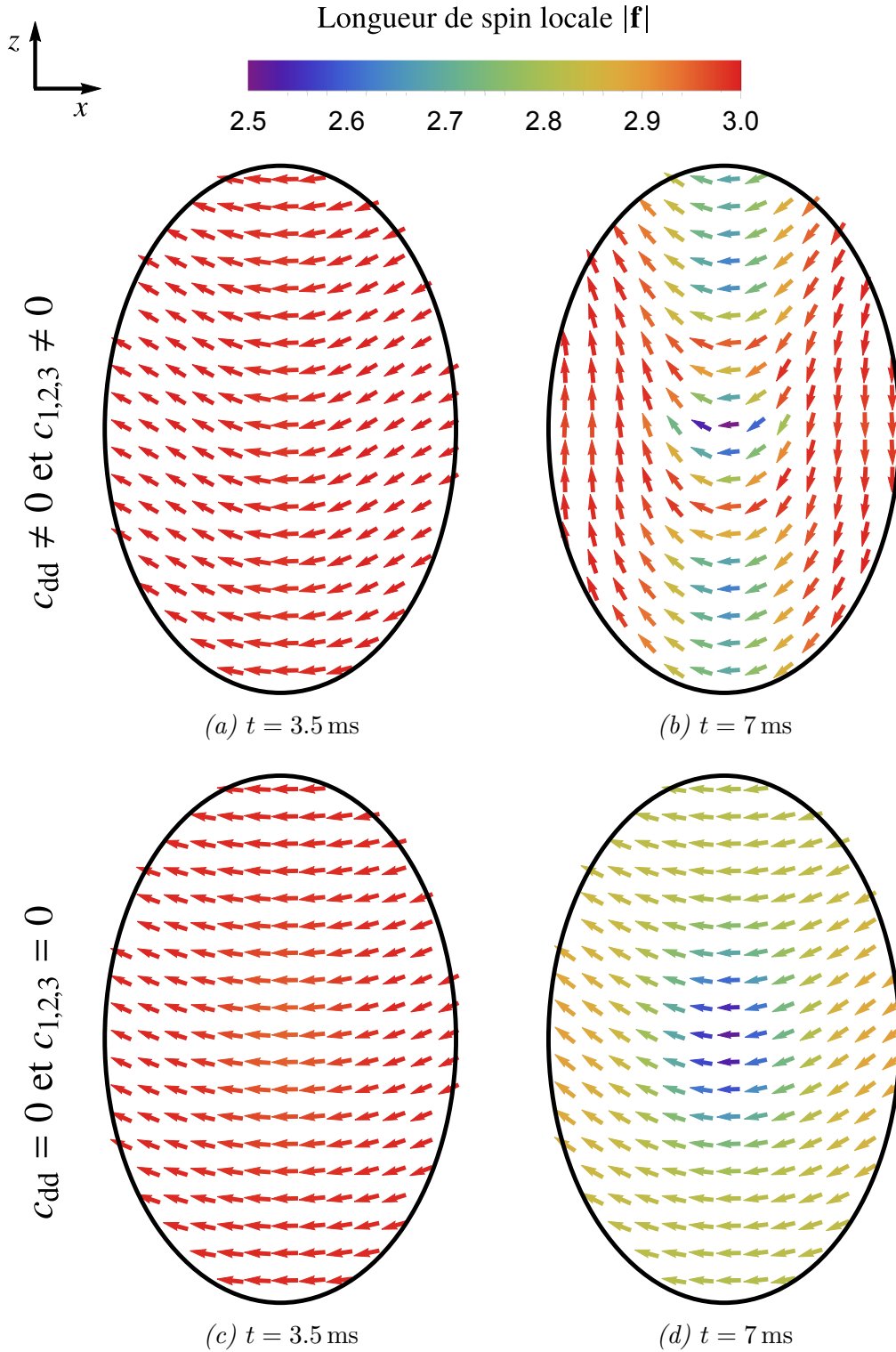


FIGURE 4.7 – Projection du vecteur spin \mathbf{f} dans le plan xz . Les figures montrent l'évolution des textures de spin pour $c_{dd} \neq 0$ (a et b) et $c_{1,2,3} \neq 0$ et pour $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} = 0$ (c et d). L'échelle de couleur indique la longueur locale du spin $|\mathbf{f}(x,0,z)|$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/2$, $\gamma_z = 0$ et $q = 0$.

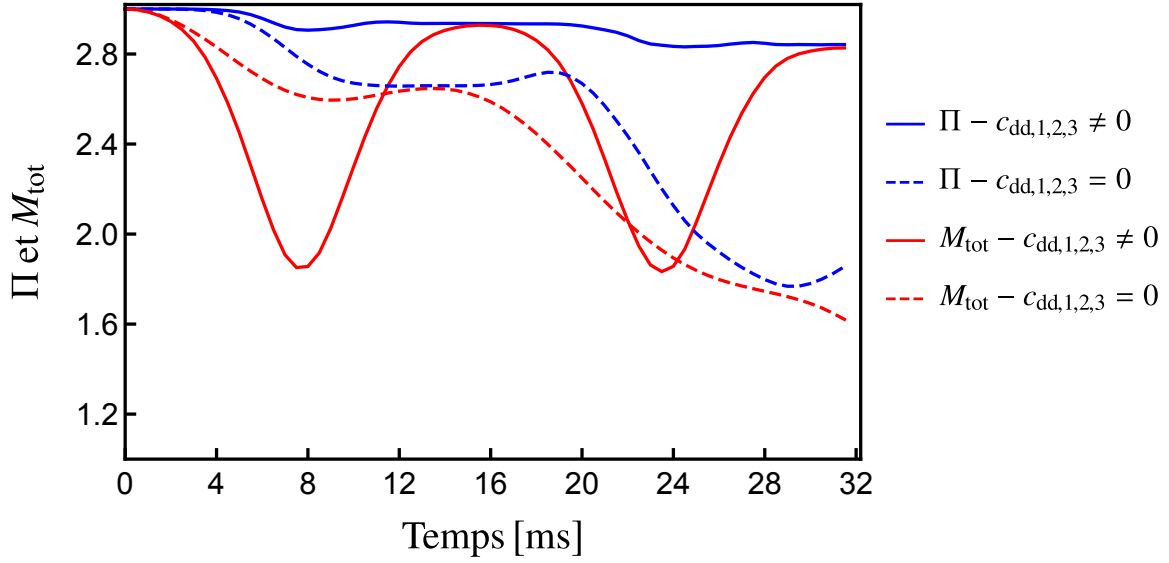


FIGURE 4.8 – Évolution de la longueur de spin moyenne Π (courbes bleues) et de la magnétisation totale M_{tot} (courbes rouges). Ce résultat montre que la variation maximale de Π est inférieure à 5%. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N = 3.8 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298$ Hz, $\omega_y/2\pi = 245$ Hz et $\omega_z/2\pi = 210$ Hz. Pour ces simulations $\gamma_{zx} = 36$ mG cm $^{-1}$, $\gamma_{zy} = \gamma_{zz} = 0$ et $q = 0$.

4.2.4 Conclusion

Nos calculs numériques pour le cas $\theta_r = \pi/4$ montrent un développement instantané de textures de spin. Ces dynamiques sont amorcées par un mécanisme de précession inhomogène induit par le champ dipolaire \mathbf{b}^{rot} . Plus généralement, il est possible de vérifier numériquement que des textures de spin se développent pour tout angle rotation $\theta_r \neq \pi/2$ [34]. Pour le cas particulier d'un angle de rotation $\theta_r = \pi/2$, nous avons montré la présence d'un gradient du champ magnétique favorise le développement de dynamiques de spin en rendant possible l'action des interactions.

Dans ce travail, nous avons mis une évidence une persistance de la nature ferromagnétique initiale du condensat. Cette persistance est indiquée par une faible variation de la longueur de spin moyenne du condensat. De manière générale, les processus dipolaires ne conservent pas la nature ferromagnétique (ss-sect. 4.2.2). Avec des arguments énergétiques, nous avons vu que la nature des interactions de contact dans le cas d'un condensat de ^{52}Cr ($c_1 > 0$), ne favorise pas l'état ferromagnétique (sect. 1.5). Finalement, nous avons montré que le gradient de champ magnétique induit une forte altération de la nature ferromagnétique (fig. 4.8). La persistance du ferromagnétisme est donc inattendue.

Finalement, nos calculs pour $\theta_r = \pi/2$ ont mis en évidence un comportement oscillatoire des spins. Cette observation indique la présence d'oscillations collectives de spin et qui sont caractérisées par une fréquence inférieure aux fréquences du piège $\omega_s < \omega_{x,yz}$.

Ces deux derniers points seront discutés dans le détail au chapitre 5 dans le cadre d'un modèle de fluide ferromagnétique.

4.3 Comparaison aux mesures expérimentales

Dans cette section, nous allons comparer les simulations du modèle développé à la section 4.1 avec des résultats d'expériences réelles réalisées au sein du groupe du LPL. Dans ces expériences, la partie homogène B_0 du champ magnétique est au minimum de l'ordre de 200 mG. A priori, ce régime rentre parfaitement dans le cadre d'application de notre modèle. Pour une densité centrale de $n_0 = 2.51 \times 10^{-20} \text{ m}^{-3}$, le rapport entre l'énergie magnétique et l'énergie dipolaire est de l'ordre de

$$\frac{c_{\text{dd}} n_0}{g \mu_{\text{B}} B_0} \sim 2 \times 10^{-4}. \quad (4.57)$$

Pour des raisons expérimentales, notamment pour tenter de minimiser l'effet quadratique q induit par le système optique, la direction du champ magnétique, dans le repère du laboratoire, peut changer d'une expérience à une autre. Pour plus de détails sur ces réalisations expérimentales, le lecteur est invité à consulter le manuscrit de thèse de Bruno Naylor [83]. Indépendamment de l'orientation du champ magnétique, dans l'état fondamental, les spins sont toujours orientés dans la direction opposée au champ magnétique. La direction de ce champ magnétique ne change pas durant l'expérience.

Pour simplifier la présentation, la direction du champ magnétique sera toujours notée \hat{e}_z . Précisons que nos simulations se conforment à chaque configuration expérimentale. Premièrement, ces modifications concernent la direction des spins de l'état fondamental ferromagnétique dans le repère du laboratoire. Pour chaque expérience, nous calculons l'état fondamental en prenant en compte le nombre d'atomes mesurés expérimentalement et la direction du champ magnétique par rapport au repère du laboratoire. Deuxièmement, rappelons que la forme du champ dipolaire \mathbf{b}_{rot} dépend de la direction du champ magnétique. Cette modification est prise en compte dans nos simulations durant l'évolution dynamique du système. Pour chaque expérience nous disposons de mesures expérimentales des gradients γ_{zx} , γ_{zy} et γ_{zz} . La valeur précise de l'effet quadratique n'est pas connue expérimentalement. Sa valeur est comprise dans l'intervalle

$$|q|/h \ll 25 \text{ Hz}. \quad (4.58)$$

Sauf mention contraire, pour nos calculs on pose $q = 0 \text{ Hz}$. Finalement rappelons que dans notre modèle, la décroissance du nombre d'atomes à cause de la relaxation dipolaire est prise en compte dans l'équation de Gross-Pitaevskii à travers le terme $\beta^{\text{rd}} \propto \sqrt{B_0}$.

4.3.1 Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/4$

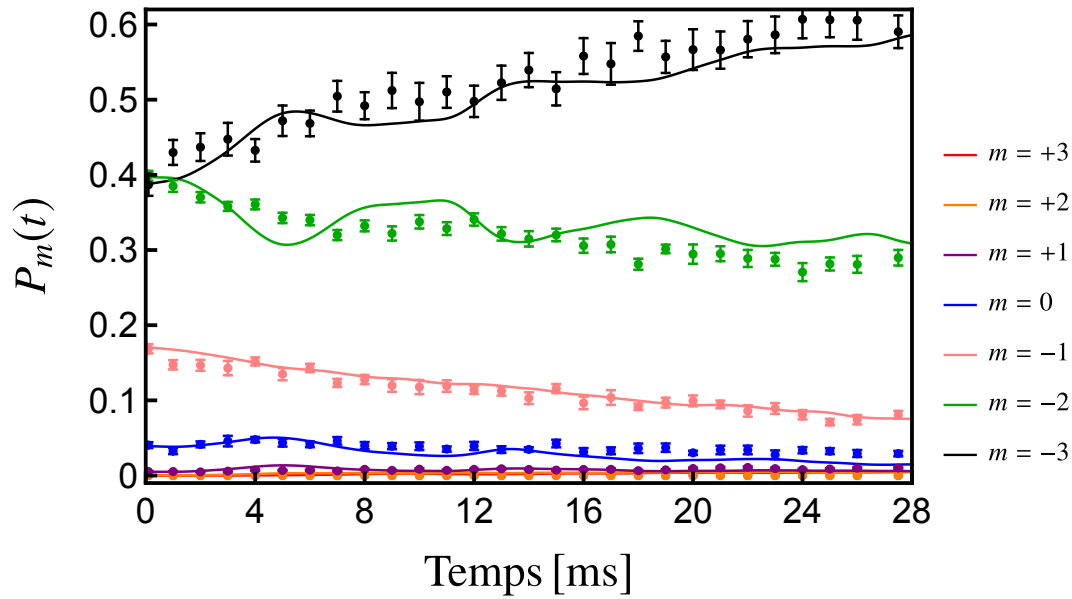
Dans cette sous-section, nous allons présenter les résultats obtenus pour une rotation de spin d'un angle $\theta_r = \pi/4$. Du point de vue expérimental, les gradients γ_{zx}, γ_{zy} et γ_{zz} et l'effet quadratique sont minimisés au mieux afin de distinguer le rôle des interactions. Dans nos simulations, nous prenons en compte les valeurs des gradients suivantes

$$\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}, \quad \gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_{zz} = -1.79 \text{ mG cm}^{-1} \quad (4.59)$$

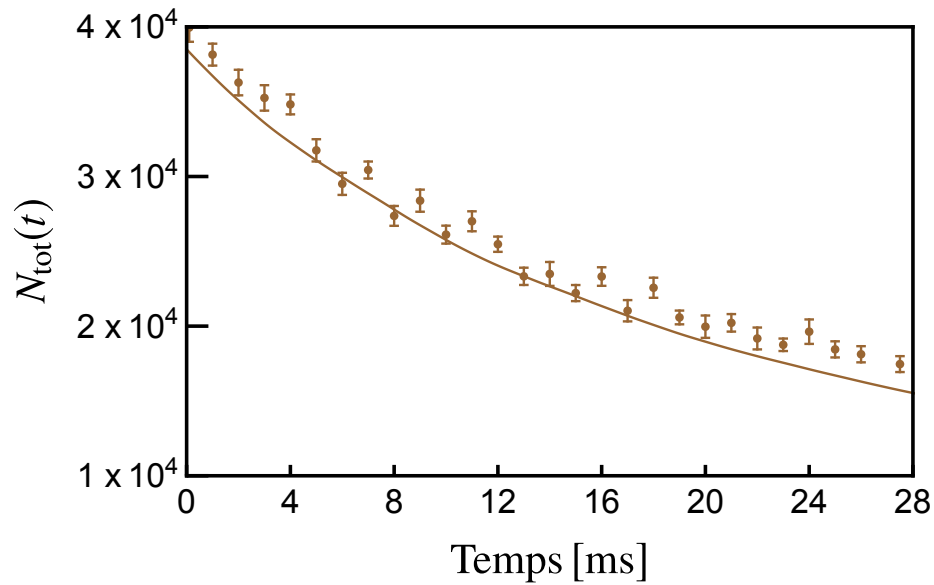
Le champ magnétique pris en compte dans le terme de perte de l'équation de Gross-Pitaevskii est de $B_0 = 190 \text{ mG}$.

Dynamiques des populations de spin

La figure 4.9 montre l'évolution du nombre d'atomes totale N_{tot} et des fractions $P_m = N_m/N_{tot}$ des populations de spin $m = +3, \dots, -3$. Les courbes pleines présentent les résultats de nos calculs numériques et les courbes en pointillés présentent les mesures expérimentales. Cette figure montre un très bon accord entre simulations et expériences. En particulier, on constate sur la figure 4.9b que les pertes d'atomes attribuées aux processus de la relaxation dipolaire sont parfaitement prises en compte dans notre modèle. Sur la figure 4.9a on observe des échanges de populations entre les états de spin $m = -2$ et $m = -3$ sous forme d'oscillations qui s'atténuent progressivement. Les autres populations de spin sont faiblement modifiées.



(a)



(b)

FIGURE 4.9 – La figure (a) montre l'évolution des fractions P_m des 7 populations de spin après un rotation d'un angle $\theta_r = \pi/4$. La figure (b) montre l'évolution du nombre d'atomes total N_{tot} du condensat. Sur les deux figures, les courbes en pointillées représentent les mesures expérimentales avec les barres d'erreur associées. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = -1.79 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 0 \text{ Hz}$ et $B_0 = 190 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

Effet des processus de relaxation dipolaire

On attribue l'atténuation des oscillations d'échange entre P_{-2} et P_{-3} au processus de pertes qui modifie de façon inégale les populations de spin : un atome dans l'état de spin $m = -2$ a plus de chance d'être éjecté du piège optique qu'un atome dans l'état de spin $m = -3$. Rappelons qu'une paire d'atomes dans l'état $m = -3$ ne subit pas de relaxation dipolaire (éq. 4.41). Par conséquent, rapidement un écart important est créé entre les deux fractions P_{-2} et P_{-3} en faveur de P_{-3} .

Nous avons réalisé une deuxième simulation dans les mêmes conditions, mais dans laquelle le nombre d'atomes N_{tot} reste constant le long de la dynamique. Les résultats d'évolution des fractions P_{-2} et P_{-3} sont présentés sur la figure 4.11 en courbes traitillées. Pour la commodité, nous avons repris sur la même figure les résultats de la première simulation réaliste et les résultats expérimentaux. Pour N_{tot} constant, on observe clairement la persistance des oscillations d'échanges entre les deux populations de spin.

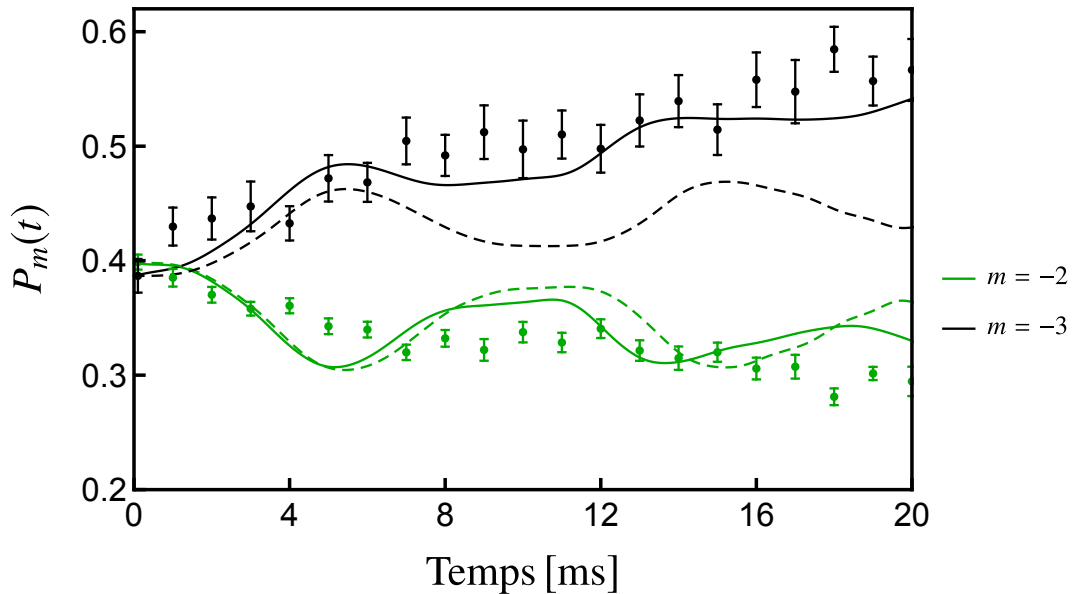


FIGURE 4.10 – Évolution des fractions P_{-2} et P_{-3} . Les résultats des simulations sont présentées en lignes pleine dans le cas où $-i\Sigma_{\text{rd}}(B_0) \neq 0$ et en lignes traitillées dans le cas où $-i\Sigma_{\text{rd}}(B_0) = 0$. Les courbes en pointillées représentent les mesures expérimentales avec les barres d'erreur associées. En l'absence de pertes d'atomes, les populations des deux état oscillent à la même fréquences $\omega_s/2\pi \simeq 100\text{Hz} \ll \omega_{\text{piège}}$. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = -1.79 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 0 \text{ Hz}$ et $B_0 = 190 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

Effet des interactions sur les dynamiques des populations

Nous réalisons deux simulations supplémentaires. Dans la première, nous effaçons les effets dipolaires en posant $c_{dd} = 0$. Dans la deuxième, nous effaçons les effets des interactions de contact dépendantes de spin en posant $a_{0,2,4} = a_6$, soit $c_{1,2,3} = 0$. Pour ces deux simulations, le nombre d'atomes total N_{tot} est gardé constant durant la dynamique. L'évolution de la fraction P_{-3} est présentée sur la figure 4.11. Sur la même figure, nous avons aussi porté en ligne pleine l'évolution de P_{-3} pour $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$:

- Pour $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$, la courbe en pointillés montre que P_{-3} est pratiquement inchangée. Cette faible évolution est favorisée par le gradient du champ magnétique. Notons que les gradients pris en compte sont très faibles.
- Pour $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} = 0$, la courbe en traitillés montre une dynamique de purement dipolaire. Néanmoins, cette dynamique est très différente de celle observée pour $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$ (ligne pleine). Ces résultats montrent que l'interaction dipolaire joue un rôle déclencheur. Néanmoins, l'évolution des dynamiques de populations est fortement modifiée par les processus d'interactions de contact dépendantes du spin.

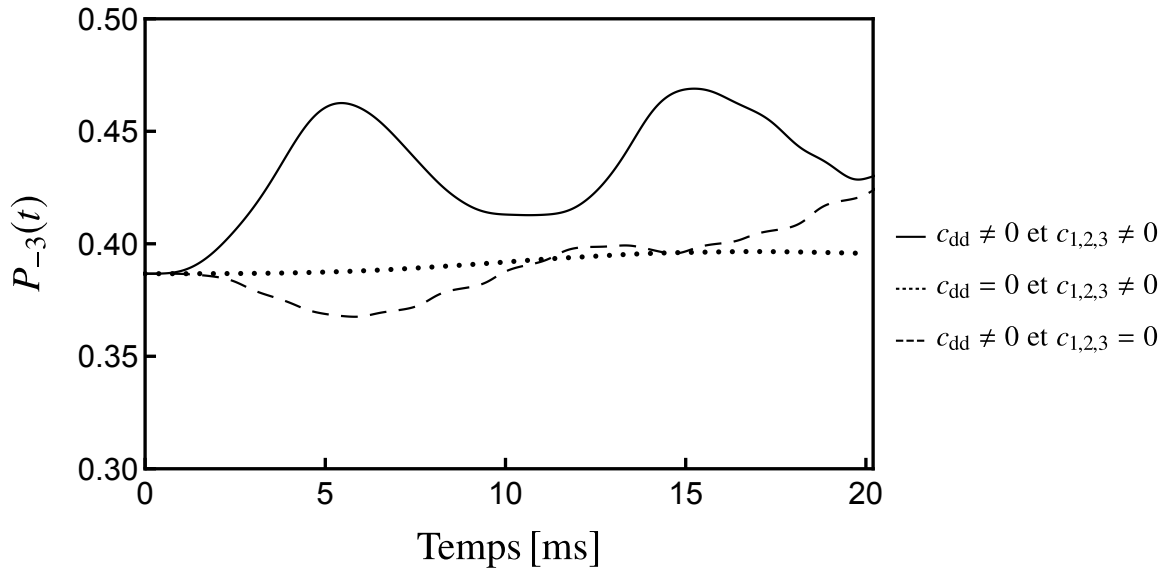


FIGURE 4.11 – Évolution de la fraction P_{-3} avec N_{tot} constant. Courbe pleine : $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$. Courbe pointillée : $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$. Courbe traitillée : $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} = 0$. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/4$, $\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = -1.79 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 0 \text{ Hz}$ et $B_0 = 190 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

4.3.2 Rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/2$

Dans cette sous-section nous traitons le cas particulier d'un angle de rotation $\theta_r = \pi/2$. Nous allons présenter deux cas de figure en fonction du gradient du champ magnétique.

Premier cas : régime de faibles gradients

Pour cette expérience, les gradients et l'effet quadratique sont minimisés du point de vue expérimental. Les valeurs des gradients prises en compte dans nos calculs sont

$$\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}, \quad \gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_{zz} = -1.79 \text{ mG cm}^{-1} \quad (4.60)$$

Le champ magnétique pris en compte dans le terme de pertes de l'équation de Gross-Pitaevskii est de $B_0 = 190 \text{ mG}$.

Les mesures expérimentales des populations de spin et de l'évolution du nombre d'atomes total du condensat sont présentées sur la figure 4.12 par des courbes en lignes pointillées. Cette figure montre de très faibles modifications des fractions P_m qui indiquent l'absence de dynamiques de spin. Ces résultats sont compatibles avec nos simulations qui ne prévoient aucune dynamique de spin dans ce cas particulier. Nous attribuons les faibles modifications des populations à la présence d'un effet quadratique faible, mais non nulle. Nous avons réalisé plusieurs simulations en variant l'effet quadratique dans l'intervalle $0 \text{ Hz} \lesssim q/h \ll 25 \text{ Hz}$. D'après nos simulations l'effet quadratique devrait être proche de $q \sim 6 \text{ Hz}$. Cette valeur est obtenue en minimisant le χ^2 en les données expérimentales et les calculs numériques.

Deuxième cas : régime de fort gradients

Pour cette expérience, les gradients sont minimisés uniquement suivant les axes x et z . Les valeurs prises en compte dans nos calculs sont

$$\gamma_{zx} = 2.55 \text{ mG cm}^{-1}, \quad \gamma_{zy} = -3.32 \text{ mG cm}^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma_{zz} = 51 \text{ mG cm}^{-1} \quad (4.61)$$

Le champ magnétique pris en compte dans le terme de perte de l'équation de Gross-Pitaevskii est de $B_0 = 348 \text{ mG}$.

L'évolution des fractions P_m sont portés sur la figure 4.13. Comme on peut le constater sur les sous-figures, nos simulations (lignes pleines) sont en très bon accord avec les mesures expérimentales (lignes pointillées). Le seul paramètre ajustable dans nos simulations est l'effet quadratique. Les calculs présentés sur la figure prennent en compte un effet quadratique $q = 6 \text{ Hz}$ obtenu en minimisant le χ^2 . Notons que pour $q/h = 0 \text{ Hz}$, nos simulations sont en bon accord avec les expériences. Ces résultats montrent que la présence d'un gradient de champ magnétique relativement fort favorise le développement des dynamiques de population. Ce résultat rejoint les conclusions de la section précédente ([ss-sect. 4.2.4](#)).

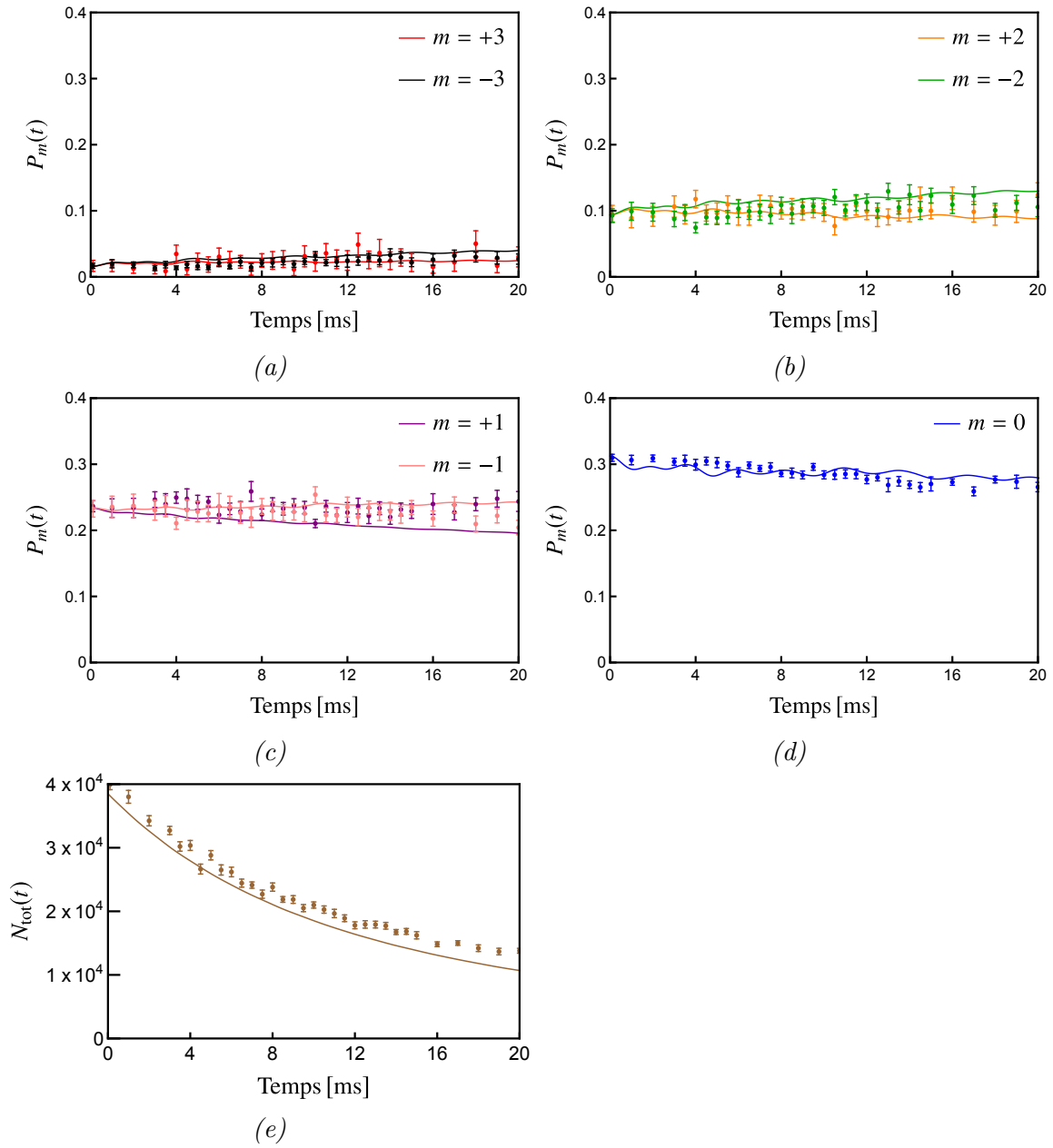


FIGURE 4.12 – Les figures *a* à *d* montrent l'évolution des fractions $P_m(t)$ des 7 populations de spin après une rotation d'un angle $\theta_r = \pi/2$. La figure *e* montre l'évolution du nombre d'atomes totale $N_{\text{tot}}(t)$ du condensat. Sur les deux figures, les courbes en pointillées représentent les mesures expérimentales avec les barres d'erreur associées. Pour la simulation, nous avons pris en compte les valeurs des gradients $\gamma_{zx} = 3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = -3.57 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = 1.79 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 6 \text{ Hz}$ et $B_0 = 190 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

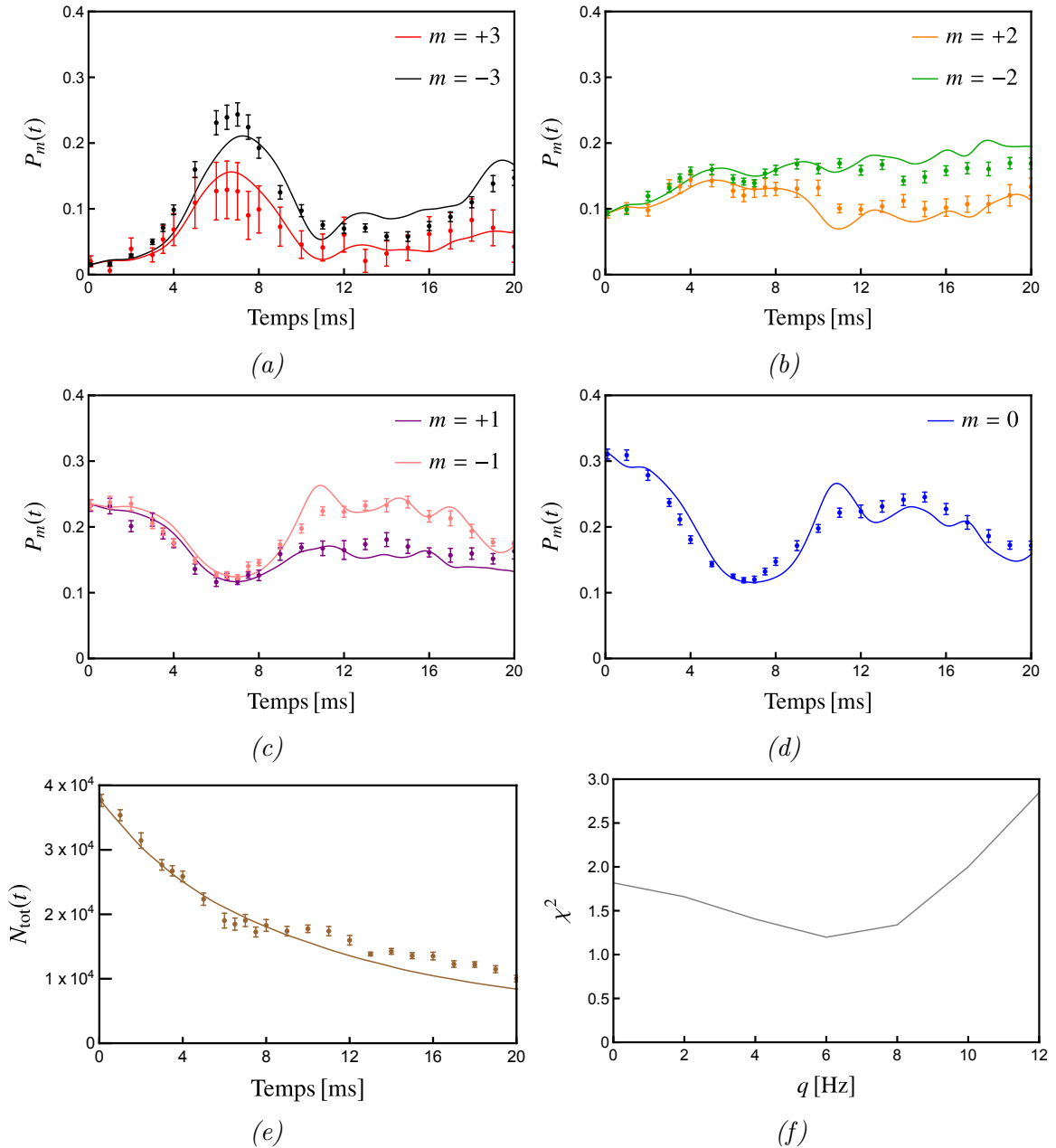


FIGURE 4.13 – Les figures (a) à (d) montrent l'évolution des fractions $P_m(t)$ des 7 populations de spin après une rotation d'un angle $\theta_r = \pi/2$. La figure (e) montre l'évolution du nombre d'atomes totale $N_{\text{tot}}(t)$ du condensat. La figure (f) donne l'effet quadratique q qui minimise le χ^2 . Dans toutes ces figures, les courbes en pointillées représentent les mesures expérimentales avec les barres d'erreur associées. Pour la simulation, nous avons pris en compte les valeurs des gradients $\gamma_{zx} = 2.55 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = 51 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = -3.22 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 6 \text{ Hz}$ et $B_0 = 348 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

Effets des interactions dépendantes du spin.

Nous avons réalisé des simulations en effaçant l'effet des interactions de contact ou des interactions dipolaires. Pour ces simulations N_{tot} constant. On considère ici le cas du fort gradient traité précédemment. L'évolution de la fraction P_0 et l'évolution de la longueur de spin moyenne Π sont portées, respectivement, sur les figures 4.14a et 4.14b :

- Pour $c_{\text{dd}} = 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$ les résultats sont présentés avec des courbes en pointillées. Dans ce cas, on observe une variation significative de la fraction P_0 . La variation maximal de P_0 est d'environ 70%. L'évolution de Π correspondante est faible et est inférieur à 5%.
- Pour $c_{\text{dd}} \neq 0$ et $c_{1,2,3} = 0$, les résultats sont présentés avec des courbes en traitillés. Dans ce cas, on observe une variation maximale de P_0 d'environ 15% accompagné d'une variation maximale de Π d'environ 30%.
- Finalement, en comparant ces résultats aux cas où $c_{\text{dd}} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$ (courbes pleines), on constate que les dynamiques des populations sont essentiellement dominées par les interactions de contact. Aussi, la comparaison entre ces résultats montre que la nature ferromagnétique du condensat est mieux conservée en présence des interactions de contact, et moins bonne en présence d'interactions dipolaires. Cette dernière observation suggère que les interactions de contact sont à l'origine de la persistance du ferromagnétisme.

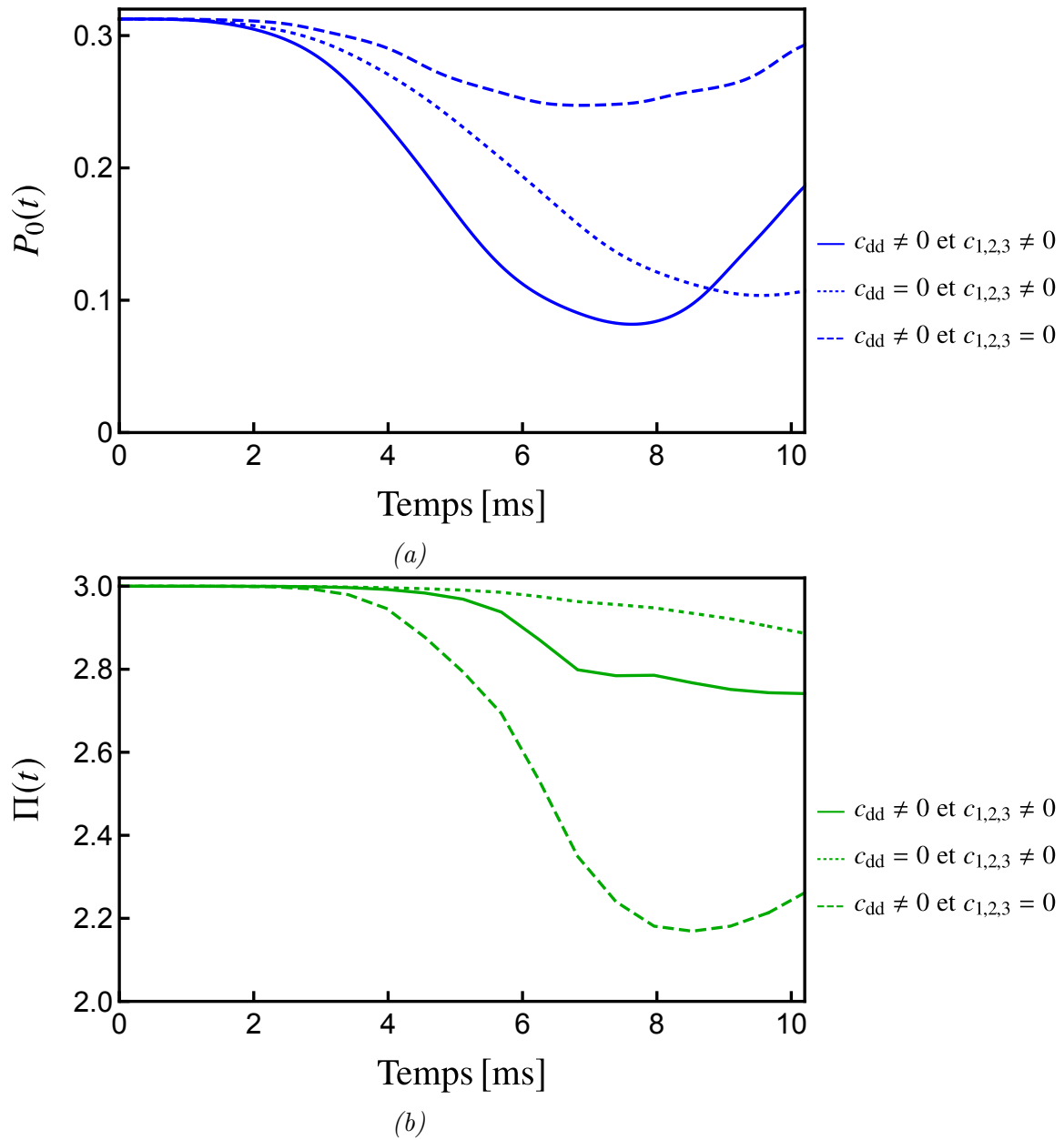


FIGURE 4.14 – Évolution de P_0 (a) et de Π (b). Courbe pleine : $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$. Courbe pointillée : $c_{dd} = 0$ et $c_{1,2,3} \neq 0$. Courbe traitillée : $c_{dd} \neq 0$ et $c_{1,2,3} = 0$. Pour ces simulations, $\theta_r = \pi/2$, $\gamma_{zx} = 2.55 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = -3.32 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = 51 \text{ mG cm}^{-1}$, $q = 0 \text{ Hz}$ et $B_0 = 348 \text{ mG}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

4.3.3 Conclusion

De la comparaison entre les simulations et les expériences, il en ressort un très bon accord. L'équation de Gross-Pitaevskii augmentée d'un terme de perte permet de comprendre les dynamiques de populations observées expérimentalement.

Pour $\theta_r = \pi/4$ et $c_{dd}=0$, nous avons montré que la présence de gradients de champ magnétique faibles ne permet pas d'expliquer les dynamiques observées expérimentalement. Pour $c_{dd} \neq 0$, nous avons un très bon accord avec l'expérience qui nous a permis de confirmer la nature dipolaire des dynamiques observées. En dernier, nous avons montré que l'évolution des populations dépend fortement des interactions de contact. Pour $c_{dd}=0$.

Pour $\theta_r = \pi/2$, nous avons présenté des résultats à faible et à fort gradient. Dans les deux cas, les simulations permettent d'expliquer les dynamiques observées expérimentalement. En présence de faibles gradients, l'évolution des populations de spin est faible. En présence d'un gradient fort, nous avons observé une variation significative des populations de spin. Nous avons montré que ces dynamiques sont essentiellement dominées par les interactions de contact. Finalement, nos calculs numériques montrent une meilleure conservation de la nature ferromagnétique en présence d'interaction de contact. Ce résultat va être confirmé au chapitre suivant.

Chapitre 5

Protection du ferromagnétisme et modes collectifs de spin dans un ferrofluide

Au chapitre précédent, consacré à l'étude des dynamiques de spin à fort champ magnétique, nous avons mis en évidence deux comportements nouveaux. Premièrement, nous avons observé une tendance du condensat à conserver sa nature ferromagnétique durant l'évolution dynamique. Deuxièmement, nous avons observé un comportement oscillatoire collectif des spins. Ces deux observations sont analysées dans ce présent chapitre. Notons que dans ce travail, nous négligeons l'interaction dipolaire ($c_{\text{dd}} = 0$). Les effets dipolaires sur les oscillations de spin seront brièvement discutés à la fin du chapitre.

Dans la section 5.1, nous allons introduire un modèle de fluide quantique incompressible. Nous allons notamment discuter les limites de ce modèle, puis écrire les équations dynamiques du vecteur spin \mathbf{f} et de la longueur de spin $|\mathbf{f}|$.

La section 5.2 est consacrée à la persistance du ferromagnétisme. Nous allons considérer un système de densité uniforme soumis à l'effet d'un gradient de champ magnétique. Pour le cas particulier du spin $f = 1$, nous allons montrer que la persistance du ferromagnétisme peut s'expliquer par une compétition entre l'énergie cinétique introduite par le gradient du champ magnétique $\nabla\gamma_z$ et l'énergie ferromagnétique $|c_1|n$. Cette condition s'écrit comme suit

$$\frac{(g\mu_B\nabla\gamma_z)^2}{M}T^2 \ll 2|c_1|n, \quad (5.1)$$

où T est la durée de l'évolution dynamique.

La section 5.3 est consacrée aux oscillations collectives de spins dans un condensat piégé. On supposera que la nature ferromagnétique du condensat est parfaitement conservée durant l'évolution dynamique (ferrofluide). En résolvant l'équation dynamique de \mathbf{f} pour des oscillations de spin de faibles amplitudes, on obtient des modes avec des fréquences de l'ordre de

$$\omega_s = \hbar/M\sigma^2 \ll \omega_{x,y,z}, \quad (5.2)$$

où σ est la taille du condensat. En particulier, on note que le mode de plus basse énergie est caractérisé par la fréquence ω_s qui est inférieure aux fréquences du potentiel harmonique $\omega_{x,y,z}$.

Des oscillations de spin caractérisées par la fréquence ω_s ont été observées expérimentalement dans le groupe du LPL [38]. Ces résultats expérimentaux sont présentés à la fin de la section.

5.1 Modèle d'un fluide quantique incompressible

Nous avons vu au premier chapitre que la description d'un condensat de Bose-Einstein peut se faire à l'aide d'un ensemble d'équations hydrodynamiques. Nous allons dans cette section considérer cette approche pour décrire la dynamique d'un fluide quantique incompressible. Après avoir discuté les limites de ce modèle, nous allons écrire l'équation dynamique de l'évolution du spin \mathbf{f} , puis obtenir l'équation dynamique de la longueur de spin locale $|\mathbf{f}|$ du système.

5.1.1 Un fluide incompressible

Nous considérons un condensat ferromagnétique polarisé suivant l'axe z par application d'un fort champ magnétique. Le système est décrit dans le repère de Larmor. Nous négligeons les effets dipolaires ($c_{\text{dd}} = 0$), et l'on suppose que le système est soumis à un gradient de champ magnétique. On s'intéresse ici à des dynamiques de spin qui n'affectent pas le profil de densité totale n du condensat. Cela revient à faire l'hypothèse d'un fluide incompressible¹ [68]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) \approx 0. \quad (5.3)$$

Pour que cette hypothèse soit vérifiée, il est au moins nécessaire que les échelles d'énergies des ondes de spin $\propto c_{k \neq 0} n$, soit largement inférieure à l'échelle d'énergie des ondes de densité $\propto c_0 n$ [42, 64, 68]. En particulier, pour un système dans l'état ferromagnétique, les énergies d'interactions de contact liées aux paramètres $c_{k > 1}$ sont nulles (sect. 1.5). Dans ces conditions, on peut s'attendre à ce que les dynamiques de spin ne soient décrites initialement que par le paramètre c_1 . Ainsi, pour que l'hypothèse (5.3) soit vérifiée, il est au moins nécessaire d'avoir

$$c_1/c_0 \ll 1. \quad (5.4)$$

Par exemple, pour un condensat d'atomes de chrome, en utilisant les valeurs de c_0 et c_1 données dans le tableau 1.2, on trouve

$$c_1/c_0 \sim 0.06. \quad (5.5)$$

Précisons que dans nos simulations numériques (Gross-Pitaevskii), nous avons bien constaté que dans le cas d'un condensat ferromagnétique non dipolaire, les dynamiques de spin sont dominées par les processus décrit par c_1 (annexe C). Nous avons

1. À strictement parler, pour un fluide incompressible il faut avoir $\partial n / \partial t = 0$ et $\nabla n = 0$.

aussi constaté que l'hypothèse (5.3) est vérifiée. Dans la suite de ce chapitre, nous allons faire l'hypothèse suivante

$$\frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} |A_{00}|^2 \approx 0 \quad \text{et} \quad \frac{c_3}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{\mathcal{M}=-2}^2 |A_{2\mathcal{M}}|^2 \approx 0. \quad (5.6)$$

5.1.2 Équation hydrodynamique du spin

L'équation de continuité (1.111) liant la densité au flux de masse $n\mathbf{v}$, appliquée à un fluide quantique incompressible donne

$$\frac{\partial}{\partial t} n(\mathbf{r}, t) = \nabla \cdot [n(\mathbf{r}, t)\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)] \approx 0. \quad (5.7)$$

La vitesse de masse \mathbf{v} est définie par l'équation (1.112). La vitesse \mathbf{v} est liée à la vitesse de spin \mathbf{v}_ν définie en (1.112) par la relation suivante [57]

$$\mathbf{v}_\nu(\mathbf{r}) = f_\nu \mathbf{v} - \frac{\hbar}{M} \left[\frac{1}{4} f_\nu \times (\nabla f_\nu) + \sum_\eta \mathcal{N}_\eta \times (\nabla \mathcal{N}_\eta) \right], \quad (5.8)$$

où f_ν sont les composantes du vecteur spin \mathbf{f} définies par (1.123) et \mathcal{N} est le tenseur nématique défini par l'équation (1.116). En utilisant les équations (5.7) et (5.8), l'équation hydrodynamique du vecteur spin \mathbf{f} (éq. 4.49) en présence d'un champ magnétique inhomogène $\gamma_z(\mathbf{r})$ devient

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu &= \mathbf{f} \times \left[\frac{\hbar}{4M} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{f} + \frac{\hbar}{4M} \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{g\mu_B}{\hbar} \gamma_z \hat{e}_z \right] \\ &+ \sum_\eta \mathcal{N}_\eta \times \left[\frac{\hbar}{M} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \right) \mathcal{N}_\eta + \frac{\hbar}{M} \nabla^2 \mathcal{N}_\eta \right], \end{aligned} \quad (5.9)$$

Précisons que dans l'équation (4.49) nous avons aussi posé $q = 0$ et $c_{\text{dd}} = 0$.

5.1.3 Équation d'évolution de la longueur de spin locale

En écrivant $|\mathbf{f}|^2 = \mathbf{f} \cdot \mathbf{f}$, on en déduit

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)|^2 = 2\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \quad (5.10)$$

Dans l'approximation du fluide incompressible discutée précédemment, l'évolution de \mathbf{f} est donnée par (5.9). En multipliant (produit scalaire) cette équation par \mathbf{f} , les termes du coté droit de la première ligne s'annulent. Ainsi, l'équation dynamique de la longueur de spin (5.10) dans le cas d'un fluide incompressible devient

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)|^2 = 2\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathcal{K}(\mathbf{r}, t) \quad (5.11)$$

où les composantes du vecteur \mathcal{K} sont données par

$$\mathcal{K}_\nu = \mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu + \frac{\hbar}{M} \sum_{\mu\lambda\eta} \epsilon_{\nu\mu\lambda} \left[\hat{\mathcal{N}}_{\mu\eta} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \hat{\mathcal{N}}_{\lambda\eta} \right) + \hat{\mathcal{N}}_{\mu\eta} \nabla^2 \hat{\mathcal{N}}_{\lambda\eta} \right]. \quad (5.12)$$

Cette équation est valable pour un système de spin f . Elle montre que l'évolution de la longueur de spin est liée d'une part au développement de flux de masse \mathbf{v} et des textures de spin ∇f_ν et d'autre part aux inhomogénéités des fluctuations de spin décrites par $\nabla \hat{\mathcal{N}}_{\nu\mu}$ et $\nabla^2 \hat{\mathcal{N}}_{\nu\mu}$. Notons que dans les équations (5.11) et (5.12) les inhomogénéités spatiales du champ magnétique $\gamma_z(\mathbf{r})$ susceptibles de faire évoluer la longueur de spin locale, n'apparaissent pas de façon explicite. Dans la section suivante, nous allons voir comment la précession inhomogène des spins en présence de $\gamma_z(\mathbf{r})$ va avoir tendance à modifier la longueur du spin localement.

5.2 Protection du ferromagnétisme

Dans cette section, nous allons proposer une interprétation de la persistance ferromagnétique observée durant le développement des dynamiques de spins étudiées au chapitre 4. Nous traitons ici le cas d'un fluide incompressible de densité totale spatialement uniforme n , et nous négligeons les effets dipolaires ($c_{\text{dd}} = 0$). À $t = 0$ le système est ferromagnétique. Dans ces conditions, le développement des dynamiques de spin est favorisé par la présence d'un gradient de champ magnétique $\nabla \gamma_z$ (sect. 4.2). En partant de l'équation de Gross-Pitaevskii d'un système de spin f , nous allons obtenir les équations dynamiques des densités n_m et des phases φ_m associées de chaque état de spin m . Puis, pour le cas particulier de $f = 1$, nous allons obtenir l'équation dynamique de $|\mathbf{f}|$ qui fait apparaître explicitement les effets du gradient. À la fin, nous allons aboutir à une condition de persistance de ferromagnétisme.

5.2.1 Système de densité uniforme de spin f

Pour comprendre le mécanisme de la persistance du ferromagnétisme nous allons considérer un système spatialement uniforme en densité. Nous écrivons la densité totale n en introduisant le densité de chaque état de spin n_m comme suit

$$n = \sum_m n_m(t). \quad (5.13)$$

Notons que dans ce modèle les densités n_m peuvent évoluer et donner lieu à des dynamiques de spin tout en gardant inchangée la densité totale n du condensat. En associant à chaque composante de spin une phase φ_m , nous écrivons les $2f + 1$ fonctions d'onde ψ_m^u du système uniforme comme suit

$$\psi_m^u(t) = \sqrt{n_m(t)} e^{i\varphi_m(t)}. \quad (5.14)$$

Nous nous limitons ici à l'étude d'un système soumis à l'effet d'un champ magnétique spatialement inhomogène $\gamma_z(\mathbf{r})\hat{e}_z$. Ce champ magnétique introduit une précession inhomogène permanente des spins. Plus précisément, après un temps t les spins subissent, sous l'effet de γ_z , une rotation d'un angle $g\mu_B\gamma_z(\mathbf{r})t/\hbar$ autour de l'axe z .

Il est commode, dans ce cas, de prendre en compte cette précession inhomogène en introduisant le vecteur fonction d'onde $\boldsymbol{\psi}$ obtenu comme suit

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}, t) = e^{-ig\mu_B\gamma_z(\mathbf{r})f_z t/\hbar} \boldsymbol{\psi}^u(t). \quad (5.15)$$

Ainsi, en utilisant la définition de la matrice de spin f_z , on obtient

$$\psi_m(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_m(t)} e^{i\phi_m(\mathbf{r}, t)}. \quad (5.16)$$

De cette façon, la dépendance spatiale introduite par γ_z est absorbée dans les phases $\phi_m(\mathbf{r}, t)$ données par

$$\phi_m(\mathbf{r}, t) = \varphi_m(t) - g\mu_B m \gamma_z(\mathbf{r}) t / \hbar. \quad (5.17)$$

Notons que la densité de chaque état de spin reste spatialement indépendante

$$n_m(t) = |\psi_m^u(t)|^2 = |\psi_m(\mathbf{r}, t)|^2. \quad (5.18)$$

La dynamique de ce système est régit par l'équation de Gross-Pitaevskii rappelée ici dans le cas d'un système homogène et sans interactions dipolaires

$$i\hbar \frac{\partial \psi_m}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + g\mu_B \gamma_z m \right) \psi_m + \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} \psi_{m_2}^* \psi_{m'_2} \psi_{m'_1}, \quad (5.19)$$

où le tenseur d'interaction de contact est défini par (1.43).

Équations d'évolution de des densités n_m et des phases φ_m

Nous allons pour commencer obtenir les équations d'évolution des densités n_m et des phases φ_m . Pour ce faire, on introduit (5.16) dans (5.19). En utilisant l'expression (5.17), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar}{2} \frac{\partial n_m}{\partial t} - \hbar n_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} &= \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} (n_m n_{m'_1} n_{m'_2} n_{m_2})^{1/2} e^{-i(\varphi_m - \varphi_{m'_1} - \varphi_{m'_2} + \varphi_{m_2})} \\ &+ n_m \frac{(g\mu_B m \nabla \gamma_z)^2}{2M} t^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Notons que le dernier terme à droite de cette équation qui fait apparaître le gradient du champ magnétique $\nabla \gamma_z$ a pour origine le terme cinétique de l'équation de Gross-Pitavskii (5.19). Précisons que, pour obtenir l'équation (5.20), il faut prendre en compte la conservation de la projection du spin dans les échanges par interaction de contact

$$m + m_2 = m'_1 + m'_2. \quad (5.21)$$

La partie réelle de (5.20) nous donne l'évolution des phases φ_m

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} &= -\frac{1}{n_m} \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} (n_m n_{m'_1} n_{m'_2} n_{m_2})^{1/2} \cos(\varphi_m - \varphi_{m'_1} - \varphi_{m'_2} + \varphi_{m_2}) \\ &- \frac{(g\mu_B m \nabla \gamma_z)^2}{2M} t^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

De la même manière, en prenant la partie imaginaire de (5.20) nous obtenons l'évolution des densités n_m

$$\hbar \frac{\partial n_m}{\partial t} = -2 \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} (n_m n_{m'_1} n_{m'_2} n_{m_2})^{1/2} \sin(\varphi_m - \varphi_{m'_1} - \varphi_{m'_2} + \varphi_{m_2}). \quad (5.23)$$

Après sommation sur m_2, m'_1 et m'_2 , les combinaisons de phases qui apparaissent dans le terme en cosinus pour l'équation (5.22) et le terme en sinus pour l'équation (5.23) seront fixées par le tenseur $C_{m'_1 m'_2}^{m m_2}$. Avec l'approximation (5.6), nous pouvons écrire

$$C_{m'_1 m'_2}^{m m_2} \approx c_0 \delta_{m m'_1} \delta_{m_2 m'_2} + c_1 \sum_{\nu} (f_{\nu})_{m m'_1} (f_{\nu})_{m_2 m'_2}. \quad (5.24)$$

Notons que cette dernière expression est exacte dans le cas d'un système de spin $f = 1$. L'évolution des phases φ_m obtenue en (5.22) devient

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial \varphi_m}{\partial t} = & -\frac{(g\mu_B m \nabla \gamma_z)^2}{2M} t^2 - c_0 n - c_1 m F_z \\ & - \frac{c_1}{n_m} \sum_{m'} R_{m m'} (n_m n_{m-1} n_{m'+1} n_{m'})^{1/2} \cos(\varphi_m - \varphi_{m-1} - \varphi_{m'+1} + \varphi_{m'}) \\ & - \frac{c_1}{n_m} \sum_{m'} R_{m' m} (n_m n_{m+1} n_{m'-1} n_{m'})^{1/2} \cos(\varphi_m - \varphi_{m+1} - \varphi_{m'-1} + \varphi_{m'}), \end{aligned} \quad (5.25)$$

où l'on a introduit la matrice R ainsi définie

$$R_{m m'} = \frac{1}{2} [(f - m + 1)(f + m)(f - m' + 1)(f - m')]^{1/2}. \quad (5.26)$$

De la même façon, en utilisant (5.24) et (5.26), l'équation (5.23) devient

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial n_m}{\partial t} = & -2c_1 \sum_{m'} R_{m m'} (n_m n_{m-1} n_{m'+1} n_{m'})^{1/2} \sin(\varphi_m - \varphi_{m-1} - \varphi_{m'+1} + \varphi_{m'}) \\ & - 2c_1 \sum_{m'} R_{m' m} (n_m n_{m+1} n_{m'-1} n_{m'})^{1/2} \sin(\varphi_m - \varphi_{m+1} - \varphi_{m'-1} + \varphi_{m'}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

Équations d'évolution de la longueur de spin locale

Pour un système de densité homogène, les composantes du vecteur \mathcal{K} défini en (5.12) se simplifient du fait que $\nabla n = 0$.

$$\mathcal{K}_{\nu} = \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\nu} + \frac{\hbar}{M} \sum_{\mu\lambda\eta} \epsilon_{\nu\mu\lambda} \hat{\mathcal{N}}_{\mu\eta} \nabla^2 \hat{\mathcal{N}}_{\lambda\eta}. \quad (5.28)$$

Ainsi, l'équation (5.10) devient

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)| = \frac{1}{|\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)|} \left[\sum_{\nu} f_{\nu} (\mathbf{v} \cdot \nabla f_{\nu}) + \frac{\hbar}{M} \sum_{\nu\mu\lambda\eta} \epsilon_{\nu\mu\lambda} f_{\nu} \hat{\mathcal{N}}_{\mu\eta} \nabla^2 \hat{\mathcal{N}}_{\lambda\eta} \right]. \quad (5.29)$$

En utilisant (5.16), les composantes du vecteur \mathbf{f} s'écrivent

$$f_\nu = \frac{1}{n} \sum_{mm'} \sqrt{n_m n_{m'}} (f_\nu)_{mm'} e^{-i(\phi_m - \phi_{m'})}, \quad (5.30)$$

De la même manière, en utilisant la définition de la vitesse de masse \mathbf{v} (éq. 1.112), on montre que

$$n\mathbf{v} = \frac{\hbar}{M} \sum_m n_m \nabla \phi_m. \quad (5.31)$$

En utilisant ces deux dernière expressions, on montre le premier terme à droite de (5.29) s'annule

$$\sum_\nu f_\nu (\mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu) = 0. \quad (5.32)$$

Cette dernière relation peut être obtenue aussi à partir de la relation de Mermin-Ho [17, 57] qui décrit la rotation du courant de masse.

Finalement, pour un système homogène de spin f , l'évolution de la longueur de spin locale est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)| = \frac{1}{|\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)|} \frac{\hbar}{M} \sum_{\nu\mu\lambda\eta} \epsilon_{\nu\mu\lambda} f_\nu \hat{\mathcal{N}}_{\mu\eta} \nabla^2 \hat{\mathcal{N}}_{\lambda\eta}. \quad (5.33)$$

5.2.2 Système de densité uniforme de spin $f = 1$

Dans cette sous-section, nous allons appliquer les résultats des deux sous-sections précédentes pour un système à trois composantes de spin $m = \pm 1$ et $m = 0$.

5.2.3 Équations d'évolution des densités n_m et des phases φ_m

Les équations d'évolution des phases $\varphi_{\pm 1}$ et φ_0 s'obtiennent en sommant sur $m' = -1, 0, 1$ dans l'équation (5.25)

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial \varphi_{\pm 1}}{\partial t} = & -c_0 n - c_1 \left(\pm n_1 + n_0 \mp n_{-1} + \sqrt{\frac{n_{\mp 1}}{n_{\pm 1}}} n_0 \cos \varphi_r \right) \\ & - \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{2M} t^2, \end{aligned} \quad (5.34)$$

$$\hbar \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = -c_0 n - c_1 (n_1 + n_{-1} + 2\sqrt{n_1 n_{-1}} \cos \varphi_r). \quad (5.35)$$

Le second terme des équations (5.34) et (5.35) fait apparaître la combinaison de phase

$$\varphi_r = \varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}. \quad (5.36)$$

Écrivant d'emblée l'équation d'évolution φ_r à partir des équations (5.34) et (5.35), on obtient

$$\begin{aligned} \hbar \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} = & 2c_1 \left(n_1 - n_0 + n_{-1} - \frac{n_0(n_1 + n_{-1}) - 4n_1 n_{-1}}{2\sqrt{n_1 n_{-1}}} \cos \varphi_r \right) \\ & - \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M} t^2. \end{aligned} \quad (5.37)$$

De la même manière que ce qui précède, en sommant sur $m' = -1, 0, 1$ dans l'équation (5.27) nous obtenons aisément les équations suivantes pour l'évolution des densités $m_{\pm 1}$ et m_0

$$\hbar \frac{\partial n_{\pm 1}}{\partial t} = -2c_1 n_0 \sqrt{n_1 n_{-1}} \sin \varphi_r, \quad (5.38)$$

$$\hbar \frac{\partial n_0}{\partial t} = 4c_1 n_0 \sqrt{n_1 n_{-1}} \sin \varphi_r. \quad (5.39)$$

Équation d'évolution de la longueur de spin locale

Pour ce système de spin $f = 1$, la longueur de spin locale peut être obtenue en utilisant (1.124) et (5.16) comme suit

$$|\mathbf{f}(t)| = \frac{1}{n} \left[(n_1 - n_{-1})^2 + 2n_0(n_{-1} + n_1) + 4(n_{-1}n_0^2n_1)^{1/2} \cos \varphi_r \right]^{1/2}. \quad (5.40)$$

Afin de faire apparaître explicitement l'effet du gradient $\nabla \gamma_z$ sur l'évolution de la longueur de spin, on injecte (5.40) dans (5.33). On obtient l'équation dynamique suivante

$$\frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{f}(t)| = 2A(t) \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M\hbar} \sin \varphi_r(t) t^2, \quad (5.41)$$

où A est donnée par

$$A = \frac{1}{n} \left[\frac{n_{-1}n_0^2n_1}{(n_1 - n_{-1})^2 + 2n_0(n_{-1} + n_1) + 4(n_{-1}n_0^2n_1)^{1/2} \cos \varphi_r} \right]^{1/2}. \quad (5.42)$$

Notons que l'équation (5.41) peut être aussi obtenue en dérivant (5.40) par rapport au temps et en utilisant l'équation de φ_r obtenue précédemment en (éq. 5.37).

Oscillations de phase de faibles amplitudes

À présent, nous allons résoudre l'équation de la phase relative φ_r (éq. 5.37) en considérant des perturbations de faibles amplitudes. Pour ce faire, on pose

$$n(t) = n_m(0) + \delta n_m(t), \quad (5.43)$$

$$\varphi_r(t) = \varphi_r(0) + \delta \varphi_r(t), \quad (5.44)$$

où $n_m(0)$ et $\varphi_r(0)$ sont, respectivement, la densité de l'état de spin m et la phase relative à $t = 0$. En particulier, on considère un état initial obtenu par une rotation collective des spins d'un angle $0 < \theta_r \leq \pi/2$ à partir d'une configuration ferromagnétique polarisée suivant l'axe z . Sans perte de généralité, on considère une rotation autour de l'axe y . Cet état initial correspond à la configuration des spins étudiée au chapitre précédent. La densité dans chaque état de spin, après une rotation de θ_r est donnée par

$$\begin{pmatrix} n_{+1}(0) \\ n_0(0) \\ n_{-1}(0) \end{pmatrix} = \frac{n}{2} \begin{pmatrix} 2 \sin^4(\theta_r/2) \\ \sin^2 \theta_r \\ 2 \cos^4(\theta_r/2) \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

La condition initiale sur la phase relative φ_r peut être obtenue à partir de l'expression de la longueur de spin locale (éq. 5.40). À $t = 0$, et à $n_{\pm 1}$ et n_0 fixées, le système étant ferromagnétique la phase φ_r doit prendre une valeur qui maximise la longueur de spin soit

$$\varphi_r(0) = 0. \quad (5.46)$$

Notons que cette phase relative est définie à 2π près. Ajoutons que pour un système antiferromagnétique (polaire) φ_r doit prendre une valeur qui minimise la longueur de spin, soit dans ce cas $\varphi_r(0) = \pi$ à 2π près. En substituant l'expression (5.43) dans les équations (5.38) et (5.39), on obtient

$$\hbar \frac{\partial \delta n_{\pm 1}}{\partial t} \simeq -\frac{1}{4} c_1 \sin^4 \theta_r n^2 \delta \varphi_r, \quad (5.47)$$

$$\hbar \frac{\partial \delta n_0}{\partial t} \simeq \frac{1}{2} c_1 \sin^4 \theta_r n^2 \delta \varphi_r. \quad (5.48)$$

De la même manière, substituant l'expression (5.44) dans l'équation d'évolution φ_r (éq. 5.37), on obtient

$$\frac{\partial \delta \varphi_r}{\partial t} \simeq \frac{4c_1}{\sin^2 \theta_r} \left[\delta n_1 \tan^2 \left(\frac{\theta_r}{2} \right) - \delta n_0 + \delta n_{-1} \cot^2 \left(\frac{\theta_r}{2} \right) \right] - \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M} t^2. \quad (5.49)$$

Finalement, en prenant la dérivée de cette dernière équation et en utilisant les équations (5.47) et (5.48), on retrouve pour $\delta \varphi_r$ une équation qui décrit des oscillations à une fréquence $\omega_r/2\pi$ avec un terme d'excitation $\Gamma(t)$

$$\frac{\partial^2 \delta \varphi_r}{\partial t^2} + \omega_r^2 \delta \varphi_r \simeq \Gamma(t). \quad (5.50)$$

La fréquence des oscillations dépend de la constante d'interaction c_1

$$\hbar \omega_r = 2|c_1|n. \quad (5.51)$$

La fonction $\Gamma(t)$ est liée au gradient $\nabla \gamma_z$

$$\Gamma(t) = -2 \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M\hbar} t. \quad (5.52)$$

La solution générale de l'équation différentielle (5.50) est donnée par

$$\delta \varphi_r(t) = -2 \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M\hbar\omega_r^2} t + \lambda_1 \cos(\omega_r t) + \lambda_2 \sin(\omega_r t), \quad (5.53)$$

où λ_1 et λ_2 sont des constantes réelles. Pour $\nabla \gamma_z = 0$, la solution

$$\delta \varphi_r(t) = \lambda_1 \cos(\omega_r t) + \lambda_2 \sin(\omega_r t), \quad (5.54)$$

correspond à des petites oscillations de la phase relative à la fréquence $\omega_r/2\pi = 2c_1 n/h$. Notons que $2c_1 n$ correspond au gap énergétique du mode de déformation obtenu par l'analyse de Bogoliubov (éq. 2.98). Pour $\nabla \gamma_z \neq 0$, la phase relative φ_r s'écarte progressivement de sa valeur initiale à cause du premier terme à droite de l'équation (5.53).

Condition de persistance du ferromagnétisme

Ce qui nous intéresse ici est de déterminer un régime dans lequel la nature de ferromagnétique du condensat persiste au bout d'un temps de dévolution dynamique T . Pour ce faire, on intègre (5.41) entre $t = 0$ et $t = T$. On obtient

$$|\mathbf{f}(T)| \simeq 1 + 2 \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M\hbar} \int_0^T dt A(t) \sin \varphi_r(t) t^2, \quad (5.55)$$

où l'on a utilisé le fait que $|\mathbf{f}(t = 0)| = 1$. En utilisant (5.45) on peut vérifier que pour $\varphi_r = \delta\varphi_r \ll 1$, on a $A \sim 1$. En intégrant (5.55) pour $T \gg 2\pi/\omega_r$, les oscillations de φ_r peuvent être négligées. On obtient,

$$|\mathbf{f}(T)| \sim 1 + 2 \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M\hbar} \int_0^{T \ll 2\pi/\omega_r} dt \varphi_r(t) t^2, \quad (5.56)$$

$$\sim 1 - \frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^4}{M^2 \omega_r^2 \hbar^2} T^4, \quad (5.57)$$

où l'on a négligé les termes d'ordre T^6 et supérieur. À partir de cette dernière équation, il est possible de déterminer une condition de pour la persistance du ferromagnétisme. Pour cela, il est nécessaire d'avoir

$$\frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M} T^2 \ll 2|c_1|n, \quad (5.58)$$

où l'on a utilisé le fait que $\omega_r = 2|c_1|n/\hbar$.

La condition (5.58) montre que la persistance du ferromagnétisme peut s'interpréter par une compétition entre l'énergie cinétique acquise par les composantes de spin $m = \pm 1$ en présence de gradients du champ magnétique et l'énergie ferromagnétique $2|c_1|n$. Cette énergie ferromagnétique correspond à un gap énergétique du mode de déformation. Notons que la condition (5.58) est indépendante du signe du paramètre c_1 . Autrement dit, la persistance du ferromagnétisme est un comportement universel indépendant de la nature ferromagnétique ($c_1 < 0$) ou antiferromagnétique ($c_1 > 0$) des interactions de contact dépendantes du spin. La généralisation de la condition (5.58) à un système de spin $f > 1$ peut être analytiquement laborieuse. Néanmoins, l'altération du ferromagnétisme étant dû à l'énergie cinétique communiquée aux composantes de spin m par le gradient, on peut inférer que la condition (5.58) se généralise comme suit

$$\frac{(g\mu_B \nabla \gamma_z)^2}{M} f^2 T^2 \ll 2|c_1|n. \quad (5.59)$$

Dans cette dernière condition, le terme à gauche est l'énergie cinétique acquise par les composantes de spin $m = \pm f$ au bout d'un temps T en présence d'un gradient de champ magnétique.

5.2.4 Persistance du ferromagnétisme dans un condensat piégé

Pour transposer les résultats précédents au cas d'un système piégé, nous avons réalisé des simulations (Gross-Pitaevskii) pour $f = 1$ et $\theta_r = \pi/2$ dans deux situations : $c_1 = 0$ et $c_1 \neq 0$. Le condensat contient $N = 38 \times 10^3$ atomes. Pour simplifier,

nous avons considéré un potentiel harmonique sphérique de fréquence $\omega/2\pi = 240$ Hz. La densité de l'état fondamental au centre du condensat est de $n \simeq 2.35 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$. Dans nos simulations, le condensat est soumis à un gradient $\nabla\gamma_z = 30 \text{ mG cm}^{-1}$.

Afin d'illustrer le mécanisme de la persistance du ferromagnétisme, on s'est intéressé à l'évolution de la longueur de spin au centre du condensat. Nous avons porté sur la figure 5.1 (ligne blanche) l'évolution de la phase relative φ_r et de n_0/n où n_0 est la densité de l'état $m = 0$. Les quantités φ_r , n et n_0 sont calculées au centre du condensat. La couleur du fond indique la longueur de spin locale :

- Pour $c_1 = 0$, on observe sur la figure 5.1b que φ_r s'écarte de sa valeur initiale $\varphi_r(0) = 0$. Cela s'accompagne d'une décroissance de $|\mathbf{f}|$. Précisons que n_0 est constante, car il n'y a pas de processus d'échange de spin ($c_1 = 0$). Si n_0/n varie, c'est parce qu'au centre du condensat, la densité totale n est modifiée par le gradient : les composantes $m = \pm 1$ sont décalées par le gradient vers les bords.
- Pour $c_1 \neq 0$, la figure 5.1b montre que la phase relative oscille autour de $\varphi_r(0)$. La condition (5.58), obtenue pour le système uniforme, indique que $\nabla\gamma_z$ doit être très inférieur à 40 mG cm^{-1} afin d'assurer la persistance du ferromagnétisme au bout de $T = 32 \text{ ms}$ (temps de l'évolution dynamique). Cette condition n'est pas parfaitement vérifiée dans nos simulations, mais néanmoins on constate bien que $|\mathbf{f}| \simeq 1$. En effet, à cause du piégeage, l'énergie cinétique maximale des composantes $m = \pm 1$ est obtenue pour $T = \pi/2\omega \simeq 4 \text{ ms}$ (correspond à 1/4 de la période caractéristique du piégeage harmonique $2\pi/\omega$). Avec $T \simeq 4 \text{ ms}$, la condition (5.58) donne $\nabla\gamma_z \ll 300 \text{ mG cm}^{-1}$.

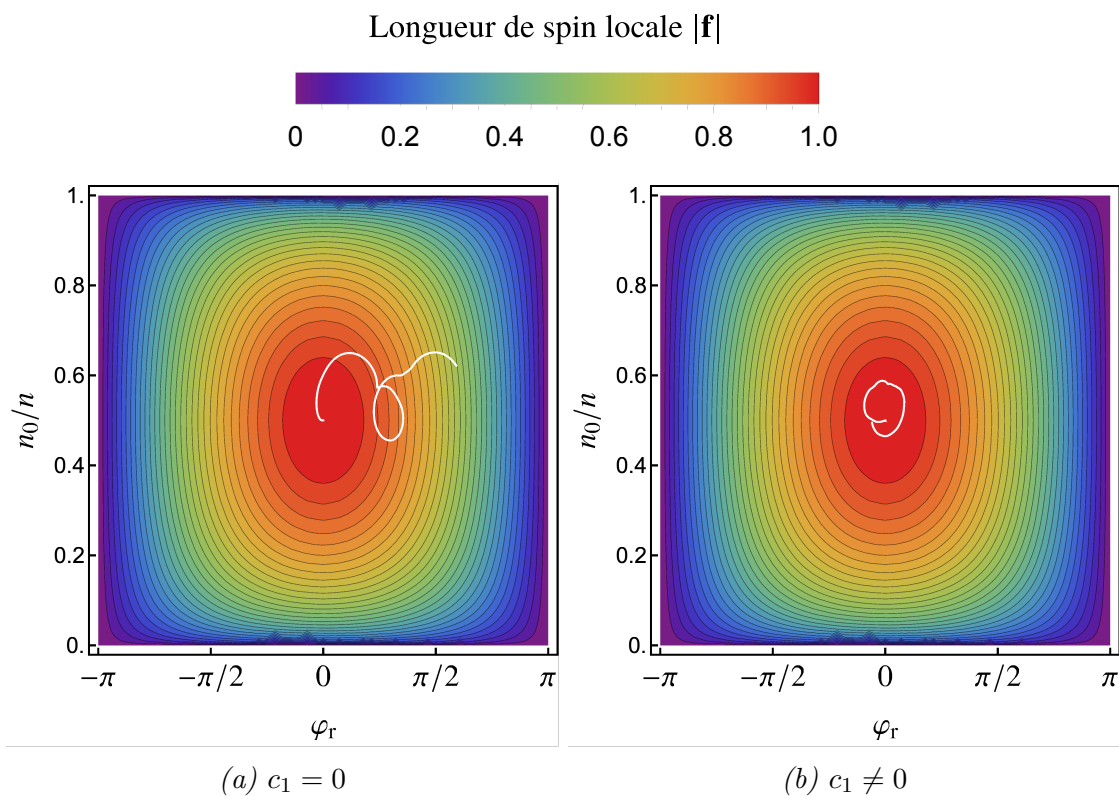


FIGURE 5.1 – La courbe blanche indique l'évolution de n_0/n et de la phase relative φ_r au centre du condensat. La couleur du fond indique la longueur de spin locale. Simulations réalisées pour un système piégé de spin $f = 1$: $N = 38 \times 10^3$, $\omega/2\pi = 240$ Hz.

5.3 Oscillations collectives de spins dans un ferrofluide

Dans la section 4.2 du chapitre précédent, nous avons étudié numériquement la dynamique d'un condensat ferromagnétique après rotation collective des spins d'un angle θ_r . Nous avons observé que les spins présentent un comportement oscillatoire. On se limite ici à la situation où les spins sont orientés à $t = 0$ ms suivant l'axe x ($\theta_r = \pi/2$). Dans cette section, nous allons voir que ces oscillations correspondent à des modes de précessions de spin (magnons). Précisons que ces modes diffèrent très fortement de la précession inhomogène des spins due au seul gradient. Ces modes sont, au contraire, pilotés par les interactions : au lieu de la précession inhomogène, les spins oscillent autour de leur orientation initiale x avec une amplitude qui varie spatialement.

5.3.1 Equation de spin d'un ferrofluide

On considère un condensat (fluide) incompressible de densité totale n (sect. 5.1). Le système est supposé piégé dans un potentiel harmonique

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}M(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2), \quad (5.60)$$

où $\omega_{x,y,z}/2\pi$ sont les fréquences de piégeage. On fait l'hypothèse que le système reste purement ferromagnétique durant toute l'évolution dynamique. Autrement dit, on suppose que la longueur de spin locale est maximale à chaque instant t , soit

$$|\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)| = f. \quad (5.61)$$

Dans ce cas, le tenseur nématique \mathcal{N} est donné à chaque instant par

$$\hat{\mathcal{N}}_{\mu\nu} = \frac{f}{2}\delta_{\mu\nu} + \frac{f(2f-1)}{2}f_\mu f_\nu. \quad (5.62)$$

En utilisant cette dernière relation, le terme de la seconde ligne de l'équation de spin \mathbf{f} (éq. 5.9) devient

$$\mathbf{f} \times \left[\frac{\hbar}{4M} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{f} + \frac{\hbar}{4M} \nabla^2 \mathbf{f} \right]. \quad (5.63)$$

Ainsi, pour un ferrofluide l'équation du spin est donnée par

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu = \mathbf{f} \times \left[\frac{\hbar}{2M} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{f} + \frac{\hbar}{2M} \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{g\mu_B}{\hbar} \gamma_z \hat{e}_z \right]. \quad (5.64)$$

Dans ce modèle, seule l'orientation locale des spins peut évoluer dans le temps. En général, l'évolution de la configuration spatiale des spins peut modifier, de façon continue, le flux de masse \mathbf{v} [42]. Néanmoins, dans l'état initial $\mathbf{v}(0) = 0$. Par conséquent, en ne considérant que des oscillations spatiales des spin de faibles amplitudes $f_\nu(t) = f_\nu(0) + \delta f_\nu(t)$, la variation de flux de masse $\mathbf{v}(t) = \delta \mathbf{v}(t)$ est faible. Par conséquent, le terme $\mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu$ qui apparait dans l'équation(5.64) est un terme de second d'ordre que nous négligeons

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f_\nu = \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \delta f_\nu \simeq 0, \quad (5.65)$$

où l'on a utilisé le fait que $\nabla f_\nu(0) = 0$ (les spins sont initialement tous polarisés dans la même direction). Finalement, les dynamiques de spin du condensat ferromagnétique sont complètement caractérisées par l'orientation locale du vecteur spin $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ décrit par l'équation hydrodynamique (5.9) diminuée du terme de flux de masse

$$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} \simeq \mathbf{f} \times \left[\frac{\hbar}{2M} \left(\frac{\nabla n}{n} \cdot \nabla \right) \mathbf{f} + \frac{\hbar}{2M} \nabla^2 \mathbf{f} - \frac{g\mu_B}{\hbar} \gamma_z \hat{e}_z \right]. \quad (5.66)$$

5.3.2 Recherche de modes collectifs de précession de spin

À présent, nous allons chercher des modes de précession associés à l'équation (5.66) pour $\gamma_z = 0$. Pour des spins orientés suivant $-\hat{e}_x$ ($\theta_r = \pi/2$), nous considérons pour le vecteur spin \mathbf{f} l'ansatz suivant

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \begin{pmatrix} -f \\ \delta f_y(\mathbf{r}, t) \\ \delta f_z(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

où $\delta f_{y,z}$ sont de faibles oscillations de spin de fréquence $2\pi\nu$ que nous écrivons sous la forme suivante

$$\delta f_y(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) \sin(2\pi\nu t), \quad (5.68)$$

$$\delta f_z(\mathbf{r}, t) = P(\mathbf{r}) \cos(2\pi\nu t). \quad (5.69)$$

L'amplitude des oscillations $P(\mathbf{r})$ est une fonction ne dépendant que de l'espace. Notons qu'au premier ordre en $\delta f_{y,z}$, on a bien

$$|\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)| \simeq f. \quad (5.70)$$

Pour la densité totale, on considère un ansatz Gaussien

$$n(\mathbf{r}) = \frac{N}{\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z} e^{-\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} + \frac{z^2}{\sigma_z^2} \right)}, \quad (5.71)$$

où N est le nombre d'atomes total et σ_μ est la taille du condensat suivant les axes x, y et z . Le choix de l'ansatz gaussien facilite les calculs analytiques. Dans l'état fondamental ferromagnétique, l'énergie par particule peut être obtenue analytiquement à partir de l'expression (1.93). En annulant le terme Zeeman ($E_z = 0$) et le terme d'énergie dipolaire ($E_{dd} = 0$) et en posant $\psi_{m \neq -f} = 0$ et $\psi_{m=-f} = \sqrt{n}$ où n est donnée par (5.71), on obtient

$$\begin{aligned} E/N &= \frac{\hbar^2}{4M} \left(\frac{1}{\sigma_x^2} + \frac{1}{\sigma_y^2} + \frac{1}{\sigma_z^2} \right) + \frac{M}{4} (\sigma_x^2 \omega_x^2 + \sigma_y^2 \omega_y^2 + \sigma_z^2 \omega_z^2) \\ &+ \frac{N g_{2f}}{4\sqrt{2}\pi^{3/2} \sigma_x \sigma_y \sigma_z}, \end{aligned} \quad (5.72)$$

où g_{2f} est la constante d'interaction de contact (éq. 1.33). Précisons que les σ_ν sont calculés numériquement de manière à minimiser l'énergie totale par particule [84].

CHAPITRE 5. PROTECTION DU FERROMAGNÉTISME ET MODES COLLECTIFS DE SPIN DANS UN FERROFLUIDE

Le premier terme $\propto \hbar^2/M\sigma_\mu^2$ et le second terme $\propto M\sigma_\mu^2\omega_\mu^2$ à droite de (5.72) correspondent respectivement à l'énergie cinétique et à l'énergie de piégeage. Notons que l'énergie de piégeage domine si

$$\frac{\hbar}{M\sigma_\mu^2} \ll \omega_\mu. \quad (5.73)$$

En substituant (5.67) et (5.71) dans l'équation (5.66), on obtient

$$\lambda P(\mathbf{r}) = \left(\frac{x}{\sigma_x^2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{\sigma_y^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{z}{\sigma_z^2} \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{2} \nabla^2 \right) P(\mathbf{r}). \quad (5.74)$$

où nous avons défini

$$\lambda = 2\pi \frac{Mv}{\hbar}. \quad (5.75)$$

Pour résoudre l'équation (5.74), nous allons chercher des solutions particulières en séparant les variables d'espace

$$P(\mathbf{r}) = Q(x)R(y)S(z). \quad (5.76)$$

Avec cette dernière expression, et en introduisant les changements de variables $\hat{x} = x/\sigma_x$, $\hat{y} = y/\sigma_y$ et $\hat{z} = z/\sigma_z$, l'équation (5.74) devient

$$0 = \left(\frac{\hat{x}}{\sigma_x^2} \frac{Q'}{Q} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \frac{Q''}{Q} \right) + \left(\frac{\hat{y}}{\sigma_y^2} \frac{R'}{R} - \frac{1}{2\sigma_y^2} \frac{R''}{R} \right) + \left(\frac{\hat{z}}{\sigma_z^2} \frac{S'}{S} - \frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{S''}{S} - \lambda \right). \quad (5.77)$$

Les trois termes entre parenthèses de cette dernière équation ne dépendent pas de la même variable. Dans ces conditions, la seule solution possible est

$$q_1 = \left(\frac{\hat{x}}{\sigma_x^2} \frac{Q'}{Q} - \frac{1}{2\sigma_x^2} \frac{Q''}{Q} \right), \quad (5.78)$$

$$q_2 = \left(\frac{\hat{y}}{\sigma_y^2} \frac{R'}{R} - \frac{1}{2\sigma_y^2} \frac{R''}{R} \right), \quad (5.79)$$

$$-(q_1 + q_2) = \left(\frac{\hat{z}}{\sigma_z^2} \frac{S'}{S} - \frac{1}{2\sigma_z^2} \frac{S''}{S} - \lambda \right), \quad (5.80)$$

où q_1 et q_2 sont des constantes réelles. En arrangeant les termes de ces trois dernières équations, et en posant

$$\eta_x = q_1\sigma_x^2, \quad \eta_y = q_2\sigma_y^2, \quad \eta_z = -(q_1 + q_2 - \lambda)\sigma_z^2. \quad (5.81)$$

on obtient trois équations différentielles d'Hermite pour les fonctions $Q(\hat{x})$, $R(\hat{y})$ et $S(\hat{z})$:

$$Q'' - 2\hat{x}Q' = -2\eta_x Q, \quad (5.82)$$

$$R'' - 2\hat{y}R' = -2\eta_y R, \quad (5.83)$$

$$S'' - 2\hat{z}S' = -2\eta_z S. \quad (5.84)$$

Pour η_x, η_y, η_z entiers positifs, ces équations ont pour solutions des polynômes d'Her-
mite qui sont donnés sous la forme [85]

$$H_{\eta \geq 0}(\vartheta) = (-1)^\eta e^{\vartheta^2} \left(\frac{d}{d\vartheta} \right)^\eta e^{-\vartheta^2}. \quad (5.85)$$

En développant cette dernière expression à l'ordre η et en utilisant (5.76), on montre
facilement que les solutions de l'équation (5.74) sont des polynômes dont le terme de
degré supérieur est $x^{\eta_x} y^{\eta_y} z^{\eta_z}$. Ces solutions peuvent s'écrire sous la forme générale

$$P_{\eta_x, \eta_y, \eta_z}(\mathbf{r}) = \sum_{i=0}^{\eta_x} \sum_{j=0}^{\eta_y} \sum_{l=0}^{\eta_z} a_{ijl} x^i y^j z^l \quad (5.86)$$

où a_{ijl} sont des coefficients réels. Les fréquences ν sont obtenues en utilisant (5.75)
et (5.81). On obtient,

$$2\pi\nu_{\eta_x, \eta_y, \eta_z} = \frac{\hbar}{M} \left(\frac{\eta_x}{\sigma_x^2} + \frac{\eta_y}{\sigma_y^2} + \frac{\eta_z}{\sigma_z^2} \right). \quad (5.87)$$

Remarquons que le mode de plus basse énergie (non nulle) présente des oscillations
collectives de spin dont l'amplitude P varie linéairement dans l'espace. Si ces oscillations
ont lieu suivant l'axe x , on a $P_{1,0,0} = a_{1,0,0} x$. La fréquence de ce mode est $2\pi\nu_{1,0,0} =$
 $\hbar/M\sigma_x^2$. D'après la relation (5.73), on a

$$2\pi\nu_{1,0,0} \ll \omega_x. \quad (5.88)$$

Ce comportement collectif pour lequel la fréquence d'oscillation est inférieure aux fréquences de piégeage est une caractéristique unique des condensats spinoriels. En effet, les modes de l'état fondamental d'un condensat scalaire sont caractérisés par des fréquences supérieures ou égales aux fréquences du piégeage harmonique [86].

5.3.3 Observation expérimentale des modes de spin dans un condensat de ^{52}Cr piégé

Des modes collectifs caractérisés par une fréquence inférieure aux fréquences du piège ont été observés expérimentalement par Lepoutre *et al.* [38]. La situation expérimental est équivalente à celle discuté au chapitre 4. Les auteurs considèrent un condensat de ^{52}Cr de $N \simeq 4 \times 10^4$ dans un piège de fréquence $\omega_x = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z = 210 \text{ Hz}$ (fig. 5.2). Les spins sont écartés de leur direction initiale d'un angle $\theta_r = \pi/2$. À partir de cet état initial, les dynamiques de spins sont enclenchées par la présence d'un champ magnétique inhomogène

$$\gamma_z \simeq \gamma_{zx} x \hat{e}_z \quad (5.89)$$

où γ_{zx} est le gradient du champ magnétique suivant l'axe x .

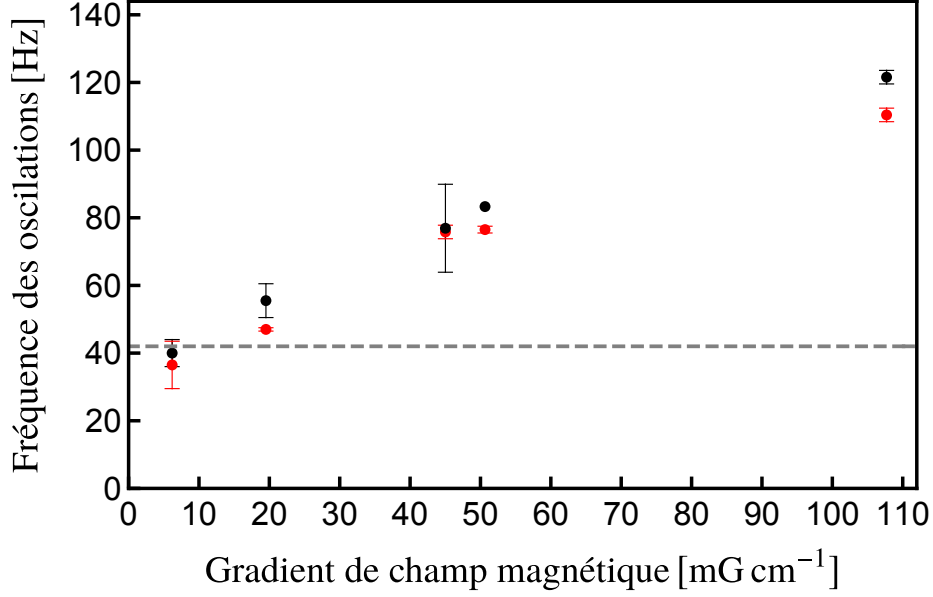


FIGURE 5.2 – Fréquence des oscillations de spin associées aux dynamiques de populations et de la séparation spatiale des états de spin. La fréquence théorique est indiquée en par la ligne en traitillées. Les données expérimentales sont représenté à partir de [38].

Résultats expérimentaux

Les auteurs mesurent les oscillations des populations de spin en variant γ_{zx} . Ils observent que la fréquence de ces oscillations augmente avec le γ_{zx} . Ces résultats sont repris sur la figure 5.2 (courbe en pointillées rouges). Les auteurs observent aussi des oscillations mécaniques mesurées à partir de l'évolution de la séparation spatiale entre les différents états de spin. Comme on peut le constater sur la figure 5.2 (courbe en pointillées noir), les fréquences des oscillations mécaniques sont proches des fréquences des oscillations des populations de spin. Cela indique que ces deux oscillations sont couplées. Pour $\gamma_{zx} \simeq 6.18 \text{ mG cm}^{-1}$, les populations de spin oscillant à une fréquence de

$$\nu_{\text{exp}}^{\text{POP}} = 36.5 \pm 7 \text{ Hz.} \quad (5.90)$$

Pour la même valeur du gradient, la fréquence des oscillations mécanique est de

$$\nu_{\text{exp}}^{\text{mec}} = 40 \pm 4 \text{ Hz.} \quad (5.91)$$

Comparaisons aux résultats théoriques

Comparons à présent ces résultats expérimentaux aux prédictions de notre modèle théorique. Pour les paramètres expérimentaux donnés précédemment, l'énergie par particule (5.72) est minimisée par les valeurs $\sigma_x \simeq 2.4 \mu\text{m}$, $\sigma_y \simeq 2.92 \mu\text{m}$ et $\sigma_z \simeq 3.4 \mu\text{m}$. Ainsi, pour des oscillations suivant l'axe x , la fréquence du mode de plus basse énergie prédite par nos calculs est

$$2\pi\nu_{1,0,0} = \hbar/M\sigma_x^2 \simeq 42 \text{ Hz.} \quad (5.92)$$

Ce résultat est bon accord avec les mesures expérimentales à gradient faible (fig. 5.2). Pour $\gamma_{zx} > 20 \text{ mG cm}^{-1}$, les fréquences mesurées expérimentalement s'écartent sensiblement de la valeur théorique $\nu_{1,0,0}$. Dans ce régime, l'approximation des faibles oscillations que nous avons considérée pour résoudre l'équation du spin n'est plus valable. De plus, pour des gradient fort, l'approximation d'un condensat ferromagnétique n'est plus valable. À titre quantitatif, la condition (5.59), avec $T = \pi/2\omega_x \simeq 4.8 \text{ ms}$ donne $\gamma_{zx} \ll 90 \text{ mG cm}^{-1}$.

Analyse des effets dipolaires

Finalement, notons que le bon accord entre les mesures expérimentales à gradient faible et nos calculs semblent indiquer que les effets dipolaires (absents dans notre modèle) sont négligeables. Pour comprendre cette observation, nous avons étudié la stabilité d'un système uniforme à l'aide de l'analyse de Bogoliubov introduite au chapitre 2. Plus précisément, nous avons calculé le spectre d'excitation après une rotation des spins d'un angle $\theta_r = \pi/2$. Pour ce faire, nous avons écrit le système d'équations de Bogoliubov (éq. 2.32) dans le repère de Larmor introduit à la section 4.1.2. Cela revient essentiellement à effacer le champ magnétique en posant $p = 0$ et à négliger les termes de relaxation dipolaire. La matrice de Bogoliubov peut être trouvée dans l'annexe B. En l'absence d'interaction dipolaire, les spectres énergétiques des modes de densité et de spin sont donnés simplement par les équations (2.130), (2.131) et (2.132) avec $p = 0$. En particulier, il y a deux modes non gappés. Le premier est un mode de densité et le second est un mode de spin présentant le spectre suivant

$$\mathcal{E}_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2M}, \quad (5.93)$$

où k est le nombre d'onde. En présence d'interaction dipôle-dipôle, le spectre de ce mode est fortement modifié. Après calculs, on obtient

$$\mathcal{E}_k = \sqrt{[\varepsilon_k - 3\pi c_{\text{dd}} n S(\theta_k)] [\varepsilon_k + 6\pi c_{\text{dd}} n S(\theta_k)]}, \quad (5.94)$$

où S est une fonction dépendant de l'angle polaire θ_k donné par

$$S(\theta_k) = \frac{1}{3} + \cos 2\theta_k. \quad (5.95)$$

L'expression (5.94) montre que les excitations de longueur d'onde $\lambda_c = 2\pi/k$

$$\lambda_c > 2\pi / \sqrt{8M\pi c_{\text{dd}} n / \hbar^2} \quad (5.96)$$

sont dynamiquement instables.

Dans l'expérience, la densité du condensat décroît à cause de la perte d'atomes par relaxation dipolaire. Pour faire une comparaison quantitative, on peut considérer une densité moyenne de l'ordre de $n \sim 10^{20} \text{ m}^{-3}$. On obtient

$$\lambda_c \gtrsim 8 \mu\text{m}. \quad (5.97)$$

La longueur d'onde des excitations instables est du même ordre de la taille du condensat piégé. Par conséquent, les effets dipolaires liés à cette instabilité dynamique pourraient être diminués par le piégeage, ce qui expliquerait pourquoi il y a un bon accord avec nos calculs avec $c_{\text{dd}} = 0$. Pour un système plus grand, on peut s'attendre à ce que le comportement collectif soit fortement modifié par les interactions dipôle-dipôles.

5.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la persistance de la nature ferromagnétique en présence d'un gradient de champ magnétique. Nous avons vu que l'énergie cinétique acquise par les états de spin en présence d'un gradient $\nabla\gamma_z$ tend à altérer la nature ferromagnétique du système. Cet effet est contrebalancé par l'énergie ferromagnétique due aux interactions de contact c_1n . Nous avons interprété la persistance du ferromagnétisme comme le résultat d'une compétition entre ces deux effets, et nous avons obtenu un critère qui fixe le régime de cette persistance.

En supposant la conservation du ferromagnétisme, nous avons mis en évidence l'existence de modes d'oscillations de spin dans la cas d'un condensat piégé. La fréquence d'oscillation de ces modes est de l'ordre de $\hbar/M\sigma^2$ où σ est la taille du condensat. Nous avons vu que la fréquence du premier mode a la particularité d'être inférieure aux fréquences de piégeage. En dernier, nous avons vu que nos calculs sont en bon accord avec les mesures expérimentales des oscillations de spin à faibles gradients réalisées au sein de notre groupe.

Conclusion

J'ai présenté dans ce manuscrit les résultats de mes travaux de thèses sur les propriétés stationnaires et le comportement dynamiques des condensats spinoriels dipolaires. En premier lieu, j'ai abordé le régime de faible champ magnétique et discuté les instabilités de la phase ferromagnétique. En deuxième lieu, j'ai abordé le régime de fort champ magnétique et discuté les dynamiques du condensat ferromagnétique polarisé après rotation globale des spins. Les principaux résultats de ce travail sont résumés ci-dessous.

Régime de faible champ magnétique : instabilités dynamiques et démagnétisation spontanée.

Phase ferromagnétique de densité uniforme :

- Nous avons mis en évidence l'existence d'instabilités dynamiques au-dessous du champ magnétique $p_{dd} = 4\pi c_{dd}fn/3$, où c_{dd} est une constante de l'interaction dipolaire. Ce comportement est commun aux systèmes de spin $f = 1, 2$ et 3 que nous avons étudiés.
- Nous avons montré que ce comportement est lié à l'instabilité dynamique du mode de précession de spin qui est causée par les processus de relaxation dipolaire. Les instabilités dynamiques se traduisent par le développement de textures de spin qui engendrent des dynamiques de démagnétisation. Cela indique que la phase ferromagnétique polarisée n'est pas l'état fondamental pour un champ magnétique $p < p_{dd}$.
- Par le moyen de simulations numériques, nous avons confirmé le développement de textures de spin et la démagnétisation du condensat pour un champ magnétique $p < p_{dd}$.

Condensat de ^{52}Cr piégé :

- Nous avons calculé numériquement un champ magnétique de démagnétisation p_{dem} . Premièrement, nous avons montré que p_{dd} dépendent uniquement des interactions dipôle-dipôles. Deuxièmement, nous avons observé que $p_{dem} < p_{dd}$ et que p_{dem} se rapproche de p_{dd} dans le cas d'un système de grande taille.
- Nos résultats suggèrent d'interpréter les dynamiques démagnétisation du condensat piégé comme une signature des instabilités dynamiques mises en évidence pour le condensat uniforme.

Régime de fort champ magnétique : dynamique de spin, persistance du ferromagnétisme et oscillations collectives

- Nous avons montré un très bon accord avec nos simulations numériques et des observations expérimentales de dynamiques de populations de spin dans le cas d'un condensat ^{52}Cr piégé.
- Premièrement, nous avons observé que les dynamiques de spin s'accompagnent d'une persistance inattendue du ferromagnétisme. Nous avons interprété cette persistance, dans le cas d'un système uniforme, comme une compétition entre l'énergie cinétique acquise par les composantes de spin et l'énergie ferromagnétique.
- Deuxièmement, nous avons mis en évidence un comportement oscillatoire des spins. Dans le cas des oscillations de faibles amplitudes, nous avons montré que les fréquences des oscillations est de l'ordre de $\hbar/M\sigma$ où σ est la taille du condensat. Nos résultats sont en bon accord avec les observations expérimentales.

Pour les besoins de ce travail de thèse, j'ai développé une application de calcul numérique « SDBEC » qui permet de résoudre l'équation de Gross-Pitaevskii dipolaire stationnaire et dynamique. SDBEC prend en compte les systèmes de spin $f = 1, 2$ et 3 . Cet outil offre la possibilité de réaliser des « expériences numériques » en contrôlant différents paramètres comme l'intensité des interactions dépendantes du spin, la relaxation dipolaire, la variation spatiale et temporelle du champ magnétique, etc. Par exemple, en ce qui concerne les dynamiques de démagnétisation, il serait intéressant de réaliser une étude systématique en fonction de la taille du condensat afin de confirmer (ou d'infirmer) que p_{dd} tend vers p_{dem} dans le cas des systèmes de grandes tailles. Une autre étude systématique complémentaire serait de varier c_{dd} afin de vérifier si $p_{\text{dem}} \propto c_{\text{dd}}$.

La résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii spinorielle peut nécessiter des temps de calcul numérique considérables. Cela est notamment dû au nombre élevé de degrés de liberté de spin, en particulier dans le cas du spin $f = 3$. Une manière intéressante de réduire ces temps de calcul serait d'intégrer à SDBEC le système de pseudo spin $1/2$. Ces systèmes présentent la particularité d'avoir une longueur de spin locale toujours maximale et qui est égale $1/2$. Ainsi, ils sont parfaitement adaptés pour simuler les dynamiques des condensats de spin $f \geq 1$ lorsque le ferromagnétisme est suffisamment bien conservé. Toutes les observables peuvent être calculées à partir des calculs réalisés sur un système de spin $1/2$. Par exemple, les dynamiques de populations peuvent être déduites directement à partir de l'évolution de la composante f_z du vecteur spin comme suit $N_m \simeq \int d\mathbf{r} n(\mathbf{r}) |\zeta_m(\mathbf{r})|^2$ avec $\zeta(\mathbf{r}) = e^{-i \cos^{-1}(f_z(\mathbf{r})/f) \mathbf{f}_y} \zeta^{\text{F}}$. Il serait aussi possible de calculer numériquement les fréquences des modes d'oscillations en fonction de θ_r , des gradients appliqués et de la forme du piégeage.

Pour finir, je tiens à souligner le fait que mon travail de thèse a fortement bénéficié de la proximité des travaux expérimentaux de l'équipe.

Annexe A

Modélisation numérique

Cette annexe présente, de manière très brève, la méthode de résolution numérique de l'équation de Gross-Pitaevskii utilisée dans ce travail.

Plusieurs travaux ont été consacrés à ce problème. Le cas d'un système sans spin avec ou sans interactions dipolaire est traité dans les références [87–90]. Le cas des systèmes de spin $f = 1$ et $f = 2$ sans interactions dipolaire est traité dans les références [91, 92]. Le lecteur peut également consulter les excellents articles de X. Antoine et R. Duboscq [93–95]. L'état fondamental est obtenu par évolution en temps imaginaire. Le lecteur peut consulter les références suivantes [96–101].

Afin de faciliter l'implémentation de nouvelles fonctionnalités, notre code « SDBEC » est développé en langage C++ et en mode POO¹. SDBEC prend en compte les systèmes de spin $f = 1, 2$ et 3 .

A.1 Équation de Gross-Pitaevskii adimensionnée

Pour commencer, nous allons écrire l'équation de Gross-Pitaevskii adimensionnée dans le cas d'un système de spin f . Pour ce faire, on introduit les grandeurs sans dimensions

$$\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/l_0, \quad \tilde{t} = t \times \omega_0 \quad \text{et} \quad \tilde{\psi} = \psi \times l_0^{3/2}. \quad (\text{A.1})$$

Suivant cette formulation, les unités de longueurs, de temps et d'énergie sont respectivement

$$l_0 = (\hbar/M\omega_0)^{1/2}, \quad t_0 = 1/\omega_0 \quad \text{et} \quad \epsilon_0 = \hbar\omega_0. \quad (\text{A.2})$$

Dans ces unités, les constantes de couplages adimensionnées $g_{\mathcal{F}}$ et le coefficient \tilde{c}_{dd} s'écrivent

$$g_{\mathcal{F}} = \frac{1}{l_0^2 \hbar \omega_0} \times g_{\mathcal{F}} \quad \text{et} \quad \tilde{c}_{\text{dd}} = \frac{1}{l_0^2 \hbar \omega_0} \times c_{\text{dd}}. \quad (\text{A.3})$$

1. Programmation Orientée Objet.

Afin d'alléger les notations, on supprime les « \sim » dans la suite. L'équation de Gross-Pitaevskii adimensionnée s'écrit

$$\begin{aligned}
 i\frac{\partial\psi_m}{\partial t} &= \left[-\frac{\nabla^2}{2} + \frac{1}{2}(\eta_x^2 x^2 + \eta_y^2 y^2 + \eta_z^2 z^2) + pm + qm^2 \right] \psi_m \\
 &+ \sum_{m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} \psi_{m_2}^* \psi_{m'_2} \psi_{m'_1} \\
 &+ c_{\text{dd}} \sum_{m'} \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_{m'},
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

où $\eta_{x,y,z} = \omega_{x,y,z}/\omega_0$. L'énergie totale s'écrit

$$\begin{aligned}
 E &= \int d\mathbf{r} \psi_m^* \left[-\frac{\nabla^2}{2} + \frac{1}{2}(\eta_x^2 x^2 + \eta_y^2 y^2 + \eta_z^2 z^2) + pm + qm^2 \right] \psi_m \\
 &+ \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{m_1 m_2 m'_1 m'_2} C_{m'_1 m'_2}^{mm_2} \psi_{m_1}^* \psi_{m_2}^* \psi_{m'_2} \psi_{m'_1} \\
 &+ \frac{c_{\text{dd}}}{2} \int d\mathbf{r} \sum_{mm'} \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{mm'} \psi_m^* \psi_{m'}.
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2 Méthode de « Splitting »

L'équation de Gross-Pitaevskii (éq. A.4) prend la forme compacte suivante

$$i\dot{\boldsymbol{\psi}} = (H_{\text{k}} + H_{\text{r}})\boldsymbol{\psi}, \tag{A.6}$$

où H_{k} correspond au terme cinétique. Les autres termes restant sont regroupés dans $H_{\text{r}} = H_{\text{t}} + H_{\text{z}} + H_{\text{c}} + H_{\text{d}}$. Ces différents «Hamiltoniens» sont des matrices de taille $(2f+1)(2f+1)$ et sont donnés par

$$(H_{\text{k}})_{mm'} = -\frac{\nabla^2}{2} \times (\mathbb{1})_{mm'}, \tag{A.7}$$

$$(H_{\text{t}})_{mm'} = \frac{1}{2}(\eta_x^2 x^2 + \eta_y^2 y^2 + \eta_z^2 z^2) \times (\mathbb{1})_{mm'}, \tag{A.8}$$

$$(H_{\text{z}})_{mm'} = p \times (\mathbf{f}_z)_{mm'} + q \times (\mathbf{f}_z)_{mm'}^2, \tag{A.9}$$

$$(H_{\text{c}})_{mm'} = \sum_{nn'} C_{m'n'}^{mn} \psi_n^* \psi_{n'}, \tag{A.10}$$

$$(H_{\text{d}})_{mm'} = c_{\text{dd}} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{f}_{mm'}. \tag{A.11}$$

Pour résoudre l'équation (A.6), on peut approximer sa solution en composant les solutions des deux sous-systèmes

$$i\dot{\boldsymbol{\psi}} = H_{\text{k}}\boldsymbol{\psi}, \tag{A.12}$$

$$i\dot{\boldsymbol{\psi}} = H_{\text{r}}\boldsymbol{\psi}. \tag{A.13}$$

L'avantage de cette méthode, dite de *splitting*, est d'utiliser des Transformés de Fourier Rapides (FFT²) [102] pour résoudre de système (A.12). Notons que dans H_{k} il

2. Fast Fourier transform.

serait possible d'inclure tout autres termes indépendant du spin et qui serait homogène dans l'espace de Fourier [91]. Notre système étant hamiltonien, il y a un intérêt à utiliser un schéma symplectique qui conserve la structure géométrique de l'Hamiltonien (Transformation canonique). Notons que des composition d'ordre supérieur peuvent être considérées [91].

A.2.1 Composition symplectique de second ordre « saute-mouton »

La solution formelle de (A.6) s'écrit

$$\boldsymbol{\psi}(t) = e^{-i(H_k+H_r)t} \boldsymbol{\psi}(0), \quad (\text{A.14})$$

où $\boldsymbol{\psi}(0)$ est la fonction d'onde de l'état initial. Pour approximer cette solution, nous allons considérer une composition de second ordre symétrique qui permet d'avancer la fonction d'onde d'un pas de temps τ suffisamment petit. Ce schéma, appelé également *saute-mouton*, prend la forme suivante

$$\boldsymbol{\psi}(\tau) = e^{-i(H_k+H_r)\tau} \boldsymbol{\psi}(0) \approx e^{-iH_k\frac{\tau}{2}} e^{-iH_r\tau} e^{-iH_k\frac{\tau}{2}} \cdot \boldsymbol{\psi}(0) \quad (\text{A.15})$$

où $e^{-iH_k\tau}$ et $e^{-iH_r\tau}$ représentent, respectivement, l'évolution des solutions des deux sous-systèmes (A.12) et (A.13).

A.2.2 Grille spatiale

On considère un condensat spinoriel à trois dimensions spatiales discrétisées sur une grille formée de $n_x \times n_y \times n_z$ points. Pour $i, j, l = 0, \dots, n_{x,y,z} - 1$, on a

$$x_i = -\frac{l_x}{2} + i\Delta, \quad y_j = -\frac{l_y}{2} + j\Delta, \quad z_l = -\frac{l_z}{2} + l\Delta, \quad (\text{A.16})$$

où $l_\nu = n_{nu} \times \Delta$ avec $\nu = x, y, z$ et Δ est le pas de la grille spatiale choisi convenablement ($\Delta = \text{Min} \{l_\nu/n_\nu\}$). Les points ν_i couvrent les intervalles $[-l_\nu/2, \dots, l_\nu/2]$. Dans l'espace de Fourier, la grille spatiale est discrétisée comme suit

$$k_{\nu,i} = 2\pi i/l_\nu \quad (i \geq n_\nu/l_\nu), \quad (\text{A.17})$$

$$k_{\nu,i} = 2\pi(i - n_\nu)/l_\nu \quad (i < n_\nu/l_\nu). \quad (\text{A.18})$$

A.2.3 Traitement du terme cinétique H_k

Dans l'espace de spin, la matrice H_r est diagonale. Par conséquent

$$e^{-iH_k\frac{\tau}{2}} \boldsymbol{\psi} = -\frac{\nabla^2}{2} \boldsymbol{\psi} \quad (\text{A.19})$$

Le hamiltonien cinétique discrétisé est donnée par

$$\begin{aligned} -\frac{\nabla^2}{2} \boldsymbol{\psi} \longrightarrow & -\frac{1}{2} \left[\frac{\psi_{i+1jl} - 2\psi_{ijl} + \psi_{i-1jl}}{\Delta^2} + \frac{\psi_{ij+1l} - 2\psi_{ijl} + \psi_{ij-1l}}{\Delta^2} \right. \\ & \left. + \frac{\psi_{ijl+1} - 2\psi_{ijl} + \psi_{ijl-1}}{\Delta^2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

où l'indice de spin est omis pour ne pas alourdir les notations. En utilisant la transformé de fourrier discrète de ψ , on réécrit le terme cinétique discrétisé sous la forme compacte suivante [102]

$$-\frac{\nabla^2}{2}\psi \rightarrow \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{K} \times \mathcal{F} \{ \psi \} \}, \quad (\text{A.21})$$

où

$$\mathcal{K}_{ijl} = -\frac{1}{2\Delta^2} \left[\cos\left(\frac{2\pi i}{n_x}\right) + \cos\left(\frac{2\pi j}{n_y}\right) + \cos\left(\frac{2\pi l}{n_z}\right) - 6 \right]. \quad (\text{A.22})$$

A.2.4 Traitement du terme dipolaire H_d

Le champ dipolaire \mathbf{b} peut être calculé en utilisant l'expression (2.25). On a

$$b_\nu = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{\nu'} \mathcal{F} \{ Q_{\nu\nu'} \} \mathcal{F} \{ F_{\nu'} \} \right\}. \quad (\text{A.23})$$

Les noyaux dipolaire dans l'espace de Fourier $\mathcal{F} \{ Q_{\nu\nu'} \}$ sont donnés par (éq. 2.23) et $\mathcal{F} \{ F_{\nu'} \}$ doit être obtenue numériquement en utilisant des FFT. Notons que après le calcul de $\mathcal{F}^{-1} \{ \cdot \}$ en utilisant des FFT, il conviendra de ne conserver que la partie réelle du résultat.

Traitement du terme de contact H_c

Le tenseur de l'interaction de contact $C_{m'n'}^{mn}$ ne présente pas de difficulté particulière. Dans notre code, ce tenseur est implémenté en utilisant une matrice creuse.

Annexe B

Complément de calculs sur l'analyse des stabilités de la phase ferromagnétique uniforme

Cette annexe complète les calculs des chapitres 2 et 5

B.1 Système de spin $f = 1$

Le spectre énergétique des modes $m = \pm$ est donné par

$$\mathcal{E}_{k,\pm} = \sqrt{\mathcal{L}(k,\theta_k) \pm \sqrt{\mathcal{I}(k,\theta_k)}}. \quad (\text{B.1})$$

Les fonctions \mathcal{L} et \mathcal{I} peuvent être écrites sous forme polynomiale. \mathcal{L} est un polynôme d'ordre 2 en p

$$\mathcal{L}(k,\theta_k) = \frac{1}{2} [p - p_+(k,\theta_k)] [p - p_-(k,\theta_k)], \quad (\text{B.2})$$

où les fonctions p_{\pm} sont données par

$$p_{\pm}(k,\theta_k) = -\varepsilon_k - \frac{2\pi c_{\text{dd}} n}{3} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \pm i \sqrt{\varepsilon_k \{ \varepsilon_k + 2g_2 n [1 - \epsilon_{\text{dd}} (1 - 3 \cos^2 \theta_k)] \} - 4\pi^2 c_{\text{dd}}^2 n^2 \sin^4 \theta_k}. \quad (\text{B.3})$$

avec

$$\epsilon_{\text{dd}} = \frac{4\pi c_{\text{dd}}}{3g_2}. \quad (\text{B.4})$$

La fonction \mathcal{I} est un polynôme d'ordre 4 en p donné par

$$\mathcal{I}(k,\theta_k) = \eta_1(k,\theta_k)p^4 + \eta_2(k,\theta_k)p^3 + \eta_3(k,\theta_k)p^2 + \eta_4(k,\theta_k)p + \eta_5(k,\theta_k). \quad (\text{B.5})$$

Les paramètres $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ et η_5 sont donnés par

$$\eta_1 = \frac{1}{4} \quad (\text{B.6})$$

$$\eta_2 = \varepsilon_k + \frac{2\pi c_{\text{dd}} n}{3} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \quad (\text{B.7})$$

$$\eta_3 = \varepsilon_k^2 - g_2 n \left[1 - \frac{5}{2} \varepsilon_{\text{dd}} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \right] \varepsilon_k - 2\pi c_{\text{dd}} n (1 - 3 \cos^2 \theta_k) - \frac{(2\pi c_{\text{dd}} n)^2}{3} (1 - 3 \cos^4 \theta_k) \quad (\text{B.8})$$

$$\eta_4 = -2g_2 n \left[1 - \frac{3}{2} \varepsilon_{\text{dd}} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \right] \varepsilon_k^2 - (g_2 n)^2 \left[\frac{1}{2} (9 \cos^4 \theta_k - 24 \cos^2 \theta_k + 1) \varepsilon_{\text{dd}}^2 + (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} \right] \varepsilon_k - \frac{4(2\pi c_{\text{dd}} n)^3}{3} \left(\cos^4 \theta_k - \cos^2 \theta_k + \frac{2}{9} \right) \quad (\text{B.9})$$

$$\eta_5 = \left[\frac{9}{4} (g_2 n)^2 (1 + \cos^2 \theta_k^2) \varepsilon_{\text{dd}}^2 - 3(g_2 n)^2 (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}} + 1 \right] \varepsilon_k^2 + (g_2 n)^3 \left[3 \left(\frac{3}{2} \cos^4 \theta_k - \frac{3}{2} \cos^2 \theta_k - 1 \right) \varepsilon_{\text{dd}}^3 + (2 - 3 \cos^2 \theta_k) \varepsilon_{\text{dd}}^2 \right] \varepsilon_k + \frac{4(2\pi c_{\text{dd}} n)^4}{9} \left(\cos^4 \theta_k - \frac{4}{3} \cos^2 \theta_k + \frac{4}{9} \right). \quad (\text{B.10})$$

B.2 Système de spin $f = 2$

Pour des spins polarisés dans la direction $-\hat{e}_z$, le vecteur ζ (éq. 2.69) s'écrit comme suit

$$\zeta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Les matrices \mathcal{A}_k^0 , \mathcal{A}_k^c et \mathcal{B}_k^c qui regroupent les termes non interactifs et les termes d'interaction de contact sont données par

$$\text{Diag} \{ \mathcal{A}_k^0 + \mathcal{A}_k^c \} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k + 4p - \frac{2}{5}(g_2 - g_0)n - \frac{34}{35}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k + 3p - \frac{6}{7}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k + 2p - \frac{4}{7}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k + p \\ \varepsilon_k + g_4 n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{B}_k^c = \text{Diag} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_4 n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

où nous avons remplacé le potentiel chimique par

$$\mu = -2p + g_4 n. \quad (\text{B.14})$$

Les matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d qui contiennent uniquement des termes dipolaires sont données par

$$\frac{3}{16\pi c_{dd} n} \mathcal{A}_k^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(1 - 3 \cos^2 \theta_k) & -\frac{3}{2} \cos \theta_k \sin \theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cos \theta_k \sin \theta_k e^{i\phi_k} & -(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{3}{16\pi c_{dd} n} \mathcal{B}_k^d = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \sin^2 \theta_k e^{-2i\phi_k} & -\frac{3}{2} \cos \theta_k \sin \theta_k e^{-i\phi_k} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \cos \theta_k \sin \theta_k e^{-i\phi_k} & -(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.16})$$

Condensat sans interaction dipolaire

Le mode $\alpha = -2$ décrit des excitations de densité. Son spectre énergétique est donné par

$$\mathcal{E}_{k,-2} = \sqrt{\varepsilon_k (\varepsilon_k + 2g_4 n)}. \quad (\text{B.17})$$

Ce spectre doit être réel afin d'assurer la stabilité du système. Pour cela la largeur de diffusion a_4 doit être positive ($g_4 = 4\pi\hbar^2 a_4 / 2M > 0$).

Le mode $\alpha = -1$ présente un spectre de particule libre avec un gap en p . Ce mode décrit des excitations de précession de spin. Son spectre est donnée par

$$\mathcal{E}_{k,-1} = \varepsilon_k + p. \quad (\text{B.18})$$

Les modes $\alpha = 0, \dots, +2$ présentent un spectre de particule libre avec un gap en énergie δ_α

$$\mathcal{E}_{k,\alpha} = \varepsilon_k + \delta_\alpha. \quad (\text{B.19})$$

Le gap δ_α dépend du champ magnétique p et des constantes d'interaction g_0, g_2 et g_4

$$\delta_2 = 4p - \frac{2}{5}(g_2 - g_0)n - \frac{34}{35}(g_4 - g_2)n, \quad (\text{B.20})$$

$$\delta_1 = 3p - \frac{6}{7}(g_4 - g_2)n, \quad (\text{B.21})$$

$$\delta_0 = 2p - \frac{4}{7}(g_4 - g_2)n. \quad (\text{B.22})$$

$$(\text{B.23})$$

Le spectre énergétique de ces 3 modes devient négatif au dessous d'un champ critique donné par $\delta_\alpha = 0$.

Condensat avec interaction dipolaire

En posant $\theta_k = \pi/2$, les matrices \mathcal{A}_k^d et \mathcal{B}_k^d se simplifient et ne comportent que des éléments diagonaux. Par conséquent, tout les modes sont découplés. Après diagonalisation de la matrice $\sigma_z \Sigma_B$, nous obtenons le spectre énergétique des modes de densité et de précession correspondant à ces excitations \perp .

Le spectre $\mathcal{E}_{k_\perp, -2}$ des excitations de densité est donné par

$$\mathcal{E}_{k_\perp, -2} = \sqrt{\varepsilon_{k_\perp} [\varepsilon_{k_\perp} + 2g_4 n (1 - \epsilon_{dd})]}, \quad (\text{B.24})$$

où le paramètre ϵ_{dd} qui détermine l'intensité de l'interaction dipôle-dipôle par rapport à l'interaction de contact est donné dans ce cas par

$$\epsilon_{dd} = \frac{16\pi c_{dd}}{3g_4}. \quad (\text{B.25})$$

Le spectre $\mathcal{E}_{k_\perp, -1}$ des excitations de précession est donné par

$$\mathcal{E}_{k_\perp, -2} = \sqrt{(\varepsilon_{k_\perp} + p - p_{dd})(\varepsilon_{k_\perp} + p + 2p_{dd})} \quad (\text{B.26})$$

où p_{dd} est donné dans ce cas par

$$p_{dd} = \frac{8\pi c_{dd} n}{3} \quad (\text{B.27})$$

D'après ce spectre les excitations \perp , et par conséquent la phase ferromagnétique uniforme est dynamiquement instable au dessous du champ magnétique p_{dd} donné par (B.27).

B.3 Système de spin $f = 3$

Dans le repère de Larmor, les matrices \mathcal{A}_k^0 et \mathcal{B}_k^c peuvent être obtenues simplement à partir de (2.126) en posant $p = 0$. On a,

$$\text{Diag} \{ \mathcal{A}_k^0 + \mathcal{A}_k^c \} = \begin{pmatrix} \varepsilon_k - \frac{461}{462}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n + \frac{2}{7}(g_4 - g_0)n \\ \varepsilon_k - \frac{65}{66}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k - \frac{31}{33}(g_6 - g_4)n + \frac{5}{21}(g_4 - g_2)n \\ \varepsilon_k - \frac{9}{11}(g_6 - g_4)n \\ \varepsilon_k - \frac{6}{11}(g_6 - g_4)n \\ \varepsilon_k \\ \varepsilon_k + g_6 n \end{pmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

$$\text{Diag} \{ \mathcal{B}_k^c \} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ g_6 n \end{pmatrix}. \quad (\text{B.29})$$

ANNEXE B. COMPLÉMENTENT DE CALCULS SUR L'ANALYSE DES STABILITÉS DE LA PHASE FERROMAGNÉTIQUE UNIFORME

Dans le repère de Larmor, l'interaction dipolaire moyenné est obtenue en supposant que le champ mantique est appliqué suivant l'axe x dans le repère du laboratoire. Les spins sont supposés orienté suivant l'axe z . En annulant les termes de relaxation dipolaire, les éléments des matrices $A_{\mathbf{k}}^d$ et $B_{\mathbf{k}}^d$ sont données par

$$\text{Diag} \{A_{\mathbf{k}}^d\} = \pi c_{dd} n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -(1 - 3 \cos^2 \theta_k) \\ \frac{3}{2} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

$$\text{Diag} \{B_{\mathbf{k}}^d\} = \pi c_{dd} n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \\ 6 (1 - 3 \cos^2 \theta_k) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.31})$$

Le spectre du mode $m = -3$ est donné par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k},-3} = \sqrt{\varepsilon_k \{ \varepsilon_k + 2g_2 n [1 - \epsilon_{dd} (1 - 3 \cos^2 \theta_k) / 2] \}}, \quad (\text{B.32})$$

avec

$$\epsilon_{dd} = \frac{12\pi c_{dd}}{g_6}. \quad (\text{B.33})$$

Le spectre du mode $m = -2$ est donné par

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k},-2} = \sqrt{[\varepsilon_k - 3\pi c_{dd} n S(\theta_k)] [\varepsilon_k + 6\pi c_{dd} n S(\theta_k)]}, \quad (\text{B.34})$$

où S est une fonction donné par

$$S(\theta_k) = \frac{1}{3} + \cos 2\theta_k. \quad (\text{B.35})$$

Le spectre des mode $m = -1, \dots, +3$ s'écrit

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k},\alpha} = \varepsilon_k + \delta_\alpha. \quad (\text{B.36})$$

Le gap δ_α dépend du champ magnétique p et des constantes d'interaction g_0, g_2, g_4 et g_6 . Nous avons,

$$\delta_{-1} = -\frac{6}{11}(g_6 - g_4)n, \quad (\text{B.37})$$

$$\delta_0 = -\frac{9}{11}(g_6 - g_4)n, \quad (\text{B.38})$$

$$\delta_1 = -\frac{31}{33}(g_6 - g_4)n + \frac{5}{21}(g_4 - g_2)n, \quad (\text{B.39})$$

$$\delta_2 = -\frac{65}{66}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n, \quad (\text{B.40})$$

$$\delta_3 = -\frac{461}{462}(g_6 - g_4)n + \frac{25}{42}(g_4 - g_2)n + \frac{2}{7}(g_4 - g_0)n. \quad (\text{B.41})$$

Annexe C

Complément sur l'effet des interactions de contact dépendantes du spin

Cette annexe présente des simulations qui justifient l'approximation du fluide ferromagnétique incompressible adoptée au chapitre 5.

C.1 rôle des différents termes de l'interaction de contact

Pour comprendre le rôle des différents termes de l'interaction de contact, nous avons réalisé des simulations en variant les différentes constantes c_1 , c_2 et c_3 . On considère 4 situations. Le premier cas, on pose $c_{1,2,3} = 0$. Le deuxième cas $c_1 \neq 0$ et $c_{2,3} = 0$. Le troisième cas, on pose $c_2 \neq 0$ et $c_{1,3} = 0$. Le quatrième cas on pose $c_3 \neq 0$ et $c_{1,2} = 0$. Pour ces 4 situations $g_6 \neq 0$ et il prend la même valeur fixée par a_6 . Notons que $c_0 \neq 0$, mais ne prend la même valeur dans ces 4 situations. Finalement précisons que pour toutes ces simulations, l'interaction dipolaire est négligée ($c_{dd} = 0$).

L'évolution des fractions de populations de spin P_m , et de la longueur de spin moyenne Π sont portées sur la figure C.1. On compare ces simulations aux résultats obtenus dans le cas « réaliste » ($c_{1,2,3} \neq 0$) porté en sur les courbes en traitillés. (fig. C.1c et fig. C.1d). Ces résultats montrent que le cas réaliste est parfaitement reproduit dans la situation où $c_1 \neq 0$ et $c_{2,3} = 0$. Autrement dit, les processus fixés par c_1 dominent les dynamiques de spin. Par conséquent, les processus d'échanges liés à c_2 et c_3 peuvent être négligés si le système est initialement ferromagnétique. Notons que pour $c_2 \neq 0$ et $c_{1,3} = 0$ (fig. C.1e et fig. C.1f), et pour $c_3 \neq 0$ et $c_{1,2} = 0$ (fig. C.1g et fig. C.1h), on observe des dynamiques de populations, mais ces dynamiques sont très différentes du cas réaliste. Comme attendu, pour $c_{1,2,3} = 0$, il n'y a pas de dynamiques de spin. Finalement, faisons remarquer que pour $c_{dd} = 0$ (c'est le cas de toutes ces simulations), l'évolution de $P_{+|m|}$ et $P_{-|m|}$ est identique.

ANNEXE C. COMPLÉMENT SUR L'EFFET DES INTERACTIONS DE CONTACT DÉPENDANTES DU SPIN

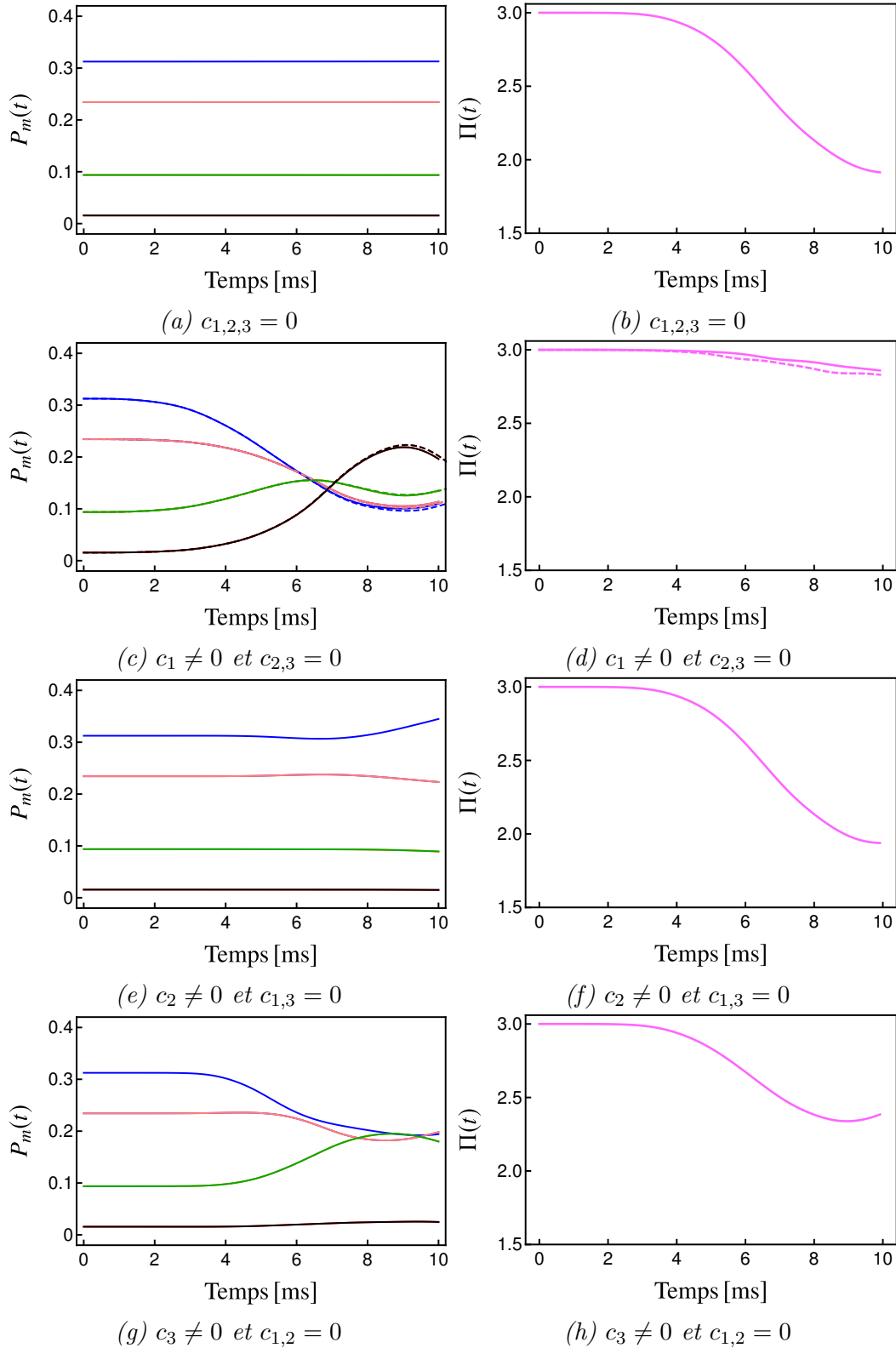


FIGURE C.1 – Évolution des P_m et Π . Code couleur des des P_m : $m = \pm 3$ (noir), $m = \pm 2$ (vert), $m = \pm 1$ (rose) et $m = 0$ (bleu). Pour ces simulations, nous avons pris en compte les valeurs des gradients $\gamma_{zx} = 2.55 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zy} = 51 \text{ mG cm}^{-1}$, $\gamma_{zz} = -3.22 \text{ mG cm}^{-1}$, et $q = 6 \text{ Hz}$. Calculs réalisés pour un condensat de ^{52}Cr avec $N_{\text{tot}}(0) = 38 \times 10^3$ dans un piège harmonique de fréquences $\omega_x/2\pi = 298 \text{ Hz}$, $\omega_y/2\pi = 245 \text{ Hz}$ et $\omega_z/2\pi = 210 \text{ Hz}$.

Bibliographie

- [1] M. H. Anderson, J. R. Ensher, M. R. Matthews, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “[Observation of Bose-Einstein Condensation in a Dilute Atomic Vapor](#),” *Science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995. (page [xi](#)).
- [2] K. B. Davis, M. O. Mewes, M. R. Andrews, N. J. van Druten, D. S. Durfee, D. M. Kurn, and W. Ketterle, “[Bose-Einstein Condensation in a Gas of Sodium Atoms](#),” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 3969–3973, Nov 1995. (page [xi](#)).
- [3] C. C. Bradley, C. A. Sackett, J. J. Tollett, and R. G. Hulet, “[Evidence of Bose-Einstein Condensation in an Atomic Gas with Attractive Interactions](#),” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 75, pp. 1687–1690, Aug 1995. (page [xi](#)).
- [4] S. Inouye, M. R. Andrews, J. Stenger, H. J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, and W. Ketterle, “[Observation of Feshbach resonances in a Bose-Einstein condensate](#),” *Nature*, vol. 392, no. 6672, pp. 151–154, 1998. (page [xi](#)).
- [5] S. L. Cornish, N. R. Claussen, J. L. Roberts, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, “[Stable \$^{85}\text{Rb}\$ Bose-Einstein Condensates with Widely Tunable Interactions](#),” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 1795–1798, Aug 2000. (page [xi](#)).
- [6] A. Einstein, *Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung*, pp. 245 – 257. 2006. (page [xi](#)).
- [7] Bose, “[Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese](#),” *Zeitschrift für Phys.*, vol. 26, pp. 178–181, dec 1924. (page [xi](#)).
- [8] G. Baym and C. J. Pethick, “[Ground-State Properties of Magnetically Trapped Bose-Condensed Rubidium Gas](#),” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 76, pp. 6–9, Jan 1996. (pages [xi](#), [25](#)).
- [9] N. N. Bogoliubov, “[On the theory of superfluidity](#),” *J. Phys. USSR*, vol. 11, no. 1, p. 23, 1947. (pages [xii](#), [33](#), [33](#), [34](#), [34](#), [48](#)).
- [10] L. Landau, “[Theory of the Superfluidity of Helium II](#),” *Phys. Rev.*, vol. 60, pp. 356–358, Aug 1941. (pages [xii](#), [36](#)).
- [11] E. P. Gross, “[Structure of a quantized vortex in boson systems](#),” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, vol. 20, pp. 454–477, May 1961. (pages [xii](#), [15](#)).
- [12] L. P. Pitaevskii, “[Vortex lines in imperfect Boses gases](#),” *J. Exptl. Theor. Phys.*, vol. 13, no. 40, pp. 646–651, 1961. (pages [xii](#), [15](#)).
- [13] J. Denschlag, J. E. Simsarian, D. L. Feder, C. W. Clark, L. A. Collins, J. Cubizolles, L. Deng, E. W. Hagley, K. Helmerson, W. P. Reinhardt, S. L. Rolston, B. I. Schneider, and W. D. Phillips, “[Generating Solitons by Phase Engineering of a Bose-Einstein Condensate](#),” *Science*, vol. 287, no. 5450, pp. 97–101, 2000. (page [xii](#)).

-
- [14] M. R. Matthews, B. P. Anderson, P. C. Haljan, D. S. Hall, C. E. Wieman, and E. A. Cornell, “**Vortices in a Bose-Einstein Condensate**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 83, pp. 2498–2501, Sep 1999. (page [xii](#)).
- [15] K. W. Madison, F. Chevy, W. Wohlleben, and J. Dalibard, “**Vortex Formation in a Stirred Bose-Einstein Condensate**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 806–809, Jan 2000. (page [xii](#)).
- [16] D. M. Stamper-Kurn, M. R. Andrews, A. P. Chikkatur, S. Inouye, H.-J. Miesner, J. Stenger, and W. Ketterle, “**Optical Confinement of a Bose-Einstein Condensate**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, pp. 2027–2030, Mar 1998. (page [xii](#)).
- [17] T.-L. Ho, “**Spinor Bose Condensates in Optical Traps**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 81, pp. 742–745, Jul 1998. (pages [xii](#), [6](#), [7](#), [8](#), [15](#), [16](#), [20](#), [22](#), [33](#), [33](#), [44](#), [49](#), [115](#)).
- [18] T. Ohmi and K. Machida, “**Bose-Einstein Condensation with Internal Degrees of Freedom in Alkali Atom Gases**,” *Journal of the Physical Society of Japan*, vol. 67, no. 6, pp. 1822–1825, 1998. (pages [xii](#), [6](#), [7](#), [15](#), [16](#), [22](#), [33](#), [33](#), [44](#)).
- [19] M.-S. Chang, C. D. Hamley, M. D. Barrett, J. A. Sauer, K. M. Fortier, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman, “**Observation of Spinor Dynamics in Optically Trapped ^{87}Rb Bose-Einstein Condensates**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 140403, Apr 2004. (page [xii](#)).
- [20] M.-S. Chang, Q. Qin, W. Zhang, L. You, and M. S. Chapman, “**Coherent spinor dynamics in a spin-1 Bose condensate**,” *Nature Physics*, vol. 1, no. 2, pp. 111–116, 2005. (page [xii](#)).
- [21] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H. J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, “**Spin domains in ground-state Bose-Einstein condensates**,” *Nature*, vol. 396, no. 6709, pp. 345–348, 1998. (pages [xii](#), [xiii](#), [22](#)).
- [22] H.-J. Miesner, D. M. Stamper-Kurn, J. Stenger, S. Inouye, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, “**Observation of Metastable States in Spinor Bose-Einstein Condensates**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 82, pp. 2228–2231, Mar 1999. (page [xii](#)).
- [23] K. Murata, H. Saito, and M. Ueda, “**Broken-axisymmetry phase of a spin-1 ferromagnetic Bose-Einstein condensate**,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 013607, Jan 2007. (pages [xiii](#), [22](#), [33](#), [49](#)).
- [24] C. V. Ciobanu, S.-K. Yip, and T.-L. Ho, “**Phase diagrams of $F = 2$ spinor Bose-Einstein condensates**,” *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 033607, Feb 2000. (pages [xiii](#), [21](#)).
- [25] A. M. Turner, R. Barnett, E. Demler, and A. Vishwanath, “**Nematic Order by Disorder in Spin-2 Bose-Einstein Condensates**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 190404, May 2007. (pages [xiii](#), [21](#)).
- [26] H. Saito and M. Ueda, “**Diagnostics for the ground-state phase of a spin-2 Bose-Einstein condensate**,” *Phys. Rev. A*, vol. 72, p. 053628, Nov 2005. (pages [xiii](#), [21](#)).
- [27] L. Santos and T. Pfau, “**Spin-3 Chromium Bose-Einstein Condensates**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 190404, May 2006. (pages [xiii](#), [xiv](#), [23](#), [25](#)).
- [28] A. Griesmaier, J. Werner, S. Hensler, J. Stuhler, and T. Pfau, “**Bose-Einstein Condensation of Chromium**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 160401, Apr 2005. (page [xiii](#)).

- [29] J. Stuhler, A. Griesmaier, T. Koch, M. Fattori, T. Pfau, S. Giovanazzi, P. Pedri, and L. Santos, “**Observation of Dipole-Dipole Interaction in a Degenerate Quantum Gas,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 95, p. 150406, Oct 2005. (pages [xiii](#), [29](#)).
- [30] J. Stenger, S. Inouye, D. M. Stamper-Kurn, H. J. Miesner, A. P. Chikkatur, and W. Ketterle, “**Spin domains in ground-state Bose–Einstein condensates,**” *Nature*, vol. 396, no. 6709, pp. 345–348, 1998. (pages [xiii](#), [29](#)).
- [31] S. Yi, L. You, and H. Pu, “**Quantum Phases of Dipolar Spinor Condensates,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 040403, Jul 2004. (page [xiii](#)).
- [32] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, “**Einstein–de Haas Effect in Dipolar Bose-Einstein Condensates,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 080405, Mar 2006. (pages [xiii](#), [61](#), [70](#), [75](#)).
- [33] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, “**Spontaneous Circulation in Ground-State Spinor Dipolar Bose-Einstein Condensates,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 97, p. 130404, Sep 2006. (pages [xiii](#), [xiii](#), [30](#)).
- [34] Y. Kawaguchi, H. Saito, and M. Ueda, “**Can Spinor Dipolar Effects Be Observed in Bose-Einstein Condensates?,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 110406, Mar 2007. (pages [xiii](#), [79](#), [83](#), [97](#)).
- [35] Y. Eto, H. Saito, and T. Hirano, “**Observation of Dipole-Induced Spin Texture in an ^{87}Rb Bose-Einstein Condensate,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 112, p. 185301, May 2014. (page [xiii](#)).
- [36] B. Pasquiou, G. Bismut, Q. Beaufils, A. Crubellier, E. Maréchal, P. Pedri, L. Vernac, O. Gorceix, and B. Laburthe-Tolra, “**Control of dipolar relaxation in external fields,**” *Phys. Rev. A*, vol. 81, p. 042716, Apr 2010. (pages [xiii](#), [11](#), [79](#), [84](#)).
- [37] S. Lepoutre, K. Kechadi, B. Naylor, B. Zhu, L. Gabardos, L. Isaev, P. Pedri, A. M. Rey, L. Vernac, and B. Laburthe-Tolra, “**Spin mixing and protection of ferromagnetism in a spinor dipolar condensate,**” *Phys. Rev. A*, vol. 97, p. 023610, Feb 2018. (page [xiii](#)).
- [38] S. Lepoutre, L. Gabardos, K. Kechadi, P. Pedri, O. Gorceix, E. Maréchal, L. Vernac, and B. Laburthe-Tolra, “**Collective Spin Modes of a Trapped Quantum Ferrofluid,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 121, p. 013201, Jul 2018. (pages [xiii](#), [110](#), [124](#), [125](#)).
- [39] R. B. Diener and T.-L. Ho, “ **^{52}Cr Spinor Condensate: A Biaxial or Uniaxial Spin Nematic,**” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 96, p. 190405, May 2006. (pages [xiv](#), [23](#), [25](#)).
- [40] T. Lahaye, C. Menotti, L. Santos, M. Lewenstein, and T. Pfau, “**The physics of dipolar bosonic quantum gases,**” *Reports on Progress in Physics*, vol. 72, p. 126401, nov 2009. (pages [1](#), [13](#)).
- [41] M. Ueda, *Fundamentals and New Frontiers of Bose-Einstein Condensation*. World Scientific, 2010. (page [1](#)).
- [42] Y. Kawaguchi and M. Ueda, “**Spinor Bose–Einstein condensates,**” *Physics Reports*, vol. 520, no. 5, pp. 253 – 381, 2012. Spinor Bose–Einstein condensates. (pages [1](#), [8](#), [34](#), [34](#), [44](#), [110](#), [121](#)).

- [43] D. M. Stamper-Kurn and M. Ueda, “**Spinor Bose gases: Symmetries, magnetism, and quantum dynamics**,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 85, pp. 1191–1244, Jul 2013. (pages 1, 2).
- [44] C. J. Pethick and H. Smith, *Bose–Einstein Condensation in Dilute Gases*. Cambridge University Press, 2 ed., 2008. (pages 1, 8, 16, 85, 85).
- [45] L. Santos, M. Fattori, J. Stuhler, and T. Pfau, “**Spinor condensates with a laser-induced quadratic Zeeman effect**,” *Phys. Rev. A*, vol. 75, p. 053606, May 2007. (page 3).
- [46] C. Cohen-Tannoudji and J. Dupont-Roc, “**Experimental Study of Zeeman Light Shifts in Weak Magnetic Fields**,” *Phys. Rev. A*, vol. 5, pp. 968–984, Feb 1972. (page 3).
- [47] L. Landau and E. Lifshitz, *Quantum Mechanics (Non-Relativistic Theory)*, 3rd edition. Butterworth-Heinemann, 1981. (pages 6, 6, 30).
- [48] M. Ueda and M. Koashi, “**Theory of spin-2 Bose-Einstein condensates: Spin correlations, magnetic response, and excitation spectra**,” *Phys. Rev. A*, vol. 65, p. 063602, May 2002. (pages 8, 33).
- [49] Sandro Stringari and L. Pitaevskii, *Bose-Einstein Condensation and Superfluidity*. Oxford University Press, 2016. (pages 8, 16, 16, 34, 36).
- [50] C. Samuelis, E. Tiesinga, T. Laue, M. Elbs, H. Knöckel, and E. Tiemann, “**Cold atomic collisions studied by molecular spectroscopy**,” *Phys. Rev. A*, vol. 63, p. 012710, Dec 2000. (page 11).
- [51] E. G. M. van Kempen, S. J. J. M. F. Kokkelmans, D. J. Heinzen, and B. J. Verhaar, “**Interisotope Determination of Ultracold Rubidium Interactions from Three High-Precision Experiments**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 88, p. 093201, Feb 2002. (page 11).
- [52] A. Widera, F. Gerbier, S. Fölling, T. Gericke, O. Mandel, and I. Bloch, “,” *New Journal of Physics*, vol. 8, pp. 152–152, aug 2006. (page 11).
- [53] A. de Paz, B. Naylor, J. Huckans, A. Carrance, O. Gorceix, E. Maréchal, P. Pedri, B. Laburthe-Tolra, and L. Vernac, “**Dipolar atomic spin ensembles in a double-well potential**,” *Phys. Rev. A*, vol. 90, p. 043607, Oct 2014. (page 11).
- [54] J. Werner, A. Griesmaier, S. Hensler, J. Stuhler, T. Pfau, A. Simoni, and E. Tiesinga, “**Observation of Feshbach Resonances in an Ultracold Gas of ^{52}Cr** ,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 94, p. 183201, May 2005. (page 11, 11).
- [55] G. E. Astrakharchik and Y. E. Lozovik, “**Super-Tonks-Girardeau regime in trapped one-dimensional dipolar gases**,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 013404, Jan 2008. (page 13).
- [56] M. Koashi and M. Ueda, “**Exact Eigenstates and Magnetic Response of Spin-1 and Spin-2 Bose-Einstein Condensates**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 84, pp. 1066–1069, Feb 2000. (page 15).
- [57] E. Yukawa and M. Ueda, “**Hydrodynamic description of spin-1 Bose-Einstein condensates**,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 063614, Dec 2012. (pages 20, 20, 49, 90, 111, 115).

- [58] J. L. Song, G. W. Semenoff, and F. Zhou, “Uniaxial and Biaxial Spin Nematic Phases Induced by Quantum Fluctuations,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 98, p. 160408, Apr 2007. (page 21).
- [59] Y. Kawaguchi and M. Ueda, “Symmetry classification of spinor Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, p. 053616, Nov 2011. (page 23).
- [60] C. Eberlein, S. Giovanazzi, and D. H. J. O’Dell, “Exact solution of the Thomas-Fermi equation for a trapped Bose-Einstein condensate with dipole-dipole interactions,” *Phys. Rev. A*, vol. 71, p. 033618, Mar 2005. (page 29).
- [61] E. Yukawa and M. Ueda, “Hydrodynamic description of spin-1 Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 86, p. 063614, Dec 2012. (page 33).
- [62] H. Saito, Y. Kawaguchi, and M. Ueda, “Kibble-Zurek mechanism in a quenched ferromagnetic Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 76, p. 043613, Oct 2007. (pages 33, 63).
- [63] R. Barnett, D. Podolsky, and G. Refael, “Geometrical approach to hydrodynamics and low-energy excitations of spinor condensates,” *Phys. Rev. B*, vol. 80, p. 024420, Jul 2009. (page 33).
- [64] A. Lamacraft, “Long-wavelength spin dynamics of ferromagnetic condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 77, p. 063622, Jun 2008. (pages 33, 110).
- [65] R. W. Cherng and E. Demler, “Magnetoroton Softening in Rb Spinor Condensates with Dipolar Interactions,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 103, p. 185301, Oct 2009. (page 33).
- [66] Y. Kawaguchi, H. Saito, K. Kudo, and M. Ueda, “Spontaneous magnetic ordering in a ferromagnetic spinor dipolar Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 043627, Oct 2010. (page 33).
- [67] F. Deuretzbacher, G. Gebreyesus, O. Topic, M. Scherer, B. Lücke, W. Ertmer, J. Arlt, C. Klempt, and L. Santos, “Parametric amplification of matter waves in dipolar spinor Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 053608, Nov 2010. (page 33).
- [68] K. Kudo and Y. Kawaguchi, “Hydrodynamic equation of a spinor dipolar Bose-Einstein condensate,” *Phys. Rev. A*, vol. 82, p. 053614, Nov 2010. (pages 33, 110, 110).
- [69] J. D. Sau, S. R. Leslie, D. M. Stamper-Kurn, and M. L. Cohen, “Theory of domain formation in inhomogeneous ferromagnetic dipolar condensates within the truncated Wigner approximation,” *Phys. Rev. A*, vol. 80, p. 023622, Aug 2009. (page 33).
- [70] J. A. M. Huhtamäki and P. Kuopanportti, “Elementary excitations in dipolar spin-1 Bose-Einstein condensates,” *Phys. Rev. A*, vol. 84, p. 043638, Oct 2011. (page 33).
- [71] A. L. Fetter, “Nonuniform states of an imperfect bose gas,” *Annals of Physics*, vol. 70, no. 1, pp. 67 – 101, 1972. (pages 34, 42).
- [72] A. L. Fetter and A. A. Svidzinsky, “Vortices in a trapped dilute Bose-Einstein condensate,” *Journal of Physics : Condensed Matter*, vol. 13, pp. R135–R194, mar 2001. (page 42).

- [73] S. Ronen, D. C. E. Bortolotti, and J. L. Bohn, “**Bogoliubov modes of a dipolar condensate in a cylindrical trap**,” *Phys. Rev. A*, vol. 74, p. 013623, Jul 2006. (page 46, 46).
- [74] L. Santos, G. V. Shlyapnikov, P. Zoller, and M. Lewenstein, “**Bose-Einstein Condensation in Trapped Dipolar Gases**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 85, pp. 1791–1794, Aug 2000. (page 58).
- [75] K. Góral, K. Rzażewski, and T. Pfau, “**Bose-Einstein condensation with magnetic dipole-dipole forces**,” *Phys. Rev. A*, vol. 61, p. 051601, Mar 2000. (page 58).
- [76] B. Pasquiou, E. Maréchal, G. Bismut, P. Pedri, L. Vernac, O. Gorceix, and B. Laburthe-Tolra, “**Spontaneous Demagnetization of a Dipolar Spinor Bose Gas in an Ultralow Magnetic Field**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, p. 255303, Jun 2011. (pages 61, 75).
- [77] A. Einstein and W. J. de Haas, “**Experimental proof of the existence of Ampère’s molecular currents**,” *R. Netherlands Acad. Arts Sci.*, vol. 18, no. September, pp. 696–711, 1915. (page 71).
- [78] K. Gawryluk, M. Brewczyk, K. Bongs, and M. Gajda, “**Resonant Einstein–de Haas Effect in a Rubidium Condensate**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 99, p. 130401, Sep 2007. (page 75).
- [79] T. Świsłocki, J. H. Bauer, M. Gajda, and M. Brewczyk, “**Resonant dynamics of chromium condensates**,” *Phys. Rev. A*, vol. 89, p. 023622, Feb 2014. (page 75).
- [80] S. Hensler, J. Werner, A. Griesmaier, P. Schmidt, A. Görlitz, T. Pfau, S. Giovanazzi, and K. Rzażewski, “**Dipolar relaxation in an ultra-cold gas of magnetically trapped chromium atoms**,” *Applied Physics B*, vol. 77, pp. 765–772, Dec 2003. (pages 79, 84, 85, 85).
- [81] I. Bloch, J. Dalibard, and W. Zwerger, “**Many-body physics with ultracold gases**,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 80, pp. 885–964, Jul 2008. (page 80).
- [82] A. Abragam and L. C. Hebel, *The Principles of Nuclear Magnetism*. clarendon ed., 1983. (page 83).
- [83] B. Naylor, *Quantum gases of Chromium : thermodynamics and magnetic properties of a Bose-Einstein condensate and production of a Fermi sea*. Thèse, Université Sorbonne Paris Cité, Dec. 2016. (pages 84, 98).
- [84] R. Kaiser, C. Westbrook, and F. David, *Coherent atomic matter waves - Ondes de matiere coherentes*. 2001. (page 122).
- [85] C. F. Dunkl and Y. Xu, *Orthogonal Polynomials of Several Variables*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2 ed., 2014. (page 124).
- [86] S. Stringari, “**Collective Excitations of a Trapped Bose-Condensed Gas**,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 77, pp. 2360–2363, Sep 1996. (page 124).
- [87] W. Bao, D. Jaksch, and P. A. Markowich, “**Numerical Solution of the Gross-Pitaevskii Equation for Bose-Einstein Condensation**,” *Journal of Computational Physics*, vol. 187, no. 1, pp. 318 – 342, 2003. (page 131).

- [88] O. V. Marchukov, B. A. Malomed, V. A. Yurovsky, M. Olshanii, V. Dunjko, and R. G. Hulet, “[Splitting of nonlinear-Schrödinger-equation breathers by linear and nonlinear localized potentials](#),” *Phys. Rev. A*, vol. 99, p. 063623, Jun 2019. (page 131).
- [89] P. B. Blakie, C. Ticknor, A. S. Bradley, A. M. Martin, M. J. Davis, and Y. Kawaguchi, “Numerical method for evolving the dipolar projected gross-pitaevskii equation,” *Phys. Rev. E*, vol. 80, p. 016703, Jul 2009. (page 131).
- [90] W. Bao, Y. Cai, and H. Wang, “[Efficient numerical methods for computing ground states and dynamics of dipolar Bose–Einstein condensates](#),” *Journal of Computational Physics*, vol. 229, no. 20, pp. 7874 – 7892, 2010. (page 131).
- [91] L. M. Symes, R. I. McLachlan, and P. B. Blakie, “[Efficient and accurate methods for solving the time-dependent spin-1 Gross-Pitaevskii equation](#),” *Phys. Rev. E*, vol. 93, p. 053309, May 2016. (pages 131, 133, 133).
- [92] L. M. Symes and P. B. Blakie, “[Solving the spin-2 Gross-Pitaevskii equation using exact nonlinear dynamics and symplectic composition](#),” *Phys. Rev. E*, vol. 95, p. 013311, Jan 2017. (page 131).
- [93] X. Antoine and R. Duboscq, “[GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross–Pitaevskii equations I: Computation of stationary solutions](#),” *Computer Physics Communications*, vol. 185, no. 11, pp. 2969 – 2991, 2014. (page 131).
- [94] X. Antoine and R. Duboscq, “[GPELab, a Matlab toolbox to solve Gross–Pitaevskii equations II: Dynamics and stochastic simulations](#),” *Computer Physics Communications*, vol. 193, pp. 95 – 117, 2015. (page 131).
- [95] X. Antoine and R. Duboscq, “Modeling and computation of Bose-Einstein condensates : Stationary states, nucleation, dynamics, stochasticity,” in *Nonlinear Opt. At. Syst. Interface Phys. Math.*, 2015. (page 131).
- [96] S. K. Adhikari, “[Numerical solution of the two-dimensional Gross–Pitaevskii equation for trapped interacting atoms](#),” *Physics Letters A*, vol. 265, no. 1, pp. 91 – 96, 2000. (page 131).
- [97] W. Bao and Q. Du, “[Computing the ground state solution of Bose-Einstein condensates by a normalized gradient flow](#),” *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 25, no. 5, pp. 1674–1697, 2004. (page 131).
- [98] W. Bao, “[Ground states and dynamics of multicomponent bose-Einstein condensates](#),” *Multiscale Model. Simul.*, vol. 2, no. 2, pp. 210–236, 2004. (page 131).
- [99] W. Bao and F. Lim, “[Computing Ground States of Spin-1 Bose-Einstein Condensates by the Normalized Gradient Flow](#),” *Siam Journal on Scientific Computing*, vol. 30, pp. 1925–1948, 01 2008. (page 131).
- [100] W. Bao, D. Jaksch, and P. Markowich, “[Numerical Solution of the Gross-Pitaevskii Equation for Bose-Einstein Condensation](#),” *Journal of Computational Physics*, vol. 187, pp. 318–342, 01 2005. (page 131).
- [101] H. Wang, “[A projection gradient method for computing ground state of spin-2 Bose–Einstein condensates](#),” *Journal of Computational Physics*, vol. 274, pp. 473 – 488, 2014. (page 131).

- [102] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, and B. P. Flannery, *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*. New York, NY, USA : Cambridge University Press, 3rd edition ed., 2007. (pages [132](#), [134](#)).

Titre. — Analyse théorique des excitations et des instabilités des condensats de Bose-Einstein spinoriels dipolaires

Résumé. — Dans les condensats de Bose-Einstein spinoriels (CBES), plusieurs états de spin coexistent, donnant lieu à des dynamiques pilotées par des interactions dépendantes du spin (interactions de contact (IC) et dipôle-dipôle (IDD)). En lien étroit avec les travaux expérimentaux de notre groupe, ce manuscrit présente une analyse théorique du comportement dynamique des CBES. On s'intéresse à la situation où les CBES se trouvent dans l'état fondamental ferromagnétique à magnétisation maximale, et qui sont portés hors de l'état d'équilibre. En analysant les instabilités d'un condensat uniforme de spin f dans le cadre de la théorie de Bogoliubov, on met en évidence l'existence d'instabilités dynamiques lorsque le champ magnétique appliqué est inférieur à un champ critique p_{dd} qui est de l'ordre de ~ 0.1 mG. On montre que p_{dd} est fixé uniquement par l'IDD. L'instabilité se traduit par l'apparition de textures de spin et par la démagnétisation du condensat. Pour un condensat piégé, nos simulations numériques basées sur l'équation de Gross-Pitaevskii montrent une démagnétisation pour un champ critique $p_{dem} \lesssim p_{dd}$.

Nous avons également étudié les dynamiques du condensat piégé en présence d'un fort champ magnétique ~ 200 mG $\gg p_{dd}$, et d'un gradient ~ 10 mG/cm. L'état initial est excité en effectuant une rotation globale des spins. Nos simulations numériques (Gross-Pitaevskii) montrent une persistance inattendue du caractère ferromagnétique initial. On montre que l'énergie cinétique communiquée par le gradient aux états de spin tend à altérer le caractère ferromagnétique, mais que cet effet est contrebalancé par l'IC qui impose un gap en énergie. Enfin, pour un condensat piégé, on met en évidence des modes collectifs de spin : les spins oscillent autour de leur orientation initiale avec une amplitude qui varie spatialement et une fréquence de l'ordre de $\hbar/M\sigma^2 \ll \omega$ (σ est la taille du condensat et $\omega/2\pi$ la fréquence du piège). La comparaison de nos calculs avec les expériences montre un excellent accord.

Mots clés. — Condensation de Bose-Einstein spinoriels, Interaction dipolaire, Analyse de Bogolyubov, Mode collectif de spin, Simulations Gross-Pitaevskii.

Title. — Theoretical analysis of the excitations and instabilities of spinor dipolar Bose-Einstein condensates

Abstract. — In spinor Bose-Einstein condensates (SBEC), several spin states coexist, giving rise to dynamics driven by spin-dependent interactions (contact (CI) and dipole-dipole (DDI) interactions). In close connection with the experimental work of our group, this thesis presents a theoretical analysis of the dynamical behavior of SBEC which are initially in the ferromagnetic fully polarized ground state, and set out of equilibrium.

Within the Bogolyubov theory, we analyzed the excitations of a uniform spin f condensate. Our study highlights the existence of dynamical instabilities when the applied magnetic field is less than critical field p_{dd} which is of the order of ~ 0.1 mG. It is shown that p_{dd} is only set by the DDI. The growth of dynamical instability gives rise to spin texture formation and demagnetization dynamics. For trapped condensates, our Gross-Pitaevskii simulations show demagnetization dynamics below the critical field $p_{dem} \lesssim p_{dd}$.

We also studied the dynamics of trapped condensate in the presence of a strong magnetic field ~ 200 mG $\gg p_{dd}$, and a gradient ~ 10 mG/cm. The initial state is excited by performing an overall rotation of the spins. We have highlighted two new phenomena. First, our Gross-Pitaevskii simulations show an unexpected preservation of the initial ferromagnetic character (the DDI and the gradient can modify this ferromagnetic character). By neglecting the DDI, we show that this preservation is the result of a competition between two effects : the kinetic energy acquired by the spin components in the presence of the gradient tends to modify the ferromagnetic character. This effect is inhibited by the CI which imposes an energy gap. Secondly, for trapped condensates, spin collective behavior is demonstrated : the spins oscillate around their initial orientation with an amplitude that varies spatially and a frequency of the order of $\hbar/M\sigma^2 \ll \omega$ (σ is the size of the condensate and $\omega/2\pi$ is the frequency of the trap). Our calculations are in excellent agreement with experimental results.

Keywords. — Spinor Bose-Einstein condensation, Dipolar interaction, Bogolyubov theory, Collective Spin modes, Gross-Pitaevskii simulations