UNIVERSITÉ PARIS 13

ÉCOLE DOCTORALE GALILÉE
LABORATOIRE ANALYSE, GÉOMÉTRIE ET APPLICATIONS, UMR 7539

THÈSE

présentée et soutenue publiquement par

NGUYEN Kieu Hieu

pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Paris 13

Discipline : Mathématique

Espaces de Rapoport-Zink et conjecture de Kottwitz

Co-directeur de thèse : **Pascal BOYER**

Co-directeur de thèse : **Laurent FARGUES**

Soutenue le 3 juin 2019 devant le jury composé de :

M. Pascal BOYER	Co-directeur de thèse
M. Laurent FARGUES	Co-directeur de thèse
Mme. Colette MOEGLIN	Examinatrice
Mme. Sophie MOREL	Raporteure
M. Vincent PILLONI	Examinateur
M. Jacques TILOUINE	Examinateur
Mme. Eva VIEHMANN	Raporteure absente à la soutenance

Résumé. La conjecture de Kottwitz décrit la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques à l'aide des correspondances de Langlands locales. Dans un premier temps, par voie globale via l'étude de la géométrie de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz, on prouve cette conjecture pour des espaces de Rapoport-Zink de type PEL unitaires non ramifiés simples basiques de signature $(1, n-1)$. Dans la deuxième partie de cette thèse, via l'étude des modifications de fibrés vectoriels sur la courbe de Fargues-Fontaine, on prouve une formule géométrique reliant les tours de Lubin-Tate avec les espaces de Rapoport-Zink non ramifiés simples basiques de type EL de signature $(1, n-1), (p_1, q_1), \cdots, (p_k, q_k)$ où $p_i q_i = 0$. En particulier, on en déduit le calcul des groupes de cohomologie de ces derniers.

Mots-clés : Conjecture de Kottwitz, Espaces de Rapoport-Zink, Variétés de Shimura, Correspondance de Langlands, La courbe de Fargues-Fontaine

Abstract. The Kottwitz conjecture describes the cohomology of basic Rapoport-Zink spaces using local Langlands correspondences. At first, via geometrical studies of some Kottwitz-type Shimura varieties, we prove this conjecture for basic simple unramified unitary PEL type Rapoport-Zink spaces of signature $(1, n-1)$. In the second part, via the study of the modifications of vector bundles on the Fargues-Fontaine curve, we prove a geometric formula relating the Lubin-Tate towers with the simple basic unramified Rapoport-Zink spaces of EL type of signature $(1, n-1), (p_1, q_1), \cdots, (p_k, q_k)$ where $p_i q_i = 0$. In particular, we deduce the computation of cohomology groups of the latter.

Key words : Kottwitz Conjecture, Rapoport-Zink spaces, Shimura varieties, Langlands correspondence, The Fargues-Fontaine curve

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer ma reconnaissance à Pascal BOYER et à Laurent FARGUES pour avoir dirigé ma thèse. Au-delà de leur grande connaissance, j'ai bénéficié de leur gentillesse, de leur soutien continu et du temps qu'ils m'ont accordé tout au long de ces années. Je n'oublierai jamais les conseils judicieux qu'ils m'ont prodigués. Je leur suis infiniment reconnaissant, sans eux, à mes côtés, rien ne serait possible.

J'adresse mes plus vifs remerciements à Sophie Morel et Eva Viehmann d'avoir accepté de rapporter ma thèse et pour le temps consacré à ce travail. Colette Moeglin, Vincent Pilloni et Jacques Tilouine me font l'honneur de faire partie du jury, je voudrais pour cela leur exprimer ma gratitude.

Je souhaite remercier à nouveau Sophie Morel et Colette Moeglin de m'avoir gentiment expliqué leurs travaux. Je souhaite remercier également Tasho Kaletha, Benoît Stroh, Sug Woo Shin, Olivier Taïbi et Arthur César Le Bras pour avoir répondu à mes nombreuses questions.

Je pense à mes amis pour leur aide, leur soutien constants et pour les bons moments que nous avons partagé ensemble, grâce à quoi ma vie à Paris fut joyeuse. Un merci particulier à mon professeur de lycée, Nguyen Duy Thai Son, grâce à qui j'ai la chance de confondre travail et passion.

Mes remerciements vont de même au laboratoire de mathématiques de Paris 13 (LAGA) et à l'École Doctorale Galilée pour leur accueil chaleureux durant ces années. Je remercie mes collègues au LAGA avec qui j'ai passé de beaux moments, pas seulement mathématiques.

Je remercie évidemment mes parents pour leur soutien et affection. Ils ont fait de moi l'homme que je suis aujourd'hui et j'espère à travers cette thèse les rendre fiers de moi. La thèse leur est dédiée.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

1.1 Géométrisation de la correspondance de Langlands

La conjecture de Hasse-Weil est une des conjectures les plus importantes de la géométrie arithmétique. Soit X une variété projective lisse de dimension m sur $\mathbb{Q}$ avec bonne réduction hors un nombre fini de premiers S. On peut alors, pour $q \notin S$, considérer X_q la réduction modulo q de X. On écrit sa fonction zêta de Hasse-Weil :

$$\zeta_X(s) = \prod_{q \notin S} \exp\Big(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m}(q^{-s})^m\Big)$$

où N_m est le nombre de points de X_q définie sur l'extension de degré m de $\mathbb{F}_q$. La fonction $\zeta_X(s)$ converge absolument sur le demi plan $\mathrm{Re}(s) > 1 + m$.

Conjecture 1.1.1. *La fonction $\zeta_X(s)$ s'étend méromorphiquement à $\mathbb{C}$ et satisfait une équation fonctionnelle.*

Lorsque $X = \mathrm{Spec}(\mathbb{Q})$ est un point, on retrouve alors la fonction zêta de Riemann et la conjecture 1.1.1 est démontrée dans [Rie59].

Par des travaux de Grothendieck sur la cohomologie étale, on peut exprimer la fonction zêta de Hasse-Weil en termes de produit de fonctions L associées à des représentations galoisiennes. Ce sont une des deux classes majeures de fonctions L globales, l'autre étant les fonctions L associées aux représentations automorphes d'un groupe réductif. Plus précisément, pour une représentation automorphe $\Pi = \otimes_v \pi_v$ de G, et une représentation de dimension finie $\rho : {}^L G \longrightarrow GL(V_\rho)$ du groupe de Langlands ${}^L G$, Langlands a défini la fonction L comme un produit

$$L(s, \Pi, \rho) = \prod_v L_v(s, \pi_v, \rho) \tag{1.1}$$

où les facteurs locaux sont donnés par la formule

$$L_v(s, \pi_v, \rho) = \det(1 - \rho(\sigma_v) q_v^{-s})^{-1}$$

lorsque π_v est non ramifiée et où σ_v est sa classe de conjugaison semi-simple dans ${}^L G$. Il est alors bien connu que le produit dans (1.1) converge absolument sur un demi plan $\mathrm{Re}(s) > r$. On conjecture que ces fonctions L admettent un prolongement méromorphe sur le plan complexe et satisfont une équation fonctionnelle. En particulier, lorsque $G = GL_n$ et ρ la représentation triviale de ${}^L GL_n = GL_n(\mathbb{C})$, cette conjecture est démontrée par Godement et Jacquet [GJ]. Cela suggère une stratégie pour démontrer la conjecture de Hasse-Weil : exprimer les fonctions zêta $\zeta_X(s)$ en termes de fonctions L de représentations automorphes via la correspondance de Langlands globale. De manière informelle, elle prédit qu'il existe un seul type essentiel de fonction L globale, avec deux descriptions (provenant d'une variété algébrique et provenant d'une représentation automorphe).

Les objets géométriques naturels pour étudier la correspondance de Langlands sont les variétés de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$ où G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ possédant une donnée de Shimura (G, X). Les groupes de cohomologie de ces objets possèdent à la fois une action de $Gal(\overline{E}/E)$ où E est le corps de définition, et une action de $G(\mathbb{A}_f)$, via lesquels l'on espère réaliser la correspondance de Langlands.

Dans cette thèse, nous étudions l'analogue p-adique, à savoir la correspondance de Langlands locale. Les objets géométriques locaux analogues seraient les variétés de Shimura locales. Les premiers exemples sont donnés par les espaces de Rapoport-Zink et récemment, Scholze a construit des espaces de modules de Shtukas généralisant la notion de variétés de Shimura locales.

Considérons un triplet (G, μ, b) où G est un groupe réductif (non ramifié) sur $\mathbb{Q}_p$, $b \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ et $\mu \in X_*^+(T)$ minuscule avec $b \in B(G, \mu)$. On suppose que (G, μ, b) correspond à une donnée de Rapoport-Zink de type EL ou PEL. À une telle donnée (G, μ, b), on associe un groupe p-divisible $\mathbb{X}$ avec structures additionnelles. Notons $\mathcal{M}(G, \mu, b)$ le foncteur qui classifie les déformations par quasi-isogénies de $\mathbb{X}$ avec structures additionnelles. Ce foncteur est représentable par un schéma formel défini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p})$ que l'on notera encore $\mathcal{M}(G, \mu, b)$.

Considérons ensuite l'espace rigide $\breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$ défini sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ associé au schéma formel $\mathcal{M}(G, \mu, b)$. Pour chaque sous groupe compact ouvert $K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$, il existe un espace rigide $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$ qui est défini comme le revêtement étale de $\breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$ classifiant les $\mathcal{O}_F$ trivialisations modulo K_p du module de Tate p-adique de groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b)$. D'autre part pour $K_p' \subset K_p$, il y a un morphisme de transition étale fini :

$$\Phi_{K_p', K_p} : \breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b)_{K_p'} \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b)_{K_p}$$

d'oubli de la structure de niveau. Le morphisme Φ_{K_p', K_p} est galoisien de groupe de Galois K_p/K_p' si K_p' est normal dans K_p. On a donc une tour d'espaces rigides $\left(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)\right)_{K_p}$ qui possède à la fois une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p)$ et une donnée de descente. Alors pour $\ell \neq p$

$$H_c^i(\breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b), \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \varinjlim_{K_p} H_c^i(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation admissible de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$, où $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ est le groupe des quasi-isogénies de $\mathbb{X}$ et W_{E_p} est le groupe de Weil du corps de définition E_p de μ.

Exemple 1.1.2. On considère maintenant les triplets (G, μ, b) tels que

- $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$ où F est l'unique extension non ramifiée de degré d de $\mathbb{Q}_p$ et V est un F-espace vectoriel de dimension n,
- μ est le cocaractère minuscule de G défini par

$$\begin{aligned}\mu : \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} &\longrightarrow \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F,\overline{\mathbb{Q}}_p)} GL_n(\overline{\mathbb{Q}}_p) \\ z &\longmapsto \big(\mathrm{diag}(\underbrace{z, \cdots, z}_{p_\tau}, \underbrace{1, \cdots, 1}_{q_\tau})\big)_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F,\overline{\mathbb{Q}}_p)}\end{aligned}$$

  où $(p_\tau, q_\tau) = \begin{cases} (1, n-1) & \text{si } \tau = \tau_0 \\ (0, n) & \text{si } \tau \neq \tau_0 \end{cases}$

- $b \in B(G, \mu)$ est l'unique élément basique. En fait, $b = (b_\tau) \in \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F,\overline{\mathbb{Q}}_p)} GL_n(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ où

$$b_\tau = \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \neq \tau_0 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ p & & & 0 \end{pmatrix} & \text{si } \tau = \tau_0 \end{cases}$$

Pour ces triplets, on retrouve la tour de Lubin-Tate.

1.2 Conjecture de Kottwitz

Se basant sur la description conjecturale de la représentation galoisienne dans la cohomologie ℓ-adique associée à une représentation automorphe de G dans la variété de Shimura $\mathrm{Sh}(G, X)$, Kottwitz a formulé une conjecture concernant la contribution d'une représentation "discrète" de $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ dans les espaces de cohomologie $H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}(G, \mu, b), \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$. Pour l'expliciter, on utilise les paramètres de Langlands discrets et la description (conjecturale) des paquets de représentations discrètes.

Soit F un corps local p-adique, considérons le groupe de Langlands local $L_F := W_F \times SU(2)$. On pose également ${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_F$ comme un groupe topologique où $\widehat{G}$ est le groupe dual de Langlands de G.

Définition 1.2.1. *Un L-paramètre local pour un groupe réductif connexe G défini sur F est un morphisme continu $\phi : L_F \longrightarrow {}^L G$ qui commute avec les projections canoniques de L_F et ${}^L G$ sur W_F tel que ϕ envoie les éléments semisimples sur des éléments semi-simples. Un L-paramètre ϕ est discret (ou carré intégrable) si son image n'est contenu dans aucun sous groupe parabolique propre de ${}^L G$.*

Pour un tel φ, il existerait $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ (respectivement $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$) le paquet de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ (respectivement de $J_b(\mathbb{Q}_p)$) associé. Les éléments de $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ seraient en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Irr}(S_\varphi^\natural, \chi)$ des caractères de $S_\varphi^\natural$ dont le tiré en arrière via $Z(\widehat{G}^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)}) \hookrightarrow S_\varphi \twoheadrightarrow S_\varphi^\natural$ induit le caractère χ (où S_φ est le centralisateur de φ dans $\widehat{G}$ et χ est le caractère de $Z(\widehat{G}^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)})$ associé à $G(\mathbb{Q}_p)$). Rappelons que φ est dit cuspidal s'il est trivial sur le facteur $SU(2)$ auquel cas le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ ne contiendrait que des représentations supercuspidales.

Remarque 1.2.2. Soient E l'unique extension non ramifiée de degré $2d$ de $\mathbb{Q}_p$ et F le corps fixe de l'involution $*$ dans $Gal(E/\mathbb{Q}_p)$ ainsi que $U_{E/F}(n)$ le groupe unitaire associé, alors en s'appuyant sur les travaux d'Arthur [Arthur], les descriptions de L-paquets sont connues pour ce groupe [KMSW], [Mok].

D'après [Lang79], à μ est associé une représentation r_μ de $\widehat{G} \rtimes W_{E_p}$ et on note $r_\mu \circ \varphi_{E_p}$ la représentation de $S_\varphi \times W_{E_p}$ définie par la formule

$$(s, w) \in S_\varphi \times W_{E_p} \longmapsto r_\mu(s \cdot \varphi(w))$$

Conjecture 1.2.3. ***(Kottwitz)*** *Fixons un L-paramètre φ cuspidal. Soit $\pi'_p \otimes \pi_p \otimes \sigma$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ qui contribue de manière non triviale dans $H_c^*(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. Alors π'_p appartient au L-paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ si et seulement si π_p appartient au L-paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$.*

De plus la contribution (au signe près) du L-paquet associé à φ est donnée par la formule suivante :

$$\sum_{(\pi'_p, \pi_p) \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p)) \times \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes \pi_p^\vee \otimes \mathrm{Hom}_{S_\varphi}(\tau_{\pi'_p} \otimes \tau_{\pi_p}, r_\mu \circ \varphi_{E_p})$$

où $\tau_{\pi'_p}$ et τ_{π_p} sont respectivement des représentations de S_φ correspondant à π'_p et π_p et où $\pi_p^\vee$ signifie la représentation contragrédiente.

Selon la terminologie de [RZ96], les cas abordés jusqu'à présent sont tous de type EL : le cas Lubin-Tate a été entièrement traité dans [Boyer99], [HT01] et [Boyer09] ; par dualité [Fal] [FGL] [SW17], on obtient aussi le cas de Drinfeld et le cas EL général est démontré par [Far04], [Shin].

1.3 Les principaux résultats de cette thèse

Dans cette thèse, nous étudions la conjecture de Kottwitz par voie géométrique. Dans un premier temps, par une méthode globale, on montre un cas PEL de cette conjecture. Ensuite, par voie locale, on obtient la description complète de groupes de cohomologie de quelques espaces de Rapoport-Zink liés à la tour de Lubin-Tate.

Un cas PEL de la conjecture de Kottwitz

Dans la première partie de cette thèse, considérons (G, μ, b) un triplet où

- $G = GU_{F_p/\mathbb{Q}_p}(n)$ où F_p est l'unique extension non ramifiée de degré 2 de $\mathbb{Q}_p$ et n impaire,
- μ est le cocaractère minuscule de G de signature $(1, n-1)$,
- $b \in B(G, \mu)$ est l'unique élément basique.

Soit $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un sous groupe compact, on notera $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$ par $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$. Le premier résultat principal de cette thèse est le suivant.

Théorème 1.3.1. *La conjecture de Kottwitz est vraie pour les espaces de Rapoport-Zink associés au triplet* (G, μ, b).

Décrivons vaguement la stratégie de la preuve : elle repose sur l'étude des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_{/E}$ définies sur leur corps reflex $E = F$ où F est quadratique imaginaire et plus particulièrement sur la géométrie de la fibre spéciale en une place p inerte dans E d'un modèle $\mathrm{Sh}_{/\mathcal{O}_p}$ où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers de E_p.

Dans un premier temps, on considère une variété de Shimura *non compacte* Sh associée à un groupe algébrique $\dot{G}$ unitaire quasi-déployé en toutes les places finies avec $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ et où la signature associée est de la forme $(1, n-1)$. Ce choix de variété de Shimura nous apporte quelques avantages, notamment les résultats de [Mo10] sur la cohomologie et de [KMSW] sur le spectre automorphe.

Notons $\overline{\mathrm{Sh}}$ la fibré spéciale de la variété de Shimura. On a la stratification de Newton

$$\overline{\mathrm{Sh}}_{K^p} = \coprod_{b \in B(G,\mu)} \overline{\mathrm{Sh}}_{K^p}(b).$$

D'après [Far04], on a une uniformisation de la strate basique de Sh par des $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}$ ce qui implique une suite spectrale reliant la cohomologie de la strate basique avec celle de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})_{K_p}$. Ensuite, d'après la conjecture de Harris, pour les espaces de Rapoport-Zink non basiques de signature $(1, n-1)$, prouvée alors par [Man08] ou [Shen], on peut éliminer la contribution des strates non basiques dans la partie $G(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidale de la cohomologie de variété de Shimura Sh. Finalement, on a une suite spectrale reliant la partie $G(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidale de la cohomologie de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})_{K_p}$ avec celle de la variété Sh.

L'étape suivante est de calculer la cohomologie de la tour $(\breve{\mathcal{M}}_{K_p})_{K_p}$ en se basant sur celle de Sh. La difficulté consiste en le fait que les L-paquets de représentations irréductibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ ne sont pas en général des singletons. On utilise la formule de multiplicité pour les groupes unitaires [KMSW] pour construire des formes automorphes satisfaisant des propriétés particulières ainsi que les résultats de [Mo10] pour obtenir des informations plus fines sur la cohomologie de variétés de Shimura.

Dans cette thèse, nous supposons que $\mu = (1, n-1)$ ce qui nous permet d'utiliser les cas connus de la conjecture de Harris-Viehmann sur la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink non basiques. Lorsque la signature μ est arbitraire (n impaire), la conjecture semble hors de portée. Pourtant, dans la preuve, on n'a besoin que d'un résultat plus faible de cette conjecture, à savoir, la partie $G(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidale de la cohomologie de la variété de Shimura est concentrée dans la strate basique. On espère qu'une analyse de la cohomologie de la tour d'Igusa permettra d'enlever cet obstacle comme ce qui a été fait dans [Shin].

On pourrait se demander si la stratégie fonctionnerait avec les espaces de Rapoport-Zink de type PEL symplectique. Ce cas est plus compliqué car en général on n'a pas ni la conjecture de Harris-Viehmann, ni la classification des représentations automorphes de groupes des similitudes symplectiques et leurs formes intérieures. Cependant, pour le groupe GSp(4), ces résultats sont disponibles [Mo11] [GT] sauf la classification des représentations automorphes de quelques formes intérieures de GSp(4).

Groupes de cohomologies de quelques espaces de Rapoport-Zink de type EL

Dans la deuxième partie de cette thèse, on considère les espaces de Rapoport-Zink de type EL non ramifiés simples basiques dont les triplets (G, μ, b) associés sont de la forme

- $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$ où F est l'unique extension non ramifiée de degré d de $\mathbb{Q}_p$ et V est un F-espace vectoriel de dimension n,
- μ est un cocaractère minuscule de G satisfaisant
  - Il existe $\tau_0 \in I$ tel que $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$,
  - Pour $\tau \neq \tau_0$ on a $(p_\tau, q_\tau) = (0, n)$ ou $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$.
- $b \in B(G, \mu)$ est l'unique élément basique.

D'après les travaux de [Far04] et [Shin], la conjecture de Kottwitz est connue dans ce cas mais il reste la question de déterminer complètement chacun des groupes de cohomologie.

Lorsque $\mu_{\mathcal{LT}} = (1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$, on retrouve la tour de Lubin-Tate. Soit $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un sous groupe compact et on notera $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$ par $\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p}$. En s'appuyant sur les travaux de Boyer dans le cas Lubin-Tate, on obtient alors la description complète des groupes de cohomologie, c.f. les notations de la section 3.7.

Théorème 1.3.2. *Pour tout diviseur g de $n = gs$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(F)$, on a des isomorphismes $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$-équivariants*

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^{n-1-i}(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K})[\pi[s]_D] = \begin{cases} \mathrm{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) |\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_i \circ ({}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1}) & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où ω_i est le caractère central de $\mathrm{LT}_\pi(s, i)$ et rec_F^{-1} est le morphisme de réciprocité d'Artin et où ${}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1} := \tau \cdot \mathrm{rec}_F^{-1} \cdot \tau^{-1}$.

La preuve repose sur l'étude des modifications de G-fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine. On associe à (G, μ, b) un G-fibré $\mathcal{E}_b$ sur la courbe de Fargues-Fontaine. D'après le théorème 24.2.5 de [SW17], on a une identification entre $(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p})^{\diamond}$ et l'espace $\mathrm{Sht}(G, \mu, b)/K_p$

lequel s'interprète comme un espace de modules de modifications de type μ entre $\mathcal{E}_b$ et $\mathcal{E}_1$. La stratégie consiste à trouver une formule géométrique reliant $\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p}$ et $\breve{\mathcal{M}}^{\mu_{\mathcal{LT}}}_{K_p}$ et puis utiliser le résultat dans [Boyer09] décrivant la cohomologie dans le cas Lubin-Tate.

Notons $\iota : Z^0_G \hookrightarrow G$ la composante neutre du centre de G. Soit $h \in B(Z^0_G)$ satisfaisant $b_{\mathcal{LT}} \cdot h = b$, en utilisant le produit contractile, il y a un isomorphisme de G-fibrés

$$\mathcal{E}_{b_{\mathcal{LT}}} \times_{Z^0_G} \overline{\mathcal{E}}_h = \mathcal{E}_b$$

où $\overline{\mathcal{E}}_h$ est le Z^0_G-fibré associé à h. On peut alors construire une modification α' entre $\mathcal{E}_b$ et $\mathcal{E}_1$ à partir d'une modification α dans $\mathrm{Sht}(G, \mu_{\mathcal{LT}}, b_{\mathcal{LT}})$. Il faut donc calculer le type de α' ce qui est rendu possible par le fait que h est un élément central. On propage ensuite cette construction au niveau des espaces de modules de Shtukas. La difficulté réside dans le fait que l'on veut une construction compatible avec toutes les structures, notamment les données de descentes. Pour le résoudre, on introduit l'espace $\mathrm{Sht}(Z^0_G, \lambda)$ (où $\mu = \mu_{\mathcal{LT}} \cdot \lambda$). On obtient le résultat géométrique suivant dont la preuve du théorème 1.3.2 en est une application.

Théorème 1.3.3. *Notons b_λ l'unique élément de $B(Z^0_G, \lambda)$. Il y a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes*

$$\mathrm{Sht}(G, \mu_{\mathcal{LT}}, b_{\mathcal{LT}}) \times_{\underline{Z^0_G(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z^0_G, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Sht}(G, b, \mu).$$

Chapitre 2

Un cas PEL de la conjecture de Kottwitz

Introduction

Les variétés de Shimura jouent un rôle important dans le programme de Langlands global qui prédit un lien entre représentations automorphes des groupes linéaires et représentations galoisiennes. Rapoport et Zink ont introduit des analogues p-adiques définis comme des espaces de modules de groupes p-divisibles munis de structures additionnelles ([RZ96]). La cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq p$) de ces espaces devrait fournir l'incarnation locale des correspondances de Langlands, c'est le sujet de la conjecture de Kottwitz [Rap94].

Selon la terminologie de [RZ96], les cas abordés jusqu'à présent sont tous de type EL : le cas Lubin-Tate a été entièrement traité dans [Boyer99], [HT01] et [Boyer09] ; par dualité [Fal] [FGL] [SW17], on obtient aussi le cas de Drinfeld et le cas EL général est démontré par [Far04], [Shin].

Dans cet article on traite un cas PEL unitaire non ramifié simple basique où une donnée de Rapoport-Zink est un uplet $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, G, \mu, b)$ auquel on associe un groupe p-divisible muni de structures additionnelles. On suppose de plus

- $[F_p : \mathbb{Q}_p] = 2d$ avec d impair,
- $\dim_{F_p} V = n$ impair et $\mu = (1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$.

Via la notion de structure de niveau, à $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}$ est associée une tour d'espaces rigides $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ indexée par les sous groupes compacts ouverts de $G(\mathbb{Q}_p)$. Le groupe $J_b(\mathbb{Q}_p)$ des quasi-isogénies du groupe p-divisible avec structures additionnelles est, dans le cas où b est basique, une forme intérieure du groupe unitaire quasi-déployé p-adique G. La tour $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ est alors munie d'une action de $J_b(\mathbb{Q}_p) \times G(\mathbb{Q}_p)$ et pour $\ell \neq p$

$$H^i_c(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell) := \varinjlim_{K_p} H^i_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell)$$

est une $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentation de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$, où W_{E_p} est le groupe de Weil du corps de définition E_p de μ [1]. Pour l'expliciter, on utilise les paramètres de Langlands discrets $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \times SU(2) \longrightarrow {}^L G$.

Pour un tel φ on note $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ (respectivement $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$) le paquet de représentations de $G(\mathbb{Q}_p)$ (respectivement de $J_b(\mathbb{Q}_p)$) associé (cf 2.2.18 et 2.2.27). Les éléments de $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ sont en bijection avec l'ensemble $\mathrm{Irr}(S_\varphi^\natural, \chi)$ des caractères de $S_\varphi^\natural$ dont le tiré en arrière via $Z(\widehat{G}^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)}) \hookrightarrow S_\varphi \twoheadrightarrow S_\varphi^\natural$ induit le caractère χ (où S_φ est le centralisateur de φ dans $\widehat{G}$ et χ est le caractère de $Z(\widehat{G}^{Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/E_p)})$ associé à $G(\mathbb{Q}_p)$). Contrairement au cas EL, ces paquets ne sont pas en général des singletons ce qui sera à la source des difficultés techniques nouvelles de cet article. Rappelons que φ est dit cuspidal s'il est trivial sur le facteur $SU(2)$ auquel cas le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales (cf. 2.2.25).

D'après [Lang79], à μ est associé une représentation r_μ de $\widehat{G} \rtimes W_{E_p}$ et on note $r_\mu \circ \varphi_{E_p}$ la représentation de $S_\varphi \times W_{E_p}$ définie par la formule

$$(s, w) \in S_\varphi \times W_{E_p} \longmapsto r_\mu(s \cdot \varphi(w))$$

Conjecture. (**Kottwitz**) Fixons un L-paramètre φ cuspidal. Soit $\pi'_p \otimes \pi_p \otimes \sigma$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ qui contribue de manière non triviale dans $H_c^*(\mathcal{M}, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. Alors π'_p appartient au L-paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ si et seulement si π_p appartient au L-paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$.

De plus la contribution (au signe près) du L-paquet associé à φ est donnée par la formule suivante :

$$\sum_{(\pi'_p, \pi_p) \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p)) \times \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p \otimes \pi_p^\vee \otimes \mathrm{Hom}_{S_\varphi}(\tau_{\pi'_p} \otimes \tau_{\pi_p}, r_\mu \circ \varphi_{E_p})$$

où $\tau_{\pi'_p}$ et τ_{π_p} sont respectivement des représentations de S_φ correspondant à π'_p et π_p et où $\pi_p^\vee$ signifie la représentation contragrédiente.

Remarque. Puisque n impair on a $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$.

Pour π_p une représentation irréductible supercuspidale de $J_b(\mathbb{Q}_p)$, on écrit

$$\varinjlim_{K_p} \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)} \left(H_c^i(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \pi_p\right)_{cusp} = \sum_{\pi'_p} \pi'_p \otimes \sigma^i_{\pi_p, \pi'_p}$$

où π'_p parcourt l'ensemble des classes d'équivalences de représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$. On note également $\sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \sigma^{n-1}_{\pi_p, \pi'_p}$.

Considérons un paramètre de Langlands cuspidal $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow {}^L G$. La restriction de φ sur W_{E_p} se décompose en une somme des représentation irréductibles : $\varphi_{E_p} = \varphi_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus \varphi_r^{n_r}$. On a donc $S_\varphi = S_\varphi^\natural = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$ (cf. 2.7). Parmi les 2^{r-1} éléments de $\mathrm{Irr}(S_\varphi^\natural, \chi)$, il y a r éléments $\{\tau_1, \cdots, \tau_r\}$ (cf. 2.3.1) qui jouent un rôle privilégié. Le théorème suivant est alors une version explicite de la conjecture de Kottwitz dans le cas considéré.

1. Le corps de définition du cocaractère $\mu = (1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$ est F_p.

Théorème A. Pour $[F_p:\mathbb{Q}_p]=2$, n impair et $\mu=(1,n-1)$, soit φ un paramètre de Langlands cuspidal et $\pi'_p\in\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ [2]. Alors pour π_p supercuspidale la représentation $\sigma^i_{\pi_p,\pi'_p}$ est nulle dans chacun des cas suivant

i) $i\neq n-1$,

ii) $\pi_p\notin\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$

iii) Pour $\pi_p\in\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))=\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ (puisque $G(\mathbb{Q}_p)=\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$) et $\tau_{\pi_p}\cdot\tau_{\pi'_p}\notin\{\tau_1,\cdots,\tau_r\}$.

De plus pour $\pi_p\in\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ et $\tau_{\pi_p}\cdot\tau_{\pi'_p}=\tau_i$, on a

$$\sigma_{\pi_p,\pi'_p}=(r_{\mu_i}\circ\varphi_i^{n_i})\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

où $\mu_i=(1,\dim\varphi_i^{n_i}-1)$ pour $1\leq i\leq r$.

Remarque.
- Les représentations du groupe de Weil ci-dessus sont Frobenius semi-simples.
- Pour chaque $1\leq i\leq r$, il y a 2^{r-1} couples $(\pi_p,\pi'_p)\in\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))\times\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que $\tau_{\pi_p}\cdot\tau_{\pi'_p}=\tau_i$ pour lesquels on a $\sigma_{\pi_p,\pi'_p}=(r_{\mu_i}\circ\varphi_i^{n_i})\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$.
- Il y a $r2^{r-1}$ couples (π_p,π'_p) parmi $(2^{r-1})^2$ couples pour lesquels $\sigma_{\pi_p,\pi'_p}\neq 0$.

Le principe de la démonstration repose sur l'étude des variétés de Shimura $\mathrm{Sh}_{/E}$ définies sur leur corps reflex $E=F$ où F est quadratique imaginaire et plus particulièrement sur la géométrie de la fibre spéciale en une place p inerte dans E d'un modèle $\mathrm{Sh}_{/\mathcal{O}_p}$ où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers de E_p.

Dans un premier temps, on considère une variété de Shimura *non compacte* $\overset{\bullet}{\mathrm{Sh}}$ associée à un groupe algébrique $\overset{\bullet}{G}$ unitaire quasi-déployé en toutes les places finies avec $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{Q}_p)=G(\mathbb{Q}_p)$ et où la signature associée est de la forme $(1,n-1)$.

D'après [Far04], on a une uniformisation du lieu basique de Sh par des $\mathcal{M}_K$ avec une suite spectrale :

$$E_2^{pq}=|\ker^1(\mathbb{Q},\overset{\bullet}{G})|\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\check{\rho}}}\left(\varinjlim_{K_p}\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)),\Pi_p\right)\right)\otimes(\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est

$$\varinjlim_{K} H^{p+q}((\mathrm{Sh})^{an}_K(basic),\mathcal{L}^{an}_\rho)$$

Lorsqu'on considère la partie $G(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidale, d'après [Man08], [Shen], [LS] on a :

$$H^{p+q}((\mathrm{Sh})(basic),\mathcal{L}_\rho)_{p-cusp}=H^{p+q}((\mathrm{Sh}),\mathcal{L}_\rho)_{p-cusp}$$

En outre lorsque Π_p est $J_b(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidale, on a :

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)),\Pi_p\right)=0$$

2. On rappelle que φ étant cuspidal alors π'_p est nécessairement supercuspidale

dès que $i > 0$.

La suite spectrale ci-dessus dégénère donc

$$|\ker^1(\mathbb{Q}, \overset{\bullet}{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \breve{\rho}}} \left(\varinjlim_{K} \mathrm{Hom}_{J_b(\mathbb{Q}_p)} \left(H_c^q(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p \right)_{cusp} \right) \otimes (\Pi^{\infty,p}) = (H^q(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\rho))_{p-cusp}$$

Par un argument de globalisation, on en déduit que

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p, \pi'_p} = \left(r_\mu \circ \varphi_{E_p} \right) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} = \sum_{i=1}^{r} (r_{\mu_i} \circ \varphi_i^{n_i}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}. \qquad (\star)$$

Dans le but d'identifier chacun des termes de la somme à gauche de $(\star)$ avec l'un des termes dans la somme à droite, on devra considérer des formes automorphes provenant d'un groupe endoscopique de $\overset{\bullet}{G}$. Afin de mener à bien cette stratégie, on utilise la formule de multiplicité pour les groupes unitaires [KMSW] pour construire des formes automorphes satisfaisant des propriétés particulières ainsi que les résultats de [Mo10] pour obtenir des informations plus fines sur la cohomologie de variétés de Shimura.

Remarque. Un ingrédient important de la démonstration est le théorème 7.2.2 de [Mo10] sur la composante isotypique dans la cohomologie d'intersection de variétés de Shimura de type PEL unitaires non compactes sur un corps CM F. Dans cet article l'auteur a supposé $F^+ = \mathbb{Q}$ et c'est la raison pour laquelle on suppose $d = 1$. Toutefois si on disposait d'une formule analogue à [Mo10] 7.2.2, notre méthode permettrait d'obtenir le théorème précédent pour d quelconque.

Il est en revanche possible, en utilisant les variétés de type Kottwitz-Harris-Taylor, de prouver la formule $(\star)$, cf. appendice 2.4, théorème 2.4.2.

2.1 Données géométriques

2.1.1 Espaces de Rapoport-Zink d'après [RZ96]

Fixons un nombre premier p. Soit $\breve{\mathbb{Q}}_p := \widehat{\mathbb{Q}_p^{\mathrm{nr}}} = \mathrm{Frac} W(\overline{\mathbb{F}}_p)$ le complété de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ et σ l'automorphisme de Frobenius géométrique de $\breve{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p$.

Définition 2.1.1. *Étant donné un groupe réductif G défini sur $\mathbb{Q}_p$, deux éléments b_1, b_2 sont dits σ-conjugués s'il existe $g \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ tel que $b_1 = g b_2 g^{-\sigma}$. On note $B(G)$ l'ensemble de classes de σ-conjugaisons dans $G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$.*

Remarque 2.1.2. D'après Kottwitz [Kot97] section 6.2, on s'intéressera dans la suite à un sous ensemble $B(G, \mu)$ de $B(G)$ associé à un cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow G_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ (un cocaractère qui ne possède que des poids 0 et 1). Il existe un ordre partiel sur $B(G, \mu)$.

Définition 2.1.3. *Une donnée de Rapoport-Zink de type PEL unitaire non ramifiée simple $(F_p, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, GU, \mu, b)$ consiste en la donnée :*

- *d'une extension F_p de degré $2d$ de $\mathbb{Q}_p$ non ramifiée munie d'une involution non triviale $*$,*
- *d'un F_p-espace vectoriel de dimension finie V,*
- *d'un produit hermitien symplectique $\langle\cdot|\cdot\rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{Q}_p$ pour lequel il existe un réseau auto-dual Λ,*
- *d'une classe de conjugaison de cocaractère minuscule $\mu : \mathbb{G}_{m/\overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow GU_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ où GU est le groupe des similitudes unitaires associé.*
- *d'une classe de σ-conjugaison $b \in B(GU, \mu)$. On suppose de plus que $c \circ \mu(z) = z$ où c est le facteur de similitude. Avec ces hypothèses, un tel μ est déterminé par des couple $(p_\tau, q_\tau)_{\tau \in \Phi \amalg \Phi^*}$ où $(p_\tau, q_\tau) = (q_{\tau *}, p_{\tau *})$ et où Φ est un type CM p-adique de $F_p/\mathbb{Q}_p$.*

A une telle donnée, on associe l'isocristal $N = \Big(V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p, b \circ (Id \otimes \sigma)\Big)$ muni d'une action $\iota : \mathcal{O}_{F_p} \longrightarrow End(N)$ et une forme alternée non dégénérée $\langle\cdot|\cdot\rangle : N \times N \longrightarrow \breve{\mathbb{Q}}_p(n)$ où $n = val_p(c(b))$. Par la théorie de Dieudonné, l'isocristal N correspond à un groupe p-divisible $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$ défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ muni d'une action de $\mathcal{O}_{F_p}$ et d'une polarisation λ.

Théorème 2.1.4. *Soit $\mathcal{M}$ le foncteur qui associe à chaque $\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ schéma S sur lequel p est localement nilpotent l'ensemble des couples (X, ρ) où :*

- *X est un groupe p-divisible sur S muni d'une polarisation p-principale λ_X et d'une action ι_X telles que l'involution de Rosati induite par λ_X induit $*$ sur $\mathcal{O}_{F_p}$.*
- *Une quasi-isogénie $\mathcal{O}_{E_p}$-linéaire $\rho : X \times_S \overline{S} \longrightarrow \mathbb{X} \times_{Spec(\overline{\mathbb{F}}_p)} \overline{S}$ tel que $\rho^V \circ \lambda_X \circ \rho$ est un $\mathbb{Q}_p$-multiple de λ_X dans $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{E_p}}(X, X^V) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. (ici, $\overline{S}$ est la réduction modulo p de S).*

On demande également que (X, ι_X) satisfasse la condition de déterminant de Kottwitz. Plus précisément, sous l'action de F_p, on a une décomposition : $\mathrm{Lie}(X) = \bigoplus_\tau \mathrm{Lie}(X)_\tau$ *alors* $\mathrm{Lie}(X)_\tau$ *est localement libre de rang p_τ. Ce foncteur est alors représenté par un schéma formel $\mathcal{M}(\mu, b)$ défini sur* $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p})$.

Remarque 2.1.5. Dans [RZ96], les auteurs considèrent également les espaces de Rapoport-Zink de type EL. Les lecteurs intéressés pourront consulter loc. cit. pour plus de détails.

Notation 2.1.6. On pose $C_0 = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g\Lambda = \Lambda\}$, le sous groupe compact maximal de $G(\mathbb{Q}_p)$.

Afin d'introduire les structures de niveaux usuelles comme dans le cas $GL(2)$ on travaille avec les espaces rigides $\mathcal{M}^{\mathrm{rid}}$ de $\mathcal{M}$ sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$.

Définition 2.1.7. *Soit $\mathcal{T}/\mathcal{M}^{rig}$ le système local défini par le module de Tate p-adique de groupe p-divisible universel sur $\mathcal{M}$. Pour $K \subset C_0$ on définit $\mathcal{M}_K$ comme le revêtement étale de $\mathcal{M}^{rig}$ qui classifie les $\mathcal{O}_{F_p}$ trivialisations modulo K de $\mathcal{T}$ par Λ. Dans le cas PEL on demande de plus que les trivialisations préservent la forme alternée à $\mathbb{Q}_p^\times$ près.*

On a $\mathcal{M}^{an} = \mathcal{M}_{C_0}$. D'autre part il y a une tour $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ d'espaces analytiques sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ munis de morphismes de transitions étales finis pour $K_p^{'} \subset K_p$:

$$\Phi_{K_p',K_p} : \mathcal{M}_{K_p'} \longrightarrow \mathcal{M}_{K_p}$$

d'oubli de la structure de niveau. Le morphisme Φ_{K_p',K_p} est galoisien de groupe de Galois $K_p/K_p^{'}$ si $K_p^{'}$ est normal dans K_p.

Proposition 2.1.8. *La dimension d_{K_p} de $\mathcal{M}_{K_p}$ est donnée par la formule $d_{K_p} = \frac{1}{2}\sum_{\tau \in I_F} p_\tau q_\tau$.*

Définition 2.1.9. *Soit $J(\mathbb{Q}_p)$ le groupe des $\mathcal{O}_{F_p}$-linéaires quasi-isogénies g de $\mathbb{X}$ tel que $\lambda \circ g$ est une $\mathbb{Q}^\times$-multiple de $g^\vee \circ \lambda$. Le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur $\mathcal{M}$ (dans le cas EL et PEL) par la formule*

$$\forall g \in J(\mathbb{Q}_p)\ \forall (X,\rho) \in \ \mathcal{M} \quad (X,\rho)\cdot g = (X, \rho \circ g^{-1}).$$

Définition 2.1.10. *Une donnée de Rapoport-Zink non ramifiée simple $(F_p, *, V, \langle \cdot|\cdot \rangle, G, \mu, b)$ est basique si le groupe $J(\mathbb{Q}_p)$ associé est une forme intérieure de G. La donnée ci-dessus est basique si et seulement si b est l'élément minimal dans $B(G,\mu)$. Dans ce cas, on dit également que b est basique.*

Soit $\ell \neq p$ un nombre premier.

Notation 2.1.11. Soit $K_p \subset C_0$ un niveau. On pose :

$$H_c^\bullet(\mathcal{M}_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell) := \varinjlim_{V} \varprojlim_{n} H_c^\bullet(V \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}_\ell$$

où V parcourt les ouverts relativement compacts de $\mathcal{M}_{K_p}$.

Le groupe $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ agit sur $\mathcal{M}_{C_0}$ et cette action s'étend à $\mathcal{M}_{K_p}$ de sorte que $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ agit sur les $H_c^\bullet(M_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell)$. On peut aussi définir une action du groupe de Weil W_{E_p} sur ces groupes de cohomologie grâce à la donnée de descente de Rapoport-Zink définie comme suit.

Soit $\sigma_{E_p} : \breve{\mathbb{Q}}_p \xrightarrow{\sim} \breve{\mathbb{Q}}_p$ l'automorphisme de Frobenius relatif au corps de définition E_p de μ (où $\breve{\mathbb{Q}}_p = \widehat{E_p^{nr}}$). On note $\overline{\sigma}_{E_p}$ le morphisme de Frobenius induit sur $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour $\mathbb{X}$ un groupe p-divisible défini sur $\overline{\mathbb{F}}_p$, on note $F_{E_p} : \mathbb{X} \longrightarrow \overline{\sigma}_{E_p}^* \mathbb{X}$ le morphisme de Frobenius relatif. On construit un isomorphisme de foncteur : $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \sigma_{E_p}^*\mathcal{M}$ comme suit.

Pour S un $\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ schéma sur lequel p est nilpotent ainsi qu'un point $(X,\rho) \in \mathcal{M}(S)$, le point (X^α, ρ^α) associé dans $\sigma_{E_p}^*\mathcal{M}(S)$ est défini de la manière suivante :

- $X^\alpha := X$ avec l'action de $\iota_{X^\alpha} := \iota_X$ (et avec la polarisation $\lambda_{X^\alpha} := \lambda_X$ dans le cas PEL)
- $\rho^\alpha := \rho \circ F_{E_p}^{-1}$.

L'isomorphisme de foncteurs $\alpha : \mathcal{M} \longrightarrow \sigma_{E_p}^*\mathcal{M}$ est la donnée de descente de Rapoport-Zink associée à $\mathcal{M}$. Etant donné que la donnée de descente commute à l'action de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$, les groupes $H_c^\bullet(M_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell)$ est muni d'une action de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$. De plus, lorsque K_p varie, le système $(H_c^\bullet(M_{K_p}, \mathbb{Q}_\ell))_{K_p}$ est muni d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$.

Proposition 2.1.12. *([Man08] theorem 8) Soit ρ une représentation ℓ-adique admissible de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$.*

- *Les groupes*

$$H^{i,j}(\mathcal{M}^\infty)_\rho := \varinjlim_{K} \mathrm{Ext}^j_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}(H^i(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(d_K)), \rho)$$

  sont nuls pour presque tous $i, j \geq 0$.
- *Les représentations $H^{i,j}(\mathcal{M}^\infty)_\rho$ sont admissibles.*

2.1.2 Variétés de Shimura de type PEL unitaire

On considère la donnée de Shimura de type PEL simple suivante : $\mathcal{D} = \Big(F, B, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, G, \Lambda, h\Big)$ où :

- F est un corps CM non ramifié au dessus de p.
- B est une algèbre semi simple sur F, déployée en toute les places de F au dessus de p.
- $*$ est une involution positive sur B : $\forall b \in B\ tr(bb^*) > 0$.
- $\Big(V, \langle\cdot|\cdot\rangle\Big)$ est un B-module hermitien où $\langle\cdot|\cdot\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-forme alternée telle que $\langle xv, w\rangle = \langle v, x^*w\rangle$ pour tous $v, w \in V$ et $x \in B$.
- G est le groupe algébrique défini sur $\mathbb{Q}$ par

$$G(R) = \{g \in GL_{B\otimes_{\mathbb{Q}}R}(V \otimes_{\mathbb{Q}} R) | \langle gv, gw\rangle = c(g)\langle v, w\rangle; c(g) \in R^*\}$$

  On suppose de plus que $G_{\mathbb{R}}$ est isomorphe au groupe des similitudes unitaires de signature $(1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$ où $n = [B : F]^{1/2}\mathrm{rg}_B V$.
- Λ est un $\mathcal{O}_{F_p}$ réseau $\mathcal{O}_B$-invariant dans $V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_p$ tel que la forme $\langle\cdot|\cdot\rangle$ induit une $\mathbb{Z}_p$ forme non dégénérée sur Λ. On pose également $C_0 = Stab_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda) = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g\Lambda = \Lambda\}$.
- Enfin, h est un morphisme de groupes algébriques

$$h : \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}) \longrightarrow G_{\mathbb{R}}.$$

  On lui associe un morphisme

$$\mu_h : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \hookrightarrow \prod_{Gal(\mathbb{C}/\mathbb{R})} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} = \Big(\mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}})\Big)_{\mathbb{C}} \xrightarrow{h_{\mathbb{C}}} G_{\mathbb{C}}$$

  qui définit une $\mathbb{Q}$-structure de Hodge $V = V_0 \oplus V_1$.

Notation 2.1.13. Soit E le corps reflex de cette donnée de type PEL, c-à-d le corps de définition de la classe de conjugaison de μ_h. Lorsque $n > 2$ on a $F = E$.

Fixons $\Phi \subset \mathrm{Hom}(E, \mathbb{C})$ un type CM de E. Chaque élément $\tau \in \Phi$ fournit un plongement $\nu \circ \tau : E \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$. Soient $(w_i)_{i \in I}$, $(w_j)_{j \in J}$ les places de E divisant p associées à tous ces plongements et où on suppose que $\forall i \in I\ w_i \neq w_i^c$ et $\forall j \in J\ w_j = w_j^c$. On a alors :

- $G_{\mathbb{Q}_p} \simeq \prod_{i \in I} GL_n(E_{w_i}) \times G\left(\prod_{j \in J} GU(E_{w_j}, n)\right)$ où G devant le produit signifie que l'on prend le sous-groupe du produit formé des uplets ayant le même facteur de similitude.
- $B_{\mathbb{Q}_p} \simeq \prod_i \left(M_d(E_{w_i}) \times M_d(E_{w_i})^{\mathrm{opp}}\right) \times \prod_j M_d(E_{w_j})$

L'équivalence de Morita permet de supposer qu'en chaque place on est dans l'un des cas suivant :

1. **Cas EL**
   - $B_{\mathbb{Q}_p} = E_{w_i} \times E_{w_i}, \quad \mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}} = \mathcal{O}_{F_{w_i}} \times \mathcal{O}_{F_{w_i}}$ et $(x, y)^* = (y, x)$.
   - $V_{\mathbb{Q}_p} = V_i \oplus V_i^\vee$ où $V_i^\vee$ est l'espace dual de V_i.
   - $\langle x \oplus \phi, x' \oplus \phi' \rangle = \phi'(x) - \phi(x')$.

   Remarque 2.1.14. Pour chaque $b \in B(GL_n(E_{w_i}), \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$, on obtient une donnée de Rapoport-Zink simple de type EL de la forme $\{E_{w_i}, *, V_i, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, b\}$.

2. **Cas PEL**
   - $B_{\mathbb{Q}_p} = E_{w_j}$ et l'involution $*$ est $\sigma^{[E_{w_j}/\mathbb{Q}_p]/2}$ le morphisme de Frobenius σ de E_{w_j}.
   - V est un E_{w_j} espace vectoriel de dimension n.
   - Dans une base convenable de V, la forme $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est donnée par la formule :

   $$\forall\ X, Y \in V \quad \langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}_{E_{w_j}/\mathbb{Q}_p}(\alpha^t X^* J Y)$$

   où $\alpha \in E_{w_j}$ est tel que $\sigma(\alpha) = -\alpha$, et

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & I_{n/2} \\ I_{n/2} & 0 \end{pmatrix}$$

   si n est pair et

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I_{(n-1)/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ I_{(n-1)/2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   si n est impair.

   Remarque 2.1.15. Pour chaque $b \in B(GU(E_{w_j}, n), \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$, on obtient une donnée de Rapoport-Zink simple de type PEL de la forme $\{E_{w_j}, *, V, \langle \cdot | \cdot \rangle, \mu_{\overline{\mathbb{Q}}_p}, b\}$.

Soient K un sous-groupe compact ouvert suffisamment petit de $G(\mathbb{A}_f)$ et Sh_K le foncteur qui associe à chaque F-schéma S l'ensemble des quadruplets $(A, \lambda, \iota, \overline{\kappa})$ où

- A est un S-schéma abélien à isogénie près.
- λ est une polarisation $\mathbb{Q}^\times$ homogène de A.
- $\iota : B \longrightarrow \mathrm{End}(A)_{\mathbb{Q}}$ est un morphisme d'algèbres tel que $*$ correspond à l'involution de Rosati associée à λ.
- $\overline{\kappa} : V \otimes \mathbb{A}_f \longrightarrow H_1(A, \mathbb{A}_f)$ est un morphisme de $B \otimes \mathbb{A}_f$-module symplectique définissant une structure de niveau K sur le module de Tate de A.
- On suppose de plus la condition suivante :

$$\forall b \in B \det(b, \mathrm{Lie}(A)) = \det(b, V_0)$$

Théorème 2.1.16. *Le foncteur* (Sh_K) *est représenté par une variété quasi-projective lisse définie sur F. De plus la tour de variétés* $(\mathrm{Sh}_K)_K$ *est munie d'une action de* $G(\mathbb{A}_f)$ *par action sur la structure de niveau.*

Maintenant on s'intéresse aux modèles entiers de variétés de Shimura.

Considérons un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$. Soit S_{K^p} le foncteur qui associe à un $\mathcal{O}_{E_p}$-schéma S, l'ensemble des couples $(A, \overline{\lambda}, \iota, \overline{\kappa})$, où :

- A est une variété abélienne sur S de dimension n.
- $\overline{\lambda}$ est une $\mathbb{Q}^\times$ classe d'une polarisation p-principale.
- $\iota : \mathcal{O}_B \longrightarrow End(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ tel que l'involution de Rosati définie par $\overline{\lambda}$ sur $End(A) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{(p)}$ induit l'involution $*$ sur E. On suppose de plus que A satisfait la condition de signature de Kottwitz.
- $\overline{\kappa} : H_1(A, \mathbb{A}_f^p) \longrightarrow V \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_f^p$ est une K^p structure de niveau.

Théorème 2.1.17. *([Kot92] sec.5) Le problème de module S_{K^p} est représenté par un $\mathcal{O}_{E_p}$ schéma lisse, quasi-projectif. Le groupe $G(\mathbb{A}_f^p)$ opère sur la tour $(S_{K^p})_{K^p}$ par action sur la structure de niveau.*

Soit $C_0 = Stab_{G(\mathbb{Q}_p)}(\Lambda)$ le sous-groupe compact hyperspécial associé. Il y a alors des isomorphismes compatibles pour K^p variant :

$$S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} E_p \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{C_0 K^p} \otimes_E E_p.$$

Supposons que la variété de Shimura est *compacte*. On rappelle quelques constructions de modèles entiers de variétés de Shimura avec niveau en p (cf [Man05] section 6).

Pour $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$, on définit pour tout $m \geqslant 0$

$$K^p(m) = K^p \times V_m \subset G(\mathbb{A}_f)$$

où $V_m = \{g \in G(\mathbb{Q}_p) \mid g(\Lambda) = \Lambda,\ c(g) \in \mathbb{Z}_p^\times\ g_{|\Lambda} \equiv 1 \bmod p^m \Lambda\}$. On remarque $V_0 = G(\mathbb{Z}_p)$.

Lorsque K^p et m varient, les $K^p(m)$ forment un système direct de sous groupes compacts ouverts suffisamment petits de $G(\mathbb{A}_f)$, cofinal au système de tous les sous groupes compacts ouverts. Pour tout niveau K^p, d'après 2.1.17, on dispose d'un $\mathcal{O}_{E_p}$ schéma $S_{K^p(0)}$ classifiant les variétés abéliennes avec structures additionnelles. Soit $\mathcal{G} := \mathcal{A}[p^\infty]$ le groupe p-divisible muni de structures additionnelles associé à la variété abélienne universelle de $S_{K^p(0)}$. Pour $m > 0$, on définit le foncteur $S_{K^p(m)}$ qui associe à un $S_{K^p(0)}$-schéma T l'ensemble de morphismes de groupes

$$\alpha : p^{-m}\Lambda/\Lambda \longrightarrow \mathcal{G}[p^m](T)$$

satisfaisant les conditions

- $\{\alpha(x)|x \in p^{-m}\Lambda/\Lambda\}$ est un « full set of sections » de $\mathcal{G}[p^m]_T/T$,
- α est $\mathcal{O}_{B_{\mathbb{Q}_p}}$-équivariant,
- α renvoie $\langle\cdot|\cdot\rangle$ sur l'accouplement de $Weil$ de $\mathcal{G}[p^m](T)$, à un facteur dans $(\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z})^\times$ près.

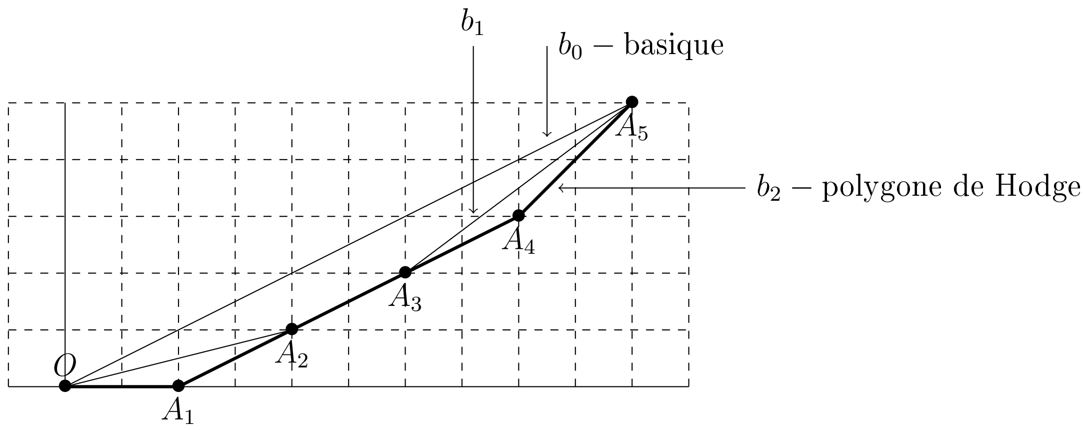
Théorème 2.1.18. *([Man05] proposition 15) Le foncteur $S_{K^p(m)}$ est représentable par un $S_{K^p(0)}$-schéma fini.*

Lorsque K^p et m varient, les schémas $S_{K^p(m)}$ forment un système projectif muni d'une action de $G(\mathbb{A}_f^p) \times V_0 \subset G(\mathbb{A}_f)$. En général, on ne peut pas étendre cette action en une action de $G(\mathbb{A}_f)$, faute de bon modèles entiers en p. Afin de contourner cette difficulté, Mantovan considère une classe plus grande de modèles entiers de variétés de Shimura telle que l'action de $G(\mathbb{A}_f^p) \times V_0$ s'étends en une action d'un sous-monoïde $G(\mathbb{A}_f)^+$ vérifiant $G(\mathbb{A}_f) = \langle G(\mathbb{A}_f)^+, p\rangle$.

Remarque 2.1.19. Dans le cas où la variété de Shimura *n'est plus compacte*, les modèles entiers avec niveaux en p existent encore grâce au travail de Kai Wen Lan et Benoît Stroh. Pour K un niveau, pas forcément maximal en p, il existe un modèle entier $S_K \longrightarrow \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E_p})$ comme dans le cas (Nm) de 2.1 de [LS] (consulter également section 6 de [Lan]). Lorsque le niveau K varie, les schémas S_K forment un système projectif muni d'une action de $G(\mathbb{A}_f)$. (consulter [LS] page 33-34 pour plus de détails).

À toute $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ représentation algébrique irréductible de dimension finie ξ de G, on associe, cf [HT01] p.96, un système local $\mathcal{L}_\xi$ sur la tour de variétés de Shimura $(\mathrm{Sh}_K)_K$. En particulier, lorsque $\xi = 1$, on retrouve le système local $\overline{\mathbb{Q}}_p$.

Nous allons utiliser la stratification de Newton afin de calculer la cohomologie de la variété de Shimura. Nous ne considérons que la signature $\mu = (1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$. Dans ce cas, $B(G, \mu) = \{b_0, b_1, \cdots, b_{[\frac{n}{2}]}\}$ et de plus $b_{[\frac{n}{2}]} \prec \cdots \prec b_0$ où b_0 est l'unique classe basique. Rappelons que l'on associe à μ un polygone de Hodge et à chaque $b \in B(G, \mu)$ un polygone de Newton, en particulier le polygone de Newton correspondant à $b_{[\frac{n}{2}]}$ coïncide avec le polygone de Hodge. *Remarquons que tous les polygones de Newton non basiques touchent le polygone de Hodge en dehors des points extrémaux.* On a un diagramme des polygones avec $n = 5$.



Notation 2.1.20. Pour tout entier $i \geq 0$ on notera

$$H_c^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \varinjlim_{K} H_c^i(\mathrm{Sh}_K \times_{E_p} \overline{E}_p, \mathcal{L}_\xi).$$

C'est un $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-espace vectoriel muni d'une action linéaire de $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$. En notant Ψ_η le foncteur cycles proches on a

$$H_c^i(\overline{\mathrm{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) := \varinjlim_{K^p, m} H^i R\Gamma_c(\overline{S}_{K^p(m)}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Pour $b \in B(G, \mu)$ on notera

$$H_c^i(\overline{\mathrm{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) := \varinjlim_{K^p, m} H^i R\Gamma_c(\overline{S}_{K^p(m)}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)_{|\overline{S}_{K^p(m)}(b)}).$$

Théorème 2.1.21. *([Man05], [Man11], [LS]) On a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$-équivariante*

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\mathrm{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi).$$

Remarque 2.1.22. On ne suppose pas que la variété de Shimura soit compacte.

Démonstration. La stratification de Newton de la fibre spéciale de variété de Shimura induit une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$-équivariante ([Man05], [Man11]) :

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\mathrm{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\overline{\mathrm{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Or on a un isomorphisme $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$-équivariante suivante

$$R\Gamma_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \simeq R\Gamma_c(\overline{\mathrm{Sh}}, R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)).$$

Lorsque la variété de Shimura est compacte, cela est un fait standard concernant la théorie de cycles proches ; lorsque la variété de Shimura n'est plus compacte, cela est le corollaire 5.20 de [LS].

Finalement on a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f) \times W_{E_p}$-équivariante :

$$E_1^{p,q} = H_c^{p+q}(\overline{\mathrm{Sh}}(b_p), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) \Longrightarrow H_c^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi).$$

$\square$

Théorème 2.1.23. *[Man05], [Man08], [Man11] [LS], [Shen]. On suppose que b est une strate non basique telle que son polygone de Newton touche son polygone de Hodge à un point de rupture du polygone de Newton en dehors des points extrémaux. Alors les groupes de cohomologie $H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))$ ne contiennent pas de représentation automorphe dont la composante en p est une représentation supercuspidale de $G(\mathbb{Q}_p)$.*

Remarque 2.1.24. Tout d'abord on exprime la cohomologie de la strate b en fonction de celle de la variété d'Igusa et de l'espace de Rapoport-Zink associé :

$$\sum_i (-1)^i H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}(b), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi)) = \sum_{p,s,r} (-1)^{p+s+r} \lim_{\overrightarrow{K}} \mathrm{Ext}^p_{J_b(\mathbb{Q}_p)}(H^s_c(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(D_K)), H^r_c(Ig(b))).$$

Lorsque la variété de Shimura est compacte, cette formule est démontrée dans [Man05] et [Man11]. Lorsque la variété de Shimura n'est pas compacte, la formule est le théorème 6.26 de [LS].

La deuxième étape consiste à montrer que les représentations

$$\lim_{\overrightarrow{K}} \mathrm{Ext}^p_{J_b(\mathbb{Q}_p)}(H^s_c(\mathcal{M}_K, \mathbb{Q}_\ell(D_K)), H^r_c(Ig(b)))$$

sont des induites paraboliques ([Shen], [Man08]).

Définition 2.1.25. *Pour H un groupe réductif p-adique et V un H-module. On définit la partie supercuspidale de V par la formule $V_{cusp} = \bigoplus_e e \cdot V$ où e parcourt les idempotents du centre de Bernstein de H associés aux classes d'équivalences inertielles des représentations supercuspidales de H.*

Dans la suite, on notera $H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}(b_0), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))_{p-cusp}$ et $H^i_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p-cusp}$ pour les parties $G(\mathbb{Q}_p)$-supercuspidales de la cohomologie.

Corollaire 2.1.26. [Man08], [Shen], [LS] On a des isomorphismes :

$$H^i_c(\overline{\mathrm{Sh}}(b_0), R\Psi_\eta(\mathcal{L}_\xi))_{p-cusp} \simeq H^i_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{p-cusp}$$

où b_0 désigne la classe basique.

2.1.3 Uniformisation rigide

Soit $\overline{S}_{K^p} = S_{K^p} \times_{\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{E_p})} \mathbb{F}_{p^2}$ la fibre spéciale de S_{K^p}. Le schéma $\overline{S}_{K^p}$ est alors stratifié par le polygone de Newton de cristal muni de structures additionnelles. Plus précisément, pour chaque point $x = (A_0, \overline{\lambda}_0, \iota_0, \overline{\eta}_0)$ dans $\overline{S}_{K^p}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, on note (X_x, ι, λ) le groupe p-divisible muni d'une action de $\mathcal{O}_E$ et d'une polarisation p-principale, associé à x ainsi que $(N_x, \iota, \langle\cdot|\cdot\rangle)$ l'isocristal associé. Si $b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})$ on pose alors :

$$\overline{S}_{K^p}(b) = \{x \in \overline{S}_{K^p}(\overline{\mathbb{F}}_p) | (N_x, \iota, \langle\cdot|\cdot\rangle) \simeq (V_{\mathbb{Q}_p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p, b \otimes \sigma, \iota, \langle\cdot|\cdot\rangle)\}$$

On a la stratification :

$$\overline{S}_{K^p} = \coprod_{b \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})} \overline{S}_{K^p}(b)$$

et si $y \in B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\mathbb{Q}_p})$ est fixé alors $\coprod_{b \prec y} \overline{S}_{K^p}(b)$ est un fermé dans $\overline{S}_{K^p}$.

Soient maintenant $y = (A_y, \overline{\lambda}_y, \iota_y, \overline{\eta}_y)$ un point géométrique dans la strate basique (cf 2.1.10) ainsi que $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$ le groupe p-divisible muni d'une action de $\mathcal{O}_E$ et d'une polarisation p-principale associé.

Nous notons $\mathcal{M}$ le problème de module associé au groupe p-divisible $(\mathbb{X}, \iota, \lambda)$. Par définition, le groupe $J(\mathbb{Q}_p) := J_{b_y}(\mathbb{Q}_p)$ agit à gauche sur $\mathcal{M}$.

On pose ϕ la classe d'isogénie du triplet $(A_y, \lambda_y, \iota_y)$ et $I^\phi = \mathrm{Aut}(A_y, \lambda_y, \iota_y)$ le groupe réductif sur $\mathbb{Q}$ associé. Le groupe $I^\phi(\mathbb{Q})$ agit par quasi-isogénies sur le groupe p-divisible $(A_y[p^\infty], \lambda, \iota)$, ce qui donne une injection $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow J(\mathbb{Q}_p)$, en particulier, $I^\phi(\mathbb{Q})$ agit sur $\mathcal{M}$. De plus, l'action de $I^\phi(\mathbb{Q})$ sur le module de Tate $H_1(A_y, \mathbb{A}_f^p)$ donne une injection $I^\phi(\mathbb{Q}) \hookrightarrow G(\mathbb{A}_f^p)$.

A ϕ est associé l'ensemble $\tilde{S}(\phi)(\overline{\mathbb{F}}_p) = \{z \in \overline{S}(b)(\overline{\mathbb{F}}_p) |$ la classe d'isognie de $(A_z, \lambda_z, \iota_z) \in \phi\}$. On peut munir $\tilde{S}(\phi)(\overline{\mathbb{F}}_p)$ d'une structure de sous schéma fermé réduit.

Théorème 2.1.27. *(6.23 de [RZ96]) Il y a une uniformisation de schémas formels sur* $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p})$

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash (\mathcal{M} \times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p) \quad \tilde{\to} \quad (S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} \mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p})\widehat{/}_{\tilde{S}(\phi)}$$

Lorsque K^p varie les différents isomorphismes d'uniformisation sont compatibles et commutent à l'action de $G(\mathbb{A}_f)$.

En suivant [Far04], on travaille avec les espaces rigides dès qu'on n'est plus en niveau maximal. Pour chaque $K^p \subset G(\mathbb{A}_f^p)$ on note :

- $S_{K^p}^\wedge$ le complété p-adique du schéma $S_{K^p} \otimes_{\mathcal{O}_{E_p}} \mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$ ainsi que $(S_{K^p}^\wedge)^{an}$ l'espace analytique associé.
- $\mathrm{Sh}_{C_0K^p}^{an}$ l'espace analytique sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ associée à la variété algébrique $\mathrm{Sh}_{C_0K^p} \otimes \breve{\mathbb{Q}}_p$.

Définition 2.1.28. *Nous noterons $\mathrm{Sh}_{C_0K^p}^{an}(\phi) = ((S_{K^p})^\wedge_{/\tilde{S}(\phi)})^{an}$ la fibre générique du schéma formel complété de S le long de $\tilde{S}(\phi)$.*

Si $K_p \subset C_0$, $K = K_pK^p$ nous noterons $\mathrm{Sh}_K^{an}(\phi) = \Theta_{C_0K^p,K}^{-1}(\mathrm{Sh}_{C_0K^p}^{an}(\phi))$ un ouvert analytique de $(\mathrm{Sh}_K)^{an}$ où $\Theta_{C_0K^p,K}$ est le morphisme de changement de niveau.

Théorème 2.1.29. *Pour $K = K_pK^p$ variant il y a des isomorphismes compatibles d'espaces analytiques sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$:*

$$I^\phi(\mathbb{Q}) \backslash (\mathcal{M}_{K_p} \times G(\mathbb{A}_f^p)/K^p) \tilde{\to} \mathrm{Sh}_K^{an}(\phi).$$

Remarquons que la variété de Shimura n'est pas nécessairement compacte.

Soit comme précédemment b_0 la classe basique dans $B(G_{\mathbb{Q}_p}, \mu_{\overline{\mathbb{Q}_p}})$. Rappelons les faits suivants (cf [RZ96], (6.34)) :

- l'ensemble $\{\phi \mid b(\phi) = b_0\}$ est fini,
- $\forall \phi$ tel que $b(\phi) = b_0$, I^ϕ est une forme intérieure de G, plus précisément

- $I^\phi(\mathbb{Q}_p)=J_b(\mathbb{Q}_p)$ et $\forall l\neq p$ on a $I^\phi(\mathbb{Q}_\ell)=G(\mathbb{Q}_\ell)$,
- $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme intérieure compacte modulo le centre de $G(\mathbb{R})$.

Notons $\mathcal{A}(I^\phi)$ l'espace des représentations automorphes de I^ϕ (on tient compte des multiplicités) ainsi que $\mathcal{A}_\xi^\phi$ l'espace des formes automorphes sur I^ϕ de type $\breve{\xi}'$ à l'infini au sens où

$$\mathcal{A}_\xi^\phi=\mathrm{Hom}_{I^\phi(\mathbb{R})}(\breve{\xi}',\mathcal{A}(I^\phi))$$

où $\xi':I^\phi(\mathbb{R})\hookrightarrow I^\phi(\mathbb{C})=G(\mathbb{C})\xrightarrow{\xi}GL(V)$.

Supposons maintenant ξ est irréductible. Le groupe de Lie $I^\phi(\mathbb{R})$ étant anisotrope modulo son centre, pour un sous groupe compact ouvert K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$ on a

$$(\mathcal{A}_\xi^\phi)^{K^p}=\bigoplus_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\breve{\xi}}}\Pi_p\otimes(\Pi^p)^{K^p}$$

Théorème 2.1.30. *[Far04] Il y a une suite spectrale $G(\mathbb{A}_f)\times W_{E_p}$ équivariante*

$$E_2^{pq}=|\ker^1(\mathbb{Q},G)|\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\breve{\xi}}}\left(\varinjlim_{K}\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(D)),\Pi_p\right)\right)_{p-cusp}\otimes(\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est $(H_c^{p+q}(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\xi))_{p-cusp}$ et où D signifie la dimension de la variété de Shimura.

Démonstration. Tout d'abord on a un isomorphisme pour tous p et q ([Far04] page 75)

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}(H_c^q(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),(\mathcal{A}_\xi^\phi)^{K^p})\simeq\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\breve{\xi}}}\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}(H_c^q(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell),\Pi_p)\otimes(\Pi^p)^{K^p}.$$

D'après le corollaire 4.3.15 de [Far04] on a la suite spectrale $G(\mathbb{A}_f)\times W_{E_p}$ équivariante

$$E_2^{pq}=|\ker^1(\mathbb{Q},G)|\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi_\infty=\breve{\xi}}}\left(\varinjlim_{K}\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}_{K_p},\overline{\mathbb{Q}}_\ell(D)),\Pi_p\right)\right)\otimes(\Pi^p)$$

dont l'aboutissement est $\varinjlim_{K}H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K^{an}(b_0),\mathcal{L}_\xi^{an})$.

D'autre part la strate basique est propre, en utilisant la proposition 6.9.4 de [Far04] on a une égalité de groupes de cohomologies

$$\varinjlim_{K}H^{p+q}(\mathrm{Sh}_K^{an}(b_0),\mathcal{L}_\xi^{an})=\varinjlim_{K}H_c^{p+q}(\overline{S}_K(b_0),R\Psi(\mathcal{L}_\xi))=H_c^{p+q}(\mathrm{Sh}(b_0),\mathcal{L}_\xi).$$

Or le corollaire 2.1.26 donne une égalité $H_c^{p+q}(\mathrm{Sh}(b_0),\mathcal{L}_\xi)_{p-cusp}=H_c^{p+q}(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\xi)_{p-cusp}$. On en déduit alors la suite spectrale voulue. □

2.2 Classification des représentations automorphes pour les groupes unitaires

Le but de cette section est de rappeler, dans le cas des groupes unitaires, les formules de multiplicités locales et globales dans [KMSW] et [Mok], c.f. les théorèmes 2.2.18 et 2.2.22. Nous nous intéresserons aux paquets cuspidaux lesquels sont classifiés dans [Moe]. Notons que pour passer des groupes unitaires aux groupes des similitudes unitaires, on devra supposer que n est impair. Le résultat nouveau de cette section est la proposition 2.2.29 qui sera utilisée dans la preuve du théorème principal dans la section 2.3.

2.2.1 Groupes unitaires et leurs formes intérieures

Soit F un corps local ou global de caractéristique 0 et $\overline{F}$ une clôture algébrique. On note Γ le groupe de Galois de $\overline{F}/F$. On se donne un groupe réductif G défini sur F.

Une forme intérieure de G est un groupe réductif G_1 défini sur F muni d'un isomorphisme $\varrho : G\times\overline{F} \longrightarrow G_1\times\overline{F}$ tel que pour tout $\sigma\in\Gamma$, l'automorphisme $\varrho^{-1}\sigma(\varrho) = \varrho^{-1}\circ\sigma\circ\varrho\circ\sigma^{-1}$ est intérieur. L'application $\varrho \longmapsto \varrho^{-1}\sigma(\varrho)$ établit un isomorphisme entre l'ensemble de classes d'isomorphismes des formes intérieures de G avec $H^1(\Gamma, G_{\mathrm{ad}})$ où $G_{ad} = G/Z$.

Soit E/F une extension quadratique de corps, notons $U_{E/F}(n)$ le groupe unitaire quasi-déployé en n variables associé. On a :

- Lorsque F est un corps p-adique alors $H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)_{ad}) = \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}$ où $\delta = 1$ si n impair et $\delta = 2$ si n pair
- Lorsque $F = \mathbb{R}$ alors $H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)_{ad}) = \Big\{\{p,q\}|0\leq p,q\leq n,\ p+q=n\Big\}$

Une forme intérieure pure est un couple $(\varrho, z) : G \longrightarrow G_1$ où $\varrho : G \longrightarrow G_1$ est une forme intérieure et z est un cocycle dans $Z^1(\Gamma, G)$ tels que $\varrho^{-1}\sigma(\varrho) = \mathrm{Ad}(z_\sigma)$. L'application $(\varrho, z) \longmapsto z$ établit alors une bijection entre l'ensemble des classes d'isomorphismes de formes intérieures pures avec $H^1(\Gamma, G)$.

On aura besoin de la notion **forme intérieure étendue**, pourtant sa définition est technique. On donne donc seulement une description explicite dans le cas qui nous intéresse. En fait, dans [Kot14], Kottwitz a construit un ensemble $B(F,G)$ pour F un corps local ou global ainsi qu'un sous ensemble $B(F,G)_{bs}$ contenant des éléments basiques. Les classes d'isomorphisme des **formes intérieures étendues** de G sont en bijection avec $B(F,G)_{bs}$ ([KMSW] page 16, ligne 23). Par la suite, on essaie de caractériser $B(F,G)_{bs}$.

Pour F est un corps local il y a une application canonique :

$$\kappa_G : B(F,G)_{bs} \longrightarrow X^*(Z(\widehat{G})^\Gamma) \tag{2.1}$$

qui est une bijection si F est un corps p-adique.

Lorsque F est un corps global, pour chaque place v de $\overline{F}$, il y a un morphisme de localisation $B(F,G) \longrightarrow B(F_v,G)$ qui préserve le caractère d'être basique.

Si l'on choisit une place de $\overline{F}$ sur chaque place de F, les morphismes de localisation donnent un morphisme :

$$B(F,G)_{bs} \longrightarrow \prod_v B(F_v,G)_{bs} \tag{2.2}$$

où $\prod$ désigne l'ensemble des éléments dans le produit direct dont les composantes à presque toutes les places v sont égales à l'élément neutre de $B(F_v,G)_{bs}$. On peut montrer que le noyau de (2.2) est en bijection avec $\ker^1(F,G)$. De plus, l'image de (2.2) est égale au noyau de la composition suivante :

$$\prod_v B(F_v,G)_{bs} \xrightarrow{(2.1)} \bigoplus_v X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma_v}) \xrightarrow{\sum} X^*(Z(\widehat{G})^{\Gamma}) \tag{2.3}$$

Exemple 2.2.1. ([KMSW] sec. 0.3.3) **Formes intérieures étendues de groupes unitaires**

Pour $U_{E/F}(n)$ un groupe unitaire en n variables on a : $X^*(Z(\widehat{U_{E/F}(n)})^{\Gamma}) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

On suppose tout d'abord que F soit un corps local et dans ce cas-là on a une bijection

$$H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)) \longrightarrow B(F, U_{E/F}(n))_{bs}.$$

- Lorsque F est p-adique on a :

$$H^1(\Gamma, U_{E/F}(n)) \simeq B(F, U_{E/F}(n))_{bs} \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

- Lorsque $F=\mathbb{R}$, on a $H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)) = \{(p,q)|0 \leq p,q \leq n,\ p+q=n\}$ et $H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)_{ad})$ est le quotient de cet ensemble par la relation $(p,q) \sim (q,p)$. Le morphisme (2.1) est donné par $H^1(\Gamma, U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n)) \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(p,q) \longmapsto ([\frac{n}{2}]+q) \bmod 2$.

De plus pour le groupe linéaire général, l'application (2.1) devient un isomorphisme

$$B(F, GL_n)_{bs} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

Pour E un corps de nombres CM dont F est le sous corps totalement réel, on peut donc montrer que (2.2) est injectif ([KMSW], page 18 ligne 2). L'ensemble $B(F, U_{E/F}(n))_{bs}$ s'identifie avec le noyau de (2.3). D'après la discussion pour les groupes linéaires et unitaires locaux, on a la description suivante.

Pour chaque place v de F, on note Ξ_v la classe d'isomorphismes des formes intérieures étendues de $U_{E/F}(n)$ dont a_v l'invariance. On a alors $a_v \in \mathbb{Z}$ si v est finie et décomposée ; $a_v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si v est finie et inerte ; $a_v \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si v est réelle.

Proposition 2.2.2. *([KMSW] section 0.3.3) La collection $(\Xi_v)_v$ est dans l'image de (2.2), i.e la localisation d'une forme intérieure étendue globale si et seulement si $a_v = 0$ pour presque tout v et la somme des images de a_v mod 2 est égale à 0 mod 2.*

2.2.2 Formalisme des paramètres

On commence par considérer le cas d'un corps local F. Considérons le groupe de Langlands local $L_F := W_F$ si F est archimédien et $W_F \times SU(2)$ dans le cas non archimédien. On pose également ${}^LG = \widehat{G} \rtimes W_F$ comme un groupe topologique où $\widehat{G}$ est le groupe dual de Langlands de G.

Définition 2.2.3. *Un L-paramètre local pour un groupe réductif connexe G défini sur F est un morphisme continu $\phi : L_F \longrightarrow {}^LG$ qui commute avec les projections canoniques de L_F et ${}^LG$ sur W_F tel que ϕ envoie les éléments semisimples sur des éléments semisimples.*

Deux L-paramètres sont équivalents s'ils sont conjugués par un élément de $\widehat{G}$. On note $\Phi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de L-paramètres.

Notation 2.2.4. Soit $\phi \in \Phi(G)$ un L-paramètre.

- ϕ est borné si son image dans ${}^LG$ se projette dans un sous ensemble relativement compact de $\widehat{G}$.
- ϕ est discret (ou carré intégrable) si son image n'est contenu dans aucun sous groupe parabolique propre de ${}^LG$.

On pose $\Phi_{\mathrm{bdd}}(G)$ $\big($resp. $\Phi_2(G)\big)$ comme sous ensemble des L-paramètres bornés (resp. discrets). On considérera aussi l'ensemble $\Phi_{2,\ \mathrm{bdd}} := \Phi_{\mathrm{bdd}}(G) \cap \Phi_2(G)$. On note $\Pi_{\mathrm{temp}}(G)$ (reps. $\Pi_2(G)$) l'ensemble des représentations tempérées (resp. essentiellement de carré intégrable) de $G(F)$. De manière similaire on pose $\Pi_{2,\mathrm{temp}} := \Pi_2(G) \cap \Pi_{\mathrm{temp}}(G)$ l'ensemble des représentations de carré intégrable.

On aura besoin de la notion de A-paramètres qui joueront le rôle des composantes locales dans la classification globale.

Définition 2.2.5. *Un A-paramètre local pour un groupe réductif connexe G défini sur F est un morphisme continu $\psi : L_F \times SU(2) \longrightarrow {}^LG$ tel que l'image de $\psi|_{L_F}$ est un L-paramètre borné.*

Comme pour les L-paramètres, la condition d'équivalence entre des A-paramètres est définie par $\widehat{G}$-conjugaison. On note $\Psi(G)$ l'ensemble des classes d'équivalences de A-paramètres. On note également l'ensemble $\Psi^+(G)$ des classes d'équivalences de morphismes continues ψ comme ci-avant mais où $\psi|_{L_F}$ n'est pas nécessairement borné. Un A-paramètre ψ (ou $\psi \in \Psi^+(G)$) est générique si $\psi|_{SU(2)}$ est triviale.

Donnons une description plus en détails de ces notions pour $G = GL(n)$. Afin d'alléger les notations, on notera $\Phi(n) := \Phi(GL(n))$, $\Pi(n) := \Pi(GL(n))$ et de même pour les autres ensembles des représentations. On posera $\Phi_{\mathrm{sim}}(n) := \Phi_2(n)$. La correspondance de Langlands locale peut s'écrire de manière informelle comme suit.

Théorème 2.2.6. *[Lang] [HT01], [Hen00] Il y a une unique bijection «arithmétique» $\phi \longmapsto \pi$ de $\Phi(n)$ dans $\Pi(n)$ dite de Langlands locale qui respecte en particulier les sous ensembles suivants*

$$\begin{array}{ccccc} \Phi_{sim,bdd}(n) & \subset & \Phi_{bdd}(n) & \subset & \Phi(n) \\ \Pi_{2,temp}(n) & \subset & \Pi_{temp}(n) & \subset & \Pi(n) \end{array}$$

Remarque 2.2.7. «arithmétique» signifie respecter facteurs L et ϵ de pairs.

Pour les groupes unitaires, les L-paramètres et A-paramètres dans le cas quasi déployé $U_{E/F}(n)$ sont reliés à ceux de groupe $GL(n)$ via un morphisme de changement de base.

Soit $\kappa \in \{\pm 1\}$ et choisit $\chi_\kappa \in \mathcal{Z}_E^\kappa$. On a un morphisme de changement de base (cf [Mok] p.9) :

$$\eta_{\chi_\kappa} : {}^L U_{E/F}(n) \longrightarrow {}^L G_{E/F}(n) \tag{2.4}$$

où $G_{E/F}(n) = \mathrm{Res}_{E/F}(GL_E(n))$.

On obtient donc une application :

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa,*} : \Phi(U_{E/F}(n)) &\longrightarrow \Phi(G_{E/F}(n)) = \Phi_E(n) \\ \phi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \phi \end{aligned}$$

et de même pour les A-paramètres

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa,*} : \Psi(U_{E/F}(n)) &\longrightarrow \Psi(G_{E/F}(n)) = \Psi_E(n) \\ \psi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \psi. \end{aligned}$$

Pour $\phi \in \Phi(U_{E/F}(n))$, le L-paramètre dans $\Phi_E(n)$ qui correspond à $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$ est $\phi_{|L_E} \otimes \chi_\kappa$. En particulier, si $\kappa = 1$ et $\chi_\kappa = 1$ alors $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$ est juste la restriction de ϕ sur L_E.

Les applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ ci-dessus sont injectives, on cherche à décrire l'images de ces applications. Soit c un morphisme dans W_F relevant le morphisme non trivial de Gal(E/F). Il y a une inclusion $W_F \hookrightarrow L_F$ et on peut faire agir c sur L_F par conjugaison. On définit $\rho^c(g) := \rho(cgc^{-1})$ et de plus on pose $\rho^* := (\rho^c)^\vee$ pour toute représentation $\rho : L_F \longrightarrow GL(n, \mathbb{C})$.

Définition 2.2.8. *Un paramètre $\psi \in \Psi_E(n)$ est appelé conjugué auto-dual si $\psi = \psi^*$. Les ensembles des paramètres conjugués auto-duaux dans $\Phi_E(n)$ et $\Psi_E(n)$ sont notés $\widetilde{\Phi}_E(n)$ et $\widetilde{\Psi}_E(n)$ respectivement.*

Désormais nous notons simplement $\Phi(n)$ au lieu de $\Phi_E(n)$ (et pour les autres ensembles de paramètres) lorsque le contexte est clair.

Définition 2.2.9. *Un paramètre auto-dual ρ est de parité η où $\eta = \pm 1$ s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $B\langle \cdot | \cdot \rangle$ sur V de sorte que $B\langle \rho^c(g)x, \rho(g)y \rangle = B\langle x, y \rangle$ et que $B\langle x, y \rangle = \eta B\langle y, \rho(c^2)x \rangle$.*

Il est clair que l'image des applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ consistent en des paramètres conjugués auto-duaux.

Proposition 2.2.10. *([KMSW] lemme 1.2.5) Les applications $\eta_{\chi_\kappa,*}$ induisent une bijection entre la pré image de $\Phi_{sim}(n)$ (resp. sur $\Psi_{sim}(n)$) et l'ensemble des paramètres conjugués auto-duaux avec parité $(-1)^{n-1}\kappa$ dans $\Phi_{sim}(n)$ (resp. dans $\Psi_{sim}(n)$).*

Notation 2.2.11. On pose $\Phi_{\mathrm{sim}}(U_{E/F}(n)) := \eta^{-1}_{\chi_\kappa *}(\Phi_{\mathrm{sim}}(n))$ $\Big($resp.$\Psi_{\mathrm{sim}}(U_{E/F}(n)) := \eta^{-1}_{\chi_\kappa *}(\Psi_{\mathrm{sim}}(n))\Big)$, l'ensemble des L-paramètres simples $\big($resp. l'ensemble des A-paramètres simples$\big)$.

Pour chaque A-paramètre $\psi \in \Psi^+(G)$ on définit des groupes centralisateurs comme ci-dessous, qui jouent un rôle important dans la classification locale et globale :

$$S_\psi := \mathrm{Cent}(\mathrm{Im}\psi, \widehat{G}), \quad \overline{S}_\psi := S_\psi / Z(\widehat{G})^\Gamma, \quad \mathcal{S}_\psi := \pi_0(S_\psi),$$

$$\overline{\mathcal{S}}_\psi := \pi_0(\overline{S}_\psi), \quad S_\psi^{\mathrm{rad}} := (S_\psi \cap \widehat{G}_{\mathrm{der}})^0, \quad S_\psi^\natural := S_\psi / S_\psi^{\mathrm{rad}}.$$

On va maintenant donner une description explicite du centralisateur S_ψ pour $\psi \in \Psi^+(U_{E/F}(n))$. Posons $\psi^n := \eta_{\chi_\kappa,*}(\psi)$ qui s'écrivent sous forme

$$\psi^n = \left(\bigoplus_{i \in I_{\psi^n}} l_i \psi_i^{n_i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J_{\psi^n}} l_j (\psi_j^{n_j} \oplus (\psi_j^{n_j})^*)\right).$$

On voit alors que :

$$S_\psi = \prod_{i \in I^+_{\psi^n}} O(l_i, \mathbb{C}) \prod_{i \in I^-_{\psi^n}} Sp(l_i, \mathbb{C}) \prod_{j \in J_{\psi^n}} GL(l_j, \mathbb{C})$$

où $i \in I_{\psi^n}$ appartient à $I^+_{\psi^n}$ si la parité de ψ_i est égale à $\kappa(-1)^{n-1}$ et à $I^-_{\psi^n}$ sinon.

D'autre part le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans le membre de droite ci-dessus de sorte que :

$$\mathcal{S}_\psi \simeq S_\psi^\natural \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I^+_{\psi^n}|} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{S}}_\psi \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I^+_{\psi^n}|} & \forall i \in I^+_{\psi^n}\ 2|l_i, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I^+_{\psi^n}|-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, $E = \mathbb{C}$, $L_{\mathbb{C}} = W_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^\times$, rappelons la description des paramètres discrets. Comme précédemment on a un morphisme de changement de base

$$\eta_{\chi_\kappa} : {}^L U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n) \longrightarrow {}^L G_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n) \tag{2.5}$$

via lequel on associe à $\phi \in \Phi(U_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}(n))$ un paramètre $\phi^n = \eta_{\chi_\kappa *}\phi : L_{\mathbb{C}} \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$.

Soit $\phi \in \Phi_2(U_{\mathbb{R}/\mathbb{C}}(n))$ alors ϕ^n s'écrit sous la forme $\phi^n = \eta_1 \oplus \cdots \oplus \eta_n$ où les η_i sont des caractères auto duaux deux à deux disjoints de $\mathbb{C}^\times$. En général, un tel caractère est de la forme $\eta : z \longmapsto (z/\overline{z})^a$ avec $a \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Si $\eta_i(z) = (z/\overline{z})^{a_i}$ alors on introduit le n-tuple $\mu_{\phi^n} := (a_1, \cdots a_n)$ appelé le caractère infinitésimal de ϕ^n. Si $\chi_\kappa(z) = (z/\overline{z})^c$ alors le caractère infinitésimal de ϕ est donné par la formule $\mu_\phi := (b_1, \cdots b_n)$ où $b_i = a_i - c$.

Définition 2.2.12. *Notons $d(\mu_\phi) = min\{\min_i(b_i), \min_{i \neq j}(|b_i - b_j|)\}$ et de même pour μ_{ϕ^n}. Le caractère infinitésimal de ϕ est suffisamment régulier si $d(\mu_\phi) > 0$.*

Supposons désormais que F est **un corps de nombres** et E une extension quadratique de F. On va définir de manière formelle les notions de L-paramètre pour le groupe unitaire quasi déployé $U_{E/F}(n)$ en partant des représentations cuspidales des groupes linéaires généraux.

On commence par définir $\Psi_{\mathrm{glb,sim}}(n)$ comme l'ensemble des produits tensoriels formels $\pi \boxtimes \nu$ où π est une représentation automorphe cuspidale de $GL_m(\mathbb{A}_E)$ et ν une représentation algébrique de $SL_2(\mathbb{C})$ de dimension d et on demande de plus que $n = m{\cdot}d$. Plus généralement on définit $\Psi_{\mathrm{glb}}(n)$ comme l'ensemble des objets sous forme d'une somme directe formelle non ordonnée

$$\pi = l_1(\pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\pi_r \boxtimes \nu_r)$$

où $l_i \geq 1$ est un entier, les $\pi_i \boxtimes \nu_i \in \Psi_{\mathrm{glb,sim}}(n_i)$ sont deux à deux distincts et $n = l_1 \cdot n_1 + \cdots + l_r \cdot n_r$.

Un paramètre global sera dit *générique* si pour tous facteurs simples $\pi_i \boxtimes \nu_i$, le facteur ν_i est la représentation triviale de $SL_2(\mathbb{C})$. On note $\Phi_{\mathrm{glb}}(n)$ l'ensemble des paramètres globaux génériques.

Soit π une représentation automorphe cuspidale de $GL_m(\mathbb{A}_E)$, on pose $\pi^* := (\pi^c)^\vee$ où $\pi^c := \pi \circ c$ avec c le morphisme de conjugaison de Galois de E sur F et $(\pi^c)^\vee$ est la contragrédiente de π^c. Plus généralement, si $\pi = \pi_1 \boxtimes \nu_1 \in \Psi_{\mathrm{glb,sim}}(n)$ alors on pose $(\pi)^* := \pi_1^* \boxtimes \nu_1$ et un $\pi \in \Psi_{\mathrm{glb,sim}}(n)$ est dit autodual si $\pi = (\pi)^*$.

Maintenant si $\pi = (l_1\pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus (l_r\pi_r \boxtimes \nu_r) \in \Psi_{\mathrm{glb}}(n)$, on dit que π est autodual s'il existe une involution $i \longmapsto i^*$ de $\{1, \cdots, r\}$ telle que $(\pi_i \boxtimes \nu_i)^* = \pi_{i^*} \boxtimes \nu_{i^*}$ et $l_i = l_{i^*}$.

L'ensemble des paramètres autoduaux (resp. autodual simple) de $\Psi_{\mathrm{glb}}(n)$ (resp $\Psi_{\mathrm{glb,\,sim}}(n)$) sera noté par $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{glb}}(n)$ (resp $\widetilde{\Psi}_{\mathrm{glb,sim}}(n)$).

On a besoin de la construction suivante, ce qui nous serve comme une substitution pour le groupe de Langlands global. Pour la construction détaillée, voir [Mok] (p22-23) et [KMSW] (p.68).

Construction 2.2.13. *[Mok], [KMSW] Soit $\psi \in \widetilde{\Psi}_{glb}(n)$ comme au dessus, il existe un groupe $\mathcal{L}_\psi$ et un morphisme*[3] *:*

$$\widetilde{\psi} : \mathcal{L}_\pi \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L G_{E/F}(n).$$

Définition 2.2.14. *On définit l'ensemble des paramètres $\Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ comme l'ensemble des couples $(\psi^n, \widetilde{\psi})$ où $\psi^n \in \widetilde{\Psi}_{glb}(n)$ et $\widetilde{\psi} : \mathcal{L}_\pi \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow {}^L(U_{E/F}(n))$ est un morphisme tel que $\widetilde{\psi^n} = \eta_{\chi_\kappa} \circ \widetilde{\psi}$. Un paramètre $\psi = (\psi^n, \widetilde{\psi})$ est générique si ψ^n l'est.*

Notons que $\widetilde{\psi}$ est entièrement déterminé par η_{χ_κ} et $\widetilde{\psi^n}$.

Comme auparavant on peut définir le centralisateur et ses variantes pour un paramètre $\psi = (\psi^n, \widetilde{\psi})$. On note ϵ_ψ le caractère d'Arthur de $\overline{\mathcal{S}}_\psi$, cf [Arthur] p.15.

3. On rappelle que $G_{E/F}(n) = \mathrm{Res}_{E/F}(GL_E(n))$.

Afin de décrire ces groupes en détails, on considère la décomposition de ψ^n sous la forme

$$\psi^n = \Big(\boxplus_{i\in I^+_{\psi^n}} l_i\psi_i^{n_i}\Big) \boxplus \Big(\boxplus_{i\in I^-_{\psi^n}} l_i\psi_i^{n_i}\Big) \boxplus \Big(\boxplus_{j\in J_{\psi^n}} l_j(\psi_j^{n_j} \boxplus \psi_{j^*}^{n_{j^*}})\Big) \tag{2.6}$$

où $i \in I_{\psi^n}$ appartient à $I^+_{\psi^n}$ ou à $I^-_{\psi^n}$ selon la parité de $\psi_i^{n_i}$ (ce qui est lié à sa fonction L d'Asai). ([KMSW] p.69).

On a alors :

$$S_\psi = \prod_{i\in I^+_{\psi^n}} O(l_i,\mathbb{C}) \prod_{i\in I^-_{\psi^n}} Sp(l_i,\mathbb{C}) \prod_{j\in J_{\psi^n}} GL(l_j,\mathbb{C}).$$

D'autre part le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est renvoyé diagonalement dans le membre de droit ci-dessus. Alors on voit que ([KMSW] page 69)

$$\mathcal{S}_\psi \simeq S_\psi^\natural \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I_\psi^+|} \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{S}}_\psi \simeq \begin{cases} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I^+_{\psi^n}|} & \forall i \in I^+_{\psi^n}\ 2|l_i, \\ (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{|I^+_{\psi^n}|-1} & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.7}$$

Notation 2.2.15. On pose $\Psi_2(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ le sous ensemble des paramètres discrets, i.e de la forme $\psi = (\psi^n, \widetilde{\psi})$ où $\forall i \in I^+_{\psi^n}, l_i = 1$ et $\forall j \in I^-_{\psi^n} \bigcup J_{\psi^n}, l_j = 0$ $\big($cf (2.6)$\big)$.

Localisation d'un paramètre global

• On commence avec les groupes $GL(n)$. Considérons une représentation automorphe cuspidale π de $GL(n)$ et v une place de F. La correspondance de Langlands local associe à π_v un A-paramètre générique $\psi_{\pi_v} \in \Psi^+(GL(n, F_v))$. Ce processus nous permet de définir une application de localisation

$$\begin{array}{ccc} \Psi_{\mathrm{glb}}(n) & \longrightarrow & \Psi_v^+(n) \\ l_1(\pi_1 \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\pi_r \boxtimes \nu_r) & \longmapsto & l_1(\psi_{(\pi_1)_v} \boxtimes \nu_1) \boxplus \cdots \boxplus l_r(\psi_{(\pi_r)_v} \boxtimes \nu_r). \end{array}$$

• Considérons maintenant les groupes $U_{E/F}(n)$. Fixe $\kappa \in \{\pm 1\}$ avec un caractère $\chi_+ \in \mathcal{Z}_E^+$ et $\chi_- \in \mathcal{Z}_E^-$. Soit $\psi = (\psi^n, \widetilde{\psi}) \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ un paramètre global.

Proposition 2.2.16. *[KMSW] prop 1.3.3. Pour chaque $\psi \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$, il existe un paramètre local $\psi_v \in \Psi^+(U_{E_v/F_v}(n))$ tel que $\psi_v^n = \eta_{\chi_\kappa} \circ \psi_v$*

$$\psi_v^n = L_{F_v} \times SU(2) \xrightarrow{\psi_v} {}^L U_{E_v/F_v}(n) \xrightarrow{\eta_{\chi_\kappa}} {}^L G_{E_v/F_v}(n).$$

Le paramètre local ψ_v est unique à isomorphisme près.

On peut utiliser cette proposition pour définir le diagramme commutative suivant

$$\begin{tikzcd}
L_{F_v} \times SU(2) \arrow[r, "\psi_v"] \arrow[d] \arrow[rr, bend left, "\psi_v^n"] & {}^L U_{E_v/F_v}(n) \arrow[r, "\eta_{\chi_\kappa}"] \arrow[d] & {}^L G_{E_v/F_v}(n) \arrow[r] \arrow[d] & W_{F_v} \arrow[d] \\
\mathcal{L}_\psi \times SL(2,\mathbb{C}) \arrow[r, "\widetilde{\psi}"] \arrow[rr, bend right, "\widetilde{\psi^n}"'] & {}^L U_{E/F}(n) \arrow[r, "\eta_{\chi_\kappa}"] & {}^L G_{E/F}(n) \arrow[r] & W_F
\end{tikzcd}$$

Le diagramme commutatif ci-dessus nous permet de définir les morphismes de localisation pour les groupes de centralisateurs. Le second morphisme vertical envoie $\Im(\psi_v)$ à $\Im(\widetilde{\psi})$ induisant alors

$$S_\psi \longrightarrow S_{\psi_v}, \qquad \mathcal{S}_\psi \longrightarrow \mathcal{S}_{\psi_v}, \qquad S_\psi^\natural \longrightarrow S_{\psi_v}^\natural.$$

Remarque 2.2.17.
- Si $\psi \in \Psi(U_{E/F}(n), \eta_{\chi_\kappa})$ est un paramètre global générique alors les paramètres locaux ψ_v le sont pour toute place v.
- Les deux premiers morphismes de localisation sont injectifs.

2.2.3 Formules de multiplicité pour les groupes unitaires

Soient F un corps local et E/F une extension quadratique. On a un unique groupe unitaire quasi déployé $U^* := U_{E/F}(n)$. Considérons une forme intérieure étendue $(\varrho, z) : U^* \longrightarrow U$. La donnée (ϱ, z) définit un caractère $\chi_z \in X^*(Z(\widehat{U})^\Gamma)$ via (2.1). Considérons un paramètre $\psi \in \Psi(U^*)$ et les centralisateurs associés

$$Z(\widehat{U})^\Gamma \hookrightarrow S_\psi \twoheadrightarrow S_\psi^\natural \tag{2.8}$$

On note $\mathrm{Irr}(S_\psi^\natural, \chi_z)$ l'ensemble des caractères de $S_\psi^\natural$ dont le tiré en derrière via (2.8) induit le caractère χ_z. Rappelons également que $\Pi_{unit}(U)$ (resp. $\Pi_{temp}(U)$ et $\Pi_{2,temp}(U)$) est l'ensemble des représentations unitaires (resp. tempérées et carrés intégrables).

Théorème 2.2.18. *([KMSW] théorème 1.6.1)*

1. *Soit $\psi \in \Psi(U^*)$. Il existe un ensemble fini $\Pi_\psi(U, \varrho)$ muni d'un morphisme vers $\Pi_{unit}(U)$. L'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ ne dépend pas de z et est muni d'une application*

   $$\Pi_\psi(U, \varrho) \longrightarrow Irr(S_\psi^\natural, \chi_z), \qquad \pi \mapsto \langle \pi, - \rangle_{\varrho, z}$$

   L'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ ainsi que $\langle - | - \rangle_{\varrho,z}$ dépendent seulement de la classe d'équivalence Ξ de (ϱ, z). Pour ψ un paramètre générique (i.e $\psi \in \Phi_{bdd}(U^*)$), l'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ est non vide si et seulement si ψ est (U, ϱ)-relevant.

2. *Supposons que $\psi \in \Phi_{bdd}(U^*)$, i.e générique, alors le morphisme $\Pi_\psi(U, \Xi) \longrightarrow \Pi_{unit}(U)$ est injectif dont l'image contenu dans $\Pi_{temp}(U)$. Si F est non archimédien alors l'application $\Pi_\psi(U, \Xi) \longrightarrow Irr(S_\psi^\natural, \chi_z)$ est une bijection.*

3. On a

$$\Pi_{temp}(U) = \coprod_{\psi \in \Phi_{bdd}(U^*)} \Pi_\psi(U, \Xi) \qquad et \qquad \Pi_{2,temp}(U) = \coprod_{\psi \in \Phi_{2,bdd}(U^*)} \Pi_\psi(U, \Xi).$$

Ensuite on parle de la classification globale. Soient E/F une extension quadratique d'un corps global F et (U, ϱ) une forme tordue intérieure de groupe unitaire quasi-déployé $U^* := U_{E/F}(n)$. On peut choisir z tel que (U, ϱ, z) est une forme tordue intérieure étendue. On aimerait associer des paquets globaux $\Pi_\psi(U, \varrho)$ à chaque paramètre $\psi \in \Psi(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$. Il existe un morphisme de localisation $\psi \longmapsto \psi_v$ de $\Psi(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$ à $\Psi^+_{\text{unit}}(U^*_v)$. D'après le théorème 2.2.18, pour chaque $\psi_v \in \Psi(U^*_v)$ on a un paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ muni d'une application

$$\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v) \longrightarrow \text{Irr}(S^\natural_{\psi_v}, \chi_z), \qquad \pi_v \mapsto \langle \pi_v, - \rangle_{\varrho_v, z_v}.$$

Pour un A-paramètre $\psi_v \in \Psi^+_{\text{unit}}(U^*_v) \backslash \Psi(U^*_v)$, on peut quand même définir un paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$. L'idée de la construction est qu'on descend à un sous groupe de Levi M_v de U_v de sorte que $(\psi_v)_{M_v}$ appartienne à $\Psi(M^*_v)$ (pas seulement à $\Psi^+(M^*_v)$) et puis appliquer le théorème 2.2.18 pour M_v et $(\psi_v)_{M_v} \in \Psi(M^*_v)$. Pour plus de détails, voir [Mok] page 32, 33 ou [KMSW] section 1.6.4.

Remarque 2.2.19.

- Lorsque ψ_v n'est pas (U_v, ϱ_v)-relevant alors le paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ est vide.
- Lorsque $(U_v, \varrho_v) = (U^*_v, 1)$ est quasi-déployé alors ψ_v est toujours (U_v, ϱ_v)-relevant. Si de plus ψ_v est générique alors le paquet $\Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v)$ est non vide.

On pose

$$\Pi_\psi(U, \varrho) := \left\{ \bigotimes_v \pi_v : \pi_v \in \Pi_{\psi_v}(U_v, \varrho_v), \langle \pi_v, - \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1 \quad \text{pour presque tout v} \right\}.$$

Remarque 2.2.20. L'ensemble $\Pi_\psi(U, \varrho)$ peut être vide, notamment lorsque U n'est pas quasi déployé et ψ n'est pas générique.

Pour chaque $\bigotimes_v \pi_v \in \Pi_\psi(U, \varrho)$ on y associe un caractère de $S^\natural_\psi$ par la formule

$$\langle \pi, s \rangle_\varrho := \prod_v \langle s_v, \pi_v \rangle_{\varrho_v, z_v}, \quad s \in S^\natural_\psi$$

où s_v désigne l'image de s par le morphisme naturel $S^\natural_\psi \longrightarrow S^\natural_{\psi_v}$.

Définition 2.2.21. *Soit* $\Pi_\psi(U, \varrho, \epsilon_\psi) := \{\pi \in \Pi_\psi(U, \varrho) : \langle \pi, - \rangle_\varrho = \epsilon_\psi\}$ *où* ϵ_ψ *est le caractère d'Arthur. Pour* ψ *un paramètre générique,* $\epsilon_\psi \equiv 1$.

Théorème 2.2.22. *([KMSW] théorème* 1.7.1) *Soient E/F une extension quadratique d'un corps global F et $\kappa \in \{\pm 1\}$ ainsi que $\chi_\kappa \in \mathcal{Z}_E^\kappa$. Soit (U, ϱ) une forme intérieure pure de U^*. Il existe un isomorphisme de $U(\mathbb{A}_F)$-module*

$$L^2_{disc}(U(F) \setminus U(\mathbb{A}_F)) \simeq \bigoplus_{\psi \in \Psi(U^*, \eta_{\chi_\kappa})} L^2_{disc,\psi}(U(F) \setminus U(\mathbb{A}_F)).$$

Si $\psi = \phi$ est générique alors

- $L^2_{disc,\phi}(U(F) \setminus U(\mathbb{A}_F)) = 0$ *si* $\psi \notin \Psi_2(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$.
- $L^2_{disc,\phi}(U(F) \setminus U(\mathbb{A}_F)) \simeq \bigoplus_{\pi \in \Pi_\phi(U, \varrho, \epsilon_\psi)} \pi$ *si* $\psi \in \Psi_2(U^*, \eta_{\chi_\kappa})$.

En particulier si π est une représentation automorphe de groupe unitaire (U, ϱ) appartenant à un paquet global générique alors $m_\pi = 1$.

Démonstration. Ce théorème est le résultat global principal de [KMSW]. Pour la première décomposition consulter page 151 et pour la deuxième décomposition, consulter page 205-206 de loc.cit. □

Résumons à présent les résultats principaux de Moeglin dans [Moe], en particulier la classification des représentations supercuspidales de groupes unitaires p-adiques.

Soit ψ un homomorphisme de $W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$. On suppose que ψ est semi-simple borné sur W_E et continu. On suppose qu'il se décompose en somme de représentations irréductibles $\psi = \bigoplus_{\rho,a} \rho \otimes \sigma_a$ où ρ est une représentation irréductible de W_E et σ_a étant l'unique représentation irréductible de $SL_2(\mathbb{C})$ de dimension a.

On dit que ψ est θ-discret s'il est sans multiplicité et pour toute ρ, la classe de conjugaison de ρ est invariante sous l'action de $g \longmapsto \mathrm{J}_\rho \, {}^t\overline{g}^{-1} \, \mathrm{J}_\rho^{-1}$ où J_ρ est la matrice antidiagonale de taille $d_\rho = \dim \rho$ avec à la place i l'élément $(-1)^{(i+1)}$. On dit que ψ est stable si elle se prolonge en un homomorphisme de $W_F \times SL_2(\mathbb{C})$ dans le groupe dual de $U_{E/F}(n)$.

En fait, le morphisme $\eta_{\chi_\kappa,*}$ (voir 2.4) réalise une bijection entre $\Phi_{2,\,\mathrm{bdd}}(U_{E/F}(n))$ et l'ensemble des morphismes θ-discrets stables. De plus, si on note $\overline{\psi} = \eta^{-1}_{\chi_\kappa,*}(\psi)$ alors on a $S^\natural_{\overline{\psi}} = (\mathrm{Cent}_{GL_n(\mathbb{C})}\, \psi)^\theta$. On a la classification suivante des séries discrètes des groupes unitaires p-adiques.

Théorème 2.2.23. *(5.7 de [Moe]) Il y a une bijection entre l'ensemble des paquets stable des séries discrètes de $U_{E/F}(n)$ et l'ensemble des classes de conjugaison de morphismes θ-discrets et stables de $W_E \times SL_2(\mathbb{C})$ dans $GL_n(\mathbb{C})$.*

Ensuite on voudrait déterminer quels paquets contiennent des représentations supercuspidales. On aura donc besoin de la notation d'un morphisme sans trou et la construction d'un sous groupe $A(\psi)$ de $(\mathrm{Cent}_{GL_n(\mathbb{C})}\, \psi)^\theta$.

Soit ψ un morphisme θ-discret et stable. On note $\psi[a]$ la composante isotypique de la représentation ψ, vue comme une représentation de $SL_2(\mathbb{C})$, pour la représentation irréductible de $SL_2(\mathbb{C})$ de dimension a. Pour tout a, $\psi[a]$ est une représentation de W_E.

On dit que ψ est sans trou si pour tout $a > 2$, $\psi[a]$ est une sous représentation de $\psi[a-2]$ en tant que représentation de W_E.

On décompose ψ en représentations irréductibles et considère un couple (ρ, a) de sorte que $\rho \otimes \sigma_a$ soit une sous représentation de ψ. On suppose qu'il existe $0 \leq b < a$ tel que $b = 0$ si a est pair et si $b \neq 0$, $\rho \otimes \sigma_b$ soit aussi une sous représentation de ψ. On note alors a_- le plus grand b vérifié cette propriété. On note $z_{\rho,a}$ l'élément du centralisateur de ψ dans $GL_n(\mathbb{C})$ dont les valeurs propres -1 ont exactement pour espace propre la somme $\rho \otimes \sigma_a \oplus \rho \otimes \sigma_{a_-}$. On note $A(\psi)$ le sous groupe du centralisateur de ψ engendré par ces éléments $z_{\rho,a}$.

Théorème 2.2.24. *(8.4.4 de [Moe]). Le paquet stable correspond à ψ contient une représentation supercuspidale si et seulement si ψ est sans trou. Lorsque ψ est sans trou alors il existe un unique caractère ϵ_{alt} de $A(\psi)$ telle que le nombre de représentations supercuspidales est le cardinal de l'ensemble des caractères de $(\mathrm{Cent}_{GL_n(\mathbb{C})}\,\psi)^\theta/\{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ dont la restriction à $A(\psi)$ vaut ϵ_{alt}.*

Enfin, lorsque $\psi : W_E \times SL_2(\mathbb{C}) \longrightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est trivial sur $SL_2(\mathbb{C})$, on voit que ψ est une somme des représentations de la forme $\rho \otimes \sigma_1$, en particulier $A(\psi)$ est trivial. On en déduit le résultat suivant dont on aura besoin pour la suite.

Proposition 2.2.25. *(C.Moeglin) Soit $\phi : W_F \times SU(2) \longrightarrow {}^L U_{E/F}(n)$ un L-paramètre discret trivial sur $SU(2)$, alors le L-paquet $\Pi_\phi(U_{E/F})(n)$ ne contient que des représentations supercuspidales.*

2.2.4 Une application à la globalisation des représentations locales

On suppose n impair. Le but de ce paragraphe est de montrer l'existence des représentations automorphes satisfaisant des propriétés particulières.

Décrivons tout d'abord le passage du groupe unitaire au groupe des similitudes unitaires. Soit F un corps totalement réel ainsi que E/F une extension quadratique. Supposons V est un espace hermitien de dimension n relative à l'extension E/F. Considérons $G = GU(V)$ le groupe des similitudes unitaires défini sur $\mathbb{Q}$ par

$$G(R) = \big\{ g \in GL(V \otimes R) | < gv, gw >= \nu(g) < v, w >,\ v, w \in V \otimes R \big\}$$

pour toute $\mathbb{Q}$-algèbre R et $\nu(g) \in R^\times$. Notons $U = U(V)$ le groupe unitaire associé.

Proposition 2.2.26. *([CHLN]). Supposons que n impair. Soit π une représentation automorphe irréductible de $G(\mathbb{A})$ dont la restriction à $U(\mathbb{A})$ contient une représentation automorphe irréductible σ. Si σ apparaît avec multiplicité 1 dans le spectre discret de U alors π apparaît avec multiplicité 1 dans le spectre discret de G. De plus, si χ est le caractère central de π alors π est la seule représentation automorphe de $G(\mathbb{A})$ contenant σ avec le caractère central χ.*

Soit G un groupe de similitudes unitaires non ramifié en $n = 2k+1$ variables défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $U \subset G$ le groupe unitaire noyau du facteur de similitudes. Soit $K/\mathbb{Q}_p$ l'extension quadratique non ramifiée. Il y a une inclusion $K^\times \hookrightarrow Z_G$.

Proposition 2.2.27. *Il y a une bijection entre les représentations irrédutibles de $G(\mathbb{Q}_p)$ et les couples (π, χ) où π est une représentation irréductible du groupe unitaire $U(\mathbb{Q}_p)$ et χ un caractère de $K^\times$ tel que $\omega_{\pi|K^\times \bigcap U(\mathbb{Q}_p)} = \chi_{|K^\times \bigcap U(\mathbb{Q}_p)}$.*

Soit U_p^* le groupe unitaire p-adique quasi-déployé en n variables associé à l'extension quadratique $E_p/\mathbb{Q}_p$ puis $\phi_p \in \Phi_2(U_p^*)$ un L-paramètre discret.

Proposition 2.2.28. *([KMSW] prop. 4.4.1) Supposons qu'il existe un corps CM de la forme $\dot{E} = F^+\mathcal{K}$ où $\mathcal{K}$ est un corps quadratique imaginaire et tel que $\dot{E}_p = E_p$. Alors il existe une place inerte w et un paramètre global $\dot{\phi} \in \Phi_2(\dot{U}^*)$ du groupe unitaire quasi déployé $\dot{U}^*$ en n variables associé à $\dot{E}/F^+$ tels que :*

(i) $\dot{\phi}_p = \phi_p$ et $\dot{\phi}_w \in \Phi_{bdd}(U_w^*)$

(ii) $\dot{\phi}_u$ est un paramètre discret pour tout u infinie.

(iii) Les morphismes canoniques $S_{\dot{\phi}} \longrightarrow S_{\dot{\phi}_p}$ et $S_{\dot{\phi}} \longrightarrow S_{\dot{\phi}_w}$ sont des isomorphismes.

On utilise la même construction que celle décrite dans la proposition 4.4.1 de [KMSW]. Dans la proposition 4.4.1 et 4.3.1 de loc.cit, les auteurs globalisent également les groupes unitaires réels et ils supposent donc que le corps global possède au moins deux places infinies. Dans notre cas cette hypothèse n'est pas nécessaire, il suffit de demander qu'il existe une place infinie différente de p.

Démonstration. On donne seulement les étapes principales.

Écrivons $\eta_{\chi_\kappa *}\phi_p = \phi_p^n$ sous forme d'une somme des paramètres simples de groupes linéaires généraux $\phi_p^n = \phi_{1,p}^{n_1} \oplus \cdots \oplus \phi_{r,p}^{n_r}$.

À chaque $\phi_{i,p}^{n_i}$ on peut associer un groupe global $\dot{U}(n_i)$ et un morphisme $\dot{\eta}_{\chi_{\kappa_i}}$ avec un unique signe κ_i de sorte que $\phi_{i,p}^{n_i}$ provient d'un L-paramètre $\phi_{i,p}$ dans $\Phi_{2,bdd}(\dot{U}_p(n_i))$ via le morphisme $(\dot{\eta}_{\chi_{\kappa_i}})_p$.

Fixons une place inerte w et des paramètres simples deux à deux distincts $\phi_{1,w}, \cdots, \phi_{r,w}$ de sorte que $\dim \phi_{i,w} = \dim \phi_{i,p}$.

D'après le lemme 4.3.1 de loc.cit, pour chaque $i \in \{1, \cdots, r\}$ il existe un paramètre global simple $\dot{\phi}_i$ de sorte que

- $(\dot{\phi}_i)_p = \phi_{i,p}$ et $(\dot{\phi}_i)_w = \phi_{i,w}$,
- $(\dot{\phi}_i)_u$ est un paramètre discret régulier et suffisamment régulier dans le sens de 2.2.12 si u est une place infinie.

Construisons ensuite un L-paramètre global de $GL(n)$ de manière suivante

$$\dot{\phi}^n = \dot{\phi}_1^{n_1} \boxplus \cdots \boxplus \dot{\phi}_r^{n_r}.$$

On montre que $\dot{\phi}^n$ s'étend en un L-paramètre $\dot{\phi}$ dans $\Phi_2(\dot{U}^*)$ en utilisant la compatibilité des signes κ_i avec la parité des $\dot{\phi}_i$. On démontre enfin les propriétés (i), (ii) et (iii) par le même argument que celui de la proposition 4.4.1 de [KMSW]. Remarquons enfin que la condition imposée sur les places infinies rassure que le paramètre globale est générique. □

Soit π_p une représentation de carré intégrable d'un groupe unitaire U_p p-adique[4]. Suppose que $\dot{U}$ est un groupe unitaire global tel que $\dot{U}_p = U_p$ et $\dot{U}$ quasi déployé en toutes places finies. Étendons U en une forme intérieure pure. D'après la proposition 2.2.2, il suffit d'étendre les groupes unitaires locaux en formes intérieures pures satisfaisant certaine condition de parité.

Comme n impair, d'après l'exemple 2.2.1, pour chaque place v il y a deux manière d'étendre le groupe unitaire local en une forme intérieure pure. Si v est une place différente de p, on choisit $a_v = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et on choisit a_p l'unique élément de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ de sorte que la somme des a_w s'annule.

Proposition 2.2.29. *Il existe alors une représentation automorphe Π de $\dot{U}$ telle que $\Pi_p = \pi_p$. De plus s'il existe une représentation automorphe Π' de $\dot{U}$ satisfaisant $(\Pi')^p = (\Pi)^p$ alors $\Pi \simeq \Pi'$. On a le même résultat pour les groupes de similitudes unitaires.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.26, le cas des groupes de similitudes unitaires se déduit de celui pour les groupes unitaires auquel on se ramène donc. Montrons l'existence de Π :

On suppose que $\pi_p \in \Pi_{\phi_p}(U_p^*, \varrho)$ pour un paramètre discret ϕ_p. On note alors $\dot{\phi} \in \Phi_2(\dot{U}^*)$ le paramètre global qui existe d'après le lemme 2.2.28.

On montre que les paquets $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ sont non vides. En effet, si $v = p$, $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ contient π_p. D'autre part, comme $\dot{\phi}_u$ est un paramètre discret si u est une place infinie, on en déduit qu'il existe toujours une représentation dans le paquet correspondant.

Considérons une place finie $v \neq p$. Comme $\dot{\phi}$ est générique, le paramètre localisation $\dot{\phi}_v$ l'est également (remarque 2.2.17). Or $\dot{U}$ est quasi déployé en v alors $\Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$ est non vide d'après la remarque 2.2.19.

Pour chaque $v \notin \{p, w\}$ choisissons une représentation $\pi_v \in \Pi_{\dot{\phi}_v}(\dot{U}_v^*, \varrho)$. On va choisir une représentation $\pi_w \in \Pi_{\dot{\phi}_w}(\dot{U}_q^*, \varrho)$ telle que la représentation $\bigotimes_v \pi_v$ soit automorphe.

4. On rappelle que n étant impair alors U_p est quasi-déployé.

D'après le théorème 2.2.22 il faut donc choisir π_w satisfaisant la relation :

$$\langle \pi, s\rangle_{\varrho} := \prod_v \langle s_v, \pi_v\rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}} \tag{2.9}$$

Comme $S_{\overset{\bullet}{\phi}} \simeq S_{\overset{\bullet}{\phi}_w} \simeq S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}_w}$ (le dernier isomorphisme résulte du fait que $\overset{\bullet}{\phi}_w$ est un paramètre discret) et d'autre part les caractères $\langle s_v, \pi_v\rangle$ sont fixés (pour $v \neq w$) , il existe un unique caractère dans $\mathrm{Irr}(S^{\natural}_{\phi_w}, \chi_{z_w})$ satisfaisant l'égalité au-dessus. Le point 2 de 2.2.18 affirme l'existence d'une représentation π_w satisfaisant (2.9).

Supposons maintenant qu'on a une représentation Π' telle que $(\Pi')^p = (\Pi)^p$. Montrons que Π et Π' sont dans le même paquet. Supposons que $\Pi' \in \Pi_{\overset{\bullet}{\phi}'}(\overset{\bullet}{U}, \varrho, \epsilon_{\phi})$ et on veut montrer que $\overset{\bullet}{\phi}' = \overset{\bullet}{\phi}$.

Puisque $(\Pi')^p = (\Pi)^p$, on en déduit que $\overset{\bullet}{\phi}'_v = \overset{\bullet}{\phi}_v$ pour tout $v \neq p$ et en particulier on a $(\overset{\bullet}{\phi}'_v)^n = \overset{\bullet}{\phi}^n{}_v$. D'autre part $\overset{\bullet}{\phi}^n$ et $(\overset{\bullet}{\phi}')^n$ sont des paramètres globaux de groupe $GL(n)$ et le théorème de multiplicité 1 fort implique que $\overset{\bullet}{\phi}^n = (\overset{\bullet}{\phi}')^n$, on en déduit que $\overset{\bullet}{\phi}' = \overset{\bullet}{\phi}$, en particulier Π_p et Π'_p sont dans le même paquet local.

Comme Π et Π' sont des représentations automorphes, on a les égalités suivantes :

$$\langle \Pi, s\rangle_{\varrho} = \prod_v \langle s_v, \Pi_v\rangle_{\varrho_v, z_v} = \langle s_p, \Pi_p\rangle_{\varrho_p, z_p} \prod_{v\neq p} \langle s_v, \Pi_v\rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}}$$

et

$$\langle \Pi', s\rangle_{\varrho} = \prod_v \langle s_v, \Pi'_v\rangle_{\varrho_v, z_v} = \langle s_p, \Pi'_p\rangle_{\varrho_p, z_p} \prod_{v\neq p} \langle s_v, \Pi_v\rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}}$$

on en déduit que :

$$\langle s_p, \Pi_p\rangle_{\varrho_p, z_p} = \langle s_p, \Pi'_p\rangle_{\varrho_p, z_p} \quad \forall s \in S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}}$$

D'autre part, le morphisme $S_{\overset{\bullet}{\phi}} \longrightarrow S_{\overset{\bullet}{\phi}_p}$ est un isomorphisme et on a

$$\langle s_p, \Pi_p\rangle_{\varrho_p, z_p} = \langle s_p, \Pi'_p\rangle_{\varrho_p, z_p} \quad \forall s \in S^{\natural}_{\overset{\bullet}{\phi}_p}$$

le point 2 de 2.2.18 implique que $\Pi_p \simeq \Pi'_p$, autrement dit on a $\Pi \simeq \Pi'$. □

2.3 Un cas PEL de la conjecture de Kottwitz

2.3.1 Notations

Dans cette section, nous précisons les notations du Théorème A de l'introduction, concernant r_μ puis les τ_i. En vue du théorème 2.4.2 de l'appendice, on ne suppose pas pour l'instant que $d = 1$.

Rappelons que $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, \mu, b)$ est une donnée de Rapoport-Zink basique de type PEL unitaire non ramifiée simple de signature $(1, n-1), (0,n), \cdots (0,n)$. On note G le groupe de similitudes unitaires p-adique quasi déployé (en n variables) associé ainsi que $(\mathcal{M}_{K_p})_{K_p}$ la tour d'espaces de Rapoport-Zink. La cohomologie de cet espace est munie d'une action de $G(\mathbb{Q}_p) \times J_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ [5] où on rappelle que F_p est aussi le corps de définition de μ, autrement dit $E_p = F_p$.

La représentation r_μ de ${}^L G = \widehat{G} \rtimes W_{F_p}$ avec une action triviale de W_{F_p} et $r_{\mu|_{\widehat{G}}}$ est donnée par la formule

$$r_{\mu|_{\widehat{G}}} = \bigotimes_{\tau\in\Phi} \Big(\bigwedge^{p_\tau} St_n\Big)^* \otimes (St_1)^{-1} = (St_n)^* \otimes (St_1)^{-1}$$

où St_i désigne la représentation standard de dimension i. En particulier, on notera que $\dim r_\mu = n$.

Notons U_p le groupe unitaire défini sur $\mathbb{Q}_p$ noyau du facteur de similitude. Le groupe de Langlands dual est ${}^L U_p = \big(\prod_{\tau\in\Phi} GL_n(\mathbb{C})\big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$. On a également un morphisme de L-groupes

$${}^L G_p = \big(\prod_{\tau\in\Phi} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times\big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \big(\prod_{\tau\in\Phi} GL_n(\mathbb{C})\big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p} = {}^L U_p$$

Étant donné un L-paramètre discret $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \big(\prod_{\tau\in\Phi} GL(V) \times \mathbb{C}^\times\big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ où $V \simeq \mathbb{C}^n$. On obtient un L-paramètre discret $\widetilde{\varphi} : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \big(\prod_{\tau\in\Phi} GL(V)\big) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ de U_p.

Puisque $U_p = \mathrm{Res}_{F_p^+/\mathbb{Q}_p}(U_{F_p/F_p^+})$ (où F_p^+ est le sous-corps de F_p fixé par l'involution $*$) le lemme de Shapiro

$$H^1(W_{\mathbb{Q}_p}, \prod_{\tau\in\Phi} GL(V)) \simeq H^1(W_{F_p^+}, GL(V))$$

nous donne un L-paramètre de U_{F_p/F_p^+} :

$$\widetilde{\varphi}_{F_p^+} : W_{F_p^+} \longrightarrow GL(V) \rtimes W_{F_p^+} = {}^L U_{F_p/F_p^+}.$$

D'après la proposition 2.2.25, le L-paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ est un paquet cuspidal. Comme dans la section précédent, pour chaque $\kappa \in \{\pm 1\}$ et $\chi_\kappa \in \mathcal{Z}^\kappa_{F_p}$, il y a un morphisme de changement de base (cf [Mok], p.9)

$$\begin{aligned} \eta_{\chi_\kappa,*} : \Phi(U_{F_p/F_p^+}) &\longrightarrow \Phi(GL_{F_p}(n)) \\ \phi &\longmapsto \eta_{\chi_\kappa} \circ \phi \end{aligned}$$

de plus, si $\kappa = 1$ et $\chi_\kappa = 1$ alors $\eta_{\chi_\kappa} \circ \phi$ est juste la restriction de ϕ sur $L_{F_p} = W_{F_p} \times SU(2)$.

5. Puisque b est basique et n étant impair, on a $G(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$

La restriction de $\widetilde{\varphi}_{F_p^+}$ sur W_{F_p} se décompose donc en une somme de L-paramètres discrets simples de groupes linéaires généraux $\widetilde{\varphi}_{F_p^+|F_p} = \widetilde{\varphi}_1^{n_1} \oplus \cdots \oplus \widetilde{\varphi}_r^{n_r}$. On a alors une décomposition de $W_{F_p^+|F_p}$-représentation $V = \bigoplus_{i=1}^r V_i$ où V_i correspond à $\widetilde{\varphi}_i^{n_i}$.

Cela implique une décomposition

$$r_\mu \circ \widetilde{\varphi}_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^{r} r_{\mu_i} \circ \widetilde{\varphi}_i^{n_i}.$$

où $\mu_i = (1, n_i - 1), (0, n_i), \cdots, (0, n_i)$.

D'autre part, on a

$$S_{\widetilde{\varphi}} \simeq S_{\widetilde{\varphi}_{F_p^+}} \approxeq \prod_{i=1}^{r} O(1, \mathbb{C}) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \approxeq S^{\natural}_{\widetilde{\varphi}_{F_p^+}}.$$

Définition 2.3.1. *Pour $1 \leq i \leq r$, on définit un caractère τ_i de $S_{\widetilde{\varphi}}$ par la formule*

$$\tau_i(\underbrace{1, \cdots, 1}_{j}, -1, 1, \cdots, 1) = \begin{cases} -1 & si \quad i = j \\ 1 & si \quad 1 \leq i \neq j \leq r \end{cases}$$

L'action de $S_{\widetilde{\varphi}}$ sur V_i se factorise par le caractère τ_i, on en déduit que $r_{\mu_i} \circ \widetilde{\varphi}_i^{n_i} = \mathrm{Hom}_{S_{\widetilde{\varphi}}}\left(\tau_i, r_\mu \circ \widetilde{\varphi}_{F_p}\right)$ et donc

$$r_\mu \circ \widetilde{\varphi}_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_{S_{\widetilde{\varphi}}}(\tau_i, r_\mu \circ \widetilde{\varphi}_{F_p}).$$

Au niveau du groupe de similitudes unitaires, puisque $\mathbb{C}^\times$ est abélien, on a une décomposition de W_{F_p}-module

$$r_\mu \circ \varphi_{F_p} = \bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{Hom}_{S_\varphi}(\tau_i, r_\mu \circ \varphi_{F_p}) = \bigoplus_{i=1}^{r} r_{\mu_i} \circ \varphi_{i,F_p}^{n_i}.$$

2.3.2 Cohomologie d'intersection des variétés de Shimura d'après [Mo10]

Dans ce paragraphe, on va utiliser des résultats dans [Mo10]. La lettre G désigne un groupe des similitudes unitaires en n variables associé à une forme hermitienne définie sur une extension quadratique $\mathcal{K}/\mathbb{Q}$.

Pour tout $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un sous groupe compact ouvert suffisamment petit, on a une variété Sh_K. Lorsque G n'est pas anisotrope modulo son centre, Sh_K n'est pas compacte. Dans ce cas, on a la compactification minimale (ou Satake-Baily-Borel) de Sh_K

$$j : \mathrm{Sh}_K \longrightarrow \mathrm{Sh}_K^*$$

telle que Sh_K^* est une variété projective normale dont Sh_K en est un ouvert dense. En général Sh_K^* n'est pas lisse et on utilise la cohomologie d'intersection telle qu'elle est étudiée notamment dans [Mo10].

Rappelons les relations entre la cohomologie étale (à support compact ou non), la cohomologie de L^2 et la cohomologie d'intersection.

Comme auparavant, pour ξ une représentation algébrique irréductible de dimension finie de G, on peut définir un système local $\mathcal{L}_\xi$ sur Sh_K ainsi qu'un faisceau d'intersection $\mathcal{IC}_\xi$ sur Sh_K^*. On dispose donc des groupes de cohomologie étale $H_c^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\xi)$, de L^2-cohomologie $H_{(2)}^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{L}_\xi)$ et de cohomologie d'intersection $IH^i(\mathrm{Sh}_K, \mathcal{IC}_\xi)$.

Il y a un diagramme commutatif entre ces groupes de cohomologie.

$$\begin{tikzcd} H_c^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \arrow[r, "(1)"] \arrow[dr, "(2)"'] & IH^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{IC}_\xi) \arrow[d, "\approx"] \\ & H_{(2)}^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \end{tikzcd}$$

Ces morphismes sont $G(\mathbb{A}_f)$-équivariants et le morphisme (1) est de plus Γ-équivariant (où F est le corps de définition et $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$). D'après la conjecture de Zucker (démontrée par Looijenga [Lo], Looijenga-Rapoport [LoR] et Saper-Stein [SS]), le morphisme vertical est en fait un isomorphisme.

On exploitera le morphisme (2) afin de comparer $H_c^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$ et $IH^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)$.

Proposition 2.3.2. *Supposons maintenant ξ régulier. Soit $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$ une représentation automorphe cuspidale de $G(\mathbb{A})$ qui est ξ-cohomologique alors $H^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$ est concentré en degré moitié et*

$$H_c^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx H_{(2)}^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f].$$

Puisque le morphisme (1) *est Γ-équivariant, on en déduit qu'il y a un isomorphisme Γ-équivariant*

$$H_c^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx IH^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)[\Pi_f]$$

où d est la dimension de la variété de Shimura.

Dans [MT] proposition 1, Mokrane et Tilouine ont montré ce résultat pour les groupes des similitudes symplectiques mais leur démonstration s'adapte au cas des groupes des similitudes unitaires. On va rappeler brièvement leur argument.

Démonstration. Tout d'abord l'inclusion d'espaces

$$\mathcal{C}_{cusp}^\infty(G_\mathbb{Q}\ G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_c^\infty(G_\mathbb{Q}\ G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}_{(2)}^\infty(G_\mathbb{Q}\ G(\mathbb{A}), \mathbb{C}) \subset \mathcal{C}^\infty(G_\mathbb{Q}\ G(\mathbb{A}), \mathbb{C})$$

où $\mathcal{C}_{cusp}^\infty = \mathcal{C}_c^\infty \bigcap L_0^2$ et $\mathcal{C}_{(2)}^\infty = \mathcal{C}^\infty \bigcap L^2$ implique une application

$$H_{cusp}^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H_c^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H_{(2)}^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) \longrightarrow H^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)$$

qui est une injection d'après [Bo74].

D'autre part on a

$$H_{cusp}^\bullet(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \bigoplus_\pi \pi_f \otimes H^\bullet(\mathrm{Lie}\, G(\mathbb{R}), K_\infty, \pi_\infty^{K_\infty} \otimes \mathcal{L}_\xi)$$

où $\pi = \pi_f \otimes \pi_\infty$ varie dans l'ensemble de classes d'isomorphisme de représentations cuspidales.

Et de plus, on a

$$H^\bullet_{(2)}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi) = \bigoplus_\pi \pi_f \otimes H^\bullet(\mathrm{Lie}\, G(\mathbb{R}), K_\infty, \pi_\infty^{K_\infty} \otimes \mathcal{L}_\xi)$$

où π varie dans le spectre discret de $L^2(Z_{\mathbb{A}} G_{\mathbb{Q}}\ G_{\mathbb{A}}, \omega)$ et ω est le caractère central de $\xi^\vee$.

Comme ξ est régulier alors π_∞ est une série discrète de caractère infinitésimal ξ, en particulier π_∞ est tempérée. La représentation automorphe π apparait dans la partie discrète et est tempérée en une place : π est donc une représentation cuspidale. On en déduit l'égalité

$$H^d_{cusp}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\pi_f] \approx IH^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)[\pi_f].$$

En particulier, pour la représentation cuspidale $\Pi = \Pi_\infty \otimes \Pi_f$, on a l'égalité

$$H^d_{cusp}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx H^d_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)[\Pi_f] \approx IH^d(\mathrm{Sh}, \mathcal{IC}_\xi)[\Pi_f].$$

□

Notation 2.3.3. Pour $n_1, \cdots, n_r \in \mathbb{N}$, notons

$$H = G\big(U^*(n_1)\times\cdots\times U^*(n_r)\big) = \big\{(g_1, \cdots, g_r) \in G^*(n_1)\times\cdots\times G^*(n_r) | c(g_1) = \cdots = c(g_r)\big\}.$$

où $G^*(n_i)$ désigne le groupe des similitudes unitaires quasi-déployé en n_i variables. De plus on a

$$\widehat{H} = \mathbb{C}^\times \times GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times \cdots \times GL_{n_r}(\mathbb{C}).$$

Tout d'abord, on voudrait donner une description des triplets endoscopiques elliptiques (H_1, s, η) de H au sens de [Kot84] 7.3, 7.4.

Proposition 2.3.4. *([Mo10] prop 2.3.1) Pour $i \in \{1, \cdots, r\}$, soient $n_i^+, n_i^- \in \mathbb{N}$ tels que $n_i = n_i^+ + n_i^-$. Supposons que $n_1^- + \cdots + n_r^-$ est pair. Posons*

$$s = \big(1, \mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{n_1^+}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n_1^-}), \cdots, \mathrm{diag}(\underbrace{1, \cdots, 1}_{n_r^+}, \underbrace{-1, \cdots, -1}_{n_r^-})\big) \in \widehat{H}$$

$$H_1 = G\big(U^*(n_1^+) \times U^*(n_1^-) \times \cdots \times U^*(n_r^+) \times U^*(n_r^-)\big)$$

et définit

$$\eta : \widehat{H}_1 = \mathbb{C}^\times \times GL_{n_1^+}(\mathbb{C}) \times GL_{n_1^-}(\mathbb{C}) \times\cdots\times GL_{n_r^+}(\mathbb{C}) \times GL_{n_r^-}(\mathbb{C}) \longrightarrow \widehat{H} = \mathbb{C}^\times \times GL_{n_1}(\mathbb{C}) \times\cdots\times GL_{n_r}(\mathbb{C})$$

par la formule

$$\eta\big((\lambda, g_1^+, g_1^-, \cdots, g_r^+, g_r^-)\big) = \big(\lambda, \mathrm{diag}(g_1^+, g_1^-), \cdots, \mathrm{diag}(g_r^+, g_r^-)\big).$$

Alors $\big(H_1, s, \eta\big)$ est un triplet endoscopique elliptique pour H. De plus, les triplets endoscopiques elliptiques de H définis par $\big((n_1^+, n_1^-), \cdots, (n_r^+, n_r^-)\big)$ et $\big((m_1^+, m_1^-), \cdots, (m_r^+, m_r^-)\big)$ sont isomorphes si et seulement si pour tout $i \in \{1, \cdots, r\}$, $(n_i^+, n_i^-) = (m_i^+, m_i^-)$ ou $(n_i^+, n_i^-) = (m_i^-, m_i^+)$. Inversement, tout triplet endoscopique elliptique pour H est isomorphe à un des triplets définis ci-dessus.

Définition 2.3.5. *Posons $\mathcal{E}^0(G)$ l'ensemble des triplets endoscopiques elliptiques (H, s, η_0) pour G tels que H n'est pas une forme intérieure de G. Pour tout $(H, s, \eta_0) \in \mathcal{E}^0(G)$, fixons un L-morphisme $\eta : {}^L H \longrightarrow {}^L G$ étendant η_0. On définit de même l'ensemble $\mathcal{E}^0(H)$ pour $H = G\big(U^*(n_1) \times \cdots U^*(n_r)\big)$. Posons $\mathcal{F}_G$ l'ensemble des suites $(e_1, \cdots, e_r)$ avec $r \in \mathbb{N}^*$ où $e_1 = (H_1, s_1, \eta_{1,0}) \in \mathcal{E}^0(G)$ et pour $i \in \{2, \cdots, r\}$, $e_i = (H_i, s_i, \eta_{i,0}) \in \mathcal{E}^0(H_{i-1})$.*

Finalement, on pose

$$\eta_{\underline{e}} = \eta_1 \circ \cdots \circ \eta_r : {}^L H_{\underline{e}} \longrightarrow {}^L G$$

le morphisme de L-groupes correspondant.

Considérons $(\underline{e}) = (e_1, \cdots, e_r) \in \mathcal{F}_G$. Supposons ensuite que $(e_1) = (H_1, s_1, \eta_1)$ est le triplet endoscopique elliptique défini par un couple (n^+, n^-) avec n^- impair. On écrit

$$H_{\underline{e}} = G\Big(U^*(n_1^+) \times \cdots \times U^*(n_r^+) \times U^*(n_1^-) \times \cdots \times U^*(n_s^-)\Big)$$

où l'identification est faite de sorte que $\eta_2 \circ \cdots \circ \eta_r$ renvoie $\widehat{U^*(n_1^+)} \times \cdots \times \widehat{U^*(n_r^+)}$ (resp. $\widehat{U^*(n_1^-)} \times \cdots \times \widehat{U^*(n_s^-)}$) au $\widehat{U^*(n^+)}$ (resp. $\widehat{U^*(n^-)}$).

Maintenant pour $p_1^+, \cdots, p_r^+, p_1^-, \cdots, p_s^- \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p_i^+ \leq n_i^+$ et $1 \leq p_i^- \leq n_i^-$, on définit un cocaractère de $H_{\underline{e}}$ par la formule

$$\mu = (\mu_{p_1^+} \times \cdots \times \mu_{p_r^+} \times \mu_{p_1^-} \times \cdots \times \mu_{p_s^-}) : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \longrightarrow H_{\underline{e},\mathbb{C}}.$$

où $\mu_{p_i^*}$ est le cocaractère de signature $(p_i^*, n_i^* - p_i^*)$.

Définition 2.3.6. *Supposons G de signature $(p, n-p)$ à l'infini. Pour chaque $(\underline{e})$ on note $M_{\underline{e}}$ l'ensemble des cocaractères $\mu = \mu_{p_1^+, \cdots, p_r^+, p_1^-, \cdots, p_s^-}$ de sorte que $p = p_1^+ + \cdots + p_r^+ + p_1^- + \cdots + p_s^-$. Pour un tel cocaractère on note également $s(\mu) = (-1)^{p_1^- + \cdots + p_s^-}$.*

Pour chaque $(\underline{e})$, on peut définir les constantes $l(\underline{e})$, $\iota(\underline{e})$ ainsi que $\iota'(\underline{e})$. Ces constantes apparaîtront dans le théorème 2.3.8 ci-dessus mais pour notre but, nous n'aurons pas besoin de les calculer explicitement. Pour une définition précise, le lecteur pourra consulter [Mo10] - p.108.

Définition 2.3.7. *Soit $\pi_f = \bigotimes_p' \pi_p$ une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_f)$ de sorte que $\pi_f^K \neq 0$ pour $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un niveau et soit $\underline{e} \in \mathcal{F}_G$. Notons $R_{\underline{e}}(\pi_f)$ pour l'ensemble des classes d'équivalences de représentations irréductibles $\pi_{\underline{e},f} = \bigotimes_p' \pi_{\underline{e},f}$ de $H_{\underline{e}}(\mathbb{A}_f)$ telles que pour presque tout p où π_f et $\pi_{\underline{e},p}$ sont non ramifiées, le morphisme $\eta_{\underline{e}} : {}^L H_{\underline{e}} \longrightarrow {}^L G$ envoie un paramètre de Langlands de $\pi_{\underline{e},p}$ à celui de π_p.*

Étant donné $(\underline{e})$ et $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{Q}_v))$, on note $f^{\underline{e}} = (((f^{H_1})^{H_2}) \cdots)^{H_r} \in C_c^\infty(H_{\underline{e}}(\mathbb{Q}_v))$ son transfert endoscopique. Si $f \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ on notera de même $f^{\underline{e}} \in C_c^\infty(H_{\underline{e}}(\mathbb{A}_f))$.

Soient ξ une représentation algébrique de G ainsi que $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ un niveau. Posons $\mathcal{H}_K = \mathcal{H}_K(G(\mathbb{A}_f), K)$. Considérons les groupes de cohomologie suivant ($i \geq 0$)

$$W_i = H^i(\mathrm{Sh}_K^*, \mathcal{IC}_\xi).$$

Ce sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels de dimension finie qui possèdent une action de $\mathcal{H}_K \times Gal(\overline{\mathbb{Q}}, E)$ où E est le corps reflex de la variété de Shimura. Comme W_i s'annule si i assez grand, on définit alors

$$W = \sum_{i \geq 0} (-1)^i W_i$$

un objet dans le groupe de Grothendieck des représentations de $\mathcal{H}_K \times Gal(\overline{\mathbb{Q}}, E)$. On a une décomposition isotypique de W comme $\mathcal{H}_K$-module

$$W = \sum_{\pi_f} W(\pi_f) \otimes \pi_f^K,$$

où la somme est prise sur l'ensemble de classes d'isomorphismes des représentations irréductibles π_f de $G(\mathbb{A}_f)$ telle que $\pi_f^K \neq 0$ et où $W(\pi_f)$ est une $\mathbb{C}$-représentation virtuelle de dimension finie de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}, E)$.

Pour ξ une représentation algébrique fixée de G et pour π_f une représentation irréductible de $G(\mathbb{A}_f)$, on peut définir une constante $c_G(\pi_f)$ laquelle est liée aux multiplicités des représentations automorphes ($c_G(\pi_f)$ dépend éventuellement de ξ). De même, il y a une constante $c_{\underline{e}}(\pi_{\underline{e},f})$ associée à $\pi_{\underline{e},f}$ dont la définition est liée aux multiplicités des représentations automorphes.

Considérons un nombre premier p ainsi que $\mathcal{P}$ une place de E au-dessus de p. Notons $\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}$ un relèvement du Frobenius arithmétique. Le théorème suivant, dû à Sophie Morel, nous permet de calculer la trace de $\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}$ sur $W(\pi_f)$ lorsque p est assez grand.

Théorème 2.3.8. *(Théorème 7.2.2 de [Mo10]) Soit π_f une représentation irréductible admissible de $G(\mathbb{A}_f)$ telle que $\pi_f^K \neq 0$. Il existe alors une fonction $f^\infty \in C_c^\infty(G(\mathbb{A}_f))$ de sorte que pour presque tout nombre p premier et pour tout $m \in \mathbb{Z}$,*

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}^m, W(\pi_f)) =& (N\mathcal{P})^{-\frac{m(n-1)}{2}} c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) \,\mathrm{Tr}(r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p}(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) \\ &+ (N\mathcal{P})^{md/2} \sum_{\underline{e} \in \mathcal{F}_G} (-1)^{l(\underline{e})} \iota(\underline{e}) \sum_{\pi_{\underline{e},f} \in R_{\underline{e}}(\pi_f)} c_{\underline{e}}(\pi_{\underline{e},f}) \,\mathrm{Tr}(\pi_{\underline{e},f})((f^\infty)^{\underline{e}}) \\ & \sum_{\mu \in M_{\underline{e}}} (1 - (-1)^{s(\mu)} \cdot \frac{\iota'(\underline{e})}{\iota(\underline{e})}) \,\mathrm{Tr}(r_\mu \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}}(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}^m)) \end{aligned} \tag{$\star$}$$

où la somme est prise pour $\pi_{\underline{e},f}$ telle que $\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}$ est non ramifiée.

Remarque 2.3.9. Les nombres premiers p tels que la formule ($\star$) du théorème 2.3.8 est vérifiée, sont ceux pour lesquels il existe un ensemble $p \notin T$ avec $f = h_T g^T$ où

- $T \supset \{q \mid G_q$ est ramifié, K_q n'est pas maximal$\}$.
- $h \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f), K)$ est une fonction de la forme $h = h_T 1_{K^T}$ satisfaisant les propriétés décrites dans les lignes 14, 15, p.111 de [Mo10] (i.e. h sépare les représentations dans R' de loc. cit.).
- $g^T \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^T), K^T)$ est une fonction satisfaisant les propriétés décrites dans les lignes $25-28$, p.111 de loc. cit. (i.e. g^T sépare les représentations dans $R'_{\underline{e}}$ de loc.cit.).
- $g_p^T = 1_{G(\mathbb{Z}_p)}$.

2.3.3 Détermination de $W(\pi_f)_\mathcal{P}$ dans un cas particulier

Le but de ce paragraphe est de montrer un corollaire du théorème 2.3.8.

Lemme 2.3.10. *Soit p un nombre premier tel que K_p est maximal et G, π sont non ramifiés en p, alors il existe f^∞ telle que la formule $(\star)$ est vraie pour p.*

Démonstration. Tout d'abord, considérons l'ensemble R' des représentations irréductibles admissibles π'_f de $G(\mathbb{A}_f)$ satisfaisant les conditions suivantes

- $\pi'_f \not\cong \pi_f$,
- $(\pi'_f)^K \neq 0$,
- $W_\lambda(\pi'_f) \neq 0$ ou $c_G(\pi'_f) \neq 0$.

Comme R' est fini et π_p est non ramifiée, on peut choisir $h \in H(G(\mathbb{A}_f, K))$ telle que $h_p = 1_{G(\mathbb{Z}_p)}$ et

- $\mathrm{Tr}(\pi_f(h)) = \mathrm{Tr}(\pi_f(1_K))$.
- $\mathrm{Tr}(\pi'_f(h)) = 0$ pour $\pi'_f \in R'$.

Maintenant, il existe un ensemble T_0 de nombres premiers ne contenant pas p mais qui satisfait toutes les conditions décrites dans lignes $16-20$ p.111 de [Mo10].

Ensuite, pour chaque $\underline{e} \in \mathcal{F}_G$, on définit un ensemble $R'_{\underline{e}}$ comme dans le paragraphe 5, page 111 de loc. cit. Posons $T = T_0 \cup \{p\}$, le même argument que dans la page 111 de loc.cit. montre qu'il existe une fonction $g^T \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}_f^T), K^T)$ qui sépare les représentations dans $R'_{\underline{e}}$.

Considérons $f^\infty = h_{T_0} g^{T_0}$ où $g^{T_0} = 1_{G(\mathbb{Z}_p)} g^T$, on voit que T_0 et f^∞ satisfont les trois premières propriétés dans la remarque 2.3.9 ainsi que $g_p^{T_0} = 1_{G_p}$. On en déduit que la formule $(\star)$ est vérifiée pour f^∞ et p. $\square$

Corollaire 2.3.11. Supposons que n impair et G quasi-déployé en toutes les places finies et de signature $(1, n-1)$ à l'infini. Considérons une représentation automorphe $\pi = \pi_\infty \bigotimes'_p \pi_p$ de $G(\mathbb{A})$ satisfaisant les conditions suivantes

(i) Le L-paramètre de π est de la forme $\Psi = (\Psi^n, \widetilde{\Psi})$ où $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ tel que $\Psi_i^{n_i}$ sont des paramètres globaux de dimension n_i correspondant à des représentations cuspidales de $GL_{n_i}(\mathbb{A}_\mathcal{K})$ (avec $i = 1, 2$).

(ii) π_∞ est une série discrète de poids réguliers.

(iii) Il existe une place décomposée q de sorte que π_q est non ramifiée et son L-paramètre local ϕ_q est de la forme $\phi_q^n = \chi_1 \oplus \chi_2 \oplus \cdots \oplus \chi_n$ où les χ_j sont deux à deux distincts.

Notons $\rho := W(\pi_f)$ la représentation de $Gal(\overline{\mathbb{Q}}, E)$ associée à π_f dans la cohomologie de la variété de Shimura correspondant à G. Si $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i} = n_i$ ($i = 1$ ou $i = 2$) alors pour tout nombre premier p et toute place $\mathcal{P}$ de E au-dessus de p, on a

$$\rho_{\mathcal{P}} = (r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p)_{/W_{\mathcal{P}}} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

où $\mu_i = (1, n_i - 1)$ et $W_{\mathcal{P}}$ est le groupe de Weil de $E_{\mathcal{P}}$.

Démonstration. On applique le théorème 2.3.8 pour π_f. Choisissons tout d'abord un sous groupe compact suffisamment petit K de $G(\mathbb{A}_f)$ de sorte que $\pi_f^K \neq 0$, en particulier on peut choisir K tel que $K_q = G(\mathbb{Z}_p)$ car π_q est non ramifiée.

Comme le L-paramètre global Ψ de π satisfait $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ l'ensemble de $\underline{e} \in \mathcal{F}_G$ tel que $R_{\underline{e}}(\pi_f)$ soit non nul contient un seul élément $\underline{e} = (e_1)$ où e_1 est le triplet endoscopique correspond à $G(U^*(n_1) \times U^*(n_2))$.

Par construction de $R_{\underline{e}}(\pi_f)$, pour un nombre premier p on a $\eta_{simple} \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}} = \varphi_{(\pi_f)_p}$ et de plus le changement de base quadratique de $\varphi_{(\pi_f)_p}$ s'écrit $\varphi^n_{(\pi_f)_p} = (\Psi_1^{n_1})_p \oplus (\Psi_2^{n_2})_p$. D'autre part, la signature à l'infini μ_G est $(1, n-1)$ on voit alors que l'ensemble $M_{\underline{e}}$ contient exactement deux éléments $\mu_1 = (1, n_1 - 1) \times (0, n_2)$ et $\mu_2 = (0, n_1) \times (1, n_2 - 1)$. On en déduit que

$$r_\mu \circ \varphi_{\pi_{\underline{e},p} \otimes \chi_{\underline{e},p}} = \begin{cases} r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p & \text{si} \quad \mu = (1, n_1 - 1) \times (0, n_2) \\ r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p & \text{si} \quad \mu = (0, n_1) \times (1, n_2 - 1) \end{cases}$$

où $\mu_1 = (1, n_1 - 1)$ et $\mu_2 = (1, n_2 - 1)$.

D'après la description de la représentation de plus haut poids de GL_n, on a l'identité suivante :

$$r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p} = r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p \oplus r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p.$$

D'autre part, on a

$$(N\mathcal{P})^{-\frac{m(n-1)}{2}} \operatorname{Tr}(r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p}(\mathrm{Fr}^m_{\mathcal{P}})) = \operatorname{Tr}(|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_G} \circ \varphi_{\pi_p}(\mathrm{Fr}^m_{\mathcal{P}}))).$$

Finalement le théorème 2.3.8 induit l'identité suivante pour presque tout p où π_p est non ramifiée.

$$\operatorname{Tr}(\mathrm{Fr}^m_{\mathcal{P}}, W(\pi_f)) = \alpha_p \cdot \operatorname{Tr}(|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_p(\mathrm{Fr}^m_{\mathcal{P}})) + \beta_p \cdot \operatorname{Tr}(|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_p(\mathrm{Fr}^m_{\mathcal{P}})). \tag{2.10}$$

Montrons ensuite que pour p_1 et p_2 deux nombres premiers tels que π_{p_1} et π_{p_2} sont non ramifiées, on a $\alpha_{p_1} = \alpha_{p_2}$ et $\beta_{p_1} = \beta_{p_2}$.

En effet, pour notre représentation π_f, on a

$$\alpha_{p_i} = c_G(\pi_f) \dim(\pi_f^K) + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot (1 - (-1)^{s(\overline{\mu}_1)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)}) \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \operatorname{Tr}(\pi_{e_1,f})(((f^\infty)^{e_1}).$$

où la somme est prise pour $\pi_{e_1,f}$ telle que $\pi_{e_1,p_i} \otimes \chi_{e_1,p_i}$ est non ramifiée.

Or lorsque $\pi_{e_1,p_i} \otimes \chi_{e_1,p_i}$ est ramifiée, $\mathrm{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1})$ s'annule, on peut récrire la formule calculant α_{p_i} sous forme

$$\alpha_{p_i} = c_G(\pi_f)\dim(\pi_f^K) + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot (1-(-1)^{s(\overline{\mu}_1)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)}) \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \,\mathrm{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1})$$

où la somme est prise pour *toute* $\pi_{e_1,f}$. En particulier la formule calculant α_{p_i} ne dépend pas de p_i. On en déduit que $\alpha_{p_1} = \alpha_{p_2}$.

Par le même argument, on a $\beta_{p_1} = \beta_{p_2}$ en utilisant

$$\beta_{p_i} = c_G(\pi_f)\dim(\pi_f^K) + (-1)^{l(e_1)} \cdot \iota_{(e_1)} \cdot (1-(-1)^{s(\overline{\mu}_2)} \cdot \frac{\iota'(e_1)}{\iota(e_1)}) \sum_{\pi_{e_1,f} \in R_{e_1}(\pi_f)} c_{e_1}(\pi_{e_1,f}) \,\mathrm{Tr}(\pi_{e_1,f})((f^\infty)^{e_1}).$$

Considérons maintenant le premier q décomposé. Puisque π_∞ est une série discrète de plus haut poids régulier, la cohomologie de variété de Shimura se concentre en degré moitié, en particulier $W(\pi_f)$ est une vraie représentation. D'après le lemme précédent appliqué en q, la condition (iii) implique que $r_{\mu_1} \circ (\Psi_1^{n_1})_q \oplus r_{\mu_2} \circ (\Psi_2^{n_2})_q$ est sans multiplicité, ce qui implique que α_q et β_q sont de même signes. On peut supposer qu'ils sont positifs.

Supposons que α_q et β_q sont *strictement* positifs. Cela implique donc que $\dim \rho \geq \dim \Psi_1^{n_1} + \dim \Psi_2^{n_2} = n$ ce qui contredit l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i}$. Il y a alors exactement un coefficient non nul.

Maintenant, le fait que n est impair couplé avec l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i^{n_i}$ implique alors que $\beta = 0$ si $i = 1$ et $\alpha = 0$ si $i = 2$. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Tr}(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}^m, W(\pi_f)) = \mathrm{Tr}(|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} \otimes r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p(\mathrm{Fr}_{\mathcal{P}}^m)).$$

(ici $i = 1$ si $\dim \rho = \dim \Psi_1^{n_1}$ et $i = 2$ si $\dim \rho = \dim \Psi_2^{n_2}$).

Comme l'égalité ci-dessus est vraie pour presque toute place $\mathcal{P}$ de E, le théorème de densité de Chebotarev implique que

$$\rho_{\mathcal{P}} = (r_{\mu_i} \circ (\Psi_i^{n_i})_p)_{/W_{\mathcal{P}}} \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$$

pour toute place $\mathcal{P}$. □

Remarque 2.3.12. Le corollaire est encore valable lorsque Ψ est un paramètre simple générique (ce qui équivaut à dire que $\dim \Psi_1^{n_1} = 0$ ou $\dim \Psi_2^{n_2} = 0$).

2.3.4 Preuve du théorème principal

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème principal de l'introduction. D'après théorème 2.1.30, on a une suite spectrale reliant la partie supercuspidale des espaces de Rapoport-Zink à celle de la strate basique $\mathrm{Sh}_\infty(basic)$ des variétés de Shimura Sh_∞ du 2.1.2 laquelle est déterminée par le corollaire 2.3.11. Afin d'identifier les σ_{π_p,π'_p}

avec les $r_\mu \circ \varphi_{i,F_p}$, nous avons besoin d'une part de l'hypothèse $\dim \rho = \dim \Psi_i$ dans 2.3.11 et d'autre part de calculer $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$. Dans les deux cas, ce calcul repose sur un problème de comptage de caractères du groupe centralisateur des L-paramètres à l'infini. Plus précisément, la preuve est découpée en 4 étapes.

- Dans la première étape, on montre le point (i) et (ii) du théorème et on obtient des contraintes sur la dimension de σ_{π_p,π'_p}.
- Dans la deuxième étape, on établit une relation entre σ_{π_p,π'_p} et une représentation galoisienne bien choisie de la variété de Shimura puis on ramène le problème du calcul de la dimension de la représentation au problème de comptage des caractères du groupe centralisateur à l'infini.
- Ensuite, on utilise des contraintes sur la dimension de σ_{π_p,π'_p} obtenues avant pour calculer les caractères du groupe centralisateur à l'infini.
- Enfin on utilise le corollaire 2.3.11 afin de calculer σ_{π_p,π'_p}.

Rappelons tout d'abord la construction des données globales à partir des données locales.

Proposition 2.3.13. *([Far04]) Soit une donnée locale $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p} = (F_p, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, \mu, b)$ de type PEL non ramifiée simple sur une extension finie de $\mathbb{Q}_p$. Supposons que $[F_p/\mathbb{Q}_p] = 2d$ n'est pas un multiple de 4, alors :*

- *il existe un corps CM de la forme $\overset{\bullet}{F} = K\mathcal{K}$ avec $\mathcal{K}$ un corps quadratique imaginaire de sorte que p reste inerte dans $\overset{\bullet}{F}$ et $\overset{\bullet}{F}_p = F_p$.*
- *il existe une donnée globale $\mathcal{D} = (\overset{\bullet}{F}, B, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, h, \overset{\bullet}{G})$ de type PEL, un plongement $\nu : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ tels que via ν, $\mathcal{D}$ induise la donnée locale $\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}$.*

De plus

- *Pour tout n, on peut imposer que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division qui est en toute place finie soit déployée, soit une algèbre à division.*
- *Pour n impair ou $n \equiv 2$ modulo 4, on peut que que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies.*

Démonstration. On raisonne comme dans la proposition 10.1.3 de [Far04]. Grâce à la proposition 10.1.1 dans loc. cit on peut supposer que $\mathrm{End}_B(V)$ satisfasse les conditions annoncées ci-dessus. □

Lemme 2.3.14. *Soit Π_p une représentation supercuspidale de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$. Alors pour tout $p > 0$ on a*

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right) = 0$$

Démonstration. On pose $\Delta = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Z})$. Comme b est basique, $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ est une forme intérieure de $G(\mathbb{Q}_p)$, tout $\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}$ se transfert à $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ en un $\tilde{\chi} \in X^*(\mathrm{J}_b)_{\mathbb{Q}_p}$.

Notons $\mathrm{J}_b^1 = \bigcap_{\chi \in X^*(G)_{\mathbb{Q}_p}} ker|\tilde{\chi}|$ où $|\tilde{\chi}| : \mathrm{J}_b \longrightarrow, x \longmapsto v_p(\tilde{\chi}(x))$ en particulier J_b^1 a un centre compact.

Il y a une application $\pi_2 : \mathcal{M} \longrightarrow \Delta$ qui est essentiellement la hauteur de la rigidification ρ ([RZ96], 3.52). On note encore $\Delta' \subset \Delta$ l'image de π_2. On a donc une décomposition : $\mathcal{M}_{K_p} = \coprod_{i\in\Delta'} \mathcal{M}^{(i)}_{K_p}$ où $\mathcal{M}^{(i)}_{K_p} = \pi_2^{-1}(i)$. On en déduit

$$H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)) = \sum_{\bar{i}\in\Delta'/\,\mathrm{J}_b} c - \mathrm{Ind}^{\mathrm{J}_b}_{\mathrm{J}^1_b}(H^q_c(\mathcal{M}^{(i)}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1))).$$

Maintenant, en vertu de la dualité de Frobenius, on dispose d'un isomorphisme de foncteurs :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \bullet\right) \simeq \sum_{\bar{i}\in\Delta'/\,\mathrm{J}_b} \mathrm{Hom}_{\mathrm{J}^1_b}\left(H^q_c(\mathcal{M}^{(i)}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \mathrm{Res}^{\mathrm{J}_b}_{\mathrm{J}^1_b}\bullet\right).$$

Il en résulte des isomorphismes :

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right) \simeq \sum_{\bar{i}\in\Delta'/\,\mathrm{J}_b} \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}^1_b}\left(H^q_c(\mathcal{M}^{(i)}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \mathrm{Res}^{\mathrm{J}_b}_{\mathrm{J}^1_b}\Pi_p\right)$$

D'autre part la représentation Π_p est cuspidale alors $\mathrm{Res}^{\mathrm{J}_b}_{\mathrm{J}^1_b}\Pi_p$ est une représentation finie (les coefficients matriciels sont des fonctions à support compact) alors $\mathrm{Res}^{\mathrm{J}_b}_{\mathrm{J}^1_b}\Pi_p$ est un objet projectif dans la catégorie des représentations lisse de J^1_b. On obtient alors que pour tout $p > 0$

$$\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right) = 0.$$

$\square$

Démonstration du théorème principal. Soit $\mathcal{D} = (\dot{F}, B, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, h, \dot{G})$ une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale de sorte que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies comme dans la proposition 2.3.13. Soit Sh la variété de Shimura associée, le groupe $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ est le groupe de similitudes unitaires quasi déployé en n variables. En particulier Sh est de signature $(1, n-1)$ à l'infini.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport-Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et $I := (I^\phi)$ le groupe réductif associé. On sait que $I(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I(\mathbb{A}^p_f) = \dot{G}(\mathbb{A}^p_f)$. D'après la proposition 2.1.30 il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ équivariante :

$$E^{pq}_2 = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I)\\ \Pi_\infty=\check{\xi}}} \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp}\right) \otimes (\Pi^{\infty,p}) \Longrightarrow \left(H^{p+q}_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp} \tag{2.11}$$

où on a noté $\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right) := \varinjlim_{K} \mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right)$ pour alléger les notations et où p-cusp signifie que la composante en p est supercuspidale.

On choisit une représentation ξ de dimension finie de $I^{\phi}(\mathbb{C})$ qui est de poids régulier et suffisamment régulier au sens de 2.2.12. Soit $\Pi_{(\xi)}(\overset{\bullet}{G}(\mathbb{R}))$ le L-paquet de séries discrètes de $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{R})$ cohomologiques pour ξ.

Considérons $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \times SU(2) \longrightarrow {}^L G$ un paramètre discret qui est trivial sur $SU(2)$. D'après la proposition 2.2.25, le paquet $\Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales. On peut exprimer la restriction de φ sur W_{F_p} sous forme

$$\varphi_{F_p} = \varphi_1^{n_1} \oplus \varphi_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus \varphi_r^{n_r}.$$

où les $\varphi_i^{n_i}$ sont des paramètres simples de $GL_{n_i}(F_p)$.

Puisqu'on utilisera dans la suite le théorème de classification des représentations automorphes pour I et $\overset{\bullet}{G}$ (c.f 2.2.22), il faut étendre I et $\overset{\bullet}{G}$ en formes intérieures pures. Pour ce faire, utilisons la proposition 2.2.2.

Comme $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{R})$ est de signature $(1, n-1)$, son invariance est alors $a_{\infty}^{G} = \left[\frac{n}{2}\right] + (n-1) \pmod 2$. De même $I(\mathbb{R})$ est de signature $(0, n)$, son invariance est $a_{\infty}^{I} = \left[\frac{n}{2}\right] + n \pmod 2$.

De plus pour $v \neq p$, $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{Q}_v)$ est quasi-déployé. Or n étant impair, il y a donc deux manières d'étendre $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{Q}_v)$ en une forme intérieure pure et on choisit alors la manière dont l'invariance $a_v = 0 \bmod 2$. De même, il y a deux manières d'étendre $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ en une forme intérieure pure et on choisit alors l'unique manière de sorte que $a_p^G + \left[\frac{n}{2}\right] + (n-1) = 0 \pmod 2$.

Pour I on procède de même et en particulier on étend $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ en une forme intérieure de sorte que $a_p^I + \left[\frac{n}{2}\right] + n = 0 \pmod 2$.

Remarque 2.3.15. On a $a_p^I + a_p^G = a_{\infty}^I + a_{\infty}^G = 1 \bmod 2$.

Étape 1 : Obtenir des contraintes sur $\dim \sigma_{\pi_p, \pi_p'}$.

Considérons une représentation supercuspidale $\widetilde{\pi}_p$ dans $\Pi_{\varphi}(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$. D'après [Clo86], il existe une représentation automorphe $\widetilde{\Pi}$ de $I(\mathbb{A})$ telle que $\widetilde{\Pi}_p = \widetilde{\pi}_p$ et $\widetilde{\Pi}_{\infty} = \breve{\xi}$ et que $\widetilde{\Pi}_{w_0}$ est supercuspidale pour une place w_0 décomposée. En particulier, le A-paramètre $\widetilde{\Psi}$ de $\widetilde{\Pi}$ est simple et on obtient son groupe de centralisateur

$$S_{\widetilde{\Psi}}^{\natural} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Par le suite, on va essayer d'appliquer 2.3.11 et 2.3.12 pour $\widetilde{\Psi}$. En prenant la partie $\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ isotypique de la suite spectrale (2.11) on a une suite spectrale $G(\mathbb{Q}_p) \times W_{F_p}$-équivariante

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \overset{\bullet}{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = (\widetilde{\Pi})^p}} \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp}\right) \Longrightarrow \left(H_c^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_{\xi})\right)_{p-cusp} [\widetilde{\Pi}^{\infty,p}]$$

Puisque le paquet $\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales, le lemme 2.3.14 implique que $\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}_{K_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right) = 0$ si $p > 0$ et la suite spectrale ci-dessus dégénère en E_2. On obtient donc des isomorphismes :

$$|\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = (\widetilde{\Pi})^p}} \left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^i_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp}\right) = \left(H^i_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp}[\widetilde{\Pi}^{\infty,p}]. \quad (2.12)$$

D'autre part, la proposition 2.3.2 couplé avec la formule de Matsushima pour la L^2-cohomologie nous donne une décomposition :

$$H^{n-1}_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{\text{p-cusp}}[\widetilde{\Pi}^{\infty,p}] = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G})_\xi \\ \Pi_p \text{supercuspidale} \\ \Pi^{\infty,p} = \widetilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p \otimes \rho(\Pi^\infty). \quad (2.13)$$

$$H^i_c(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)_{\text{p-cusp}}[\widetilde{\Pi}^{\infty,p}] = 0 \qquad (i \neq n-1). \quad (2.14)$$

où $\rho(\Pi^\infty)$ est une représentation continue de dimension finie de $Gal(\overline{E}/E)$ et $\mathcal{A}(\dot{G})_\xi$ est l'ensemble des représentations automorphes de $\dot{G}$ cohomologiques pour ξ. De plus on a

$$\dim \rho(\Pi^\infty) = \sum_{\pi_\infty} m(\pi_\infty \otimes \Pi^\infty) \dim H^{n-1}(\mathrm{Lie}\, \dot{G}(\mathbb{R}), K, \pi_\infty \otimes \xi) \quad (2.15)$$

où π_∞ varie dans le paquet cohomologique $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$

Puisque ξ est de poids régulier et $\dot{G}(\mathbb{R})$ est le groupe des similitudes unitaires de signature $(1, n-1)$, d'après le corollaire VI.2.7 de [HT01], on en déduit qu'il y a exactement n représentation π_j $(j \in \{1, \cdots, n\})$ cohomologique pour ξ. On a également la dimension cohomologique :

$$\dim H^{n-1}(\mathrm{Lie}\, \dot{G}(\mathbb{R}), K, \pi_j \otimes \xi) = 1. \quad (2.16)$$

On en déduit que $\sigma^i_{\pi_p, \pi'_p} = 0$ *si* $i \neq n-1$ de sorte que

$$\sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \widetilde{\Pi}^p}} \left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^{n-1}_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{p-cusp}\right) = \sum_{\substack{\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ (\Pi')^{\infty,p} = \widetilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi'_p \otimes \rho((\Pi')^\infty)_p$$

En écrivant $\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^{n-1}_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp} = \sum_{\widetilde{\Pi}'_p} \widetilde{\Pi}'_p \otimes \sigma_{\Pi_p, \widetilde{\Pi}'_p}$ où $\widetilde{\Pi}'_p$ parcourt l'ensemble des classes d'équivalences de représentations supercuspidales de $G(\mathbb{Q}_p)$, l'égalité ci-dessus s'écrit sous la forme

$$\sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \widetilde{\Pi}^p}} \left(\sum_{\widetilde{\Pi}'_p} \widetilde{\Pi}'_p \otimes \sigma_{\Pi_p, \widetilde{\Pi}'_p}\right) = \sum_{\substack{\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ (\Pi')^{\infty,p} = \widetilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi'_p \otimes \rho((\Pi')^\infty)_p \quad (2.17)$$

Or $\Pi' \in \mathcal{A}(\dot{G})$ et $(\Pi')^{\infty,p} = \widetilde{\Pi}^{\infty,p}$, on en déduit que Π'_p et $\widetilde{\Pi}_p$ sont dans le même paquet, à savoir le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$. De même on voit que $\Pi_p \in \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$. On en déduit que $\sigma_{\Pi_p,\widetilde{\Pi}'_p} = 0$ si $\widetilde{\Pi}'_p \notin \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$.

Or, le groupe du centralisateur global $S^\natural_{\widetilde{\Psi}}$ est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, on a en déduit que $\Pi_\Psi(I,\varrho,\epsilon) = \Pi_\Psi(I,\varrho)$ car la condition sur ϵ disparaît (voir 2.2.21). D'après le théorème 2.2.22, on voit que $\breve{\xi}\otimes\pi_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ est toujours une forme automorphe lorsque π_p varie dans $\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$. L'égalité (2.17) se récrit donc sous la forme

$$\sum_{\pi_p\in\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))}\ \sum_{\pi'_p\in\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p\otimes\sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \sum_{\pi'_p\in\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p\otimes\rho(\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p})_p.$$

En particulier pour $\pi'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ fixée, on a

$$\sum_{\pi_p\in\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \rho(\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p})_p.$$

D'après le résultat de multiplicité 1 (théorème 2.2.22 et 2.2.26) on voit que $m(\pi_j\otimes\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p})$ est soit nul soit égale à 1. Comme au-dessus, le théorème 2.2.22 implique que $\pi_i\otimes\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ est toujours une forme automorphe lorsque π'_p varie dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ et i varie dans $\{1,\cdots,n\}$.

Cela implique que $\dim\rho(\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p}) = n$. D'après le corollaire 2.3.11 et remarque 2.3.12 on a alors

$$\rho(\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p})_p = \left(r_\mu\circ\varphi_{|F_p}\right)\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Autrement dit on a

$$\sum_{\pi_p\in\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \left(r_\mu\circ\varphi_{|F_p}\right)\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}. \tag{2.18}$$

Étape 2 : Ramener au problème de comptage à l'infini.

Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ et appliquons la proposition 2.2.29 pour I et la représentation π_p, on trouve un L-paramètre global discret générique Ω dont le L-paquet contient une représentation automorphe $\overline{\Pi}\in\mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\overline{\Pi}_p = \pi_p,\ \overline{\Pi}_\infty = \breve{\xi}$,
- $\overline{\Pi}\cong\Pi'$ dès lors que $(\overline{\Pi})^p\cong(\Pi')^p$.

En prenant la partie $\overline{\Pi}^{\infty,p}$ isotypique de la suite spectrale (2.11) on a :

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q},\dot{G})|\left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^q_c(\mathcal{M}),\pi_p\right)_{cusp}\right) \Longrightarrow \left(H^i_c(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp}[\overline{\Pi}^{\infty,p}]$$

Comme dans la première partie, le lemme 2.3.14 simplifie la suite spectrale, on obtient donc l'égalité

$$\sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I)\\ \Pi^p=\overline{\Pi}^p}}\left(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H^{n-1}_c(\mathcal{M}),\overline{\Pi}_p\right)_{cusp}\right) = \sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(\dot{G})\\ \Pi^{\infty,p}=\overline{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p\otimes\rho(\Pi^\infty)_p$$

Or $\overline{\Pi} \cong \Pi'$ dès lors que $(\overline{\Pi})^p \cong (\Pi')^p$, l'égalité au-dessus se récrit sous la forme

$$\sum_{\widetilde{\pi}'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \widetilde{\pi}'_p \otimes \sigma_{\pi_p, \widetilde{\pi}'_p} = \sum_{\widetilde{\pi}'_p \in \Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \widetilde{\pi}'_p \otimes \rho(\widetilde{\pi}'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p})_p.$$

En prenant la partie $[\pi'_p]$-isotypique, on en déduit en particulier que $\pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \pi'_p \otimes \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p})_p$ et donc que $\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}) = \dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$.

D'après (2.15) et (2.16), on a $\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}) = \sum_{i=1}^n m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p})$. La formule de multiplicité (théorème 2.2.22 et 2.2.26) implique alors que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$ égale au nombre de représentations π_i de sorte que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}$ est une forme automorphe. D'après le théorème 2.2.22 cela *équivaut à demander* l'égalité suivante :

$$\langle s_\infty, \pi_i \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle s_p, \pi'_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \prod_{v \neq \infty, p} \langle s_v, \overline{\Pi}_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^\natural$$

Or $\breve{\xi} \otimes \pi_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}$ étant une forme automorphe dans $\mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$, on a l'égalité suivante :

$$\langle s_\infty, \breve{\xi} \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle s_p, \pi_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \prod_{v \neq \infty, p} \langle s_v, \overline{\Pi}_v \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^\natural.$$

On en déduit que $\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}$ est une forme automorphe si et seulement si

$$\langle s_\infty, \pi_i \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle s_p, \pi'_p \rangle_{\varrho_v, z_v} \cdot \langle s_\infty, \breve{\xi} \rangle_{\varrho_\infty, z_\infty} \cdot \langle s_p, \pi_p \rangle_{\varrho_v, z_v} = 1, \quad \forall s \in S_\Omega^\natural. \tag{2.19}$$

Alors afin de calculer la dimension des représentations galoisiennes, on doit calculer les caractères du groupe centralisateur à l'infini.

Étape 3 : Calcul de caractères à l'infini

Considérons les L-paquets $\Pi_{(\xi)}(I(\mathbb{R}))$ et $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$. Comme ξ est un L-paramètre discret, on peut écrire $\xi^n := \eta_{\chi_\kappa *}\xi$ sous la forme $\xi^n = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$ où les ξ_i sont deux à deux distincts. Le groupe de centralisateur est donné par

$$S_\xi^\natural \cong \prod_{i=1}^n O(1, \mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^n (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}).$$

Le groupe $Z(\widehat{G})^\Gamma = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans $S_\xi^\natural$.

Le L-paquet $\Pi_{(\xi)}(\dot{G}(\mathbb{R}))$ est constitué par n représentations π_i qui correspondent à n caractères τ_{π_i} de $S_\xi^\natural$ dont la restriction sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est un caractère de $Z(\widehat{G})^\Gamma$ calculé en fonction de a_∞^G. De même le L-paquet $\Pi_{(\xi)}(I(\mathbb{R}))$ est constitué par la représentation $\breve{\xi}$ qui correspondent à un caractère $\tau_{\breve{\xi}}$ de $S_\xi^\natural$ dont la restriction sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est calculé par a_∞^I. On va calculer les n caractères $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ où $i \in \{1, \cdots n\}$.

Remarque 2.3.16. Puisque $a_\infty^G + a_\infty^I \equiv 1 \bmod 2$, la restriction de $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ sur $Z(\widehat{G})^\Gamma$ est le caractère non trivial. On en déduit que pour tout i, on a

$$\prod_{j=1}^n \tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{j}, 1, \cdots, 1\big) = \tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(-1, \cdots, -1\big) = -1.$$

Choisissons un L-paramètre supercuspidal ψ de $G(\mathbb{Q}_p)$ de sorte que $\eta_{\chi_\kappa *}\psi = \psi_{F_p} = \psi_1^{n_1} \oplus \psi_2^{n_2}$ avec $\dim \psi_1^{n_1} = 1$ et $\dim \psi_2^{n_2} = n-1$. On a

$$S_\psi \cong \prod_{i=1}^{2} O(1,\mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^{2} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_\psi^\natural.$$

Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_\psi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ et choisissons une représentation $\pi'_p \in \Pi_\psi(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que le caractère $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}$ de $S_\psi^\natural$ est donné par

$$\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}(-1,1) = -1 \qquad \tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi'_p}(1,-1) = 1.$$

En utilisant la même construction que celle dans la proposition 2.2.28, il existe, pour tout i_0 fixé, un paramètre global discret générique $\Phi(i_0)$ de la forme $\Phi(i_0)^n = \Phi_1^{n_1}(i_0) \boxplus \Phi_2^{n_2}(i_0)$ de sorte que

- $\Phi_j^{n_j}(i_0)$ est un L-paramètre global discret générique pour $j = 1,2$,
- $(\Phi(i_0))_\infty = \xi$ et $(\Phi_1^{n_1}(i_0))_\infty = \xi_{i_0}$,
- $(\Phi_1^{n_1}(i_0))_p = \psi_1^{n_1}$ et $(\Phi_2^{n_2}(i_0))_p = \psi_2^{n_2}$,
- Le morphisme canonique
$$S^\natural_{\Phi(i_0)} \longrightarrow S^\natural_\psi$$
est un isomorphisme.

Détaillons maintenant les groupes de centralisateurs ainsi que les morphismes de localisation

$$S_{\Phi(i_0)} \cong \prod_{i=1}^{2} O(1,\mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^{2} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S^\natural_{\Phi(i_0)}.$$

Les morphismes de localisation $S_{\Phi(i_0)} \longrightarrow S_\psi$ et $S_{\Phi(i_0)} \longrightarrow S_\xi$ sont donnés par les formules ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} S^\natural_{\Phi(i_0)} & \longrightarrow & S^\natural_\psi \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (x_1,x_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^\natural_{\Phi(i_0)} & \longrightarrow & S^\natural_\xi \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (\underbrace{x_2,\cdots x_2}_{i_0-1}, x_1, \underbrace{x_2\cdots x_2}_{n-i_0}) \end{array}$$

Notation 2.3.17. Si on a une représentation irréductible τ de $S_\psi^\natural$ ou de $S_\xi^\natural$, on note $\overline{\tau}^{i_0}$ la représentation induite sur $S^\natural_{\Phi(i_0)}$ par les morphismes de localisation.

Utilisons la proposition 2.2.29 pour I et la représentation π_p et le L-paramètre $\Phi(i_0)$, on trouve une représentation automorphe $\overline{\Pi}(i_0) \in \Pi_{\Phi(i_0)}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\overline{\Pi}(i_0)_p = \pi_p$, $\overline{\Pi}(i_0)_\infty = \breve{\xi}$,
- $\overline{\Pi}(i_0) \cong \Pi'$ dès lors que $(\overline{\Pi}(i_0))^p \cong (\Pi')^p$.

En prenant la partie $\overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p}$ isotypique de la suite spectrale (2.11) on a :

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \overset{\bullet}{G})| \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}), \pi_p\right)_{cusp}\right) \Longrightarrow \left(H_c^i(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp}[\overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p}] \tag{2.20}$$

Comme dans étape 2, on obtient l'égalité $\pi'_p \otimes \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \pi'_p \otimes \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p})_p$ et donc $\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p}) = \dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$.

D'une part, l'égalité (2.18) couplée avec le fait que $\psi_{F_p} = \psi_1^{n_1} \oplus \psi_2^{n_2}$ avec $\dim \psi_1^{n_1} = 1$ et $\dim \psi_2^{n_2} = n-1$ implique que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} \in \{0, 1, n-1, n\}$.

De plus $\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p}) = \sum_{i=1}^n m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \overline{\Pi}(i_0)^{\infty,p})$. Comme dans la fin de l'étape 2, la formule de multiplicité implique que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$ est égal du nombre de représentations π_i telle que $\overline{\tau}^{i_0}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}^{i_0}_{\pi_i} = \overline{\tau}^{i_0}_{\pi_p} \cdot \overline{\tau}^{i_0}_{\pi'_p}$.

Montrons que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = 1$. Supposons le contraire, il y a 3 possibilités.

Cas 1 : $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = 0$.

Dans ce cas on a $\overline{\tau}^{i_0}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}^{i_0}_{\pi_i} \neq \overline{\tau}^{i_0}_{\pi_p} \cdot \overline{\tau}^{i_0}_{\pi'_p}$ pour tout i. La description de morphismes de localisation implique que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = 1.$$

En faisant varier i_0, on en déduit que tous les $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ coïncident, contradiction.

Cas 2 : $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = n$.

La description de morphismes de localisation implique que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = -1.$$

Comme précédemment en faisant varier i_0 , on en déduit que les $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ sont égaux pour tout i, contradiction.

Cas 3 : $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = n-1$.

La description de morphismes de localisation implique qu'il y a exactement $n-1$ indices $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que

$$\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = -1.$$

Comme i_0 est arbitraire, on en déduit que

$$\prod_{i_0=1}^n \prod_{i=1}^n \tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = (-1)^{(n-1)\cdot n} = 1.$$

Or d'après le remarque 2.3.16 et le fait que n impair, on en déduit que

$$\prod_{i_0=1}^n \prod_{i=1}^n \tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = \prod_{i=1}^n \tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(-1, \cdots, -1\big) = (-1)^n = (-1).$$

Cela est une contradiction.

On en déduit que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = 1$, autrement dit pour tout i_0, il y a exactement un indice $i \in \{1, \cdots, n\}$ tel que

$$\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}\big(1, \cdots, 1, \underbrace{-1}_{i_0}, 1, \cdots, 1\big) = -1.$$

En utilisant la remarque 2.3.16, on vérifie aisément que les n caractères $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ avec $i \in \{1, \cdots, n\}$ sont les caractères λ_i où

$$\lambda_i\big(1, \cdots, \underbrace{-1}_{\mathrm{j}}, \cdots, 1\big) = \begin{cases} -1 & si \quad\quad i = j \\ 1 & si \quad 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases} \tag{2.21}$$

Étape 4 : Fin de la démonstration

Lemme 2.3.18. *Il existe un paramètre global générique* $\Psi = (\Psi^n, \widetilde{\Psi})$ *où* $\Psi^n = \Psi_1^{n_1} \boxplus \Psi_2^{n_2}$ *avec* Ψ_i *des paramètres simples génériques de sorte que*

i) $(\Psi_1^{n_1})_p = \varphi_1^{n_1}$

ii) $(\Psi_2^{n_2})_p = \varphi_2^{n_2} \oplus \cdots \oplus \varphi_r^{n_r}$.

iii) Il y a une place décomposée q telle que

$$(\Psi_1^{n_1})_q = \chi_1 \oplus \cdots \oplus \chi_{n_1} \qquad\qquad (\Psi_2^{n_2})_q = \chi_{n_1+1} \oplus \cdots \oplus \chi_n$$

où les χ_i *sont non ramifiées et deux à deux distincts.*

iv) $\Psi_\infty = \xi$.

Démonstration. On utilise la même construction que celle dans la proposition 2.2.28. □

On fixe une représentation $\pi_p \in \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$. Comme dans la démonstration de la proposition 2.2.29, il existe une représentation automorphe $\widetilde{\Pi}$ de $I(\mathbb{A})$ dans le paquet $\Pi_\Psi(I)$ de sorte que $\widetilde{\Pi}_p = \pi_p$ et $\widetilde{\Pi}_\infty = \breve{\xi}$ (mais $\Pi^p = \widetilde{\Pi}^p$ *n'implique pas forcément* $\Pi = \widetilde{\Pi}$).

Prenons la partie $[\widetilde{\Pi}^{\infty,p}]$ de la suite spectrale (2.11). Grâce au lemme 2.3.14, la suite spectrale dégénère, on obtient donc des isomorphismes

$$|\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I) \\ \Pi^p = \widetilde{\Pi}^p}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp}\Big) \otimes [\widetilde{\Pi}^{\infty,p}] = \left(H_c^q(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp} [\widetilde{\Pi}^{\infty,p}].$$

En utilisant la formule de Matsushima couplée avec la proposition 2.3.2, on en déduit que

$$\sum_{\substack{\overline{\Pi} \in \mathcal{A}(I) \\ \overline{\Pi}^p = \widetilde{\Pi}^p}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}), \overline{\Pi}_p\right)_{cusp}\Big) = \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(\dot{G}) \\ \Pi^{\infty,p} = \widetilde{\Pi}^{\infty,p}}} \Pi_p \otimes \rho(\Pi)_p \tag{2.22}$$

D'après le calcul dans section 2.2.2, on a

$$S_{\Psi} \cong \prod_{i=1}^{2} O(1,\mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^{2} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_{\Psi}^{\natural}.$$

$$S_{\varphi} \cong \prod_{i=1}^{r} O(1,\mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^{r} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_{\varphi}^{\natural} \qquad S_{\Psi_\infty} \cong \prod_{i=1}^{n} O(1,\mathbb{C}) \cong \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong S_{\Psi_\infty}^{\natural}.$$

Les morphismes de localisation $S_{\Psi} \longrightarrow S_{\varphi}$ et $S_{\Psi} \longrightarrow S_{\Psi_\infty}$ sont donnés comme ci-dessous

$$\begin{array}{ccc} S_{\Psi}^{\natural} & \longrightarrow & S_{\varphi}^{\natural} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (x_1,\underbrace{x_2,\cdots,x_2}_{r-1}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S_{\Psi}^{\natural} & \longrightarrow & S_{\Psi_\infty} \\ (x_1,x_2) & \longmapsto & (\underbrace{x_1,\cdots x_1}_{n_1},\underbrace{x_2,\cdots,x_2}_{n_2}) \end{array}$$

Si on a une représentation irréductible τ de $S_{\varphi}^{\natural}$ ou de $S_{\Psi_\infty}^{\natural}$, on note $\overline{\tau}$ la représentation induite sur $S_{\Psi}^{\natural}$ par les morphismes de localisation.

Pour $1 \leq i \leq r$ on note τ_i le caractère de $S_{\varphi}^{\natural}$ définie par 2.3.1.

Le groupe $Z(\widehat{G})^{\Gamma} = \{\pm 1\}$ est envoyé diagonalement dans $S_{\varphi}^{\natural}$. Les représentations dans le paquet $\Pi_{\varphi}(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ sont paramétrées par les éléments de $\mathrm{Irr}(S_{\psi}^{\natural},\chi_I)$ où χ_I est calculé en fonction de a_p^I (voir 2.2.3 et exemple 2.2.1) et celles dans le paquet $\Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))$ sont paramétrées par les éléments de $\mathrm{Irr}(S_{\psi}^{\natural},\chi_G)$ où χ_G est calculé en fonction de a_p^G.

Puisque les rôles des τ_i pour $1 \leq i \leq r$ sont identiques, il suffit de montrer que $\sigma_{\pi_p,\pi_p'} = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}$ pour $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi_p'} = \tau_1$.

Choisissons $\pi_p' \in \Pi_{\varphi}(G(\mathbb{Q}_p))$ de sorte que $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi_p'} = \tau_1$. D'après (2.19) et la description explicite des caractères $\tau_{\breve{\xi}} \cdot \tau_{\pi_i}$ dans (2.21), on en déduit que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi_p'} = n_1$.

Comme $\widetilde{\Pi}$ est une représentation automorphe de $I(\mathbb{A})$, on en déduit que $\pi_i \otimes \pi_p' \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ est une représentation automorphe de $\dot{G}(\mathbb{A})$ si et seulement si

$$\overline{\tau}_{\pi_i} \cdot \overline{\tau}_{\pi_p'} = \overline{\tau}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}_{\pi_p}.$$

Puisque $\tau_{\pi_p} \cdot \tau_{\pi_p'} = \tau_1$, l'égalité ci-dessus équivaut à

$$\overline{\tau}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}_{\pi_i} = \overline{\tau}_1.$$

D'après l'étape 3, on a $\overline{\tau}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}_{\pi_i} = \overline{\lambda}_i$, alors $\pi_i \otimes \pi_p' \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ est une représentation automorphe de $\dot{G}(\mathbb{A})$ si et seulement si $\overline{\lambda}_i = \overline{\tau}_1$. En utilisant la description de morphismes de localisation ainsi que la définition de τ_1 (c.f. 2.3.1) et de λ_i (c.f. 2.21), on voit que $\overline{\lambda}_i = \overline{\tau}_1$ si et seulement si $i \in \{1,\cdots n_1\}$. On en déduit que $\dim \rho(\pi_p' \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p}) = n_1$. Le corollaire 2.3.11 implique que

$$\rho(\pi_p' \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p})_p = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Maintenant en prenant la partie $[\pi'_p]$-isotypique dans (2.22), on voit que

$$\sum_{\substack{\overline{\pi}_p \in \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)) \\ \overline{\pi}_p \otimes \widetilde{\Pi}^p \in \mathcal{A}(I)}} \sigma_{\overline{\pi}_p,\pi'_p} \otimes \pi'_p = \pi'_p \otimes r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Comme $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = n_1 = \dim r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1})$, on en déduit que

$$\sigma_{\pi_p,\pi'_p} = r_{\mu_1} \circ (\varphi_1^{n_1}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

2.4 Appendice

Dans cet appendice on démontre un résultat analogue plus faible du Théorème A pour F^+ un corps totalement réel de degré impair quelconque. Le principe de la démonstration repose sur l'étude des variétés de Shimura de type Kottwitz-Harris-Taylor $\mathrm{Sh}_{/E}$ définies sur leur corps reflex $E = F$ où $F = \mathcal{K}F^+$ avec $\mathcal{K}$ un corps quadratique imaginaire et plus particulièrement sur la géométrie de la fibre spéciale en une place p inerte dans E d'un modèle $\mathrm{Sh}_{/\mathcal{O}_p}$ où $\mathcal{O}_p$ est l'anneau des entiers de E_p.

Proposition 2.4.1. *Soit $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \left(\prod_{\tau\in\Phi} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ un L-paramètre discret de $G(\mathbb{Q}_p)$. Notons $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ et $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ le L paquet (supercuspidal) respectivement de $G(\mathbb{Q}_p)$ et de $J_b(\mathbb{Q}_p)$ correspondant à φ. Alors pour π'_p une représentation cuspidale dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ on a*

i) $\sigma^i_{\pi_p,\pi'_p} = 0$ *si* $i \neq n-1$.

ii) $\sigma_{\pi_p,\pi'_p} = 0$ *si* $\pi_p \notin \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$,

iii)

$$\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \dim \mathrm{Hom}_{S_\varphi}(\tau_{\pi'_p} \otimes \tau_{\pi_p}, r_\mu \circ \varphi_{F_p}) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{D} = (\dot{F}, B, *, V, \langle\cdot|\cdot\rangle, h, \dot{G})$ une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale de sorte que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre simple qui est déployée en toutes places finies comme dans la proposition 2.3.13. Soit Sh la variété de Shimura associée, le groupe $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = G(\mathbb{Q}_p)$ est le groupe de similitudes unitaires quasi déployé en n variables. En particulier Sh est de signature $(1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$ à l'infini et Sh est donc *compacte*.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport-Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et $I := (I^\phi)$ le groupe réductif associé. On sait que $I(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I(\mathbb{A}_f^p) = \dot{G}(\mathbb{A}_f^p)$. D'après la proposition 2.1.30 il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ équivariante :

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I) \\ \Pi_\infty = \check{\xi}}} \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}(H^q_c(\mathcal{M}), \Pi_p)_{cusp}\right) \otimes (\Pi^{\infty,p}) \Longrightarrow \left(H^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp}. \qquad (2.23)$$

Fixons une représentation $\pi_p \in \Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p))$ et appliquons la proposition 2.2.29 pour I et la représentation π_p, on trouve une représentation automorphe $\overline{\Pi} \in \mathcal{A}(I(\mathbb{A}))$ telle que

- $\overline{\Pi}_p = \pi_p,\ \overline{\Pi}_\infty = \breve{\xi}$,
- $\overline{\Pi} \cong \Pi'$ dès lors que $(\overline{\Pi})^p \cong (\Pi')^p$.

En utilisant le même argument que dans l'étape 2 de la démonstration du théorème principal on en déduit que

$$\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}) = \dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}.$$

où $\rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p})$ est la partie $[\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}]$-isotypique dans la cohomologie de Sh.

D'autre part

$$\dim \rho(\pi'_p \otimes \overline{\Pi}^{\infty,p}) = \sum_{i=1}^{n} m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p}).$$

La formule de multiplicité 2.2.22 couplée avec 2.2.26 implique alors que $m(\pi_i \otimes \pi'_p \otimes \widetilde{\Pi}^{\infty,p})$ est soit nul soit égale à 1. On en déduit donc que $\dim \sigma_{\pi_p,\pi'_p}$ égale le nombre de représentations π_i de sorte que $\overline{\tau}_{\breve{\xi}} \cdot \overline{\tau}_{\pi_i} = \overline{\tau}_{\pi_p} \cdot \overline{\tau}_{\pi'_p}$. Nous utilisons le calcul fait dans l'étape 3 de la démonstration du théorème principal pour conclure. □

Théorème 2.4.2. *Soit* $\varphi : W_{\mathbb{Q}_p} \longrightarrow \left(\prod_{\tau \in \Phi} GL_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^\times\right) \rtimes W_{\mathbb{Q}_p}$ *un L-paramètre discret de* $G(\mathbb{Q}_p)$*. Notons* $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ *et* $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ *le L paquet (supercuspidal) respectivement de* $G(\mathbb{Q}_p)$ *et de* $J_b(\mathbb{Q}_p)$ *correspondant à* φ*. Alors pour* π'_p *une représentation cuspidale dans* $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ *on a*

$$\sum_{\pi_p \in \Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \left(r_\mu \circ \varphi_{F_p}\right) \otimes |\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{D}$ une donnée globale de type PEL globalisant la donnée locale comme dans la proposition 2.3.13 de sorte que $\mathrm{End}_B(V)$ est une *algèbre à division* qui est en toute place finie soit déployée, soit une algèbre à division. Soit Sh la variété associée, le groupe $\dot{G}(\mathbb{Q}_p) = GU^*(n)$ est le groupe des similitudes unitaires quasi déployé en n variables. En particulier Sh est de signature $(1, n-1), (0, n) \cdots (0, n)$ à l'infini et Sh est *compacte* car $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division.

On note $\mathcal{M}(\mathcal{D}_{\mathbb{Q}_p}, b)$ l'espace de Rapoport-Zink associé à la donnée locale.

Soit ϕ une classe d'isogénie intervenant dans la strate basique et I^ϕ le groupe réductif associé. On sait que $I^\phi(\mathbb{R})$ est la forme compacte modulo le centre de $\dot{G}(\mathbb{R})$, que $I^\phi(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ et que $I^\phi(\mathbb{A}_f^p) = \dot{G}(\mathbb{A}_f^p)$. D'après la proposition 2.1.30 il y a une suite spectrale $\dot{G}(\mathbb{A}_f) \times W_{F_p}$ équivariante

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \dot{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi_\infty = \breve{\xi}}} \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\left(H_c^q(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp}\right) \otimes (\Pi^{\infty,p}) \Longrightarrow \left(H^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp} \tag{2.24}$$

On choisit une représentation ξ de dimension finie de $I^\phi(\mathbb{C})$. Soit $\Pi(\xi)$ le L-paquet des représentations de séries discrètes de $\overset{\bullet}{G}(\mathbb{R})$ cohomologiques pour ξ.

Considérons une représentation supercuspidale $\widetilde{\pi}_p$ dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$. D'après [Clo86], il existe une représentation automorphe $\widetilde{\Pi}$ de $\overset{\bullet}{G}$ telle que $\widetilde{\Pi}_p = \widetilde{\pi}_p$ et $\widetilde{\Pi}_\infty \in \Pi(\xi)$ et que $\widetilde{\Pi}_{w_0}$ est supercuspidale pour une place w_0 inerte. On peut supposer de plus que pour toute place finie décomposée v de sorte que $\mathrm{End}_B(V)$ est une algèbre à division, la composante $\widetilde{\Pi}_v$ et $JL(\widetilde{\Pi}_v)$ soient supercuspidale, ici JL est l'application de Jacquet-Langlands.

Maintenant, en appliquant le cas (A) du théorème 3.1.6 de [HL04] pour les groupes de similitudes unitaires globaux $\overset{\bullet}{G}$ et I^ϕ, on obtient une représentation automorphe $\widetilde{\Pi}^*$ de I^ϕ de sorte que $(\widetilde{\Pi}^*)_w = (\widetilde{\Pi})_w$ pour toute place finie $w \neq p$ et $(\widetilde{\Pi}^*)_\infty = \xi$.

En prenant la partie $\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ isotypique de la suite spectrale (2.24) on a

$$E_2^{pq} = |\ker^1(\mathbb{Q}, \overset{\bullet}{G})| \sum_{\substack{\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi) \\ \Pi^p = (\widetilde{\Pi}^*)^p}} \left(\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)} \left(H^q_c(\mathcal{M}), \Pi_p\right)_{cusp} \right) \Longrightarrow \left(H^{p+q}(\mathrm{Sh}, \mathcal{L}_\xi)\right)_{p-cusp} [\widetilde{\Pi}^{\infty,p}]$$

Lemme 2.4.3. *Soit $\Pi \in \mathcal{A}(I^\phi)$ telle que $\Pi^p = (\widetilde{\Pi}^*)^p$ alors Π_p est dans le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$.*

Démonstration. On pose S_0 l'ensemble des places finies décomposées telles que $End_B(V)$ est une algèbre à division et $S = S_0 \cup \{w_0\}$ où w_0 est la place inerte qu'on fixée auparavant. On peut supposer que $|S_0| \geq 2$.

D'après la proposition 10.1.1 de [Far04], il existe un groupe similitude unitaire global GU^1 de sorte que $(GU^1)_v$ est quasi-déployé si v est décomposée et $(GU^1)_w = (I^\phi)_w$ pour toute $w \notin S$.

D'après le cas (B) du théorème 3.1.6 de [HL04], il existe une représentation automorphe Π_1 de $GU^1(\mathbb{A})$ telle que $(\Pi_1)_w = \Pi_w$ pour toute $w \notin S$. On obtient en particulier $(\Pi_1)_p = \Pi_p$.

Par le même argument on obtient un groupe similitude unitaire GU^2 tel que $(GU^2)_v$ est quasi-déployé si v est décomposée et $(GU^2)_w = (\overset{\bullet}{G})_w$ pour toute $w \notin S$ ainsi qu'une représentation automorphe Π_2 de $GU^2(\mathbb{A})$ satisfaisant $(\Pi_2)_w = \widetilde{\Pi}_w$ pour toute $w \notin S$. En particulier on a $(\Pi_2)_p = \widetilde{\pi}_p$ et $(\Pi_2)_w = (\Pi_1)_w$ pour presque toute w.

Puisque GU^1 et GU^2 sont des formes intérieures pures, le théorème 2.2.22 implique que le L-paramètre global Ψ_1 de Π_1 et le L-paramètre global Ψ_2 de Π_2 sont identiques. Comme $(\Pi_2)_p = \widetilde{\pi}_p$ est dans le paquet $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$, on en déduit alors que les représentations $(\Pi_1)_p = \Pi_p$ est dans le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$. □

Puisque le paquet $\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))$ ne contient que des représentations supercuspidales, d'après le lemme 2.4.3 on voit que Π_p est supercuspidale dès que $\Pi^p = (\widetilde{\Pi}^*)^p$. D'autre part, le lemme 2.3.14 implique que $\mathrm{Ext}^p_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)} \left(H^q_c(\mathcal{M}_{U_p}, \overline{\mathbb{Q}}_\ell(n-1)), \Pi_p\right) = 0$ si $p > 0$, la suite spectrale au-dessus dégénère. On obtient donc des isomorphismes :

$$|\ker^1(\mathbb{Q},\overset{\bullet}{G})| \sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(I^\phi)\\ \Pi^p=(\widetilde{\Pi}^*)^p}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\big(H^i_c(\mathcal{M}),\Pi_p\big)_{cusp}\Big) = \big(H^i(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\xi)\big)_{p-cusp}[\widetilde{\Pi}^{\infty,p}] \quad (2.25)$$

D'autre part, la formule de Matsushima nous donne une décomposition :

$$H^i(\mathrm{Sh},\mathcal{L}_\xi)_{\text{p-cusp}} = |\ker^1(\mathbb{Q},\overset{\bullet}{G})| \sum_{\substack{\Pi\in\mathcal{A}(\overset{\bullet}{G})_\xi\\ \Pi_p\text{supercuspidale}}} \Pi^\infty\otimes\rho_i(\Pi^\infty) \qquad (2.26)$$

où $\rho_i(\Pi^\infty)$ est une représentation continue de dimension finie de $Gal(\overline{E}/E)$ et $\mathcal{A}(\overset{\bullet}{G})_\xi$ est l'ensemble des représentations automorphes de $\overset{\bullet}{G}$ cohomologiques pour ξ.

Puisque l'application $\eta_{\chi_\kappa,*}$ est injective (voir 2.2.10) et Π_v est supercuspidale, le même argument que celui dans $A.7.8$ de [Far04] montre le résultat suivant :

$$\rho_i(\pi'_p\otimes\Pi^{\infty,p}) = \begin{cases} 0 & si \quad i\neq n-1=\dim\mathrm{Sh}\\ \big(r_\mu\circ\varphi_{F_p}\big)^{m(\Pi)}\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}} & si \qquad i=n-1\end{cases}$$

En comparant les égalités (2.25) et (2.26) avec le calcul de $\rho_i(\pi'_p\otimes\Pi^{\infty,p})$ on en déduit que :

$$\sum_{\overline{\pi}_p\in\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)}\big(H^{n-1}_c(\mathcal{M}),\overline{\pi}_p\big)_{cusp}\Big)^{a_{I^\phi}(\overline{\pi}_p)} = \sum_{\pi'_p\in\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))} \pi'_p\otimes\big(r_\mu\circ\varphi_{F_p}\big)^{a_{\overset{\bullet}{G}}(\pi'_p)}\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}. \qquad (2.27)$$

où $a_{I^\phi}(\overline{\pi}_p)$ est la multiplicité de $\breve{\xi}\otimes\overline{\pi}_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ dans l'espace des formes automorphes de I^ϕ et $a_{\overset{\bullet}{G}}(\pi'_p)$ est la multiplicité de $\pi_\xi\otimes\pi'_p\otimes\widetilde{\Pi}^{\infty,p}$ dans l'espace des formes automorphes de $\overset{\bullet}{G}$ (d'après le théorème 3.1.7 de [HL04], la multiplicité $a_{\overset{\bullet}{G}}(\pi'_p)$ ne dépend pas de $\pi_\xi\in\Pi(\rho)$).

Pour $\widetilde{\pi}_p$ la représentation supercuspidale dans $\Pi_\varphi(G(\mathbb{Q}_p))$ fixé, on a en particulier l'égalité :

$$\sum_{\pi_p\in\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} (\sigma_{\pi_p,\pi'_p})^{a_{I^\phi}(\pi_p)} = \big(r_\mu\circ\varphi_{F_p}\big)^{a_{\overset{\bullet}{G}}(\widetilde{\pi}_p)}\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

De plus comme φ est un paramètre discret et μ est de signature $(1,n-1),(0,n),\cdots,(0,n)$ on en déduit que $(r_\mu\circ\varphi_{F_p})$ est une représentation de dimension n et est une somme (sans multiplicité) des représentations irréductibles deux à deux disjointes. D'autre part on a $a_{\overset{\bullet}{G}}(\widetilde{\pi}_p)>0$ et d'après la proposition 2.4.1 on a $\sum_{\pi_p\in(\Pi_\varphi(\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)))}\dim\sigma_{\pi_p,\pi'_p}=n$, ce qui implique

$$\sum_{\pi_p\in\Pi_\varphi(J_b(\mathbb{Q}_p))} \sigma_{\pi_p,\pi'_p} = \big(r_\mu\circ\varphi_{F_p}\big)\otimes|\cdot|^{-\frac{n-1}{2}}.$$

□

Chapitre 3

Shtukas adiques, modifications et applications

3.1 Introduction

Rapoport et Viehmann ont récemment suggéré l'existence d'analogues locaux p-adiques des variétés de Shimura et une théorie cohomologie ℓ-adique de ces derniers. La cohomologie ℓ-adique ($\ell \neq p$) des variétés de Shimura locales devrait fournir l'incarnation locale des correspondances de Langlands. Les premiers exemples sont donnés par les espaces de Rapoport-Zink et récemment, Scholze a construit des espaces de modules de Shtukas généralisant la notion de variétés de Shimura locales.

Commençons par un triplet (G, μ, b) où G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$, $b \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ et $\mu \in X_*^+(T)$ avec $b \in B(G, \mu)$ (c.f. section 3.3) auquel on associe un G-fibré $\mathcal{E}_b$ sur la courbe de Fargues-Fontaine. De manière informelle, l'espace de module de Shtukas $\mathrm{Sht}(G, \mu, b)$ est un faisceau sur $\mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ classifiant les modifications de type μ entre $\mathcal{E}_b$ et $\mathcal{E}_1$. L'espace $\mathrm{Sht}(G, \mu, b)$ admet une donnée de descente ainsi qu'une action du groupe $G(\mathbb{Q}_p)$ (resp. $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$) définie par isomorphismes de $\mathcal{E}_1$ (resp. $\mathcal{E}_b$). Le premier résultat principal de cet article est le théorème 3.6.3 suivant.

Théorème 3.1.1. *Notons Z_G^0 la composante connexe neutre du centre Z_G, λ un cocaractère central de G et b_λ l'unique élément de $B(Z_G^0, \lambda)$. Il y a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.*

$$\mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot (\lambda)).$$

Le résultat ci-dessus nous permet d'interpréter l'espace $\mathrm{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot (\lambda))$ comme une modification centrale de l'espace $\mathrm{Sht}(G, \mu, b)$. La démonstration se base sur l'étude des G-fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine. La première étape consiste à construire une modification de type $\mu \cdot (\lambda)$ à partir de celle de type μ. Ensuite, on propage cette construction au niveau des espaces de modules de Shtukas de manière compatible avec les actions de $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ et notamment avec les données de descentes.

On applique ce résultat géométrique au calcul des groupes de cohomologie d'espaces de Rapoport-Zink que l'on peut ainsi relier avec la tour de Lubin-Tate. Pour chaque sous-groupe compact $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$, il y a un espace de module de Shtukas de niveau fini $\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\big)/K_p$ et une identification $\mathrm{Sht}(G,\mu,b) = \varprojlim_{K_p} \mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K_p$. Lorsque μ est minuscule et le triplet (G,μ,b) est de type EL ou PEL et on retrouve les espaces de Rapoport-Zink, d'après le théorème 24.2.5 de [SW17]. Afin de se ramener à la tour de Lubin-Tate qui correspond à la signature $\mu_{\mathcal{LT}} = (1,n-1),(0,n),\cdots,(0,n)$, on considère les espaces de Rapoport-Zink de type EL non ramifiés simples basiques de signature $(1,n-1),(p_1,q_1),\cdots,(p_k,q_k)$ où $p_iq_i = 0$. Soit $K_p \subset G(\mathbb{Q}_p)$ un sous groupe compact. On notera $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K_p$ par $\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p}$. D'après [Far04], on peut définir les groupes de cohomologie de support compact par

$$H^{\bullet}_c(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p},\mathbb{Z}_\ell) = \varinjlim_{V} \varprojlim_{n} H^{\bullet}_c(V \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

où V parcourt les ouverts relativement compacts de $\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p}$ et où $\ell \neq p$ est un nombre premier. On note également $H^{\bullet}_c(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p},\mathbb{Q}_\ell) := H^{\bullet}_c(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p},\mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell$ lesquels sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations de $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) \times W_{E_p}$ où W_{E_p} est le groupe de Weil du corps de définition E_p de μ.

Les groupes de cohomologie de la tour de Lubin-Tate ont été entièrement calculés dans [Boyer99], [HT01] et [Boyer09] ; par dualité [Fal] [FGL] [SW17], on obtient aussi le cas de Drinfeld. Pour un espace de type EL non ramifié général, la partie supercuspidale est traitée dans [Far04], [Shin]. Sous l'hypothèse précédente, on obtient alors la description complète de groupes de cohomologie suivante avec les notations de la section 3.7.

Théorème 3.1.2. *Pour tout diviseur g de $n = gs$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(F)$, on a des isomorphismes $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$-équivariants*

$$\varinjlim_{K} H^{n-1-i}_c(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K})[\pi[s]_D] = \begin{cases} \mathrm{LT}_\pi(s,i) \otimes \mathcal{L}(\pi)|\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_i \circ ({}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1}) & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où ω_i est le caractère central de $\mathrm{LT}_\pi(s,i)$ *et* rec_F^{-1} *est le morphisme de réciprocité d'Artin et où ${}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1} := \tau \cdot \mathrm{rec}_F^{-1} \cdot \tau^{-1}$.*

La preuve repose sur le théorème 3.1.1 qui donne une relation entre la tour $(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p})_{K_p}$ et la tour de Lubin-Tate ainsi que les résultats dans [Boyer09] décrivant la cohomologie de la dernière.

Remarque 3.1.3. En utilisant les résultats de [Boyer14], on peut prouver que les groupes de cohomologie $\varinjlim_{K} H^{\bullet}_c(\breve{\mathcal{M}}^{\mu}_{K_p},\mathbb{Z}_\ell)$ sont $\mathbb{Z}_\ell$-libres.

3.2 La courbe de Fargues-Fontaine d'après [Far-Fon]

Soit $E/\mathbb{Q}_p$ une extension finie de corps résiduel $\mathbb{F}_q$ d'uniformisante π. Soit $F/\mathbb{F}_q$ un corps parfait muni d'une valuation non-triviale $v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

On pose $\mathcal{E} = W_{\mathcal{O}_E}(F)\Big[\dfrac{1}{\pi}\Big]$ où $W_{\mathcal{O}_E}(F)$ désigne l'anneau des vecteurs de Witt ramifiés à coefficients dans F. Plus précisément, on a

$$\mathcal{E} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in F \Big\}.$$

Le corps $\mathcal{E}$ est une extension non ramifiée complète de E dont le corps résiduel est F. Il y a un relèvement de Teichmüler $F \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}},\ x \longmapsto [x]$.

On introduit alors le sous-anneau de $\mathcal{E}$

$$B^{bd} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathcal{E} \mid \exists C,\ \forall n\ |x_n| < C \Big\}.$$

On définit ensuite des normes de Gauss sur B^{bd}. Pour $r \in]0, \infty[$ et $\rho = q^{-r} \in]0, 1[$ on pose pour $x = \sum_n [x_n]\pi^n \in B^{bd}$

$$v_r(x) = \inf_{n \in \mathbb{Z}} v(x_n) + nr \quad \text{et} \quad |x|_\rho = \sup_{n \in \mathbb{Z}} |x_n|\rho^n.$$

Il s'agit de normes multiplicatives, autrement dit v_r est une valuation sur B^{bd}.

Définition 3.2.1. *Pour $I \subset]0, 1[$ un intervalle, on note B_I le complété de B^{bd} par rapport aux normes $(|.|_\rho)_{\rho \in I}$. Notons $B = B_{]0,1[}$. On a alors $B = \varprojlim_I B_I$ où I parcourt les intervalles compacts de $]0, 1[$.*

L'anneau $\mathcal{E}$ possède un morphisme de Frobenius φ tel que

$$\varphi\Big(\sum_n [x_n]\pi^n\Big) = \sum_n [x_n^q]\pi^n.$$

On note également $\varphi : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]$ défini par $\varphi(\rho) = \rho^q$. Le Frobenius φ de B^{bd} s'étend en un isomorphisme

$$\varphi : B_I \xrightarrow{\sim} B_{\varphi(I)}.$$

Ce morphisme de Frobenius induit alors un automorphisme φ de B avec $E = B^{\varphi=1}$.

Définition 3.2.2. *La courbe schématique de Fargues-Fontaine est $X = \mathrm{Proj(P)}$ où*

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} B^{\varphi = \pi^d},$$

vue comme E-algèbre graduée.

On note $\mathcal{O}_X(1) = \widetilde{P[1]}$ le fibré en droites tautologique sur X et pour $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X(d) = \Big(\mathcal{O}_X(1)\Big)^{\otimes d}$. On a alors

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(d)).$$

On rappelle ensuite la version adique de la courbe de Fargues-Fontaine. Si $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1[$ avec $\rho_1, \rho_2 \in |F^\times|$ alors B_I est une E-algèbre de Banach qui est un anneau principal. On pose alors $Y_I = \mathrm{Spa}(B_I, B_I^o)$ comme espace topologique muni d'un préfaisceau d'anneaux.

Théorème 3.2.3. *([Far16] 2.1) L'espace Y_I est adique i.e le préfaisceau $\mathcal{O}_{Y_I}$ est un faisceau.*

Soient $I \subset I' \subset]0,1[$ alors Y_I est un ouvert rationnel de $Y_{I'}$. Si $I = [|a|, |b|]$ avec $a, b \in F^\times$ alors

$$Y_I = Y_{I'}\Big\langle \frac{[a]}{\pi}, \frac{\pi}{[b]} \Big\rangle.$$

On pose $Y = \varinjlim_I Y_I$ où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$ d'extrémités dans $|F^\times|$.

C'est un espace adique tel que $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = B$. On peut donc voir les éléments de B_I comme les fonctions holomorphes de la variable π sur la couronne de rayons définis par I. Le Frobenius φ de B^{bd} induit un isomorphisme $\varphi : B_I \xrightarrow{\sim} B_{\varphi(I)}$ et on a donc un isomorphisme

$$\varphi : Y_{\varphi(I)} \xrightarrow{\sim} Y_I.$$

En prenant la limite sur les intervalles I on obtient un automorphisme

$$\varphi : Y \xrightarrow{\sim} Y.$$

Ce morphisme φ agit de manière proprement discontinue sur Y et on définit alors la courbe de Fargues-Fontaine adique de la manière suivante.

Définition 3.2.4. *La courbe de Fargues-Fontaine adique est $X^{ad} = Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$.*

On rappelle enfin la version relative de la courbe de Fargues-Fontaine sur un espace affinoïde perfectoïde S. Intuitivement, on peut y penser comme une famille de courbes $(X_{k(s)})_{s \in S}$.

Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$. Posons

$$\mathbf{A}_S = W_{\mathcal{O}_E}(R^+) = \Big\{ \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \mid x_n \in R^+ \Big\},$$

où $W_{\mathcal{O}_E}$ désigne les vecteurs de Witt ramifiés. Notons

$$B_S^{bd} = \Big(\mathbf{A}_S\Big[\frac{1}{\pi}\Big]\Big)^{bd} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid x_n \in R,\ \sup_n |x_n| < +\infty \Big\}.$$

Pour $\rho \in]0,1[$, il y a une norme de Gauss sur B_S^{bd} définie par $\| \sum_{n\gg -\infty}[x_n]\pi^n\|_\rho = \sup_n |x_n|\rho^n$.

De même, pour $I \subset]0,1[$ un intervalle compact, on note $B_{I,S}$ le complété de B_S^{bd} par rapport aux normes $(\|\cdot\|_\rho)_{\rho\in I}$. On note $B_S = \varprojlim_I B_{I,S}$ le complété de B_S^{bd} par rapport aux normes $(\|\cdot\|_\rho)_{\rho\in]0,1[}$.

Comme auparavant, $Y_{I,S} = \mathrm{Spa}\Big(B_{I,S}, (B_{I,S})^o\Big)$ ainsi que $Y_S = \varinjlim_I Y_{I,S}$ sont des espaces adiques. Finalement, on définit la courbe de Fargues-Fontaine relative comme suit

$$X_S^{ad} := Y_S/\varphi^{\mathbb{Z}}$$

où φ est le morphisme de Frobenius des vecteurs de Witt usuel

$$\varphi\Big(\sum_{n\gg -\infty}[x_n]\pi_n\Big) = \sum_{n\gg -\infty}[x_n^q]\pi_n.$$

Comme auparavant, il y a des des fibrés vectoriels $\mathcal{O}_{X_S^{ad}}(d)$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$ et on définit le schéma

$$X_S = \mathrm{Proj(P)}$$

où $P = \bigoplus_{d\geq 0} H^0(X_S^{ad}, \mathcal{O}_{X_S^{ad}}(d))$ et $\mathcal{O}_{X_S^{ad}}(1) = \widetilde{(B_S)^{\varphi=\pi}}$.

Débasculements et diviseurs de Cartier sur la courbe

Soit R une $\mathbb{F}_q$-algèbre perfectoïde. Notons $R^o \subset R$ le sous anneau des éléments de puissances bornées ainsi que $R^{oo} \subset R^o$ l'ensemble des éléments topologiquement nilpotents. Un élément $f = \sum_{n\geq 0}[a_n]\pi^n \in \mathbf{A}_R$ est dit primitif de degré 1 si $a_0 \in R^{oo}\cap R^\times$ et $a_1 \in R^{o\times}$.

Proposition 3.2.5. *(prop. 1.18 de [Far16])*

- *Soit $R^\sharp$ un débasculement de R sur E. Alors, le noyau du morphisme de Fontaine*

  $$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(R^o) \twoheadrightarrow R^{\sharp,o}$$

  est engendré par un élément primitif de degré 1.

- *Inversement, si $f \in \boldsymbol{A}_R$ est un élément primitif de degré 1 alors $W_{\mathcal{O}_E}(R^o)\Big[\dfrac{1}{\pi}\Big]/f$ est une E-algèbre perfectoïde qui est un débasculement de R.*

On obtient ainsi une bijection entre l'ensemble des débasculements de R sur E et l'ensemble des immersions fermées $T \hookrightarrow Y_R$ définies localement par un élément primitif de degré 1.

Autrement dit, si $S \in \mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_q}$ alors à chaque débasculement $S^\sharp$ correspond un diviseur de Cartier $D : S^\sharp \hookrightarrow Y_S$ et de plus ce diviseur de Cartier induit un diviseur de Cartier φ-invariant

$$\bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \varphi^{k*}D$$

et on obtient donc un diviseur de Cartier sur X_S^{ad}. Supposons que $\overline{\mathbb{F}}_q \subset F$. Pour tout $h \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique extension non ramifiée E_h de degré h de E. Notons X_{E_h} la courbe adique associé à E_h, alors

$$\pi_h : X_{E_h} = X_E \otimes_E E_h \longrightarrow X_E$$

est un revêtement étale fini de degré h.

Pour tout $\lambda = \dfrac{d}{h} \in \mathbb{Q}$ où $(d, h) = 1$ et $h > 0$, on définit un fibré vectoriel $\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)$ par la formule

$$\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = (\pi_h)_* \mathcal{O}_{X_{E_h}}(d).$$

On peut définir les fonctions rang et degré sur les classes d'isomorphisme des fibrés vectoriels et puis appliquer le formalisme des filtrations de Harder-Narasimhan sur la catégorie de fibrés vectoriels. Pour $\lambda = \dfrac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ alors $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est un fibré de degré d et de rang h et donc de pente de Harder-Narasimhan $\mu(\mathcal{O}_X(\lambda)) = \lambda$.

Définition 3.2.6. *Un fibré vectoriel non nul X est semi stable si pour tout sous fibré vectoriel strict non nul X' de X, on a $\mu(X') \leq \mu(X)$.*

Théorème 3.2.7. *([Far-Fon] théo 8.5.1) Supposons F algébriquement clos.*

- *Les fibrés semi-stables de pente λ sur X, à isomorphisme près, sont les $\mathcal{O}_X(\lambda)^m$.*
- *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré vectoriel sur X est scindée.*
- *Tout fibré vectoriel sur X est isomorphe à un fibré de la forme $\bigoplus_{i=1}^n \mathcal{O}_X(\lambda_i)$ où $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ est une suite décroissante dans $\mathbb{Q}$.*

Notons φ-Mod_B la catégorie des φ-modules libres sur B. On a une équivalence de catégories

$$\begin{aligned} \varphi - \mathrm{Mod}_B &\xrightarrow{\sim} Fib_X \\ (M, \varphi) &\longmapsto \Big(\widetilde{\bigoplus_{d \geq 0} M^{\varphi = \pi^d}} \Big). \end{aligned}$$

D'autre part le foncteur sections globales implique une équivalence entre la catégorie des fibrés φ-équivariants sur Y et celle des φ-modules sur B.

Théorème 3.2.8. *([Far14] théo. 3.5) Supposons F algébriquement clos. Il y a une équivalence de catégories entre faisceaux cohérents sur X et sur X^{ad}.*

Notons φ-$\mathrm{Mod}_{\breve{E}}$ la catégorie des isocristaux sur $\breve{E}$ où $\breve{E} := \widehat{E^{\mathrm{nr}}}$. Il y a un foncteur naturel de φ- $\mathrm{Mod}_{\breve{E}}$ dans Fib_X. Soit (D, φ) un isocristal, on pose

$$\mathcal{E}(D, \varphi) = Y \times_{\varphi^{\mathbb{Z}}} D \longrightarrow Y/\varphi^{\mathbb{Z}} = X^{ad}$$

qui est un fibré vectoriel sur X^{ad}. Via $GAGA$ cela correspond au fibré associé au P-module gradué $\bigoplus_{d \geq 0} \big(D \otimes \mathcal{O}(Y)\big)^{\varphi \otimes \varphi = \pi^d}$. Le théorème 3.2.7 implique que le foncteur $\mathcal{E}(-) : \varphi - \mathrm{Mod}_{\breve{E}} \longrightarrow Fib_X$ est essentiellement surjectif.

Définition 3.2.9. *Soit G un groupe réductif sur E. Notons Bun_X la catégorie des fibrés vectoriels sur X. Un G-fibré sur X (ou X^{ad}) est un foncteur tensoriel exact*

$$\mathrm{Rep}_E G \longrightarrow \mathrm{Bun}_X .$$

On considère l'ensemble de Kottwitz $B(G) = G(\breve{E})/\sigma$-conj des classes d'isomorphismes de G-isocristaux. Si $b \in G(\breve{E})$ on peut lui associer un G-fibré sur X, que on note $\mathcal{E}_b$, par composition

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(G) &\longrightarrow \varphi - \mathrm{Mod}_{\breve{E}} \xrightarrow{\mathcal{E}(-)} Bun_X \\ (V, \rho) &\longrightarrow (V_{\breve{E}}, \rho(b)\sigma). \end{aligned}$$

Théorème 3.2.10. *([Far16] théorème 2.13) On suppose F algébriquement clos. Il y a une bijection entre $B(G)$ et l'ensemble des G-fibrés.*

$$\begin{aligned} B(G) &\xrightarrow{\sim} H^1_{et}(X, G) \\ [b] &\longmapsto [\mathcal{E}_b]. \end{aligned}$$

Cette bijection généralise le théorème 3.2.7.

Si $S \longrightarrow \mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ un espace affinoïde perfectoïde et $b \in G(\breve{E})$, on définit comme auparavant un G-fibré $\mathcal{E}_b$ sur X_S,

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(G) &\longrightarrow \varphi - \mathrm{Mod}_{\breve{E}} \xrightarrow{\mathcal{E}_S(-)} Bun_{X_S} \\ (V, \rho) &\longrightarrow (V_{\breve{E}_p}, \rho(b)\sigma). \end{aligned}$$

Par abus de langage, on le note encore $\mathcal{E}_b$. De plus $\mathcal{E}_1$ est le G-fibré trivial.

3.3 La B_{dR}-Grassmanienne affine

Soient $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ affinoïde perfectoïde de caractéristique p et $(S^\sharp, \iota)$ un débasculement de S sur $\mathbb{Q}_p$ et donc un diviseur de Cartier $D_{S^\sharp} \hookrightarrow X_S$. On a une application surjective

$$\theta : W(R^0) \longrightarrow (R^\sharp)^0$$

dont le noyau est engendré par $\xi \in W(R^0)$ qui n'est pas un diviseur de zéro. Alors $B^+_{dR}(R^\sharp)$ est défini comme le complété ξ-adique de $W(R^0)\left[\frac{1}{p}\right]$ et $B_{dR}(R^\sharp) = B^+_{dR}(R^\sharp)[\xi^{-1}]$. Le complété de X_S au-dessus de $D_{S^\sharp}$ est alors $\mathrm{Spf}(B^+_{dR}(R^\sharp))$. Notons $B_e(R^\sharp) = H^0(X_S \setminus D_{S^\sharp}, \mathcal{O}_{X_S})$.

Etant donné un G-fibré $\mathcal{E}$, posons $\mathcal{E}_e$ sa restriction sur $X_S \setminus D_{S^\sharp} = \mathrm{Spec}\, B_e(R^\sharp)$ ainsi que $\mathcal{E}^+_{dR}$ son complété au-dessus de $D_{S^\sharp}$. La proposition suivante implique que $\mathcal{E}$ est déterminé par $\mathcal{E}_e$ et $\mathcal{E}^+_{dR}$.

Proposition 3.3.1. *[BL95] (Recollement de Beauville-Laszlo) La catégorie des G-fibrés sur X_S est équivalent à la catégorie des triplets $\left(\mathcal{E}_e, \mathcal{E}^+_{B_{dR}}, \iota\right)$ où $\mathcal{E}_e$ est un G-fibré sur $B_e(R^\sharp)$, $\mathcal{E}^+_{B_{dR}}$ est un G-fibré sur $B^+_{dR}(R^\sharp)$ et $\iota : \mathcal{E}_e \otimes_{B_e(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+_{B_{dR}} \otimes_{B^+_{dR}(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp)$ est un isomorphisme.*

Définition 3.3.2. *Soit $\mathcal{E}$ un G-fibré sur X_S. Une modification de $\mathcal{E}$ au-dessus de $D_{S^\sharp}$ est un G-fibré $\mathcal{E}'$ avec un isomorphisme*

$$\alpha : \mathcal{E}|_{X_S \backslash D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X_S \backslash D_{S^\sharp}}.$$

En vertu du recollement de Beauville-Laszlo, une modification entre $\mathcal{E} = \left(\mathcal{E}_e, \mathcal{E}^+_{B_{dR}}, \iota\right)$ et $\mathcal{E}' = \left(\mathcal{E}'_e, (\mathcal{E}')^+_{B_{dR}}, \iota'\right)$ est donnée par un isomorphisme $\alpha : \mathcal{E}_e \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'_e$.

Supposons maintenant $R^\sharp = C$ est un corps complet algébriquement clos. On a

$$X_{C^\flat} = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{\mathrm{d}\geq 0} (\mathrm{B}_{\mathrm{C}^\flat})^{\varphi=\pi^{\mathrm{d}}}\Big).$$

et le diviseur $D_C \hookrightarrow X_{C^\flat}$ correspond à une injection $\mathcal{O}_{X_{C^\flat}} \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_{C^\flat}}(1)$ des fibrés en droites sur $X_{C^\flat}$ et donc un élément $t_{C^\flat} \in H^0(X_{C^\flat}, \mathcal{O}_{X_{C^\flat}}(1)) = (B_{X_{C^\flat}})^{\varphi=\pi}$.

Maintenant comme $B_e(C) = H^0(X_{C^\flat} \backslash D_C, \mathcal{O}_{X_S})$ on voit que $B_e(C) = \mathrm{Spec}\left((B_{C^\flat}[t^{-1}])^{\varphi=1}\right)$.

Soit (D, φ) un isocristal, on y a associé un fibré vectoriel $\mathcal{E}_{D,\varphi}$. En terme du recollement de Beauville-Laszlo, $\mathcal{E}_{D,\varphi}$ est donné par

$$\left((B_{C^\flat}[t^{-1}_{C^\flat}] \otimes_{\breve{E}} D)^{\varphi\otimes\varphi=1}, (B^+_{dR}(C))^n, \iota\right)$$

où ι est le morphisme trivial

$$(B_{dR}(C))^n \xrightarrow{\sim} (B^+_{dR}(C))^n \otimes B_{dR}(C).$$

On suppose désormais que G est un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$.

Définition 3.3.3. *[SW17] La B_{dR}-Grassmanienne affine $Gr^{B_{dR}}_G$ est la faisceautisation étale du foncteur qui à un espace affinoïde perfectoïde $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ avec un morphisme $S \longrightarrow \mathrm{Spd}\, \breve{\mathbb{Q}}_p$ correspondant à un débasculement $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$, associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de G-torseurs sur $\mathrm{Spec}\, B^+_{dR}(R^\sharp)$ trivialisés sur $\mathrm{Spec}\, B_{dR}(R^\sharp)$.*

Comme tout G-torseur sur $\mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$ devient trivial sur un recouvrement étale de $\mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$, on en déduit que $Gr^{B_{dR}}_G$ est le faisceau étale associé au préfaisceau

$$(R^\sharp, (R^\sharp)^+) \longmapsto G(B_{dR}(R^\sharp))/G(B^+_{dR}(R^\sharp)).$$

Notons G^* le groupe réductif forme quasi-déployée de G (i.e $G_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \simeq G^*_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$) ainsi que $T \subset B \subset G^*$ un tore maximal contenu dans un sous groupe de Borel de G^*.

Posons $X_*(G) := \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p}, G_{\overline{\mathbb{Q}}_p})$. Le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ ainsi que $G(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ agissent sur $X_*(G)$ et on a

$$\Gamma\backslash\Big[X_*(G^*)/G^*(\overline{\mathbb{Q}}_p)\Big] = \Gamma\backslash\Big[X_*(G)/G(\overline{\mathbb{Q}}_p)\Big] = \Gamma\backslash X_*(T)^+.$$

Pour $S = \mathrm{Spa}(C, C^+)$ avec $C/\mathbb{Q}_p$ un corps perfectoïde algébriquement clos alors $B^+_{dR}(C)$ est un anneau de valuation discrète et on voit que

$$Gr_G^{B_{dR}}(C, C^+) = G(B_{dR}(C))/G(B^+_{dR}(C)).$$

On a la décomposition de Cartan

$$G(B_{dR}(C)) = \bigsqcup_{\mu\in X_*(T)^+} G(B^+_{dR}(C))\mu(\xi)^{-1}G(B^+_{dR}(C))$$

Notation 3.3.4. Notons $\leq$ l'ordre de Bruhat sur $X_*(T)^+$, i.e $\mu' \leq \mu$ si et seulement si $\mu - \mu'$ est une somme des co-racines positives avec des coefficients positifs rationnels.

Définition 3.3.5. *[SW17] - 19.2.2. (variétés de Schubert).*

Pour un cocaractère $\mu \in X_*(T)^+$, notons E son corps de définition et $\breve{E} := E \cdot \breve{\mathbb{Q}}$. Considérons les sous-foncteurs

$$Gr^{B_{dR}}_{G,\mu} \subset Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu} \subset Gr^{B_{dR}}_{G}$$

qui sont définis par les conditions qu'un morphisme $S \longrightarrow Gr^{B_{dR}}_G$ avec un morphisme $S \longrightarrow \mathrm{Spd}\,\breve{E}$ où $S \in \mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ se factorise par $Gr^{B_{dR}}_{G,\mu}$ resp. $Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu}$ si et seulement si pour tout point géométrique $x = \mathrm{Spa}(C(x), C(x)^+) \longrightarrow S$, les éléments correspondant dans $Gr^{B_{dR}}_G(C(x)) = \bigsqcup_{\mu\in X_*(T)^+} G(B^+_{dR}(C))\mu(\xi)^{-1}$ appartiennent à $G(B^+_{dR}(C))\mu(\xi)^{-1}$, resp. à $\bigsqcup_{\mu'\leq\mu} G(B^+_{dR}(C))\mu'(\xi)^{-1}$.

Théorème 3.3.6. *([SW17])*

Pour tout $\mu \in X_*(T)^+$, $Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu}$ est un diamant spatial. Le sous-foncteur $Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu} \subset Gr^{B_{dR}}_G$ est un sous-foncteur fermé qui est propre sur $\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}})^\diamond$ et $Gr^{B_{dR}}_{G,\mu} \subset Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu}$ est un sous-foncteur ouvert. De plus le morphisme $Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu} \longrightarrow \mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}})^\diamond$ est de dimension de transcendance finie (i.e $\mathrm{dimtrg} < \infty$).

Démonstration. Toutes les assertions, sauf la dernière, sont démontrées dans la proposition 19.2.3 et le théorème 19.2.4 de [SW17]. L'assertion sur la finitude de la dimension de transcendance est démontrée implicitement dans les lemmes 19.3.2 et 19.3.3.

D'après le lemme 19.1.5 de loc.cit, toute injection de groupes réductifs $G \hookrightarrow GL_n$ induit une immersion fermée $Gr^{B_{dR}}_{G,\leq\mu} \hookrightarrow Gr^{B_{dR}}_{GL_n,\leq\mu}$. On peut donc supposer $G = GL_n$.

Puisqu'il y a un nombre fini de $\mu' \leq \mu$ et que chaque point $x \in |Gr^{B_{dR}}_{GL_n,\leq\mu}|$ appartient à $|Gr^{B_{dR}}_{GL_n,\mu'}|$ pour un $\mu' \leq \mu$, il suffit de montrer la dernière assertion pour $Gr^{B_{dR}}_{GL_n,\mu}$.

En vertu du lemme 19.3.3 de loc.cit., il suffit de considérer la résolution de Demazure $\widetilde{Gr}_{GL_n,\mu}$ de $Gr^{B_{dR}}_{GL_n,\mu}$ (définition 19.3.1 de loc.cit). Nous allons suivre la suite de réductions du lemme 19.3.2. Le lemme 21.3 de [S17] nous permet de supposer que μ est minuscule. Ensuite, la question 21.4 [1] de loc.cit nous permet de passer au recouvrement ouvert et comme dans le lemme 19.3.2 de [SW17], il suffit de considérer le morphisme $Grass(d,n)^\diamond \longrightarrow \mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}})^\diamond$. Dans ce cas, le résultat découle de [Hub96]. $\square$

3.4 L'espace de modules de Shtukas

Supposons maintenant que le G-fibré $\mathcal{E}$ est trivialisé sur $B_{dR}^+(R^\sharp)$. En terme du recollement de Beauville-Laszlo, $\mathcal{E}$ correspond à un triplet $\left(\mathcal{E}_e, \mathcal{E}^+_{1,B_{dR}}, \iota\right)$ où $\mathcal{E}^+_{1,B_{dR}}$ est le B_{dR}^+-réseau trivial dans $\mathcal{E}_{1,B_{dR}(R^\sharp)}$ et où ι est un isomorphisme

$$\iota : \mathcal{E}_e \otimes_{B_e(R)} B_{dR}(R^\sharp) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+_{1,B_{dR}} \otimes_{B^+_{dR}(R^\sharp)} B_{dR}(R^\sharp) \;\simeq\; \mathcal{E}_{1,B_{dR}}. \tag{3.1}$$

Autrement dit, un fibré $\mathcal{E}$ trivialisé sur $B_{dR}^+(R^\sharp)$ est déterminé par un couple $\left(\mathcal{E}_e, \iota\right)$ avec ι comme décrit dans (3.1). Soit $R^\sharp = C$ un corps perfectoïde algébriquement clos ainsi que $R = C^b$. Considérons une modification

$$\alpha : \mathcal{E}_{b_1}|_{X_{C^b}\setminus D_C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b_2}|_{X_{C^b}\setminus D_C}$$

où $b_1, b_2 \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$.

Puisque $\mathcal{E}_{b_1}$ et $\mathcal{E}_{b_2}$ possèdent une trivialisation naturelle sur $B_{dR}^+(C)$, la modification α induit un automorphisme $g = \iota_{b_2} \circ \left(\alpha \otimes \mathrm{id}_{B_{dR}(C)}\right) \circ \iota_{b_1}^{-1}$ de $\mathcal{E}_{1,B_{dR}}$. D'après la décomposition de Cartan, il existe un unique $\mu \in X_*(T)^+$ de sorte que $g \in G(B_{dR}^+(C))\mu(t)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$. On dit alors que la modification α est de type μ.

Revenons à la situation générale où R est une algèbre affinoïde perfectoïde et $R^\sharp$ un débasculement de R. Une modification

$$\alpha : \mathcal{E}|_{X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'|_{X_S\setminus D_{S^\sharp}}.$$

est dite de type μ si et seulement si pour tout point géométrique $x_{C^b} : C^b \longrightarrow \mathrm{Spa}(R, R^+)$, la modification $x^*_{C^b}\alpha$ est de type μ.

Définition 3.4.1. *Étant donné un triplet (G, μ, b) où G est un groupe réductif sur $\mathbb{Q}_p$, $b \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ et $\mu \in X_*^+(T)$ avec $b \in B(G,\mu)$. Notons E le corps de définition de μ. L'espace de modules de Shtukas* $\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \longrightarrow \mathrm{Spa}(\breve{E})^\diamond$ *est le préfaisceau sur* $\mathrm{Perf}_{\mathbb{F}_p}$ *qui associe à chaque $\breve{\mathbb{Q}}_p$-espace perfectoïde $S^\sharp$, avec un débasculement $(S^\sharp)^b = S$, l'ensemble des modifications*

$$\alpha : \mathcal{E}_b|_{X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1|_{X_S\setminus D_{S^\sharp}}.$$

qui est de type μ' plus petit que μ.

1. Nous utilisons la définition au début du page 120 et le lemme 21.3 ainsi que la question 21.4 sont donc vérifiés.

Le foncteur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ admet une action de $G(\mathbb{Q}_p)$, respectivement de $J_b(\mathbb{Q}_p)$ via $\alpha \longmapsto g\circ\alpha$ pour $g\in G(\mathbb{Q}_p)$, respectivement $\alpha\longmapsto \alpha\circ h^{-1}$ pour $h\in J_b(\mathbb{Q}_p)$.

Puisque $b^\sigma = b^{-1}\cdot b\cdot b^\sigma$ alors $[b]=[b^\sigma]$ dans $B(G)$. Il y a donc un isomorphisme canonique

$$\widetilde{\sigma} : \mathcal{E}_{b^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b.$$

On définit alors la donnée de descente de $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ comme l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{Fr}} : \mathrm{Sht}(G,\mu,b) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Sht}(G,b^\sigma,\mu)\\ \alpha &\longmapsto \alpha\circ\widetilde{\sigma}.\end{aligned}$$

Les actions de $G(\mathbb{Q}_p)$ et $J_b(\mathbb{Q}_p)$ commutent avec la donnée de descente.

Théorème 3.4.2. *[SW17] Étant donné un triplet (G,b,μ) comme ci-dessus alors* $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ *est un diamant localement spatial. De plus, le morphisme $f:\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\longrightarrow \mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond$ est partiellement propre et* $\dim\mathrm{trg}\, f<\infty$.

Démonstration. On a en effet $\mathrm{Sht}(G,\mu,b) = \varprojlim_K \mathrm{Sht}(G,\mu,b)_K$, le théorème 23.1.3 de [SW17] implique alors que $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ est un diamant localement spatial. D'autre part, la proposition 23.2.1 de loc.cit couplée avec 3.3.6 implique que f est partiellement propre et $\dim\mathrm{trg}\, f<\infty$. □

La proposition suivante est bien connue pour les experts.

Proposition 3.4.3. *Soit G un groupe réductif connexe défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $b\in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$. Soient $S=\mathrm{Spa}(R,R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur* $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *ainsi que* $\mathrm{Spa}(R^\sharp,(R^\sharp)^+)$ *un débasculement. Si $\alpha:\mathcal{E}_{b|X_S\backslash D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b|X_S\backslash D_{S^\sharp}}$ est une modification de G-fibrés de type $\mu=0$ alors α s'étend en un isomorphisme de G-fibrés. En particulier on a une identification* $\mathrm{Sht}(G,\mathrm{Id},0)\simeq \underline{G(\mathbb{Q}_p)}$.

Démonstration. D'après le formalisme tanakien, il suffit de démontrer le résultat pour $G=GL_n$.

Supposons tout d'abord que $\mathrm{Spa}(R,R^0)=\mathrm{Spa}(C^b,\mathcal{O}_{C^b})$ où C est un corps complet algébriquement clos. En utilisant le recollement de Beauville-Laszlo, on peut exprimer $\mathcal{E}_b$ sous forme

$$\Big((B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}]\otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p}\breve{\mathbb{Q}}_p^n)^{\varphi\otimes\mathrm{Id}\, b\sigma},\big(B_{dR}^+(C)\big)^n\Big).$$

Comme la modification α est de type 0, on en déduit que $g:=\big(\alpha\otimes\mathrm{Id}_{B_{dR}(C)}\big)$ est donné par un élément dans $GL_n(B_{dR}^+(C))$. En particulier le couple (α,g) est un isomorphisme de $\mathcal{E}_b$.

Le cas particulier où $R=C^b$ couplé avec le lemme 3.4.6 de [Car-Sch] implique le cas général où $\mathrm{Spa}(R,R^+)$ est un espace affinoïde perfectoïde.

Enfin, on voit que $\mathrm{Sht}(G,\mathrm{Id},0)$ classifie les isomorphismes de G-fibré trivial $\mathcal{E}_1$. D'après l'exemple 2.21 de [Far16], on a une identification de diamants $\mathrm{Sht}(G,\mathrm{Id},0)\simeq \underline{G(\mathbb{Q}_p)}$.

□

3.5 Torsions des modifications des G-fibrés

Soient X un schéma et G un X-schéma en groupes. Un G-torseur est un $\mathbb{Q}_p$-morphisme fidèlement plat $\mathcal{T} \longrightarrow X$ muni d'une action $G \times \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}$ sur l'action triviale de X de sorte que, fppf-localement sur X, on a un isomorphisme G-équivariant $\mathcal{T} \approxeq G \times X$.

Lemme 3.5.1. *(lemme 4.6.1 de [KW]) Soit $G \longrightarrow X$ un schéma en groupes réductifs. La catégorie des G-fibrés sur X est équivalente à celle des G-torseurs sur X.*

Soit $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\mathbb{F}_q)$. Considérons maintenant la courbe de Fargues-Fontaine X_S. Pour chaque $b \in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$, on a un G-fibré $\mathcal{E}_b$ sur X_S. Notons $\mathcal{T}_b$ le G-torseur correspondant à $\mathcal{E}_b$ via le lemme 3.5.1. On peut décrire ce G-torseur par la formule

$$\mathcal{T}_b = \mathrm{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \left(H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d}. \tag{3.2}$$

où $\breve{\mathbb{Q}}_p[G]$ est l'algèbre de définition de $G_{\breve{\mathbb{Q}}_p}$. L'action de G sur $\mathcal{T}_b$ est donnée par celle de G sur lui même par translation à droite. Désormais, notons λ_g et ρ_g respectivement la multiplication à gauche par g et à droite par g^{-1}.

Étant donné un groupe réductif connexe G défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $\iota : Z_G^0 \hookrightarrow G$ la composante connexe neutre du centre Z_G. On va construire un morphisme naturel

$$\mathrm{Bun}_G \times \mathrm{Bun}_{Z_G^0} \longrightarrow \mathrm{Bun}_G .$$

D'après le lemme 3.5.1, it suffit de définir le morphisme au niveau des torseurs. Considérons $\mathcal{T}$ un G-torseur ainsi que $\overline{\mathcal{T}}'$ un Z_G^0-torseur sur X. Puisque Z_G^0 est contenu dans le centre de G, on peut munir $\mathcal{T}$ d'une action de Z_G^0 telle que l'action de G et de Z_G^0 commutent. Plus précisément, un élément $g \in Z_G^0$ agit par action de g sur $\mathcal{T}$. Le produit contracté $\mathcal{T} \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{T}}'$ est alors un G-torseur.

Proposition 3.5.2. *Pour $b \in B(G)$ et $h \in B(Z_G^0)$, l'image de $(\mathcal{E}_b, \overline{\mathcal{E}}_h)$ via le morphisme ci-dessus est $\mathcal{E}_{b\overline{h}}$ où $\overline{h} = \iota(h)$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{T}}_h = \mathcal{T}_{b\overline{h}}$ pour $b \in B(G)$ et $h \in B(Z_G^0)$.

D'après la formule (3.2) on a

$$\mathcal{T}_b = \mathrm{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \left(H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \right)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d}.$$

où l'action de G sur $\mathcal{T}_b$ est donnée par action de G sur lui même par translation à droite et action de Z_G^0 est donnée par translation à gauche.

On a le diagramme commutatif suivant où μ désigne la multiplication de G.

$$\begin{array}{ccc} G_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \times (Z_G^0)_{\breve{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{\mu} & G_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \\ {\scriptstyle \lambda_b \times \rho_{\overline{h}^{-1}}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \lambda_{b\overline{h}}} \\ G_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \times (Z_G^0)_{\breve{\mathbb{Q}}_p} & \xrightarrow{\mu} & G_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \end{array}$$

On en déduit que la co-multiplication $\mu : \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \longrightarrow \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0]$ induit l'isomorphisme voulu $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{T}_h = \mathcal{T}_{b\overline{h}}$. □

Pour T un tore défini sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$, d'après Kottwitz on a une bijection

$$\kappa : B(T)_{\text{basic}} = B(T) \xrightarrow{\sim} X_*(T)_\Gamma.$$

On note b_λ l'élément correspondant à un $\lambda \in X_*(T)_\Gamma$ via cette bijection. On voit également que $B(T, \lambda) = \{b_\lambda\}$, en particulier pour C un corps algébriquement clos, il existe une modification de type λ

$$\alpha : \overline{\mathcal{E}}_{b|X_{C^b} \setminus D_C} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_{C^b} \setminus D_C}$$

si et seulement si $\overline{\mathcal{E}}_b \simeq \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda}$.

Étant données deux modifications α, α' de type $\mu = 0 \in X_*(T)$, d'après la proposition 3.5.2, on peut construire une autre modification qui est aussi de type $\mu = 0$

$$\overline{\mathcal{E}}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \times_T \overline{\mathcal{E}}_1 \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} \overline{\mathcal{E}}_1 \times_T \overline{\mathcal{E}}_1 = \mathcal{E}_1.$$

En utilisant cette construction, on peut munir l'espace de Shtukas $\mathrm{Sht}(T, 0)$ d'une structure de diamant en groupes. En effet, pour $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ainsi que $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$ un débasculement. Étant données deux modifications de type $\mu = 0$

$$\alpha, \beta : \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}},$$

on définit le produit de α et β par la formule

$$\alpha \times \beta : \overline{\mathcal{E}}_1 = \overline{\mathcal{E}}_1 \times_T \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\alpha \times \beta} \overline{\mathcal{E}}_1 \times_T \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} = \overline{\mathcal{E}}_1.$$

Alors $\mathrm{Sht}(T, 0)$ avec ce produit est un diamant en groupes. De plus, d'après la proposition 3.4.3, on a une identification de diamants en groupes $\mathrm{Sht}(T, 0) \simeq \underline{T(\mathbb{Q}_p)}$.

Lemme 3.5.3. *Pour une modification $\alpha : \mathcal{E}_{|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \longrightarrow \mathcal{E}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$ de G-torseurs et deux modifications $\beta, \gamma : \overline{\mathcal{E}}_{|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$ de Z_G^0-torseurs on a $\big(\alpha \times \beta\big) \times \gamma = \alpha \times \big(\beta \times \gamma\big)$ comme modifications de G-torseurs.*

Démonstration. Il s'agit d'utiliser le lemme 3.5.1 pour calculer explicitement les isomorphismes des torseurs. □

Étant donné un groupe réductif connexe G défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $\iota : Z_G^0 \hookrightarrow G$ la composante connexe du tore central. Le morphisme ι induit un morphisme $\theta : X_*(Z_G^0) \longrightarrow X_*(T)^+$ où T est le tore maximal de G.

Soient $S = \mathrm{Spa}(R, R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ainsi que $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp, (R^\sharp)^+)$ un débasculement. Si l'on dispose d'une modification $\alpha : \overline{\mathcal{E}}_{h|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$ de Z_G^0-fibrés de type λ alors pour tout G-fibré $\mathcal{E}_b$ et tout isomorphisme $f : \mathcal{E}_b \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b$ on a une modification de G-fibrés

$$\overline{\alpha} : \mathcal{E}_{b\overline{h}} \simeq \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{h|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{f \times \alpha} \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \simeq \mathcal{E}_b.$$

De même, pour une modification de G-fibrés $\beta : \mathcal{E}_b \longrightarrow \mathcal{E}_1$ de type μ, on peut construire une modifications de G-fibrés

$$\overline{\beta} : \mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\beta \times \mathrm{Id}} \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}} = \mathcal{E}_1.$$

Proposition 3.5.4. *Supposons que G est déployé sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$.*

(i) La modification $\overline{\alpha} : \mathcal{E}_{b\overline{h}} \longrightarrow \mathcal{E}_b$ est de type $\theta(\lambda)$.

(ii) La modification $\overline{\beta}$ est de type μ.

Démonstration. D'après le formalisme tanakien, il suffit de démontrer le résultat pour toutes les représentations $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ de G. Puisque l'on est dans le cas de caractéristique 0 et que G est réductif, la catégorie $\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G$ est semi-simple. Il suffit donc de traiter les représentations irréductibles. Lorsque $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ est irréductible, on a $\rho(Z_G^0) = Z_{GL(V)}$. On obtient également un cocaractère de $Z_{GL(V)}$

$$\rho \circ \lambda : \mathbb{G}_{m,\overline{\mathbb{Q}}_p} \longrightarrow Z_{GL(V),\overline{\mathbb{Q}}_p}.$$

On peut supposer que $G = GL(V)$. On a alors $Z_G^0 = GL_1$ et $X_*(Z_G^0) \simeq \mathbb{Z}$, de plus le cocaractère λ correspond à un $d \in \mathbb{Z}$. On en déduit que $h = [p^d] \in B(Z_G^0)$ puisque la modification $\alpha : \overline{\mathcal{E}}_{h|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \longrightarrow \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}$ est de type λ.

Pour calculer le type de $\overline{\alpha}$, il suffit de considérer la cas $R = C^b$ où C est un corps complet algébriquement clos. En vue du recollement de Beauville-Laszlo, on a la description suivante.

$$\overline{\mathcal{E}}_{p^d} = \Big((B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes p^d \sigma}, B_{dR}^+(C) \Big) \qquad \overline{\mathcal{E}}_1 = \Big((B_{C^b}[t_S^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes \mathrm{Id}\, \sigma}, B_{dR}^+(C) \Big).$$

La modification α de type λ est alors donnée par l'isomorphisme

$$\begin{gathered}(B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes p^d \sigma} \longrightarrow (B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p)^{\varphi \otimes \mathrm{Id}\, \sigma} \\ x \longmapsto t_{C^b}^{-d} x.\end{gathered}$$

D'après la formule (3.2), la modification α s'écrit en termes de Z_G^0-torseurs

$$\begin{gathered}\overline{\mathcal{T}}_{p^d|X_{C^b} \setminus D_C} \simeq \Big(B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0] \Big)^{\varphi \otimes p^d \sigma} \xrightarrow{\sim} \Big(B_{C^b}[t_{C^b}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0] \Big)^{\varphi \otimes \mathrm{Id}\, \sigma} \simeq \overline{\mathcal{T}}_{1|X_{C^b} \setminus D_C} \\ x \otimes x' \longmapsto t_{C^b}^{-d} x \otimes x'.\end{gathered}$$

En utilisant le diagramme 3.5, la modification $\overline{\alpha}$ s'écrit en termes de G-torseurs

$$\mathcal{T}_{p^d b|X_{C^\flat}\setminus D_C} \simeq \Big(B_{C^\flat}[t_{C^\flat}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[G]\Big)^{\varphi\otimes p^d b\sigma} \xrightarrow{\sim} \Big(B_{C^\flat}[t_{C^\flat}^{-1}] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[G]\Big)^{\varphi\otimes \mathrm{Id}\,\sigma} \simeq \mathcal{T}_{1|X_{C^\flat}\setminus D_C}$$
$$x\otimes x' \longmapsto t_{C^\flat}^{-d}x\otimes x'.$$

Finalement la modification $\overline{\alpha}$ s'écrit sous la forme

$$(B_{C^\flat}[t_{C^\flat}^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\varphi\otimes p^d b\sigma} \longrightarrow (B_{C^\flat}[t_{C^\flat}^{-1}] \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^{\varphi\otimes \mathrm{Id}\,\sigma}$$
$$x \longmapsto t_{C^\flat}^{-d}x.$$

Il est alors aisé de voir que la modification $\overline{\alpha}$ est de type $(d,\cdots,d) \in \mathbb{Z}^{\dim_{\mathbb{Q}_p} V} = X_*(GL(V))$, autrement dit $\overline{\alpha}$ est de type $\theta(\lambda)$, ce qui démontre le point (i).

On démontre le point (ii) par le même argument. □

On peut ainsi utiliser la proposition 3.5.4 pour définir une action de $\mathrm{Sht}(Z_G^0, 0) \simeq \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$ sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ et sur $\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$. Soient $S = \mathrm{Spa}(R,R^+)$ un espace affinoïde perfectoïde sur $\mathrm{Spa}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ainsi que $S^\sharp = \mathrm{Spa}(R^\sharp,(R^\sharp)^+)$ un débasculement. Étant donnée une modification de type $\mu = 0$ de Z_G^0-fibrés $\alpha : \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$ et une modification de type μ de G-fibrés $\alpha' : \mathcal{E}_{b|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$, on définit l'action de α sur α' par la formule

$$\mathcal{E}_b = \mathcal{E}_b \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\alpha'\times\alpha} \mathcal{E}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}} = \mathcal{E}_1.$$

D'après la proposition 3.5.4, $\alpha'\times\alpha$ est une modification de type μ. Le lemme 3.5.3 implique que cela définit une action de $\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$ sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$.

De même, si l'on a une modification de type λ de Z_G^0-fibrés $\alpha' : \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$, on peut définir une autre modification de type λ par la formule

$$\overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda} = \overline{\mathcal{E}}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\alpha^{-1}\times\alpha'} \overline{\mathcal{E}}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}} = \overline{\mathcal{E}}_1.$$

où les actions de Z_G^0 sur $\overline{\mathcal{E}}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda}$ et $\overline{\mathcal{E}}_1 \times_{Z_G^0} \overline{\mathcal{E}}_1$ sont induites par celle sur la première composante.

Remarque 3.5.5. Étant donné un élément $g \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$ correspondant à une modification de type $\mu = 0$ de Z_G^0-fibrés $\alpha : \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$ alors action de α est celle de $\iota(g)$ où $\iota : Z_G^0(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ est l'injection canonique. En effet, on a $\alpha'\times\alpha = \Big(\alpha'\circ \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}\Big) \times \Big(\mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}_1}}\circ\alpha\Big) = \Big(\alpha'\times \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}_1}}\Big)\circ\Big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_1}\times\alpha\Big) = \alpha'\circ\iota(g)$.

Lemme 3.5.6. *Soient T un tore défini sur $\mathbb{Q}_p$ et $\alpha,\beta : \mathcal{E}_\lambda \longrightarrow \mathcal{E}_1$ deux modifications de T-fibrés de type λ. Alors il existe une modification $\gamma : \mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ (de type 0) de sorte que $\beta = \alpha\times\gamma$.*

Démonstration. Soit $\alpha' : \mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \longrightarrow \mathcal{E}_1$ une modification de T-fibrés de type λ^{-1} (une telle modification existe). Considérons la modification suivante

$$\alpha \times \alpha' : \mathcal{E}_\lambda \times_T \mathcal{E}_{\lambda^{-1}|X_S \setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\alpha\times\alpha'} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$$

Puisque $\mathcal{E}_\lambda \times_T \mathcal{E}_{\lambda^{-1}} = \mathcal{E}_1$ (d'après la proposition 3.5.2), la modification $\alpha \times \alpha'$ est en fait une modification de type 0 de $\mathcal{E}_1$. Posons $\alpha' \times \left(\alpha \times \alpha'\right)^{-1} \times \beta$ le produit contracté

$$\mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_\lambda \xrightarrow{\alpha'\times\left(\alpha\times\alpha'\right)^{-1}\times\beta} \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_1.$$

En particulier d'après la proposition 3.5.2, $\mathcal{E}_{\lambda^{-1}} \times_T \mathcal{E}_1 \times_T \mathcal{E}_\lambda = \mathcal{E}_1$ et on voit que $\alpha' \times \left(\alpha\times\alpha'\right)^{-1} \times \beta$ est une modification de type 0 de $\mathcal{E}_1$. Finalement, d'après le lemme 3.5.3, on a

$$\alpha \times \Big(\alpha' \times \left(\alpha\times\alpha'\right)^{-1} \times \beta\Big) = \Big(\mathrm{Id} \times \beta\Big) = \beta$$

ce qui termine la démonstration. □

3.6 Modifications centrales des espaces de Shtukas

Dans cette section,en utilisant la proposition 3.5.4, on prouve un énoncé géométrique reliant deux espaces de modules de Shtukas. On donnera également une relation cohomologique de ces espaces.

Puisque le produit fibré de diamants existe ([S17], Prop. 11.4), alors $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$ est un diamant. C'est la faisceautisation du pré-faisceau sur $\mathrm{Perf}_{\breve{\mathbb{Q}}_p,\text{pro-ét}}$ qui associe à chaque $\breve{\mathbb{Q}}_p$-espace perfectoïde $S^\sharp$, avec $(S^\sharp)^b = S$, l'ensemble des couples (α,β) où $\alpha : \mathcal{E}_{b|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$ est une modification de G-fibrés de type μ' plus petit que μ et $\beta : \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda|X_S\setminus D_{S^\sharp}} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{1|X_S\setminus D_{S^\sharp}}$ est une modification de G-fibrés de type λ. Comme le diamant en groupes $\mathrm{Sht}(Z_G^0, 0) \simeq \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$ agit sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ et $\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$, on peut définir le faisceau quotient.

Définition 3.6.1. *On définit* $\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$ *comme le faisceau quotient. Plus précisément, c'est la faisceautisation du pré-faisceau sur* $\mathrm{Perf}_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ *qui associe à chaque $\breve{\mathbb{Q}}_p$-espace perfectoïde $S^\sharp$, avec $(S^\sharp)^b = S$, l'ensemble* $\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\big(S^\sharp, S\big)/\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}\big(S^\sharp,S\big)$.

Le groupe $G(\mathbb{Q}_p)\times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ agit sur le diamant $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$, on peut utiliser cette action pour définir une action de ce groupe sur le faisceau $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$. Un élément $g\in G(\mathbb{Q}_p)$ correspond à un isomorphisme $\mathcal{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_1$ et g agit sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ par composition avec cet isomorphisme. On définit alors l'action de g sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$ par la formule $g\Big((\alpha,\beta)\Big) = \Big(g\circ\alpha,\beta\Big)$. Cette action est bien définie car $(g\circ\alpha)\times\gamma = (g\times \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1})\circ(\alpha\times\gamma) = g\circ(\alpha\times\gamma)$ pour tout $\gamma\in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$.

De la même manière, on définit une action de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ [2] sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}}$

2. $\overline{b}_\lambda$ étant un élément central de $G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$, on a alors $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) = \mathrm{J}_{b\overline{b}_\lambda}(\mathbb{Q}_p)$.

$\mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)$. Il y a des isomorphismes canoniques

$$\sigma_b : \mathcal{E}_{b^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_b \qquad \sigma_{b_\lambda} : \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda^\sigma} \xrightarrow{\sim} \overline{\mathcal{E}}_{b_\lambda}.$$

On définit alors la donnée de descente de $\mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ comme l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr} : \mathrm{Sht}(G, b^\sigma, \mu) \times_{\mathrm{Sht}(Z_G^0, 0)} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{Sht}(G, b^\sigma, \mu) \times_{\mathrm{Sht}(Z_G^0, 0)} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda) \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto (\alpha \circ \sigma_b, \beta \circ \sigma_{b_\lambda}). \end{aligned}$$

On vérifie aisément que cela est bien défini.

Lemme 3.6.2. *Notons $\sigma_{b\bar{b}_\lambda} : \mathcal{E}_{(b\bar{b}_\lambda)^\sigma} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda}$ l'isomorphisme canonique. On a alors*

$$\sigma_b \times \sigma_{\bar{b}_\lambda} = \sigma_{b\bar{b}_\lambda}.$$

Démonstration. D'après la formule (3.2) on a

$$\mathcal{T}_b = \mathrm{Proj} \bigoplus_{d \geq 0} \Big(H^0(Y_S, \mathcal{O}_{Y_S}) \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \Big)^{\varphi_S \otimes b\sigma = \pi^d},$$

et de même pour le torseur $\mathcal{T}_{b^\sigma}$. On en déduit que l'isomorphisme canonique $\sigma_b : \mathcal{T}_{b^\sigma} \simeq \mathcal{T}_b$ est donné par $\mathrm{Id}_S \otimes b$.

D'après la proposition 3.5.2, on sait que la co-multiplication $\mu : \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \longrightarrow \breve{\mathbb{Q}}_p[G] \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \breve{\mathbb{Q}}_p[Z_G^0]$ induit l'isomorphisme $\mathcal{T}_b \times_{Z_G^0} \mathcal{T}_{b_\lambda} = \mathcal{T}_{b\bar{b}_\lambda}$. On en déduit que $\sigma_b \times \sigma_{\bar{b}_\lambda} = \sigma_{b\bar{b}_\lambda}$. □

Théorème 3.6.3. *Il y a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.*

$$\mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot (\theta(\lambda))).$$

Démonstration. Pour une $\breve{\mathbb{Q}}_p$-algèbre perfectoïde $R^\sharp$ avec $(R^\sharp)^b = R$ et un couple $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)\big(R^\sharp, R\big)$, on peut construire, d'après la proposition 3.5.2, une modification

$$\alpha \times \beta : \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda | X_S \setminus D_{S^\sharp}} \longrightarrow \mathcal{E}_{1 | X_S \setminus D_{S^\sharp}}$$

D'autre part, en écrivant $\alpha = \mathrm{Id}_{\mathcal{E}_b} \circ \alpha$ et $\beta = \beta \circ \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1}$, on voit que

$$\alpha \times \beta = \Big(\alpha \times \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1} \Big) \circ \Big(\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta \Big).$$

où $\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta$ et $\alpha \times \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1}$ sont des modifications de G-fibrés

$$\mathrm{Id}_{\mathcal{E}_b} \times \beta : \mathcal{E}_{b\bar{b}_\lambda} \longrightarrow \mathcal{E}_b \qquad \alpha \times \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_1} : \mathcal{E}_b \longrightarrow \mathcal{E}_1$$

qui sont respectivement de type $\theta(\lambda)$ et μ d'après la proposition 3.5.4.

Afin de calculer le type de $\alpha \times \beta$, on utilise la décomposition de Cartan

$$G(B_{dR}(C)) = \coprod_{\eta \in X_*(T)/W} G(B_{dR}^+(C))\eta(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$$

où C est un corps perfectoïde algébriquement clos et T un tore maximal de G.

Pour $g \in G(B_{dR}^+(C))\mu(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ et $h \in G(B_{dR}^+(C))\theta(\lambda)(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$, on voit que $gh \in G(B_{dR}^+(C))\mu \cdot \theta(\lambda)(\xi)^{-1}G(B_{dR}^+(C))$ car $\theta(\lambda)(\xi)^{-1}$ est central. Autrement dit la modification $\alpha \times \beta$ est de type $\mu \cdot \theta(\lambda)$.

On a construit un morphisme $\Phi : \mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda) \longrightarrow \mathrm{Sht}(G, b\bar{b}_\lambda, \mu \cdot \theta(\lambda))$. Montrons ensuite que ce morphisme passe au quotient par $\mathrm{Sht}(Z_G^0, 0)$.

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)$ et $\gamma \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}$, il faut montrer que $\Big(\alpha \times \gamma\Big) \times \Big(\gamma^{-1} \times \beta\Big) = \alpha \times \beta$. Or d'après le lemme 3.5.3, cette identité est vérifiée.

On va montrer que Φ est en fait un isomorphisme. Il s'agit de montrer que $\Phi_{R^\sharp,R}$ est un isomorphisme pour tous les couples $(R^\sharp, R)$. On aura besoin de l'ensemble auxiliaire suivant

$$S = \Big\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathrm{Sht}(G, \mu{\cdot}\theta(\lambda), b\bar{b}_\lambda) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda^{-1}) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)(R^\sharp, R)\Big\} / \sim$$

où $(\alpha, \beta, \gamma) \sim (\alpha', \beta', \gamma')$ si, et seulement si, il existe $\theta \in \mathrm{Sht}(Z_G^0, 0)(R^\sharp, R)$ de sorte que $\alpha' = \alpha \times \theta,\ \beta' = \theta^{-1} \times \beta$ ou $\beta' = \beta \times \theta,\ \gamma' = \theta^{-1} \times \gamma$.

On a donc une application canonique

$$\begin{aligned} f: \quad S &\longrightarrow \mathrm{Sht}(G, \mu \cdot \theta(\lambda), b\bar{b}_\lambda)(R^\sharp, R) \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto \alpha \times \beta \times \gamma. \end{aligned}$$

On montre que cela est une bijection. Étant donné une modification $\alpha \in \mathrm{Sht}(G, \mu \cdot \theta(\lambda), b\bar{b}_\lambda)(R^\sharp, R)$, on choisit β et γ des modifications de Z_G^0-fibrés de type λ^{-1} et λ respectivement. Puisque $\beta \times \gamma \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}(R^\sharp, R)$ on peut choisir $\delta \in \underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}(R^\sharp, R)$ de sorte que $\delta \times \beta \times \alpha = \mathrm{Id}_{\overline{\mathcal{E}}_{1|X_S \setminus D_{S^\sharp}}}$. On a alors $f(\alpha, \delta \times \beta, \gamma) = \alpha$. Autrement dit f est une surjection. Le même type d'argument couplé avec le lemme 3.5.6 montre également que f est injective, finalement on en déduit que f est une bijection.

Maintenant on définit l'application $\Phi^{-1}_{R^\sharp,R}$ par la formule

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}_{R^\sharp,R}: \quad S &\longrightarrow \mathrm{Sht}(G, \mu, b) \times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond} \mathrm{Sht}(Z_G^0, \lambda)(R^\sharp, R) \\ (\alpha, \beta, \gamma) &\longmapsto (\alpha \times \beta, \gamma). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $\Phi^{-1}_{R^\sharp,R}$ est l'application inverse de $\Phi_{R^\sharp,R}$. Reste finalement à voir que $\Phi_{R^\sharp,R}$ commute avec toutes les structures. La commutativité avec l'action de $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$ est claire et la commutativité avec les données de descentes résulte du lemme 3.6.2. $\square$

On aimerait ensuite descendre au niveau fini l'énoncé géométrique de la proposition 3.6.3. Considérons un sous groupe compact $K \subset G(\mathbb{Q}_p)$ et posons $K_Z := K \cap Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ lequel est un sous groupe compact de $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$. Puisque $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ est commutatif, $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ est encore un groupe (discret).

Corollaire 3.6.4. Il y a un isomorphisme $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant de faisceaux pro-étale qui commute avec les données de descentes.

$$\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\big) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z}} \big(\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z\big) \longrightarrow \mathrm{Sht}(G,\mu\cdot\theta(\lambda),b\bar{b}_\lambda)/K.$$

De plus, l'action de $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ sur $\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\big) \times \big(\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z\big)$ est sans point fixe.

Démonstration. D'après la remarque 3.5.5, l'action de $g \in \mathbb{Z}_G^0(\mathbb{Q}_p)$ sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ se fait via action de $\iota(g)$ où $\iota : Z_G^0(\mathbb{Q}_p) \hookrightarrow G(\mathbb{Q}_p)$ est l'injection canonique. De plus $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ est commutatif, on en déduit que l'action (induite) de $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K$ et sur $\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z$ est bien définie.

D'après la proposition 3.6.3, il y a un isomorphisme $\mathrm{J}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant qui commute avec les données de descentes

$$\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\Big)/K \longrightarrow \mathrm{Sht}(G,b\bar{b}_\lambda,\mu\cdot\theta(\lambda))/K.$$

Il reste à comparer l'espace $\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z}} \Big(\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z\Big)$ avec le quotient $\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\Big)/K$. Il suffit de comparer au niveau des points.

Montrons tout d'abord que le morphisme canonique

$$\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\Big)/K \longrightarrow \Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda) \quad (3.3)$$

est un isomorphisme (ensembliste). En effet, (x,y) et (z,t) dans $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)$ sont dans la même classe dans l'ensemble à gauche si et seulement s'il existe $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ et $k \in K$ de sorte que $z = x\cdot g\cdot k$ et $t = g^{-1}\cdot y$.

De même, (x,y) et (z,t) sont dans la même classe dans l'ensemble à droite si et seulement s'il existe $g \in Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ et $k \in K$ de sorte que $z = x\cdot k\cdot g$ et $t = g^{-1}\cdot y$. Puisque $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)$ est contenu dans le centre de $G(\mathbb{Q}_p)$, on voit que $g\cdot k = k\cdot g$. On en déduit que le morphisme (3.3) est un isomorphisme.

L'action de K_Z est triviale sur $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K$ alors $\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda) \simeq \Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big) \times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}} \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z$. Maintenant, l'action de K_Z étant triviale sur $\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big) \times \mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z$, on en déduit que

$$\Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)}}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z \simeq \Big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\Big)\times_{\underline{Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z}}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z.$$

D'autre part, l'action de $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ sur $\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z$ étant sans point fixe, on en déduit qu'il est de même pour l'action de $Z_G^0(\mathbb{Q}_p)/K_Z$ sur $\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)/K\big) \times \big(\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)/K_Z\big)$. $\square$

Remarque 3.6.5. Notons $\overline{\Phi}$ le changement de base vers $\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond$ du morphisme Φ : $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)^\diamond}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\longrightarrow \mathrm{Sht}(G,b\bar{b}_\lambda,\mu\cdot\theta(\lambda))$. On remarque que $\overline{\Phi}$ admet une section. En effet, $\mathbb{C}_p$ étant un corps perfectoïde, on peut choisir une modification α dans $\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)(\mathbb{C}_p,\mathbb{C}_p^b)$ et on a également $\alpha^{-1}\in\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda^{-1})(\mathbb{C}_p,\mathbb{C}_p^b)$. Une section de $\overline{\Phi}$ est donnée par

$$\mathrm{Sht}(G,\mu\cdot\theta(\lambda),b\bar{b}_\lambda)\ni\beta\longmapsto\big(\beta\times\alpha^{-1},\alpha\big)\in\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda).$$

En particulier, on a un isomorphisme (qui, à priori, ne commute pas avec les données de descentes)

$$\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond}\mathrm{Sht}(Z_G^0,\lambda)\simeq\mathrm{Sht}(G,\mu\cdot\theta(\lambda),b\bar{b}_\lambda)\times_{\mathrm{Spa}(\mathbb{C}_p)^\diamond}\mathrm{Sht}(Z_G^0,1).$$

Il y a également un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p)\times\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant entre $\mathrm{Sht}(G,\mu\cdot\theta(\lambda),b\bar{b}_\lambda)_{\mathbb{C}_p}$ et $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)_{\mathbb{C}_p}$ donné par

$$\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\ni\gamma\longmapsto\alpha\times\gamma\in\mathrm{Sht}(G,\mu\cdot\theta(\lambda),b\bar{b}_\lambda)$$

qui, à priori, ne commute pas avec les données de descentes.

3.7 Application à la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink

Dans ce paragraphe, on va calculer la cohomologie de quelques espaces de Rapoport-Zink non ramifiés en utilisant les résultats des paragraphes précédents et [Boyer09], [Boyer14].

Considérons un triplet (G,μ,b) où G est un groupe réductif (non ramifié) sur $\mathbb{Q}_p$, $b\in G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ et $\mu\in X_*^+(T)$ minuscule avec $b\in B(G,\mu)$. On suppose que (G,μ,b) correspond à une donnée de Rapoport-Zink de type EL. À une telle donnée (G,μ,b), on associe un groupe p-divisible $\mathbb{X}$ avec structures additionnelles. Notons $\mathcal{M}(G,\mu,b)$ le foncteur qui classifie les déformations par quasi-isogénies de $\mathbb{X}$ avec structures additionnelles. Ce foncteur est représentable par un schéma formel défini sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\breve{\mathbb{Q}}_p})$ que l'on notera encore $\mathcal{M}(G,\mu,b)$.

Considérons ensuite l'espace rigide $\breve{\mathcal{M}}(G,\mu,b)$ défini sur $\breve{\mathbb{Q}}_p$ associé au schéma formel $\mathcal{M}(G,\mu,b)$. Pour chaque sous groupe compact ouvert $K_p\subset G(\mathbb{Z}_p)$, il existe un espace rigide $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G,\mu,b)$ qui est défini comme le revêtement étale de $\breve{\mathcal{M}}(G,\mu,b)$ classifiant les $\mathcal{O}_F$ trivialisations modulo K_p du module de Tate p-adique de groupe p-divisible universel sur $\breve{\mathcal{M}}(G,\mu,b)$. On a donc une tour d'espaces rigides $\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G,\mu,b)\big)_{K_p}$ qui possède à la fois une action de $G(\mathbb{Q}_p)\times J_b(\mathbb{Q}_p)$ et une donnée de descente.

Il y a un espace de module de Shtukas $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)$ associé à chaque donnée (G,μ,b). On a une identification de diamants sur $\mathrm{Spa}(\breve{\mathbb{Q}}_p)$: $\mathrm{Sht}(G,\mu,b)=\varprojlim_{K_p}\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\big)/K_p$.

Puisque μ est minuscule, d'après le théorème 24.2.5 de [SW17], on a

$$\big(\mathrm{Sht}(G,\mu,b)\big)/K_p=\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G,\mu,b)\big)^\diamond \tag{3.4}$$

Soit X un $\mathbb{C}_p$-espace analytique tel que $|X|$ est séparé. Un faisceau $\mathbb{Z}_\ell$-adique sur $X_{\text{ét}}$ est un système projectif $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de faisceaux en $\mathbb{Z}_\ell$-module sur $X_{\text{ét}}$ vérifiant $\ell^n\mathcal{F}_n = 0$. D'après [Far04], pour un faisceau $\mathbb{Z}_\ell$-adique $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on définit le foncteur sections globales à support compact par la formule

$$\Gamma_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = \{(s_n)_n \in \lim_{\leftarrow} \Gamma(X, \mathcal{F}_n) | \overline{\cup_n \mathrm{supp}(s_n)} \text{ est compact}\}.$$

On posera $H^q_c(X, (\mathcal{F}_n)_n) = R^q\Gamma_c(X, \bullet)((\mathcal{F}_n)_n)$.

Soit $K_p \subset G(\mathbb{Z}_p)$ un niveau. D'après [Far04], on peut montrer que

$$H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Z}_\ell) = \varinjlim_{V} \varprojlim_{n} H^\bullet_c(V \otimes_{\breve{\mathbb{Q}}_p} \mathbb{C}_p, \mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z})$$

où V parcourt les ouverts relativement compacts de $\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b)$ et où $\ell \neq p$ est un nombre premier. On note également

$$H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Q}_\ell) := H^\bullet_c(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}(G, \mu, b), \mathbb{Z}_\ell) \otimes \mathbb{Q}_\ell.$$

Exemple 3.7.1. ([Far04]) Soit Z un tore non ramifié et $K_Z \subset Z(\mathbb{Q}_p)$ un sous groupe compact. Alors, on a

$$H^q_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \mathrm{Id}), \mathbb{Q}_\ell\big) = \begin{cases} \mathcal{C}^\infty_c\big(Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z, \mathbb{Q}_\ell\big) & \text{si q} = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et donc

$$\varinjlim_{K_Z} H^0_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \mathrm{Id}), \mathbb{Q}_\ell\big) = \mathcal{C}^\infty_c(Z(\mathbb{Q}_p), \mathbb{Q}_\ell)$$

où action de $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Z}(\mathbb{Q}_p)$ se fait par la représentation régulière. L'action du groupe de Weil W_E est l'action triviale. D'après la remarque 3.6.5, il y a un isomorphisme $Z(\mathbb{Q}_p) \times \mathbb{Z}(\mathbb{Q}_p)$-équivariant $\mathrm{Sht}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sht}(Z, 1, \mathrm{Id})_{\mathbb{C}_p}$. Il y a donc des isomorphismes $Z(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$H^q_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, 1, \mathrm{Id}), \mathbb{Q}_\ell\big) = H^q_c\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)), \mathbb{Q}_\ell\big).$$

On considère maintenant les triplets (G, μ, b) tels que

- $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$ où F est l'unique extension non ramifiée de degré d de $\mathbb{Q}_p$ et V est un F-espace vectoriel de dimension n,
- μ est un cocaractère minuscule de G. Un tel μ est déterminé par des couples d'entiers $(p_\tau, q_\tau)_{\tau\in I}$ où $I = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}_p}(F, \overline{\mathbb{Q}}_p)$. On suppose de plus que
  - Il existe $\tau_0 \in I$ tel que $(p_{\tau_0}, q_{\tau_0}) = (1, n-1)$,
  - Pour $\tau \neq \tau_0$ on a $(p_\tau, q_\tau) = (0, n)$ ou $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$.
- $b \in B(G, \mu)$ est l'unique élément basique.

Pour un tel triplet, on a $\mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p) = D_{n/F}^\times$, le groupe des inversibles de l'algèbre de division d'invariant $\frac{1}{n}$, de centre F. Le corps de définition de μ est F. On note encore $J \subset I \backslash \{\tau_0\}$ l'ensemble de $\tau \neq \tau_0$ tel que $(p_\tau, q_\tau) = (n, 0)$. Les espaces de Rapoport-Zink associés sont non ramifiés de type EL. Par la suite, on notera $\mathrm{Sht}(\mu)$ (resp. $\breve{\mathcal{M}}_K^\mu$) pour $\mathrm{Sht}(G, \mu, b)$ (resp. $\breve{\mathcal{M}}_K(G, \mu, b)$). Lorsque la signature $\mu_{\mathcal{LT}} = (1, n-1), (0, n), \cdots, (0, n)$, on retrouve la tour de Lubin-Tate. Pour σ une représentation irréductible de $D_{n/F}^\times$, on notera $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^\mu)[\sigma] = \mathrm{Hom}_{D_{n/F}^\times}\big(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^\mu, \mathbb{Q}_\ell), \sigma\big)$.

Définition 3.7.2. *[Boyer09]*

- *Soient π_1 et π_2 des représentations de respectivement $GL_{n_1}(F)$ et $GL_{n_2}(F)$, on note $\pi_1 \times \pi_2$ l'induite parabolique $\mathrm{Ind}_{P_{n_1, n_1+n_2}(F)}^{GL_{n_1+n_2}(F)}(\pi_1\{n_2/2\} \otimes \pi_2\{-n_1/2\})$.*
- *Soit g un diviseur de $n = sg$ et π une représentation cuspidale irréductible de $GL_g(F)$:*
  - *$\pi\{\frac{1-s}{2}\} \times \pi\{\frac{3-s}{2}\} \times \cdots \times \pi\{\frac{s-1}{2}\}$ possède un unique quotient (resp. sous espace) irréductible. C'est une représentation de Steinberg (resp. de Speh) généralisée notée habituellement $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$).*
  - *$\mathrm{St}_{s-i}(\pi)\{\frac{-i}{2}\} \times \mathrm{Speh}_i(\pi)\{\frac{s-i}{2}\}$ possède un unique sous espace irréductible que l'on note $\mathrm{LT}_\pi(s, i)$. En particulier, pour $i = 0$ (resp. i = s-1), on retrouve $\mathrm{St}_s(\pi)$ (resp. $\mathrm{Speh}_s(\pi)$)*
- *Pour π une représentation irréductible cuspidale de $GL_g(F)$ et $t > 0$, $\pi[t]_D$ désignera la représentation $\mathrm{JL}^{-1}(\mathrm{St}_t(\pi))^\vee$ de $D_{n/F}^\times$.*

Théorème 3.7.3. *Pour tout diviseur g de $n = gs$ et toute représentation irréductible cuspidale π de $GL_g(F)$, on a alors des isomorphismes $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$-équivariants*

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^{n-1-i}(\breve{\mathcal{M}}_K^\mu)[\pi[s]_D] = \begin{cases} \mathrm{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) |\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau \in J} \omega_i \circ ({}^\tau \mathrm{rec}_F^{-1}) & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0 \end{cases}$$

où ω_i est le caractère central de $\mathrm{LT}_\pi(s, i)$ et rec_F^{-1} est le morphisme de réciprocité d'Artin et où ${}^\tau \mathrm{rec}_F^{-1} := \tau \cdot \mathrm{rec}_F^{-1} \cdot \tau^{-1}$.

Remarque 3.7.4. Tout énoncé valable sur l'espace de Lubin-Tate trouvera son analogue dans la situation plus générale précédente. En particulier, dans [Boyer14] il est annoncé que les $\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}^{\mu_{\mathcal{LT}}}, \mathbb{Z}_\ell)$ sont $\mathbb{Z}_\ell$-libres, ce qui impliquerait la même propriété pour $\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^\bullet(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu, \mathbb{Z}_\ell)$.

Démonstration. On exploitera les résultats obtenus dans les sections précédentes pour calculer la cohomologie de la tour $\big(\breve{\mathcal{M}}_{K_p}^\mu\big)_{K_p}$. Il s'agit de trouver les relations de ce dernier avec la tour de Lubin-Tate. Tout d'abord, d'après [Boyer09], on a des isomorphismes $G(\mathbb{Q}_p) \times W_F$-équivariants

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^{n-i-1}(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})[\pi[s]_D] = \begin{cases} \mathrm{LT}_\pi(s, i) \otimes \mathcal{L}(\pi) |\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} & 0 \leq i < s \\ 0 & i < 0. \end{cases}$$

Le groupe $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_F(V)$ est déployé sur F et $G_F(F) \simeq \prod_{\tau \in I} GL_n(F)$. Le centre de G est $Z = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}_p} GL_1$ et il est aussi déployé sur F : $Z_F \simeq \prod_{\tau \in I} GL_1(F)$. Identifions I avec $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$, le groupe de caractère est donné par

$$X_*(Z) = \Big\{ (x_{ij})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n} \mid \forall i, j \ x_{i,j} \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

Le groupe de Weil associé est $W = S_n^d$. Le cocaractère μ s'écrit sous la forme $(x_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n}$

$$x_{i,j} = \begin{cases} (1, 0, \cdots, 0) & \text{si } i = i_0 \\ (1, 1, \cdots, 1) & \text{si } i \in J \\ (0, 0, \cdots, 0) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons maintenant le cocaractère $\lambda = (z_{i,j})_{i \in \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, 1 \leq j \leq n}$ où $z_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \in J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Il est clair que $\lambda(p)$ est dans le centre de $G(\breve{\mathbb{Q}}_p)$ et d'autre part, on constate que $\mu = \mu_{\mathcal{LT}} \cdot \lambda$. On voit également que $b_{\mathcal{LT}} \cdot \lambda(p)$ est l'unique classe basique de $B(G, \mu)$. D'après la remarque 3.6.5, il y a un isomorphisme $G(\mathbb{Q}_p) \times \mathrm{J}_b(\mathbb{Q}_p)$-équivariant

$$\mathrm{Sht}(\mu)_{\mathbb{C}_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sht}(\mu_{\mathcal{LT}})_{\mathbb{C}_p}.$$

Pour toute représentation supercuspidale π de $GL_g(F)$, il y a alors des isomorphismes $G(\mathbb{Q}_p)$-équivariants

$$\varinjlim_{K} H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})[\pi[s]_D] = \varinjlim_{K} H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})[\pi[s]_D]. \tag{3.5}$$

En particulier, on a $H_c^{n-i-1}(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})[\pi[s]_D] = 0$ pour $i < 0$.

D'après le corollaire 3.6.4, il y a un isomorphisme $D_{n/F}^{\times}$-équivariant d'espaces rigides qui commute avec la donnée de descente

$$\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}} \times_{\underline{Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z}} \breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p)) \longrightarrow \breve{\mathcal{M}}_K^{\mu}.$$

On en déduit qu'il y a un isomorphisme $D_{n/F}^{\times} \times W_F$-équivariant

$$R\Gamma_c\Big((\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})_{\mathbb{C}_p} \times \breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\Big) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}_\ell[Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z]} \mathbb{Q}_\ell \xrightarrow{\sim} R\Gamma_c\Big((\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\Big). \tag{3.6}$$

D'après la remarque 3.6.5, on voit que $(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})_{\mathbb{C}_p} \times \breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}$ est un $Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z$-torseur trivial au-dessus de $(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})_{\mathbb{C}_p}$. Alors, le produit tensoriel dérivé dans (3.6) dégénère en un produit tensoriel. Puisque les groupes de cohomologie supérieure de $\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}$ s'annulent, la formule de Kunneth implique qu'il y a un isomorphisme $D_{n/F}^{\times} \times W_F$-équivariant

$$H_c^q\Big((\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})_{\mathbb{C}_p} \times \breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\Big) \simeq H_c^q\Big((\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu_{\mathcal{LT}}})_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\Big) \times H_c^0\Big(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z, \lambda, \lambda(p))_{\mathbb{C}_p}, \mathbb{Q}_\ell\Big)$$

On en déduit qu'il y a un isomorphisme W_F-équivariant entre $H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})[\pi[s]_D]$ et

$$\Big(H_c^q(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu\mathcal{L}\mathcal{T}})[\pi[s]_D] \times \mathrm{Hom}(H_c^0(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z,\lambda,\lambda(p)),\mathbb{Q}_\ell),\mathbb{Q}_\ell)\Big) \otimes^{\mathbb{L}}_{\mathbb{Q}_\ell[Z(\mathbb{Q}_p)/K_Z]} \mathbb{Q}_\ell.$$

D'après [Chen], il y a des isomorphismes $Z(\mathbb{Q}_p)\times W_F$-équivariants

$$\mathrm{Hom}_{Z_\lambda(\mathbb{Q}_p)}\big(H^0(\breve{\mathcal{M}}_{K_Z}(Z,\lambda,\lambda(p)),\mathbb{Q}_\ell),\omega_i\big) = \omega_i \otimes \prod_{\tau\in J}\omega\circ({}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1})$$

On en déduit que pour $0\leq i<s$, il y a une inclusion

$$\mathrm{LT}_\pi(s,i)^K \otimes \mathcal{L}(\pi)|\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}} \cdot \prod_{\tau\in J}\omega_\pi\circ({}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1}) \hookrightarrow H_c^{n-i-1}(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})[\pi[s]_D]. \tag{3.7}$$

Mais l'isomorphisme (3.5) implique que l'inclusion (3.7) est en fait un isomorphisme de représentations de W_F. En prenant la limite projective lorsque le niveau K varie, on en déduit que, pour $0\leq i<s$,

$$\lim_{\overrightarrow{K}} H_c^{n-i-1}(\breve{\mathcal{M}}_K^{\mu})[\pi[s]_D] = \mathrm{LT}_\pi(s,i)\otimes\mathcal{L}(\pi)|\cdot|^{-\frac{s(g+1)-2(i+1)}{2}}\cdot\prod_{\tau\in J}\omega_\pi\circ({}^{\tau}\mathrm{rec}_F^{-1}).$$

□

Bibliographie

[Arthur] J.Arthur, The endoscopic classification of representations : orthogonal and symplectic groups. Colloquium Publication Series, AMS.

[BL95] Arnaud Beauville and Yves Laszlo, Un lemme de descente, Comptes Rendus de l'Acadmie des Sciences. Srie Mathmatique 320 (1995), no. 3, 335340.

[Bo74] A. Borel, Stable real cohomology of arithmetic groups, Ann. Ec. Norm. Sup. (4) 7 (1974) 235-272.

[Boyer99] P. Boyer. Mauvaise réduction des variétés de Drinfeld et correspondance de Langlands locale. Invent.Math., 138(3) :573-629, 1999

[Boyer09] P. Boyer. Monodromie du faisceau pervers des cycles évanescents de quelques variétés de Shimura simples. Invent. Math., 177(2) :239-280, 2009

[Boyer14] P. Boyer. La cohomologie des espaces de Lubin-Tate est sans torsion, prépublication.

[CHLN] L.Clozel, M.Harris, J.P.Labesse, B.C.Ngô, On the stabilization of the trace formula

[Car-Sch] A.Caraiani - P.Scholze, On the generic part of the cohomology of compact unitary Shimura varieties, Annals of Mathematics (2) 186 (2017), no. 3, 649-766.

[Chen] M. Chen, Le morphisme déterminant pour les espaces de modules de groupes p-divisibles.

[Clo86] L. Clozel, On limit multiplicities of discrete series representations in spaces of automorphic forms, Invent. Math. 83 (1986), no. 2, 265-284.

[FGL] Laurent Fargues, Alain Genestier, and Vincent Lafforgue, L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld, Progress in Mathematics, vol. 262, Birkhauser Verlag, Basel, 2008

[Fal] Faltings. A relation between two moduli spaces studied by v.g. Drinfeld. In Algebraic number theory and algebraic geometry, volume 300 of Contemp. Math., pages 115-129, 2002.

[Far-Fon] L.Fargues - J.M.Fontaine, Courbes et Fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique.

[Far04] L. Fargues, Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales, In "Variétés de Shimura, espaces de Rapoport-Zink de correspondances de Langlands locales", Astérisque 291 (2004), 1-199.

[Far14] L.Fargues, Quelques résultats et conjectures concernant la courbe, Asterisque 369.

[Far16] L. Fargues, Geometrization of the local Langlands correspondance : an overview.

[GJ] Roger Godement and Hervé Jacquet, Zeta functions of simple algebras. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 260. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1972.

[GT] Toby Gee and Olivier Taïbi, Arthur's multiplicity formula for GSp_4 and restriction to Sp_4, prépublication.

[HL04] M.Harris, J.-P.Labesse, Conditional base change for unitary groups. Asian J. Math.8 (2004), no. 4, 653-683.

[HT01] R. Harris and M. Taylor, The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties, Annals of Mathematics Studies, vol. 151 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001).

[Hen00] Guy Henniart, Une preuve simple des conjectures de Langlands pour $GL(n)$ sur un corps p-adique, Invent. math. (2000) 139 : 439-455

[Hub96] R. Huber, Étale cohomology of rigid analytic varieties and adic spaces, Aspects of Mathematics, E30, Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1996. MR 1734903.

[KMSW] Tasho Kaletha, Alberto Minguez, Sug Woo Shin, and Paul-James White, Endoscopic classification of representations : Inner forms of unitary groups, arXiv :1409.3731.

[KL15] K. S. Kedlaya and R. Liu, Relative p-adic Hodge theory, I : Foundations, Astérisque 371 (2015).

[KW] T.Kaletha, J.Weinstein, On the Kottwitz conjecture for local Shimura varieties.

[Kot84] R. Kottwitz, Stable trace formula : cuspidal tempered terms, Duke Math. J. 51 (1984), p 611-650

[Kot92] R. Kottwitz, Points on some Shimura varieties over finite fields. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 373-444.

[Kot97] R. Kottwitz, Isocrystals with additional structure II, Comp. Math 109 (1997), 255-339.

[Kot14] R. Kottwitz, B(G) for all local and global fields, arXiv :1401.5728 (2014).

[LS] Kai Wen Lan, Benoît Stroh, Nearby cycles of automorphic étale sheaves Compos. Math.

[Lan] Kai Wen Lan Compactications of PEL-type Shimura varieties in ramified characteristics, ForumMath. Sigma 4 (2016), e1.

[Lang] R. P. Langlands, The classification of representations of real reductive groups (Math. Surveys and Monographs 31).

[Lang79] R. P. Langlands, Automorphic representations, Shimura varieties, and motives. Ein Marchen, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore.), Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence, R.I, 1979.

[Lo] E. Looijenga, L2-cohomology of locally symmetric varieties, Compositio Math. 67 (1988), n1, p 3-20.

[LoR] E. Looijenga and M. Rapoport, Weights in the local cohomology of a Baily-Borel compactification, in Complex geometry and Lie theory, Proc. Sympos. Pure Math. 53 (1991), p 223-260

[MT] A. Mokrane et J. Tilouine, Cohomology of Siegel varieties with p-adic integral coefficients and Applications, Cohomology of Siegel varieties. Astérisque No. 280 (2002), 1–95.

[Man05] E. Mantovan, On the cohomology of certain PEL type Shimura varieties. Duke Math. J. 129 (2005), no. 3, 573–610.

[Man08] E. Mantovan, On non-basic Rapoport-Zink spaces. Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4) 41 (2008), no. 5, 671–716.

[Man11] E. Mantovan ℓ-adic etale cohomology of PEL type Shimura varieties with non-trivial coefficients, WIN Woman in Numbers, Fields Institute Communications, vol. 60, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2011, pp. 61–83.

[Mok] C. P. Mok, Endoscopic classification of representations of quasi-split unitary groups

[Mo10] S. Morel, On the cohomology of certain non-compact Shimura varieties. (Annals of Mathematics Studies 173, Princeton University Press)

[Mo11] S. Morel, Cohomologie d'intersection des variétés modulaires de Siegel, suite. (Compositio Mathematica, 2011).

[Moe] C.Moeglin, Classification et changement de base pour les séries discrtes des groupes unitaires p-adiques. Pacific J. Math. 233 (2007), no. 1, 159-204.

[RZ96] M. Rapoport, Th. Zink, Period spaces for p-divisible groups., Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[Rap94] M. Rapoport, Non-archimedean period domains , Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zurich, 1994), Birkhauser, 1995, p 423-434.

[Rie59] Bernhard Riemann, Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse, Monatsberichte der Berliner Akademie (1859), 671?680.

[SS] L. Saper and M. Stern, L2-cohomology of arithmetic varieties, Annals of Math. 132 (1990), p 1-69

[S17] P.Scholze, Étale cohomology of diamonds.

[SW17] P.Scholze, J.Weinstein, Berkeley lectures on p-adic geometry.

[Shen] X.Shen, On the Hodge-Newton filtration for p-divisible groups with additional structures, Int. Math. Res. Not. 2014, no. 13, 3582-3631.

[Shin] S. W. Shin, On the cohomology of Rapoport-Zink spaces of EL-type, Amer. J. Math. 134 (2012), no. 2, 407-452. MR2905002

Résumé. La conjecture de Kottwitz décrit la cohomologie des espaces de Rapoport-Zink basiques à l'aide des correspondances de Langlands locales. Dans un premier temps, par voie globale via l'étude de la géométrie de certaines variétés de Shimura de type Kottwitz, on prouve cette conjecture pour des espaces de Rapoport-Zink de type PEL unitaires non ramifiés simples basiques de signature $(1, n-1)$. Dans la deuxième partie de cette thèse, via l'étude des modifications de fibrés vectoriels sur la courbe de Fargues-Fontaine, on prouve une formule géométrique reliant les tours de Lubin-Tate avec les espaces de Rapoport-Zink non ramifiés simples basiques de type EL de signature $(1, n-1), (p_1, q_1), \cdots, (p_k, q_k)$ où $p_i q_i = 0$. En particulier, on en déduit le calcul des groupes de cohomologie de ces derniers.

Mots-clés : Conjecture de Kottwitz, Espaces de Rapoport-Zink, Variétés de Shimura, Correspondance de Langlands, La courbe de Fargues-Fontaine

Abstract. The Kottwitz conjecture describes the cohomology of basic Rapoport-Zink spaces using local Langlands correspondences. At first, via geometrical studies of some Kottwitz-type Shimura varieties, we prove this conjecture for basic simple unramified unitary PEL type Rapoport-Zink spaces of signature $(1, n-1)$. In the second part, via the study of the modifications of vector bundles on the Fargues-Fontaine curve, we prove a geometric formula relating the Lubin-Tate towers with the simple basic unramified Rapoport-Zink spaces of EL type of signature $(1, n-1), (p_1, q_1), \cdots, (p_k, q_k)$ where $p_i q_i = 0$. In particular, we deduce the computation of cohomology groups of the latter.

Key words : Kottwitz Conjecture, Rapoport-Zink spaces, Shimura varieties, Langlands correspondence, The Fargues-Fontaine curve