UNIVERSITÉ **PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD**

École Doctorale Sciences, Technologies, Santé Galilée

Contribution à la théorie dimensionnelle de tapis et d'éponges auto-affines en loi ou invariants par multiplication par certains semi-groupes d'entiers

Thèse de doctorat présentée par

Guilhem BRUNET

UMR 7539 - LAGA - Laboratoire Analyse, Géométrie Et Applications

pour l'obtention de grade

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Soutenance le 07/12/2022 devant le jury composé de :

Julien BARRAL	PR, Université Sorbonne Paris-Nord	Directeur de thèse
Valérie BERTHÉ	DR, CNRS & Université Paris-Cité	Examinatrice
Kenneth FALCONER	PR, Université de Saint-Andrews	Rapporteur
Bénédicte HAAS	PR, Université Sorbonne Paris-Nord	Examinatrice
Jacques PEYRIÈRE	PR Émérite, Université Paris-Saclay	Examinateur
Stéphane SEURET	PR, Université Paris-Est Créteil	Examinateur
Meng WU	PR, Université d'Oulu	Rapporteur

Remerciements

Je remercie tout d'abord M. Julien Barral, qui m'a encadré tout au long de cette thèse et m'a fait découvrir l'univers des structures fractales. C'est grâce à son expertise, son aide précieuse et constante, ses innombrables conseils, sa disponibilité et sa passion contagieuse pour ce sujet que j'ai pu arriver au bout de cette thèse.

J'adresse tous mes remerciements à M. Kenneth Falconer et M. Meng Wu qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse.

Je remercie également Mme Valérie Berthé, Mme Bénédicte Haas, M. Jacques Peyrière et M. Stéphane Seuret qui ont bien voulu être examinateurs et faire partie de mon jury de thèse.

Grâce à la bonne ambiance entre les doctorants du LAGA, cette thèse s'est déroulée de manière sereine et agréable. Je remercie donc tous mes collègues thésards, et en particulier Moussa, Wassim, Neige, Hugo et Elie.

Je remercie aussi mes amis de longue date pour leur soutien : Lilian, Bérenger, Julien, Florent et Paul.

Je remercie ma famille qui m'a toujours encouragé dans mes études de mathématiques, en particulier mes parents et ma petite soeur. Enfin, je remercie ma compagne Émilie d'avoir été à mes côtés tout au long de cette thèse.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Dans cette thèse, on s'intéresse aux propriétés dimensionnelles de certains ensembles fractals déterministes ou aléatoires de $\mathbb{R}^k$. Nous nous sommes intéressés dans un premier temps à certaines éponges déterministes invariantes sous l'action du semigroupe $(\mathbb{N}^*, \times)$ et portés à notre attention par [29]. Ce travail s'est révélé fructueux et plus complexe que nous ne l'imaginions, et nous à permis de développer une théorie dimensionnelle assez fournie pour cette classe d'ensembles, que nous présentons ici dans le chapitre 3 de ce mémoire. Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à certains tapis aléatoires en dimension 2, dits de Barański. Nous avons là aussi obtenu des résultats sur les différentes dimensions de ces tapis, qui permettent de compléter le cas déterministe déjà connu, ainsi que le cas des tapis de Sierpiński aléatoires qui est moins général. En parallèle, nous nous sommes intéressés au cas de la dimension supérieure dans le cas déterministe (éponges de Barański), qui est plus délicat comme montré récemment par Das et Simmons dans [11]. Tous ces résultats font l'objet du chapitre 2.

Dans cette première section de notre introduction, nous allons rappeler quelques définitions et théorèmes très classiques de la géométrie fractale (on se référera à [15] pour les bases complètes de la théorie), puis nous présenterons plusieurs résultats anciens et plus récents concernant l'études des tapis et éponges déterministes.

1.1 Définitions et contexte

Soit K un sous-ensemble borné non vide d'un espace métrique séparable X. Pour $s \geq 0$ et $\delta > 0$ on pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(K) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s,\ K \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i \text{ et } |U_i| \leq \delta \text{ pour tout } i\right\}$$

et $\mathcal{H}^s(K) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(K)$. La dimension de Hausdorff de K est alors définie par

$$\dim_H(K) = \inf\{s \geq 0,\ \mathcal{H}^s(K) = 0\} = \sup\{s \geq 0,\ \mathcal{H}^s(K) = +\infty\}.$$

On définit aussi la dimension inférieure de Minkowski de K par

$$\underline{\dim}_M(K) = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log(N_\delta(K))}{-\log(\delta)},$$

où $N_\delta(K)$ est le nombre minimal de boules fermées de rayon δ dont on a besoin pour recouvrir K, ainsi que sa dimension supérieure de Minkowski $\overline{\dim}_M(K)$ de manière similaire. Enfin, on écrira classiquement $\dim_P(K)$ pour désigner la dimension de Packing de K. Pour μ une mesure Borélienne finie sur X, on définit les dimension inférieures et supérieures de Hausdorff de μ ainsi que les dimensions inférieures et supérieures de Packing de μ par

$$\underline{\dim}_H(\mu) = \inf\{\dim_H(A),\ A \text{ borélien tel que } \mu(A) > 0\},$$

$$\overline{\dim}_H(\mu) = \inf\{\dim_H(A),\ A \text{ borélien tel que } \mu(X \setminus A) = 0\},$$

$$\underline{\dim}_P(\mu) = \inf\{\dim_P(A),\ A \text{ borélien tel que } \mu(A) > 0\},$$

$$\overline{\dim}_P(\mu) = \inf\{\dim_P(A),\ A \text{ borélien tel que } \mu(X \setminus A) = 0\}.$$

Pour $x \in X$ on définit les dimensions locales inférieures et supérieures en x par

$$\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) = \liminf_{r\to 0} \frac{\log(\mu(B(x,r))}{\log(r)}, \quad \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log(\mu(B(x,r))}{\log(r)}.$$

Le lemme classique dit lemme de Billingsley s'énonce alors comme suit.

Lemme 1.1.1. *Soit $A \subset X$ tel que $\mu(A) > 0$.*

- *si $\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \geq D$ pour μ-presque tout $x \in X$, alors $\underline{\dim}_H(\mu) \geq D$.*
- *si $\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \leq D$ pour μ-presque tout $x \in X$, alors $\overline{\dim}_H(\mu) \leq D$.*
- *si $\underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x) \leq D$ pour tout $x \in A$, alors $\dim_H(A) \leq D$.*

On a aussi le résultat suivant tout aussi classique.

Lemme 1.1.2 ([17])**.** *Soit μ une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^d$. On a alors*

$$\underline{\dim}_H(\mu) = \operatorname*{essinf}_{x\sim\mu} \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x),\ \overline{\dim}_H(\mu) = \operatorname*{esssup}_{x\sim\mu} \underline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x)$$

et

$$\underline{\dim}_P(\mu) = \operatorname*{essinf}_{x\sim\mu} \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x),\ \overline{\dim}_P(\mu) = \operatorname*{esssup}_{x\sim\mu} \overline{\dim}_{\mathrm{loc}}(\mu, x).$$

Lorsqu'il existe α tel que $\lim\limits_{r\to 0^+} \frac{\log(\mu(B(x,r)))}{\log(r)} = \alpha$ pour μ-presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on dit que μ est exactement dimensionnelle, et on note alors $\dim(\mu) = \underline{\dim}_H(\mu) = \overline{\dim}_P(\mu)$ (dans tout ce qui suit, noter $\dim(\mu)$ impliquera implicitement que μ est exactement dimensionnelle).

Soit $(f_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ un ensemble fini de contractions de $\mathbb{R}^d$, que l'on appelle système de fonctions itérées. Il existe alors un unique compact K non vide vérifiant

$$K = \bigcup_{i=1}^{N} f_i(K),$$

appelé l'attracteur du système de fonctions itérées (voir de nouveau [15]). Lorsque les f_i sont des similitudes de rapports respectifs $c_i < 1$, on parle d'attracteur auto-similaire. Un théorème très classique concernant ce cas est le suivant.

Théorème 1.1.3 ([15, Théorème 9.3])**.** *Supposons qu'il existe V un ouvert non vide et borné de $\mathbb{R}^d$ tel que $\bigcup\limits_{i=1}^{N} f_i(V) \subset V$, cette union étant aussi supposée disjointe. Posons s l'unique réel strictement positif tel que $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i^s = 1$. Alors*

$$\dim_H(K) = \underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = s.$$

Le cadre auto-similaire est aujourd'hui très bien compris, en en particulier grâce aux travaux de Hochman : on se référera à [24] pour une liste récente de résultats profonds dans ce cadre. On s'intéresse dans cette thèse à des cas de fractales non auto-similaires, dits auto-affines. Un théorème classique de Falconer (voir [14]) nous dit qu'étant donné une famille $(M_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ d'automorphismes linéaires de $\mathbb{R}^d$ de normes euclidiennes subordonnées strictement inférieures à $\frac{1}{2}$, pour presque tout choix de vecteurs $v_1, \ldots, v_N \in \mathbb{R}^d$ (au sens de la mesure de Lebesgues de $\mathbb{R}^{Nd}$), les dimensions de Hausdorff et de Minkowski de l'attracteur K du système de fonctions itérées $(f_i : x \mapsto M_i x + v_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ sont égales à $\min(d, \dim_A(K))$, où $\dim_A(K)$ est la dimension d'affinité de K définie à partir des valeurs singulières des M_i. Ces deux dimensions sont de plus égales au maximum des dimensions de Hausdorff des projections naturelles sur K des mesures invariantes ergodiques sur l'espace symbolique $[\![1,N]\!]^{\mathbb{N}^*}$ muni de l'application shift (voir [26]). Lorsque $d = 2$, si les $v_i \in \mathbb{R}^2$ sont aussi fixés au préalable, il a été prouvé récemment par Bärány, Hochman et Rapaport dans [2, 25] le résultat plus fort suivant : si les M_i satisfont une hypothèse de forte irréductibilité, si le système de fonctions itérées $(f_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ est exponentiellement séparé et si la famille $(M_i/\sqrt{|\det(M_i)|})_{i\in[\![1,N]\!]}$ engendre un sous-groupe non compact de $GL_2(\mathbb{R})$, alors on a de nouveau $\dim_H(K) = \dim_M(K) = \min(2, \dim_A(K))$, et toutes ces quantités sont égales au supremum des dimensions de mesures auto-affines sur K. Ont aussi été obtenus des résultats similaires dans le cas où il n'y a pas de forte irréductibilité mais où les M_i ne peuvent pas être simultanément diagonalisées (voir [2, 3, 25]).

Les tapis de Sierpiński constituent des attracteurs auto-affines simples, naturels et non triviaux, qui sortent en général du cadre des conclusions du théorème de Falconer et qui ont fourni un des premiers exemples d'ensembles non triviaux dont les dimensions de Hausdorff et de Minkowski sont différentes. Ces derniers ont été étudiés à l'origine simultanément par Bedford et McMullen dans [33] et [9]. Soient $r > s \geq 2$ des entiers et A un sous-ensemble de $[\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ de cardinal au moins 2. Un tapis de Sierpiński K sera défini comme l'attracteur du systèmes de fonctions itérées

$$f_{(i,j)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(\frac{x+i}{r}, \frac{y+j}{s}\right),\ (i, j) \in A.$$

De manière équivalente, il s'agit aussi de l'image de l'espace symbolique $A^{\mathbb{N}^*}$ par la projection

$$\pi : (x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in A^{\mathbb{N}^*} \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{r^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{s^k}\right) \in \mathbb{T}^2.$$

Théorème 1.1.4. *Soient* $N_j = N_j^B = \#\{i \in [\![0, r-1]\!],\ (i, j) \in A\}$ *et* $\psi : \theta \geq 0 \mapsto \log\left(\sum_{j=0}^{s-1} N_j^{\theta}\right)$. *Alors*

$$\dim_H(K) = \frac{\psi\left(\frac{\log(s)}{\log(r)}\right)}{\log(s)}$$

et

$$\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = \frac{\psi(1)}{\log r} + \left(\frac{1}{\log(s)} - \frac{1}{\log(r)}\right)\psi(0).$$

De plus les deux dimensions sont égales si et seulement si les N_j strictement positifs sont tous égaux.

Le calcul de la dimension de Hausdorff de ces tapis s'obtient grâce à un principe variationnel, en montrant que celle-ci est égale au maximum des dimensions de produits de Bernoulli portés par le tapis. Plus précisément, on calcule d'abord les dimensions des éléments de cette classe de mesures, ce qui donne une minoration de la dimension du tapis par lemme de Billingsley. L'approche pour la majoration est différente dans les deux travaux : [33] calcule de manière explicite le maximum des dimensions de produits de Bernoulli, puis utilise un lemme combinatoire afin de majorer la dimension du tapis par cette quantité à l'aide de l'unique mesure de Bernoulli de dimension maximale et du point 3 du lemme 1.1.1. Dans [9], on exhibe plutôt une famille de recouvrements adéquats du tapis.

Il a ensuite été prouvé par Kenyon et Peres dans [28] que la dimension de Hausdorff de K (vu comme sous-ensemble du tore $\mathbb{T}^2$) est en fait égale au maximum des dimensions de mesures boréliennes invariantes par $f : (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mapsto (rx, sy) \in \mathbb{T}^2$, ergodiques et supportées par K, et que ce maximum est atteint de manière unique. De plus, une telle mesure μ est exactement dimensionnelle et sa dimension est donnée par la formule dite de Ledrappier-Young

$$\dim(\mu) = \frac{h_\mu(f)}{\log(r)} + \left(\frac{1}{\log(s)} - \frac{1}{\log(r)}\right) h_{(\pi_2)_*\mu}(y \mapsto sy),$$

où $\pi_2 : (x, y) \mapsto y$. Dans [28], Kenyon et Peres étendent aussi tous ces résultats au cas $\mathbb{R}^d$ avec d quelconque supérieur ou égal à 2, et établissent ainsi des formules similaires de dimensions pour les éponges de Sierpiński, généralisation naturelle en toute dimension des tapis de Sierpiński. Ils utilisent pour la majoration de la dimension une approche similaire à celle de McMullen dand [33], et s'appuient sur un lemme combinatoire plus général.

Les tapis de Barański constituent une généralisation des tapis de Sierpiński. Soient $r, s \geq 2$ et $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s \in (0, 1)$ tels que $\sum_{i=1}^r a_i = \sum_{j=1}^s b_j = 1$. Pour $(i, j) \in [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ on définit les applications

$$g_{(i,j)} : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i'=0}^{i-1} a_{i'} \\ \sum_{j'=0}^{j-1} b_{j'} \end{pmatrix}.$$

Soit $D = \{(i_1, j_1), \ldots, (i_d, j_d)\}$ un ensemble de $d \geq 2$ couples distincts de $[\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$. On définit de nouveau les quantités N_j comme dans le cas des tapis de Sierpiński, ainsi que les quantités N_i^A définies de manière similaire. On définira un tapis de Barański K comme l'attracteur du système de fonctions itérées $(g_{(i,j)})_{(i,j)\in D}$. Barański a prouvé le

Théorème 1.1.5 ([1, Théorème A])**.** *La dimension de Hausdorff d'un tapis de Barański est égale au maximum des dimensions de produits de Bernoulli portés par K.*

On peut par ailleurs construire des tapis de Barański pour lesquels ce maximum n'est pas uniquement atteint (voir [26]). On a de plus le

Théorème 1.1.6 ([1, Théorème B])**.** *Si S_A et S_B sont les uniques réels positifs tels que $\sum_{i, N_i^A > 0} a_i^{S_A} = 1$ et $\sum_{j, N_j^B > 0} b_j^{S_B} = 1$, et si on pose T_A et T_B les uniques réels positifs tels que*

$$\sum_{(i,j)\in D} \left(\frac{a_i}{b_j}\right)^{S_A} b_j^{T_A} = 1, \quad \sum_{(i,j)\in D} \left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S_B} a_i^{T_B} = 1,$$

alors $\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = \max(T_A, T_B)$.

Notre première contribution dans cette thèse sera de revisiter la preuve de ce théorème dans la section 2.1, en présentant en particulier une approche différente de la majoration que celle utilisée dans [1]. On cherche en effet ici à adapter l'approche de Bedford pour les tapis de Sierpiński, à savoir exhiber des recouvrements adéquats. En toute dimension, la situation est plus délicate et est différente du cas Sierpiński. Dans [11], Das et Simmons montrent qu'en dimension au moins 3 on peut trouver des exemples d'éponges de Barański pour lesquelles le supremum des dimensions de mesures invariantes portées par K est strictement inférieure à la dimension de Hausdorff du tapis.

Une autre généralisation des tapis de Sierpińsi est constituée de la classe des tapis de Lalley-Gatzouras. Soit $m \geq 1$ et $n_j \geq 1$ pour chaque $j \in [\![1, m]\!]$. Soit aussi $0 < a_{(i,j)} < b_j < 1$ pour chaque $j \in [\![1, m]\!]$ et $i \in [\![1, n_j]\!]$, tels que $\sum_{j=1}^{m} b_j \leq 1$ et $\sum_{i=1}^{n_j} a_{(i,j)} \leq 1$ pour tout j. Soit $0 \leq d_1 < d_2 < \ldots < d_m < 1$ tels que $d_{j+1} - d_j \geq b_j$ pour $j \in [\![1, m-1]\!]$ et $1 - d_m \geq b_m$, et pour chaque j soit $0 \leq c_{(1,j)} \leq c_{(2,j)} \leq \ldots \leq c_{(n_j,j)} < 1$ tels que $c_{((i+1),j)} - c_{(i,j)} \geq a_{(i,j)}$ pour tout $i \in [\![1, n_j - 1]\!]$ et $1 - c_{(n_j,j)} \geq a_{(n_j,j)}$. On pose alors

$$C = \{(i,j),\ j \in [\![1, m]\!] \text{ et } i \in [\![1, n_j]\!]\}$$

et pour $(i,j) \in C$

$$h_{i,j} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_{(i,j)} & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{(i,j)} \\ d_j \end{pmatrix}.$$

On définira un tapis de Lalley-Gatzouras K comme l'attracteur du système de fonctions itérées $(h_{(i,j)})_{(i,j)\in C}$. Lalley et Gatzouras ont prouvé le

Théorème 1.1.7 ([22, Théorème 5.3])**.** *La dimension de Hausdorff d'un tapis de Lalley-Gatzouras est égale au maximum des dimensions de Hausdorff de produits de Bernoulli portés par K.*

Là encore, il est prouvé que l'on peut construire des tapis de Lalley-Gatzouras pour lesquels ce maximum n'est pas uniquement atteint (voir [5]).

1.2 Résultats et plan de thèse

Nous allons présenter ici de manière synthétique les résultats obtenus au cours de cette thèse et figurant dans ce mémoire. On s'intéresse dans la section 2.2 aux tapis de Barański et de Lalley-Gatzouras aléatoires, généralisation des tapis de Sierpiński aléatoires dont nous esquissons ici brièvement la construction. Celle-ci consiste en un processus de percolation. On considère un sous-ensemble aléatoire (possiblement vide) $A(\omega)$ de $[\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$, et on suppose que $\mathbb{E}[\#A] > 1$. On construit aussi sur le même espace de probabilité un compact aléatoire $K(\omega) \subset [0,1]^2$ et $r \times s$ compacts aléatoires $K((i,j),\omega)$, $(i,j) \in [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ qui sont des copies indépendantes de K et indépendantes de A, et tels que $K(\omega) = \bigcup_{(i,j)\in A(\omega)} f_{(i,j)}(K((i,j),\omega))$ (les $f_{(i,j)}$ étant toujours les fonctions définies précédemment). K est alors non-vide avec une probabilité strictement positive. Ces ensembles aléatoires se généralisent en toute dimension de manière directe, et sont alors appelés des éponges de

Sierpiński. On définira aussi les mesures de Mandelbrot, pendants aléatoires des mesures de Bernoulli. Celles-ci, lorsqu'elles sont non dégénérées (c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(\mu \neq 0) > 0$), sont construites sur $[0,1]^2$ et sont caractérisées par $\mathbb{E}\left[\mu([0,1]^2)\right] = 1$ et

$$\mu = \sum_{(i,j)} W_{(i,j)} \mu^{(i,j)} \circ f_{(i,j)}^{-1}$$

presque sûrement, où les $W_{(i,j)}$ sont des variables aléatoires positives vérifiant les relations $\sum_{(i,j)} W_{(i,j)} = 1$ et $\mathbb{E}\left[-\sum_{(i,j)} W_{(i,j)} \log(W_{(i,j)})\right] > 0$, et où les $\mu^{(i,j)}$ sont des copies indépendantes de μ, qui sont aussi indépendantes des $W_{(i,j)}$. De plus, on peut les construire de manière à ce que leur support soit presque sûrement inclus dans le tapis aléatoire considéré. Ces mesures aléatoires ont d'abord été introduites et étudiées par Mandelbrot (voir [32], [31] et [27]). Il a été établi entre autres dans ces travaux une condition nécessaire et suffisante de non dégénérescence de ces mesures, ainsi qu'une formule pour leur dimension entropique, définie dans ce contexte par

$$\dim_e(\mu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{C\in\mathcal{F}_n} \mu(C) \log(\mu(C)),$$

où $\mathcal{F}_n$ est la famille des rectangles basiques de n^e génération dans $[0,1]^2$ associés aux $f_{(i,j)}$. Dans [12] et [14], Dekking-Grimmett et Falconer ont calculé les dimensions de Minkowski et de Hausdorff de la projection de K sur un des axes principaux. Ces derniers ont prouvé que ces dimensions sont égales, et que leur valeur commune diffère en général de la formule $\min(1, \dim_H(K))$ donnée par le théorème classique de Marstrand (voir [15]) lorsque l'on projette sur presque toute droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$. Plus tard, Lalley et Gatzouras ont établi le

Théorème 1.2.1 ([23, Théorèmes 4.1 et 5.1])**.** *Soient*

$$N_j(\omega) = \#\left\{i \in [\![0, r-1]\!],\ (i,j) \in A(\omega)\right\}, \quad \psi : \theta \geq 0 \mapsto \log\left(\sum_{j=0}^{s-1} \mathbb{E}\left[N_j\right]^\theta\right)$$

et $\psi(t) = \min_{\theta\in[0,1]} \psi(\theta)$*. On suppose que* $\#\left\{j,\ \mathbb{E}\left[N_j\right] > 0\right\} \geq 2$ *et* $\exists j,\ \mathbb{P}(N_j > 1) > 0$*. Alors presque sûrement conditionnellement à* $K \neq \varnothing$ *on a*

$$\dim_H(K) = \frac{\psi\left(\max\left(t, \frac{\log(s)}{\log(r)}\right)\right)}{\log(s)},$$

et

$$\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = \frac{\log\left(\mathbb{E}\left[\#A\right]\right)}{\log(r)} + \left(\frac{1}{\log(s)} - \frac{1}{\log(r)}\right)\psi(t).$$

De plus les deux dimensions sont égales si et seulement si $t = 1$ *ou les* $\mathbb{E}\left[N_j\right]$ *non nuls sont* *tous égaux.*

Plus récemment, Barral et Feng ont étudié les projections des mesures de Mandelbrot sur les axes principaux, et ont en particulier prouvé le

Théorème 1.2.2 ([6, Théorème 3.3])**.** *Soit μ une mesure de Mandelbrot non dégénérée. S'il existe $q > 1$ tel que $\mathbb{E}\left[W_{(i,j)}^q\right] < +\infty$ pour tout (i,j), alors presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$ la mesure μ est exactement dimensionnelle et*

$$\dim((\pi_2)_*\mu) = \frac{\min\left(\dim_e(\mu),\ h_{\mathbb{E}\left[(\pi_2^*)\mu\right]}(y \mapsto sy)\right)}{\log(s)}.$$

Ces derniers ont aussi obtenu une nouvelle preuve du théorème de Dekking-Grimmett et Falconer. Ensuite, ces mêmes auteurs ont établi dans [7] une formule de Ledrappier-Young pour la dimension de Hausdorff de ces mesures lorsque celles-ci sont à support dans un tapis de Sierpiński (de nouveau en supposant qu'il existe $q > 1$ tel que $\mathbb{E}\left[W_{(i,j)}^q\right] < +\infty$ pour tout (i,j)), à savoir

$$\dim(\mu) = \frac{\dim_e(\mu)}{\log(r)} + \left(\frac{1}{\log(s)} - \frac{1}{\log(r)}\right)\min(\dim_e(\mu), h_{\mathbb{E}\left[(\pi_2^*)\mu\right]}(y \mapsto sy)),$$

puis ont généralisé cette formule en toute dimension (mesure de Mandelbrot à support dans une éponge de Sierpiński). Est aussi établi un principe variationnel qui permet de calculer les dimensions de Hausdorff des éponges de Sierpiński comme le maximum des dimensions de mesures de Mandelbrot non dégénérées à support dans l'éponge considérée (on a l'unicité de la mesure de Mandelbrot optimale). On établira ici des résultats en dimension 2 pour les tapis de Barański et de Lalley-Gatzouras aléatoires, en prouvant le

Théorème 1.2.3. *Soit K un tapis de Barański ou de Lalley-Gatzouras aléatoire. On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\dim_H(K) = \sup\left\{\dim(\mu),\ \mu \text{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\right\}.$$

On commencera donc par donner une formule pour la dimension de Hausdorff des mesures de Mandelbrot sur ces tapis, puis on prouvera une résultat de majoration - de nouveau à l'aide de recouvrements adéquats - afin d'obtenir les résultats souhaités. On calculera aussi les dimensions de Hausdorff et de Minkowski de la projection de ces tapis sur un des axes via un principe variationnel portant sur la dimension de Hausdorff des projections de mesures de Mandelbrot. Rappelons que dans le cas déterministe, la situation est claire puisque la projection de l'ensemble K est un ensemble auto-similaire satisfaisant la condition de l'ensemble ouvert. On prouvera ainsi le

Théorème 1.2.4. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $S(\theta)$ l'unique réel tel que $\sum_{j=0}^{s-1} \mathbb{E}\,[N_j]^\theta\, b_j^{S(\theta)} = 1$ (on rappelle que $N_j = N_j^B = \sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{1}_{(i,j)\in A}$). Soit aussi $\theta_B \in [0,1]$ tel que $S(\theta_B) = \min_{\theta\in[0,1]} S(\theta)$. On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\begin{aligned}&\dim_H(\pi_2(K)) = \sup\left\{\dim((\pi_2)_*\mu),\ \mu \text{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\right\}\\ &= \underline{\dim}_M(\pi_2(K)) = \overline{\dim}_M(\pi_2(K)) = S(\theta_B).\end{aligned}$$

De plus la mesure de Mandelbrot non dégénérée en laquelle $\dim_H(\pi_2(K))$ est atteint est unique si et seulement si $S'(0) \leq 0$.

Enfin, on établit une formule pour la dimension de Minkowski d'un tapis de Barański aléatoire, qui généralisera donc à la fois les résultats de [23] et le théorème 1.1.6.

Théorème 1.2.5. *Pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit $R(\theta)$ l'unique réel tel que $\sum_{i=0}^{r-1} \mathbb{E}\left[N_i^A\right]^\theta a_i^{R(\theta)} = 1$ (on pose $N_i^A = \sum_{j=0}^{s-1} \mathbb{1}_{(i,j)\in A}$), et θ_A un point de $[0,1]$ en lequel R admet son minimum sur cet intervalle. On définit le réel positif $T_B = T(S(\theta_B))$ par l'équation*

$$\sum_{(i,j)} \mathbb{P}(c_{(i,j)} = 1) \left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S(\theta_B)} a_i^{T(S(\theta_B))} = 1,$$

et le réel positif $T_A = T(S(\theta_A))$ par l'équation

$$\sum_{(i,j)} \mathbb{P}(c_{(i,j)} = 1) \left(\frac{a_i}{b_j}\right)^{R(\theta_A)} b_j^{T(R(\theta_A))} = 1.$$

Alors presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ on a

$$\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = \max(T_A, T_B).$$

Les cas d'égalité entre dimension de Minkowski et de Hausdorff restent à élucider. De plus, une étude préliminaire indique que nos résultats s'étendent au cas où les a_i et les b_j sont eux-mêmes aléatoires, ce qu'encourage à croire le résultat obtenu par Peyrière dans un cas spécial de mesures aléatoires associées à certains découpages aléatoires de l'hypercube $[0,1]^d$ (voir [37]). Ces dernières constituent des cas particuliers des situations plus générales que nous envisageons. Ceci devrait faire l'objet d'une étude approfondie.

Dans la section 2.3, on étudie les mesures de Mandelbrot inhomogènes, généralisation des mesures de Mandelbrot usuelles (on s'autorise maintenant à ce que les lois utilisées pour définir la mesure puissent varier à chaque étape de sa construction) et pendant aléatoire des mesures de Bernoulli inhomogènes. Les dimensions entropiques inférieure et supérieures de telles mesures ont été étudiées par Barral dans [4]. On établira ici des résultats de grandes déviations inspirés de [6] afin de minorer la dimension de Hausdorff d'une telle mesure lorsque celle-ci est définie sur un tapis de Barański. Dans la section 2.4, on propose une discussion du cas des éponges de Barański auto-affines en loi en dimension supérieure ou égale à 3. Le temps imparti pour ce travail de thèse n'a pas permis d'inclure dans ce mémoire la rédaction de la démonstration d'un principe variationnel donnant leur dimension de Hausdorff, que nous nous contenterons ici d'énoncer.

Dans la section 3, on s'intéresse à une certaine classe d'ensembles fractals définis grâce aux fonctions $f_{(i,j)}$ intervenant dans la construction de tapis de Sierpiński et non invariants par $f : (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mapsto (rx, sy) \in \mathbb{T}^2$, mais obtenus comme projections de certains ensembles symboliques invariants sous l'action d'un semi-groupe d'entiers. Dans [18], Fan, Liao et Ma ont effectué le calcul de la dimension de Minkowski de l'ensemble

$$\left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k} : x_k \in \{0,1\} \text{ et } x_k x_{2k} = 0 \text{ pour tout } k \geq 1 \right\} \subset [0,1]\,.$$

Ceci à incité Kenyon, Peres et Solomyak a étudier dans [29] les ensembles de la forme

$$X_\Omega = \left\{ (x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in (\llbracket 0, r-1 \rrbracket \times \llbracket 0, s-1 \rrbracket)^{\mathbb{N}^*},\ (x_{iq^\ell}, y_{iq^\ell}) \in \Omega \text{ pour tout } i,\ q \nmid i \right\},$$

où $q \geq 2$ un entier fixé et Ω est un fermé quelconque de $(\llbracket 0, r-1 \rrbracket \times \llbracket 0, s-1 \rrbracket)^{\mathbb{N}^*}$. L'ensemble obtenu est alors invariant sous l'action du semigroupe $(\mathbb{N}^*, \times)$. Ces derniers ont établi des formules pour les dimensions de Hausdorff et de Minkowski des ensembles du type $\pi(X_\Omega)$, en se limitant au cas où $r = s = m$. Pour cela, il est établi un principe variationnel sur une classe particulière de mesures, à savoir les mesures de la forme $\mathbb{P}_\mu$ définies sur les cylindres de $A^{\mathbb{N}^*}$ par

$$\mathbb{P}_\mu([(x,y)|_n]) = \prod_{\substack{i \leq n \\ q \nmid i}} \mu\left(\left[(x,y)|_{J_i^n} \right] \right),$$

où μ est une mesure de probabilité fixée au préalable sur Ω et où

$$(x,y)_{J_i^n} = (x_i, y_i)(x_{qi}, y_{qi}) \cdots (x_{q^r i}, y_{q^r i})$$

si $q^r i \leq n < q^{r+1} i$. On a alors le

Théorème 1.2.6 ([29, Théorème 2.3])**.** *Soit*

$$\alpha_k = \left\{ \Omega \cap [u] : \ u \in A^k,\ \Omega \cap [u] \neq \varnothing \right\}$$

et $H_m^\mu(\alpha_k) = -\sum_{C \in \alpha_k} \mu(C) \log_m(\mu(C))$*. On a*

$$\dim(\mathbb{P}_\mu) = (q-1)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_m^\mu(\alpha_k)}{q^{k+1}}.$$

On établit ici dans le chapitre 3 une formule pour la dimension de Hausdorff de $\pi(X_\Omega)$ lorsque $r > s$. On prouve ainsi le

Théorème 1.2.7. *On a*

$$\dim_H(\pi(X_\Omega)) = \max\left\{\dim(\mathbb{P}_\mu),\ \mu \textit{ mesure de probabilité sur } \Omega\right\}.$$

De plus, la mesure μ sur Ω telle que $\mathbb{P}_\mu$ soit optimale est unique.

On étudie donc d'abord la dimension de Hausdorff de ces mesures dans notre cas (voir le théorème 3.2.2), ainsi que d'autres propriétés telles que l'existence ou non d'une formule de Ledrappier-Young associée à la formule de dimension que l'on établit. On optimise ensuite la dimension de ces mesures afin d'obtenir la mesure optimale recherchée ainsi qu'un candidat pour la valeur de la dimension de Hausdorff du tapis (donnés dans le théorème 3.2.7), puis on prouve de nouveau un résultat de majoration (cette fois-ci en se servant du lemme de Billingsley et du lemme combinatoire de Kenyon et Peres).

On établit aussi une formule pour la dimension de Minkowski de $\pi(X_\Omega)$ (voir le théorème 3.2.11). On généralise enfin nos résultats au cas de la dimension quelconque, où la combinatoire du problème se complique nettement comparée à celle qui intervient dans le cas des éponges de Barański. Ce travail a donné lieu à la publication [10], que l'on reproduit ici.

Étendre les résultats de la section 3 aux ensembles plus généraux considérés par Peres, Seuret, Solomyak et Schmeling en dimension 1 dans [36] constituerait une piste intéressante pour des recherches futures. De plus, on pourrait aussi s'intéresser aux ensembles aléatoires obtenus en percolant sur des ensembles de type $\pi(X_\Omega)$, en particulier dans le but d'obtenir leur dimension de Hausdorff. Enfin, une question naturelle non abordée dans cette thèse serait l'étude de l'analyse multifractale des mesures mises en jeu dans tous les cas.

Chapitre 2

Étude de quelques tapis déterministes et aléatoires

Dans cette section, on étudie les dimensions de Hausdorff et de Minkowski de certains attracteurs déterministes et aléatoires non auto-similaires. Dans un premier temps, dans la section 2.1, on rappelle la théorie dimensionnelle connue associée aux tapis de Barański déterministes, et on présente une preuve alternative en ce qui concerne la majoration de leur dimension de Hausdorff. Ensuite, dans la section 2.2 on étudiera les tapis de Barański aléatoires, dans le but d'établir des formules pour leurs dimensions de Hausdorff et de Minkowski. Pour cela, on introduit les bien connues mesures de Mandelbrot dont on étudiera les projections sur ces tapis. Enfin, en 2.3 on étudie les mesures de Mandelbrot inhomogènes, généralisation des mesures de Mandelbrot. Cela prépare une discussion du cas des éponges de Barański aléatoires en toute dimension dans la section 2.4.

2.1 Tapis de Barański déterministes

On va calculer ici la dimension de Hausdorff de certaines structures fractales que l'on nomme **tapis de Barański**. Rappelons que l'étude de ces ensembles a été effectuée dans [1]. Barański y a calculé entre autres leur dimension de Hausdorff. Nous allons ici présenter le calcul de cette dimension, mais par une autre méthode lorsqu'il s'agira de la majorer, inspirée des travaux de Bedford dans le cas des tapis de Sierpiński. Ceci nous sera précieux pour l'étude du cas aléatoire. Le principe sous-jacent restera néanmoins le même, à savoir obtenir la dimension recherchée comme une borne supérieure de dimensions de Hausdorff d'une certaines classes de mesures sur nos tapis, c'est-à-dire en écrivant un principe variationnel. Définissons tout d'abord ces tapis de Barański. $|.|$ dénotera dorénavant la norme infinie classique sur les espaces $\mathbb{R}^k$. Soient $r, s \geq 2$ et $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_s \in (0,1)$ tels que $\sum_{i=1}^{r} a_i = \sum_{j=1}^{s} b_j = 1$.

Soit $X = [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$. Pour $(i,j) \in X$ on définit les applications

$$f_{(i,j)} : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & b_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i'=0}^{i-1} a_{i'} \\ \sum_{j'=0}^{j-1} b_{j'} \end{pmatrix}$$

ainsi que

$$\pi : (x,y) = (x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots \in X^{\mathbb{N}^*} \mapsto \bigcap_{n\geq 1} f_{(x_1,y_1)} \circ \ldots \circ f_{(x_n,y_n)}([0,1]^2) \in [0,1]^2 .$$

π est surjective, mais n'est pas injective en général. Si $(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n) \in X^n$, on appellera un ensemble de la forme $f_{(x_1,y_1)} \circ \cdots \circ f_{(x_n,y_n)}([0,1]^2)$ un rectangle basique de génération n. On définit aussi de manière classique le cylindre symbolique de génération n associé comme étant

$$[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] = \left\{(x',y') \in X^{\mathbb{N}^*},\ (x'_k,y'_k) = (x_k,y_k)\ \forall k \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Soit $D = \{(i_1,j_1),\ldots,(i_d,j_d)\}$ un ensemble de d couples distincts de X. Soit aussi $K = \pi(D^{\mathbb{N}^*})$. On appellera K un tapis de Barański. Pour $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ soit

$$q_{(i,j)}((x,y),n) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[(i,j)]}(\sigma^k((x,y)))$$

la fréquence du digit $(i,j) \in X$ à la génération n, $q_i(x,n) = \sum_{j=0}^{s-1} q_{(i,j)}((x,y),n)$ et $q_j(y,n) = \sum_{i=0}^{r-1} q_{(i,j)}((x,y),n)$. Soit aussi

$$S = \left\{ q = (q_{(i,j)})_{(i,j)\in X} \in (\mathbb{R}_+)^{|X|} \text{ tels que } \sum_{(i,j)\in X} q_{(i,j)} = 1 \text{ et } q_{(i,j)} = 0 \text{ si } (i,j) \notin D \right\}$$

et

$$S_A \text{ (resp. } S_B) = \left\{ q \in S,\ \sum_{i=0}^{r-1} q_i \log(a_i) \geq \sum_{j=0}^{s-1} q_j \log(b_j) \right\} \text{ (resp. } \leq), \tag{2.1}$$

si de nouveau on pose $q_i = \sum_{j=0}^{s-1} q_{i,j}$ et $q_j = \sum_{i=0}^{r-1} q_{i,j}$. Remarquons que si $(q_{(i,j)}((x,y),n)) \in S$ alors

$$(q_{(i,j)}((x,y),n)) \in S_B \Leftrightarrow a_{x_1}\ldots a_{x_n} \leq b_{y_1}\ldots b_{y_n}.$$

Ceci signifie que le rectangle basique $f_{(x_1,y_1)} \circ \ldots \circ f_{(x_n,y_n)}([0,1]^2)$ a une largeur supérieure ou égale à sa longueur. Dans ce cas on posera $M^B((x,y),n) = \min\{m \geq n, b_{y_1}\ldots b_{y_m} \leq a_{x_1}\ldots a_{x_n}\}$.

Lemme 2.1.1. *On a les propriétés suivantes :*

1. $n \leq M^B((x,y),n) \leq C_1 n$, *où* $C_1 = \lceil \frac{\log(\min(a_1,\ldots,a_r))}{\log(\max(b_1,\ldots,b_s))} \rceil \in \mathbb{N}^*$
2. $\forall (x,y),\ \forall n,\ M^B((x,y),n) \leq M^B((x,y),n+1) \leq M^B((x,y),n) + C_1.$

3. $1 \leq \frac{a_{x_1}\dots a_{x_n}}{b_{y_1}\dots b_{y_{M^B((x,y),n)}}} \leq C_2 = \frac{1}{\min_j b_j}$, *ce qui implique*

$$0 \leq \sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,n)\log(a_i) - \frac{M^B((x,y),n)}{n}\sum_{j=0}^{s-1} q_j(y, M^B((x,y),n))\log(b_j) \leq \frac{\log(C_2)}{n}.$$

Démonstration. 1. On a $b_{y_1}\cdots b_{y_{C_1 n}} \leq \max(b_1,\dots,b_s)^{C_1 n} \leq \min(a_1,\dots,a_r)^n \leq a_{x_1}\cdots a_{x_n}$.

2. De manière similaire $b_{y_1}\cdots b_{y_{M^B((x,y),n)+C_1}} \leq a_{x_1}\cdots a_{x_n}\max(b_1,\dots,b_s)^{C_1} \leq a_{x_1}\cdots a_{x_{n+1}}$.

3. La troisième propriété est claire et découle de la définition de $M^B((x,y),n)$.

□

Si $(q_{(i,j)}((x,y),n)) \in S_A$ on définit aussi

$$M^A((x,y),n) = \min\left\{m \geq n, a_{x_1}\dots a_{x_m} \leq b_{y_1}\dots b_{y_n}\right\}.$$

avec des propriétés similaires.

Soit ν_q la mesure de Bernoulli sur $X^{\mathbb{N}^*}$ associée aux poids $q = (q_{i,j}) \in S$. Celle-ci vérifie

$$\nu_q([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]) = q_{(x_1,y_1)}\cdots q_{(x_n,y_n)}$$

pour tout cylindre symbolique $[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]$. Soit aussi $\mu_q = \nu_q \circ \pi^{-1}$, qui est une mesure de probabilité à support inclus dans K. On cherche à calculer $\dim_H(\mu_q)$. La loi forte des grands nombres nous donne que pour ν_q-presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\forall (i,j) \in X,\ q_{i,j}((x,y),n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q_{i,j}.$$

Supposons maintenant $q \in S_B$ et notons

$$L_B : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \left\lceil \frac{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} n \right\rceil \geq n.$$

Pour $(x_1,y_1)(x_2,y_2)\dots \in X^{\mathbb{N}^*}$ on définit le cylindre symbolique généralisé

$$\begin{aligned} C_n^B((x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots) &= \left[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)y_{n+1}\dots y_{L_B(n)}\right] \\ &= \left\{(x',y') \in \Omega,\ x'_k = x_k\ \forall k \in [\![1,n]\!] \text{ et } y'_k = y_k\ \forall k \in [\![1,L_B(n)]\!]\right\}. \end{aligned}$$

L'image par π d'un tel cylindre généralisé sera appelée un quasi-carré. Notons

$$\widetilde{K} = \left\{(x,y) \in [0,1]^2,\ \left|\pi^{-1}\left(\{(x,y)\}\right)\right| = 1\right\}$$

et $Y = \pi^{-1}(\widetilde{K})$. Remarquons que

$$Y^c \cap \operatorname{supp} \nu_q \subset \bigcup_{k \geq 0} \bigcup_{\substack{A \subset \left\{(i,j),\ q_{(i,j)} > 0\right\} \\ A \neq \left\{(i,j),\ q_{(i,j)} > 0\right\}}} \sigma^{-k}(A^{\mathbb{N}^*}),$$

d'où $\mu_q(\widetilde{K}) = \nu_q(Y) = 1$. En particulier on a

$$\nu_q(C_n^B((x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots)) = \mu_q(\pi(C_n^B((x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots)))$$

pour tous n et $(x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots \in X^{\mathbb{N}^*}$. Pour $(x, y) \in \widetilde{K}$, on notera encore $(x, y) = (x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots$ son unique antécédent par π (avec un léger abus de langage), et on peut donc définir l'unique suite décroissante de quasi-carrés

$$\left(\pi\left(\left[(x_1, y_1) \dots (x_n, y_n) y_{n+1} \dots y_{L_B(n)}\right]\right)\right)_n$$

de côtés $a_n((x, y)) = a_{x_1} \dots a_{x_n}$ et $b_n((x, y)) = b_{y_1} \dots b_{y_{L_B(n)}}$ qui le contiennent. Pour simplifier les notations on notera encore $(C_n^B(x, y))_n$ cette suite de quasi-carrés. On notera aussi

$$\mathcal{C}_n^B = \left\{C_n^B((x, y)),\ (x, y) \in \widetilde{K}\right\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2),$$

ainsi que

$$\widetilde{\dim}(\mu_q, (x, y)) := \liminf_{n \to \infty} \frac{\log(\mu_q(C_n^B((x, y))))}{\log(a_n((x, y)))}$$

pour $(x, y) \in \widetilde{K}$. On énonce le lemme qui suit dans le cadre le plus général possible : celui-ci s'applique en particulier à notre mesure μ_q qui vérifie l'hypothèse avec $\gamma_1 = \sum_i q_i \log(a_i)$. Ce lemme, dont la conclusion est classique dans le cadre de l'étude des attracteurs auto-affines, est semblable à [37, Théorème 2.1].

Lemme 2.1.2. *Soit μ une mesure Borélienne non nulle et finie sur K telle que pour un certain $\gamma_1 < 0$ on ait pour μ-presque tout $(x, y) \in \widetilde{K}$*

$$\frac{\log\left(a_n((x, y))\right)}{n},\ \frac{\log\left(b_n((x, y))\right)}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \gamma_1.$$

Alors pour μ-presque tout $(x, y) \in \widetilde{K}$ on a

$$\dim(\mu, (x, y)) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log(\mu(B((x, y), r)))}{\log(r)} = \widetilde{\dim}(\mu, (x, y))$$

Démonstration. Si pour tout n assez grand on a $a_n((x, y)) \geq b_n((x, y))$, alors pour ces n on a

$C_n^B((x,y)) \subset B_{a_n((x,y))}((x,y))$, donc

$$\liminf_n \frac{\log\left(\mu\left(C_n^B((x,y))\right)\right)}{\log\left(a_n((x,y))\right)} \geq \liminf_n \frac{\log\left(\mu\left(B_{a_n((x,y))}((x,y))\right)\right)}{\log\left(a_n((x,y))\right)} \geq \liminf_{r\to 0} \frac{\log(\mu(B((x,y),r)))}{\log(r)}.$$

On obtient le même résultat si $a_n((x,y)) < b_n((x,y))$ pour tout n assez grand. Si $\mathbb{N} = X \sqcup Y$ avec $|X| = |Y| = +\infty$ alors on conclut en utilisant le fait que

$$\liminf_n u_n = \min\left(\liminf_{n\in X} u_n, \liminf_{n\in Y} u_n\right).$$

On a donc l'inégalité $\widetilde{\dim}(\mu,(x,y)) \geq \dim(\mu,(x,y))$ pour μ-presque tout $(x,y) \in \widetilde{K}$. Supposons maintenant

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{(x,y) \in \widetilde{K},\ \widetilde{\dim}(\mu,(x,y)) > \dim(\mu,(x,y))\right\}\right)\\
&= \mu\Bigg(\bigcup_{\alpha\in\mathbb{Q}_+^*} \bigcup_{\epsilon\in\mathbb{Q}\cap]0,-\gamma_1[} \Bigg\{(x,y) \in \widetilde{K},\ \widetilde{\dim}(\mu,(x,y)) > \alpha + \phi_\alpha(\epsilon) + 2\epsilon\\
&\qquad\qquad \text{et } \dim(\mu,(x,y)) < \alpha + \epsilon\Bigg\}\Bigg) > 0,
\end{aligned}$$

où $\phi_\alpha(\epsilon) = \frac{\epsilon(-\alpha-\epsilon)-4\epsilon}{\epsilon+\gamma_1} + \epsilon > 0$. Ainsi il existe $\alpha > 0$ et $0 < \epsilon < -\gamma_1$ tels que

$$\begin{aligned}
A := \Bigg\{&(x,y) \in \widetilde{K},\ \widetilde{\dim}(\mu,(x,y)) > \alpha + \phi_\alpha(\epsilon) + 2\epsilon,\ \dim(\mu,(x,y)) < \alpha + \epsilon \text{ et}\\
&\frac{\log(a_n((x,y)))}{n}, \frac{\log(b_n((x,y)))}{n} \to \gamma_1\Bigg\}
\end{aligned}$$

soit de mesure strictement positive. En utilisant le théorème d'Egoroff on obtient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $B \subset A$ tels que d'abord $\mu(B) > 0$, ensuite pour tout $n \geq n_0$, pour tout $(x,y) \in B$, $\mu(C_n^B((x,y))) \leq a_n((x,y))^{\alpha+\phi_\alpha(\epsilon)+\epsilon}$, et enfin

$$\left|\frac{\log(a_n((x,y)))}{n} - \gamma_1\right|, \left|\frac{\log(b_n((x,y)))}{n} - \gamma_1\right| \leq \epsilon.$$

Soit maintenant $\tau = \mu|_B$: grâce au fait que $\tau \ll \mu$, au théorème de Radon-Nikodym et au théorème de différentiation de Lebesgue, on déduit facilement que $\dim(\tau,(x,y)) = \dim(\mu,(x,y)) < \alpha + \epsilon$ pour τ-presque tout $(x,y) \in B$. Fixons donc un tel $(x,y) \in B$. Si $r > 0$ est tel que $\frac{\log(\tau(B((x,y),r)))}{\log(r)} \leq \alpha + \epsilon$ et n est tel que $a_{n+1}((x,y)) \leq r < a_n((x,y))$, alors

$$\log(\tau(B((x,y),a_{n+1}((x,y))))) \leq \log(\tau(B((x,y),r))) \leq \log(\tau(B((x,y),a_n((x,y)))))$$

et $\log(a_{n+1}((x,y))) \leq \log(r) \leq \log(a_n((x,y)))$. Ainsi, il existe des n arbitrairement grands tels que $\tau(B((x,y),a_n((x,y)))) \geq a_{n+1}((x,y))^{\alpha+\epsilon}$. On en déduit que pour des n arbitrairement grands on a

$$\begin{aligned}
&a_{n+1}((x,y))^{\alpha+\epsilon}\\
&\leq \tau(B((x,y),a_n((x,y))))\\
&\leq \sum_{\substack{C\in\mathcal{C}_n^B \text{ tq } \tau(C)>0\\ \text{et } C\cap B((x,y),a_n((x,y)))\neq\varnothing}} \tau(C)\\
&\leq e^{n(\epsilon+\gamma_1)(\alpha+\phi_\alpha(\epsilon)+\epsilon)}\#\left\{C\in\mathcal{C}_n^B \text{ tq } \tau(C)>0 \text{ et } C\cap B((x,y),a_n((x,y)))\neq\varnothing\right\}\\
&\leq e^{n(\epsilon+\gamma_1)(\alpha+\phi_\alpha(\epsilon)+\epsilon)}\#\Big\{C \text{ carrés d'intérieurs disjoints de côtés } e^{n(-\epsilon+\gamma_1)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{tq } C\cap B((x,y),e^{n(\epsilon+\gamma_1)})\neq\varnothing\Big\}\\
&\leq e^{n(\epsilon+\gamma_1)(\alpha+\phi_\alpha(\epsilon)+\epsilon)}\left(e^{2n\epsilon}+2\right)^2,
\end{aligned}$$

le passage de la troisième à la quatrième inégalité se justifiant par le fait que si $C\in\mathcal{C}_n^B$ est tel que $\tau(C)>0$, alors la longueur et la largeur du rectangle basique C sont minorées par $e^{n(-\epsilon+\gamma_1)}$ et majorées par $e^{n(\epsilon+\gamma_1)}$. Ainsi pour des n arbitrairement grands on a

$$\frac{(\alpha+\epsilon)\log(a_{n+1}((x,y)))}{n} \leq (\epsilon+\gamma_1)(\alpha+\phi_\alpha(\epsilon)+\epsilon)+\frac{2\log(e^{2n\epsilon}+2)}{n}.$$

En passant à la limite sur n on obtient $\phi_\alpha(\epsilon) \leq \frac{\epsilon(-\alpha-\epsilon)-4\epsilon}{\epsilon+\gamma_1}$, ce qui est absurde. On en déduit finalement le résultat voulu. □

On prouverait de manière similaire le même résultat pour la dimension supérieure de μ. De plus si $q\in S_A$, on obtient des résultats identiques avec

$$L_A : n\in\mathbb{N}^* \mapsto \left\lceil \frac{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}{\sum_i q_i\log\left(\frac{1}{b_i}\right)} n\right\rceil \geq n$$

et la suite de cylindres généralisés

$$C_n^A((x,y)) = \Big[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)x_{n+1}\dots x_{L_A(n)}\Big].$$

Théorème 2.1.3. *Si $q\in S_B$, alors μ_q est exactement dimensionnelle et*

$$\dim(\mu_q) = \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} q_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \frac{h((q_j))}{\sum\limits_{j=0}^{s-1} q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)},$$

et si $q \in S_A$ alors

$$\dim(\mu_q) = \frac{h((q_{i,j})|(q_i))}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} + \frac{h((q_i))}{\sum\limits_{i=0}^{s-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}.$$

Démonstration. Supposons que $q \in S_B$. En utilisant le lemme de Billingsley et le lemme 2.1.2, il suffit de prouver que pour ν_q-presque tout $(x,y) \in D^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\frac{\log(\nu_q(C_n^B(x,y)))}{\log(a_{x_1}\dots a_{x_n})} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \frac{h((q_j))}{\sum\limits_{j=0}^{s-1} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}.$$

Il s'agit d'un calcul direct, en utilisant le fait que

$$\nu_q(C_n^B(x,y))) = \prod_{(i,j)\in X} q_{i,j}^{nq_{i,j}((x,y),n)} \prod_{j=0}^{s-1} q_j^{L_B(n)q_j(y,L_B(n))-nq_j(y,n)}$$

pour $(x,y) \in \mathrm{supp}(\nu_q)$. On obtient de la même façon la formule voulue pour $q \in S_A$.

$\square$

Tout ceci nous permet d'affirmer avec le lemme de Billingsley que

$$\dim_H(K) \geq \sup_{q\in S} \dim(\mu_q).$$

On cherche maintenant à majorer $\dim_H(K)$. Soit

$$K_B = \{(x,y) \in K,\ (q_{i,j}((x,y),n)) \in S_B \text{ pour une infinité de } n\}.$$

Par cette définition on signifie que $(x,y) \in K_B$ si et seulement si il existe au moins un élément de $D^{\mathbb{N}^*}$ (noté de nouveau $(x,y) = (x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots$) dans l'ensemble $\pi^{-1}(\{(x,y)\})$, tel que $(q_{i,j}((x,y),n)) \in S_B$ pour une infinité de n.

Théorème 2.1.4. *On a*

$$\dim_H(K_B) \leq \sup_{(q_{i,j})\in S_B} \left(\frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum\limits_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \frac{h((q_j))}{\sum\limits_{j=0}^{s-1} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} \right).$$

Démonstration. Pour montrer ce résultat, on va utiliser une méthode similaire à celle de Bedford dans [9] pour majorer la dimension de Hausdorff des tapis de Sierpiński. Pour $\epsilon > 0$

assez petit on peut trouver Q_ϵ^B un sous-ensemble fini de S_B et $n_B \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$\forall (q_{i,j}) \in Q_\epsilon^B,\ \forall (i,j) \in D,\ q_{i,j} \geq \frac{\epsilon}{n_B}$$

et

$$\forall (q'_{i,j}) \in S,\ \exists (q_{i,j}) \in Q_\epsilon^B,\ |(q_{i,j}) - (q'_{i,j})| \leq \epsilon.$$

Soit $(x,y) \in K_B$. On appellera aussi S_B l'ensemble des n tels que $q_{i,j}((x,y),n) \in S_B$. Pour simplifier les notations, on notera $M(n)$ à la place de $M(n,(x,y))$. Soit $(q'_{i,j}) \in S_B$ tel que $(q'_{i,j})$ soit une valeur d'adhérence de $(q_{i,j}((x,y),n))_{n \in S_B}$ et tel que

$$\limsup_{n \in S_B} \frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,n)\log(a_i)} = \frac{h((q'_{i,j})|(q'_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q'_i \log(a_i)}.$$

En utilisant le point 2 du lemme 2.1.1 et le fait que $q_{i,j}((x,y),n+1) - q_{i,j}((x,y),n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, qui implique

$$\max_{k \in [\![1,C_1]\!]} (q_{i,j}((x,y),n+k) - q_{i,j}((x,y),n)) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

on sait qu'il existe des $n \in S_B$ arbitrairement grands tels que

$$|(q_j(y,M(n))) - (q'_j)| \leq r\epsilon.$$

En utilisant la définition de la lim sup, on voit que l'on peut choisir ces n pour qu'ils vérifient

$$\frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,n)\log(a_i)} \leq \frac{h((q'_{i,j})|(q'_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q'_i \log(a_i)} + \epsilon.$$

Soit ω un module de continuité positif et croissant de la fonction uniformément continue $x \in [0,1] \mapsto -x\log(x)$. Soit $(q_{i,j}) \in Q_\epsilon^B$ (dépendant de (x,y)) tel que $|(q_{i,j}) - (q'_{i,j})| \leq \epsilon$. Pour ces $n \in S_B$ on obtient donc $|(q_j(y,M(n))) - (q_j)| \leq 2r\epsilon$ et

$$\frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,n)\log(a_i)} \leq \left| \frac{h((q'_{i,j})|(q'_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q'_i \log(a_i)} - \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log(a_i)} \right| + \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log(a_i)} + \epsilon$$

De plus on a

$$\begin{aligned} &\left| \frac{h((q'_{i,j})|(q'_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q'_i \log(a_i)} - \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{-\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log(a_i)} \right| + \epsilon \\ \leq\ & h((q'_{i,j})|(q'_j)) \left| \frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1} q'_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} - \frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \right| \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} |h((q'_{i,j})|(q'_j)) - h((q_{i,j})|(q_j))| + \epsilon$$

$$\leq \epsilon \log(d) C_a^{-2} s \sum_{i=0}^{r-1} \log\left(\frac{1}{a_i}\right) + C_a^{-1}(d\omega(\epsilon) + s\omega(r\epsilon)) + \epsilon$$

$$:= \phi_1(\epsilon),$$

où $C_a = \min_{q\in S} \sum_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right) > 0$. On sait aussi que pour un $n \in S_B$ fixé on a $(\widetilde{q}_{i,j}) \in Q_\epsilon^B$ (dépendant de (x,y) et de n) tel que $|(q_{i,j}((x,y),n) - (\widetilde{q}_{i,j})| \leq \epsilon$. Ainsi on obtient

$$K_B \subset \bigcap_{\epsilon>0} \bigcup_{(q_{i,j})\in Q_\epsilon^B} \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{N\geq p} \bigcup_{M=N}^{C_1 N} \bigcup_{(\widetilde{q}_{i,j})\in Q_\epsilon^B} \Gamma(\epsilon, N, M),$$

où

$$\Gamma(\epsilon,N,M) = \Bigg\{ N\times M \text{ quasi-carrés } C = \pi\left([(x_1,y_1)\cdots(x_N,y_N)y_{N+1}\cdots y_M]\right)$$
$$\text{de diamètre} \leq C_2 \exp\left(M\sum_{j=0}^{s-1} q_j \log(b_j) + 2rM\sum_{j=0}^{s-1}\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\epsilon\right)$$
$$\text{tels que } |(q_j(y,M) - (q_j)| \leq 2r\epsilon,\ |(q_{i,j}((x,y),N)) - (\widetilde{q}_{i,j})| \leq \epsilon$$
$$\text{et } \frac{h((q_{i,j}((x,y),N))|(q_j(y,N))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,N)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \leq \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \phi_1(\epsilon)\Bigg\}.$$

Soit

$$[y_1,\ldots,y_M] \in A = \left\{[y_1,\ldots,y_M],\ |(q_j(y,M)) - (q_j)| \leq 2r\epsilon\right\}.$$

On a

$$\nu_{(q_j)}([y_1,\ldots,y_M]) = \prod_j q_j^{Mq_j(y,M)} \geq \prod_j q_j^{Mq_j+2rM\epsilon} = \exp\Bigg(-Mh((q_j)) + 2rM\epsilon\sum_j \log(q_j)\Bigg).$$

Donc

$$\nu_{(q_j)}([y_1,\ldots,y_M]) \geq \exp\left(-Mh((q_j)) + 2rMs\epsilon\log\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right)\right).$$

Ainsi $\#A \leq \exp\left(Mh((q_j)) - 2rMs\epsilon\log\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right)\right)$. Fixons maintenant $y_1,\ldots y_M$ tels que $[y_1,\ldots,y_M] \in A$ et soit

$$B = \Bigg\{ [(x_1,y_1)\ldots(x_n,y_n)],\ |(q_{i,j}((x,y),n) - (\widetilde{q}_{i,j})| \leq \epsilon$$
$$\text{et } \frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)))}{-\sum_i q_i(x,n)\log(a_i)} \leq \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{-\sum_i q_i\log(a_i)} + \phi_1(\epsilon)\Bigg\}$$

On a pour tout $[(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)]\in B$

$$\mu_{(\widetilde{q}_{i,j})}([(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)]\,|\,[y_1,\dots,y_n]) = \exp\left(n\left(\sum_{i,j} q_{i,j}((x,y),n)\log\left(\frac{\widetilde{q}_{i,j}}{\widetilde{q}_j}\right)\right)\right).$$

De plus

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} q_{i,j}((x,y),n)\log\left(\frac{\widetilde{q}_{i,j}}{\widetilde{q}_j}\right) = \\
&\sum_{i,j}(q_{i,j}((x,y),n)-\widetilde{q}_{i,j})\log\left(\frac{\widetilde{q}_{i,j}}{\widetilde{q}_j}\right) - h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n))) \\
&+ h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n))) - h((\widetilde{q}_{i,j})|(\widetilde{q}_j)).
\end{aligned}$$

et

$$\left|\sum_{i,j}(q_{i,j}((x,y),n)-\widetilde{q}_{i,j})\log\left(\frac{\widetilde{q}_{i,j}}{\widetilde{q}_j}\right)\right| \leq -\epsilon d\log\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right).$$

On définit $\phi_2(\epsilon) = -d\epsilon\log\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right) + d\omega(\epsilon) + s\omega(r\epsilon)$. On a

$$\begin{aligned}
&\mu_{(\widetilde{q}_{i,j})}([(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)]\,|\,[y_1,\dots,y_n]) \\
&\geq \exp(-nh((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n))) + n\epsilon d\log\left(\frac{\epsilon}{n_B}\right) - nd\omega(\epsilon) - ns\omega(r\epsilon)).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
&\mu_{(\widetilde{q}_{i,j})}([(x_1,y_1)\dots(x_n,y_n)]\,|\,[y_1,\dots,y_n]) \\
&\geq \exp\left(-n\sum_i q_i(x,n)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)\left[\frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)))}{\sum_i q_i(x,n)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right] - M\phi_2(\epsilon)\right) \\
&\geq \exp\left(-n\sum_i q_i(x,n)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)\left[\frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right] - M\phi_1(\epsilon)\sum_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right) - M\phi_2(\epsilon)\right) \\
&\geq \exp\Bigg(-M\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left[\frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right] - MCr\epsilon\sum_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right) \\
&\qquad\qquad - M\phi_1(\epsilon)\sum_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right) - M\phi_2(\epsilon)\Bigg),
\end{aligned}$$

où $C = \max_{q \in S} \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} > 0$. Finalement on obtient

$$\#\Gamma(\epsilon, M, N) \leq \exp\left(Mh((q_j)) + M\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left[\frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right] + M\phi_3(\epsilon)\right),$$

où $\phi_3(\epsilon) \to 0$ lorsque $\epsilon \to 0$. Rappelons que $\dim_H(K_B) \leq \sup_{(q_{i,j}) \in Q_\epsilon^B} \dim_H(X_{(q_{i,j})})$, avec

$$X_{(q_{i,j})} = \bigcap_{p \geq 1} \bigcup_{N \geq p} \bigcup_{M=N}^{C_1 N} \bigcup_{(\widetilde{q}_{i,j}) \in Q_\epsilon^B} \Gamma(\epsilon, N, M).$$

Soit $C_b = \min_{q \in S} \sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right) > 0$. On suppose maintenant de plus que $\epsilon \leq \frac{C_b}{4r\sum_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}$. Pour $0 \leq t \leq 2$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^t_{C_2 e^{-\frac{C_b}{2}p}}(X_{(q_{i,j})}) \\
&= \inf\left\{\sum_k |A_k|^t,\ X_{(q_{i,j})} \subset \bigcup_k A_k \text{ and } |A_k| \leq C_2 e^{-\frac{C_b}{2}p}\right\} \\
&\leq (C_2)^2(\#Q_\epsilon^B)\sum_{N \geq p}\sum_{M=N}^{C_1 N} \exp\left(tM\sum_j q_j \log(b_j) + 2rtM\epsilon\sum_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right) + Mh((q_j))\right. \\
&\qquad \left. + M\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left[\frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right] + M\phi_3(\epsilon)\right) \\
&\leq (C_2)^2(\#Q_\epsilon^B)\sum_{N \geq p}\sum_{M=N}^{C_1 N} \exp\left(M\left[\sum_j q_j \log(b_j)\right]\left(t - \frac{h((q_j))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right.\right. \\
&\qquad \left.\left. - 4r\epsilon - \frac{\phi_3(\epsilon)}{C_b}\right)\right)
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tend vers 0 lorsque $p \to +\infty$ si

$$t > -\frac{h((q_j))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} - 4r\epsilon - \frac{\phi_3(\epsilon)}{C_b}.$$

Ainsi pour tout $\epsilon > 0$

$$\dim_H(K_B) \leq \sup_{(q_{i,j}) \in S_B}\left(\frac{h((q_j))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} + \frac{h((q_{i,j})|(q_j))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right) + 4r\epsilon + \frac{\phi_3(\epsilon)}{C_b},$$

ce qui nous permet de conclure en faisant tendre ϵ vers 0.

□

On peut prouver de la même manière que si

$$K_A = \{(x,y) \in K,\ (q_{i,j}((x,y),n)) \in S_A \text{ pour une infinité de } n\},$$

alors

$$\dim_H(K_A) \leq \sup_{(q_{i,j}) \in S_A} \left(\frac{h((q_{i,j})|(q_i))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} + \frac{h((q_i))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \right).$$

Finalement on en déduit

$$\dim_H(K) = \dim_H(K_1 \cup K_2) \leq \sup_{q \in S} \dim(\mu_q).$$

Cette borne supérieure étant clairement atteinte par compacité de S et continuité, on en déduit le

Théorème 2.1.5. *La dimension de Hausdorff d'un tapis de Baranski K est égale au maximum des dimensions de mesures de Bernoulli à support dans K.*

2.2 Mesures de Mandelbrot et tapis de Barański aléatoires

Dans cette section, on cherche à calculer la dimension des tapis de Barański aléatoires. Pour cela, on cherche comme dans le cas déterministe à établir un principe variationnel, en utilisant la classe des **mesures de Mandelbrot**, généralisation aléatoire des produits de Bernoulli. On rappellera dans un premier temps le procédé de ces tapis et de ces mesures, et on donnera une liste de propriétés classiques concernant ces dernières. On calculera ensuite les dimensions recherchées dans la sous-section 2.2.1. Nos stratégies de preuves se rapprochent du cas déterministe (étude de la dimensions des mesures de Mandelbrot via lemme de Billingsley puis majoration à l'aide de recouvrements bien choisis) mais impliquent des subtilités propres au cas aléatoire. Dans la sous-section 2.2.2, on étudiera la dimension de Hausdorff et de Minkowski du projeté sur un axe d'un tapis de Barański. Enfin, dans la sous-section 2.2.3, on calculera la dimension de Minkowski des tapis de Barański, en s'inspirant du cas déterministe étudié dans [1] et en exploitant de manière fine une idée introduite dans [8].

On posera de nouveau $X = [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$, et $\mathcal{A} = \bigcup_{n \geq 0} X^n$, X^0 étant uniquement constitué du mot vide $\varnothing$. Soit $C = (c_{i,j})_{(i,j)\in X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1\}^X$ vérifiant les propriétés $\mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)} c_{(i,j)}\right] > 1$ et

$$\#\left\{j,\ \sum_i \mathbb{E}\left[c_{(i,j)}\right] > 0\right\} \geq 2.$$

Soit aussi $W = (W_{i,j})_{(i,j)\in X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^X$, définie simultanément avec C et vérifiant les propriétés $\sum_{(i,j)\in X} \mathbb{E}\left[W_{i,j}\right] = 1$,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{(i,j)\neq(i',j')} W_{(i,j)}W_{(i',j')} = 0\right) < 1$$

et

$$\left\{W_{(i,j)} > 0\right\} \subset \left\{c_{(i,j)} = 1\right\}$$

pour tout $(i,j) \in X$. Soit $(C(a), W(a))_{a\in\mathcal{A}}$ une famille de copies indépendante de (C,W). On fait de même l'hypothèse que pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $(i,j) \in X$ on a

$$\{W_{i,j}(a) > 0\} \subset \{c_{i,j}(a) = 1\}.$$

On pose pour tout $n \geq 1$

$$\Gamma_n = \left\{(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*},\ c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1}) = 1 \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!]\right\},$$

ainsi que $\Gamma = \bigcap\limits_{n\geq 1} \Gamma_n$. En utilisant les propriétés classiques des processus de Galton-Watson on obtient facilement grâce à nos hypothèses sur C que $P(\Gamma \neq \varnothing) > 0$. Notons $K_n = \pi(\Gamma_n)$ pour tout n, et $K = \pi(\Gamma)$. K sera appelé un tapis de Barański aléatoire (voir les figures ci-dessous pour une illustration). Pour $a \in X^k$ un mot donné de longueur k, on posera aussi

$$\Gamma_n^a = \left\{(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*},\ c_{(x_i,y_i)}(a(x,y)|_{i-1}) = 1 \text{ pour tout } i \in [\![1,n]\!]\right\},$$

ainsi que $\Gamma^a = \bigcap\limits_{n\geq 1} \Gamma_n^a$ et $K^a = \pi(\Gamma^a)$. Posons maintenant

$$T : q \geq 0 \longmapsto -\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} W_{(i,j)}^q\right]\right).$$

T est finie, continue et concave sur $[0,1]$. De plus, $T(1) = 0$ et

$$T(0) = -\log\left(\mathbb{E}\left[\#\left\{(i,j) \in X,\ W_{(i,j)} > 0\right\}\right]\right).$$

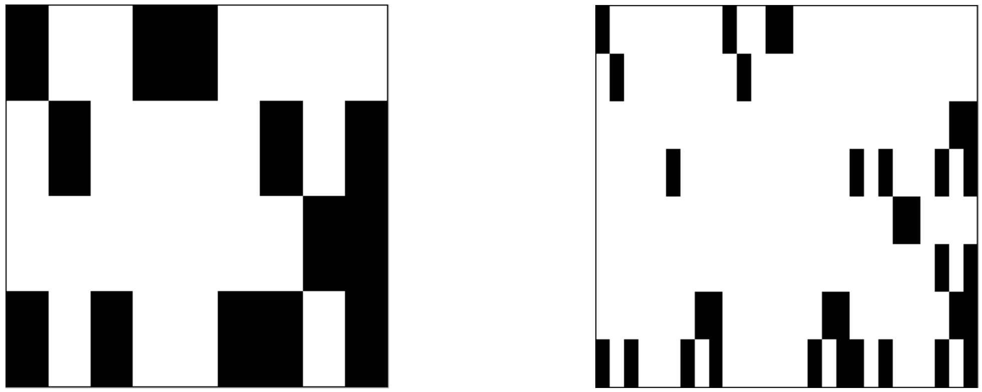

FIGURE 2.1 : Approximations de l'ensemble K lorsque tous les a_i sont égaux et tous les b_j sont égaux (tapis de Sierpiński aléatoire)

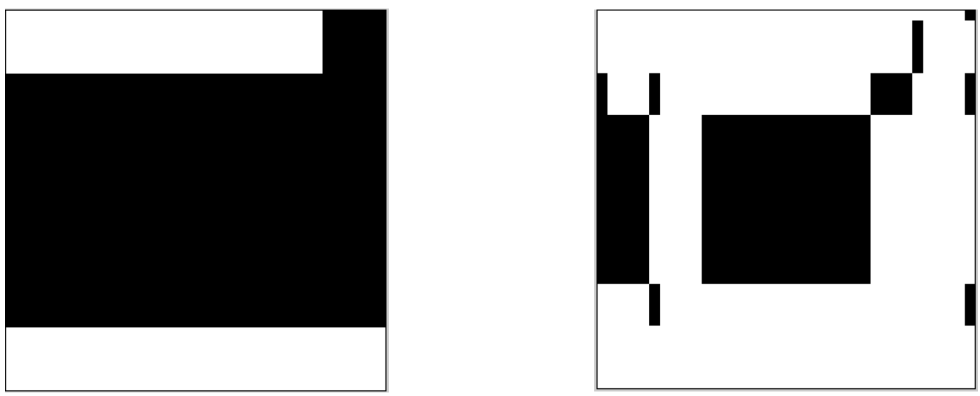

FIGURE 2.2 : Approximations de l'ensemble K dans le cas général (tapis de Barański aléatoire)

Par ailleurs, en utilisant le théorème de convergence dominée on obtient

$$T'(1^-) = -\sum_{(i,j)\in X} \mathbb{E}\left[W_{(i,j)} \log(W_{(i,j)})\right].$$

Soit pour $a \in \mathcal{A}$ et $n \geq 1$ la variable aléatoire

$$Y_n(a) = \sum_{(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)\in X^n} W_{(x_1,y_1)}(a) \cdots W_{(x_n,y_n)}(a(x_1,y_1)\cdots(x_{n-1},y_{n-1})).$$

La suite $(Y_n(a), \sigma(W_{(i,j)}(aa') : (i,j) \in X,\ a' \in X^{n-1}))_{n\geq 1}$ est une martingale positive, de limite presque sûre notée $Y(a)$. Ceci nous permet de définir presque sûrement l'application

$$\nu : [(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] \in X^n \mapsto W_{(x_1,y_1)}(\varnothing)\cdots W_{(x_n,y_n)}((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))Y((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)),$$

définie sur l'ensemble des cylindres symboliques de toutes générations. Celle-ci s'étend en une unique mesure sur $(X^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}(X^{\mathbb{N}^*}))$, encore notée ν. Cette mesure est aussi presque sûrement la limite faible de la suite $(\nu_n)_{n\geq 1}$ définie en distribuant uniformément (par rapport à la mesure uniforme sur $X^{\mathbb{N}^*}$) la masse $W_{(x_1,y_1)}(\varnothing)\cdots W_{(x_n,y_n)}((x_1,y_1)\cdots(x_{n-1},y_{n-1}))$ sur chaque cylindre $[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] \in X^n$. On posera aussi pour I un mot de taille quelconque la mesure ν^I définie par

$$\begin{aligned}\nu^I : & [(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] \in X^n \\ & \mapsto W_{(x_1,y_1)}(I)\cdots W_{(x_n,y_n)}(I(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))Y(I(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)),\end{aligned}$$

ainsi que la suite $(\nu_n^I)_{n\geq 1}$ définie en distribuant uniformément (par rapport à la mesure uniforme sur $X^{\mathbb{N}^*}$) la masse $W_{(x_1,y_1)}(I)\cdots W_{(x_n,y_n)}(I(x_1,y_1)\cdots(x_{n-1},y_{n-1}))$ sur chaque cylindre $[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] \in X^n$. Le support de ν est presque sûrement égal à l'ensemble des points $(x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots$ de $X^{\mathbb{N}^*}$ tels que $W_{(x_n,y_n)}((x_1,y_1)\cdots(x_{n-1},y_{n-1})) > 0$ pour tout $n \geq 1$ (voir [6]), et est donc presque sûrement inclus dans Γ. On a de plus $\operatorname{supp}\nu = \Gamma$ si et seulement si $\mathbb{P}(c_{(i,j)} = 1) = \mathbb{P}(W_{(i,j)} > 0)$ pour tout $(i,j) \in X$. On dira que ν est non dégénérée si $\mathbb{P}(\nu \neq 0) > 0$. Ainsi, en notant $Y_n = Y_n(\varnothing)$ et $Y = Y(\varnothing)$, ν est non dégénérée si et seulement si $\mathbb{E}[Y] > 0$.

Théorème 2.2.1 ([13, 27])**.** *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *ν est non dégénérée*
- $\mathbb{E}[Y] = 1$
- *La martingale (Y_n) est uniformément intégrable*
- $T'(1^-) > 0$

Dans ce cas on a en particulier nécessairement $T(0) < 0$.

Théorème 2.2.2 ([13, 27])**.** *Soit $q > 1$. Supposons $W_{(i,j)} \in L^q$ pour tout $(i,j) \in X$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- $0 < \mathbb{E}[Y^q] < +\infty$
- *La martingale (Y_n) est bornée dans L^q*
- $T(q) > 0$

Si ces conditions sont réalisées, ν est en particulier non dégénérée.

En particulier, si $W_{(i,j)} \in L^q$ pour tout $(i,j) \in X$ pour un $q > 1$ et si ν est non dégénérée, alors il existe $q' > 1$ tel que $T(q') > 0$.

Théorème 2.2.3 ([30]). *Supposons que pour un $q > 0$ on ait $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{W_{(i,j)}>0} W_{(i,j)}^{-q}\right] < +\infty$ pour tout $(i,j) \in X$. Alors il existe $q' > 0$ tel que $\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{Y>0} Y^{-q'}\right] < +\infty$.*

Rappelons que l'on définit la dimension entropique de ν (si elle existe) par

$$\dim_e(\nu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)\in X^n} \nu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]) \log(\nu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)])). \tag{2.2}$$

Théorème 2.2.4 ([27]). *Si ν est non dégénérée, alors presque sûrement, conditionnellement à $\nu \neq 0$ on a pour ν-presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log(\nu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)])}{n} = T'(1^-).$$

En particulier $\dim_e(\nu)$ existe et vaut $T'(1^-)$.

[6] a étudié la projection $(\pi_2)_*\nu$ de ν sur l'espace symbolique à une coordonnée, et a entre autres prouvé l'inégalité suivante qui nous servira par la suite à calculer la dimension de Hausdorff d'une mesure de Mandelbrot sur un tapis de Barański.

Théorème 2.2.5 ([6, Corollaire 5.2]). *Supposons ν non dégénérée et $W_{(i,j)} \in L^{q'}$ pour tout $(i,j) \in X$ pour un $q' > 1$. Soit $\tau : q > 0 \mapsto -\log\left(\sum_{j=0}^{s-1} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{r-1} W_{(i,j)}\right]^q\right)$. Alors pour tout $q \in]1,2]$ tel que $T(q) > 0$, il existe un polynôme de degré un f_q (dont les coefficients sont positifs et continus en q) tel que pour tout n on ait*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{(y_1,\ldots,y_n)\in[\![0,s-1]\!]^n} (\pi_2)_*\nu([y_1\cdots y_n])^q\right] \leq f_q(n) e^{-n\min(T(q),\tau(q))}.$$

De plus, la même inégalité est vraie pour tout n lorsque l'on remplace ν par ν_n.

Remarque 2.2.6. La construction présentée dans cette section s'adapte directement au cas des tapis de Lalley-Gatzouras et permet de construire la version aléatoire de ces tapis (en utilisant la fonction de projection π correcte). On définit de même les mesures de Mandelbrot sur ces derniers.

2.2.1 Dimension de Hausdorff des tapis de Barański aléatoires

On pose maintenant $\mu = \pi_*\nu$, et on cherche à calculer sa dimension de Hausdorff. On suppose dorénavant que $T(q) > -\infty$ pour un $q > 1$ (ce qui est équivalent à dire que $W_{(i,j)} \in L^q$ pour tout $(i,j) \in X$) et que ν est non dégénérée. On définit

$$S = \left\{ (q_{(i,j)}) \in [0,1]^{|X|},\ \sum_{(i,j)\in X} q_{(i,j)} = 1 \right\}$$

ainsi que S_A et S_B comme en 2.1. On suppose maintenant que $(\mathbb{E}[(W_{i,j})]) \in S_B$. On note Q la mesure de Peyrière sur $\Omega \times X^{\mathbb{N}^*}$ associée à μ définie par

$$Q(A) = \mathbb{E}\left[\int_{X^{\mathbb{N}^*}} 1_A(\omega,(x,y))\, d\nu((x,y))\right]$$

pour A dans la tribu produit. Il s'agit d'une mesure de probabilité telle que $Q(A) = 1$ si et seulement si presque sûrement, pour ν-presque tout (x,y) on a $(\omega,(x,y)) \in A$. Remarquons que pour $(i,j) \in X$ on a

$$\mathbb{E}_Q\left[(\omega,(x,y)) \in \Omega \times X^{\mathbb{N}^*} \mapsto 1_{[(i,j)]}(x,y)\right] = \mathbb{E}\left[\omega \mapsto \nu_\omega([(i,j)])\right] = \mathbb{E}\left[W_{i,j}\right],$$

donc par loi forte des grands nombres on a presque sûrement pour ν-presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$

$$q_{(i,j)}((x,y),n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[W_{i,j}\right].$$

En particulier, si on pose

$$L_B : n \in \mathbb{N}^* \mapsto \left\lceil \frac{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right] \log\left(\frac{1}{a_j}\right)}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right] \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} n \right\rceil \geq n,$$

on a

$$\frac{\log\left(a_{x_1}\dots a_{x_n}\right)}{n}, \frac{\log\left(b_{y_1}\dots b_{y_{L_B(n)}}\right)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log(a_i) := \gamma_1 < 0$$

presque sûrement, pour ν-presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$. Soit $\widetilde{Q}$ la mesure de Peyrière sur $\Omega\times[0,1]^2$ associée à μ et définie de la même façon que Q ; c'est aussi l'image de Q par l'application $(\omega,(x,y)) \mapsto (\omega,\pi((x,y)))$. On définit de nouveau $\widetilde{K} = \left\{(x,y) \in [0,1]^2,\ |\pi^{-1}(\{(x,y)\})| = 1\right\}$, de même que $Y = \pi^{-1}(\widetilde{K})$. On a similairement $\widetilde{Q}(\Omega\times\widetilde{K}) = Q(\Omega\times Y) = 1$ car en posant $\mathbb{E}[\nu]$ pour désigner la mesure de Bernoulli égale à l'espérance de ν on a

$$Q(\Omega\times Y^c) = \mathbb{E}[\nu]\left(Y^c \cap \operatorname{supp}\mathbb{E}[\nu]\right) = 0.$$

On peut encore définir pour $(x,y) \in \widetilde{K}$ son unique antécédent par π (toujours noté $(x,y) = (x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots$) ainsi que l'unique suite décroissante de quasi-carrés $(\pi(C_n^B((x,y))))$ associés à la fonction L_B qui le contiennent, en reprenant les notations du préambule au lemme 2.1.2. Ce lemme permet alors d'affirmer que presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$, pour μ-presque tout $(x,y) \in \widetilde{K}$ on a

$$\widetilde{\dim}(\mu,((x,y))) = \dim(\mu,(x,y)).$$

Théorème 2.2.7. *Presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$ on a*

$$\begin{aligned}
&\underline{\dim}_H(\mu) = \overline{\dim}_P(\mu) \\
&= \frac{T'(1)}{\sum_i \mathbb{E}[W_i] \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \left(\frac{1}{\sum_j \mathbb{E}[W_j] \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{1}{\sum_i \mathbb{E}[W_i] \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \right) \min\left(T'(1), h\left(\left(\mathbb{E}[W_j]\right)\right)\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant les résultats précédents et le lemme de Billingsley, il suffit pour conclure de prouver que presque sûrement, pour ν-presque tout $(x, y) \in X^{\mathbb{N}^*}$,

$$\frac{\log\left(\nu\left(\left[(x_1, y_1)\dots(x_n, y_n) y_{n+1}\dots y_{L_B(n)}\right]\right)\right)}{\log\left(a_{x_1}\dots a_{x_n}\right)}$$

converge vers la quantité souhaitée. Montrons que presque sûrement, pour ν-presque tout $(x, y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ la suite

$$u_n(x, y) = \frac{\log\left(\nu\left(\left[(x_1, y_1)\dots(x_n, y_n) y_{n+1}\dots y_{L_B(n)}\right]\right)\right)}{n \sum_i \mathbb{E}[W_i] \log(a_i)}$$

converge vers cette quantité, ce qui permettra de conclure. Pour cela, on adapte la preuve du théorème 2.2 de [7] (alors utilisée dans le cadre du calcul de la dimension de Hausdorff des tapis de Sierpiński aléatoires). Notons S_n la famille des rectangles symboliques de la forme $\left[(x_1, y_1)\dots(x_n, y_n) y_{n+1}\dots y_{L_B(n)}\right]$, ainsi que la fonction d'énergie libre associée à ν et aux partitions S_n

$$\rho : q \in \mathbb{R} \mapsto \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_1 n} \log\left(\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right).$$

Il est bien connu (voir par exemple [34]) que pour ν-presque tout (x, y) on a

$$\rho'(1^+) \leq \liminf_{n\to\infty} u_n(x, y) \leq \limsup_{n\to\infty} u_n(x, y) \leq \rho'(1^-).$$

Il suffit donc pour conclure de montrer que ρ est dérivable en 1, de dérivée la quantité souhaitée. Soit $q' > 1$ tel que pour tout $1 < q \leq q'$ on ait $T(q') > 0$. Fixons un tel q. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right] &= \sum_{U\in X^n} \mathbb{E}\left[\nu_n(U)^q\right] \mathbb{E}\left[\sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} (\pi_2)_* \left(\nu^U\right)(V)^q\right] \\
&= \sum_{U\in X^n} \mathbb{E}\left[\nu_n(U)^q\right] \mathbb{E}\left[\sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} (\pi_2)_* \nu(V)^q\right]
\end{aligned}$$

On peut alors majorer cette dernière quantité en utilisant le lemme 2.2.5 (on reprend les notations introduites dans ce lemme), ce qui permet d'obtenir

$$\mathbb{E}\left[\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right] \leq f_q(n)e^{-nT(q)-(L_B(n)-n)\min(T(q),\tau(q))}. \tag{2.3}$$

Si $0 < q < 1$, on a de plus par sous-additivité, indépendance et inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} (\pi_2)_* \nu(V)^q\right] \\
&\leq \sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} \sum_{\substack{U'\in X^{L_B(n)-n} \\ \pi_2(U')=V}} \mathbb{E}\left[\nu_{L_B(n)-n}(U')^q\right]\mathbb{E}\left[Y(U')^q\right] \\
&\leq e^{-(L_B(n)-n)T(q)}
\end{aligned}$$

et par inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} (\pi_2)_* \nu(V)^q\right] &\leq \sum_{V\in[\![0,s-1]\!]^{L_B(n)-n}} \left(\sum_{\substack{U'\in X^{L_B(n)-n} \\ \pi_2(U')=V}} \mathbb{E}\left[\nu(U')\right]\right)^q \\
&= e^{-(L_B(n)-n)\tau(q)}.
\end{aligned}$$

Tout ceci nous permet d'affirmer qu'il existe $C \geq 0$ tel qu'on a au voisinage de 1 pour tout n

- $\mathbb{E}\left[\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right] \leq f_q(n)e^{-L_B(n)T(q)}$ si $T'(1) < \tau'(1)$. Dans ce cas, on obtient en utilisant le lemme A.1.5 et la convexité de ρ que presque sûrement, pour tout q dans un voisinage de 1 on a
$$\rho(q) \geq \frac{T(q)}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}.$$
Les deux termes de cette inégalité sont convexes et coincident en $q = 1$, donc ρ est bien dérivable en 1 de dérivée $\frac{T'(1)}{\sum_j \mathbb{E}[W_j]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}$, ce que l'on souhaitait démontrer.

- $\mathbb{E}\left[\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right] \leq f_q(n)e^{-nT(q)-(L_B(n)-n)\tau(q)}$ si $T'(1) > \tau'(1)$. Dans ce cas, on obtient comme précédemment que ρ est dérivable en 1 de dérivée
$$\frac{T'(1)}{\sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \left(\frac{1}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{1}{\sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right)\tau'(1).$$

- $\mathbb{E}\left[\sum_{C\in S_n} \nu(C)^q\right] \leq f_q(n)e^{L_B(n)\left[C(q-1)^2-T(q)\right]}$ si $T'(1) = \tau'(1)$ (on utilise ici le fait que T

et τ sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 1). Dans ce cas, on obtient comme précédemment que ρ est dérivable en 1 de dérivée $\frac{T'(1)}{\sum_j \mathbb{E}[W_j]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}$.

$\square$

Remarque 2.2.8. Si ν est simplement non dégénérée (sans hypothèse d'existence de moments d'ordre > 1), le raisonnement ci-dessus nous permet d'affimer que presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}\overline{\dim}_P(\mu) \leq & \frac{T'(1^-)}{\sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \\ & + \left(\frac{1}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{1}{\sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log\left(\frac{1}{a_i}\right)}\right)\min\left(T'(1^-), h\left(\left(\mathbb{E}\left[W_j\right]\right)\right)\right).\end{aligned}$$

Si $(\mathbb{E}\left[(W_{i,j})\right]) \in S_A$, alors on prouve de même que presque sûrement, conditionnellement à $\mu \neq 0$ on a

$$\begin{aligned}&\underline{\dim}_H(\mu) = \overline{\dim}_P(\mu) \\ &= \frac{T'(1^-)}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)} + \left(\frac{1}{\sum_i \mathbb{E}\left[W_i\right]\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} - \frac{1}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}\right)\min\left(T'(1^-), h\left(\left(\mathbb{E}\left[W_i\right]\right)\right)\right).\end{aligned}$$

On prouverait aussi de la même manière le

Théorème 2.2.9. *Pour une mesure de Mandelbrot $\mu = \pi_*\nu$ sur un tapis de Lalley-Gatzouras aléatoire (voir les notations dans la section 1.1), avec les mêmes hypothèses que précédemment sur ν (non dégénéréscence et existence de moments d'ordre > 1) on a presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$*

$$\begin{aligned}\underline{\dim}_H(\mu) = \overline{\dim}_P(\mu) = & \frac{T'(1^-)}{\sum_{(i,j)} \mathbb{E}\left[W_{(i,j)}\right]\log\left(\frac{1}{a_{(i,j)}}\right)} \\ & + \left(\frac{1}{\sum_j \mathbb{E}\left[W_j\right]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)} - \frac{1}{\sum_{(i,j)} \mathbb{E}\left[W_{(i,j)}\right]\log\left(\frac{1}{a_{(i,j)}}\right)}\right)\min\left(T'(1^-), h\left(\left(\mathbb{E}\left[W_j\right]\right)\right)\right).\end{aligned}$$

On va maintenant considérer une classe de mesures de Mandelbrot faciles à manipuler afin de majorer la dimension de Hausdorff de ces tapis. On se place toujours dans les conditions des théorèmes précédents et on va associer à ν une nouvelle mesure de Mandelbrot. On définit le vecteur de probabilité $(q_{(i,j)}) = \left(\mathbb{E}\left[W_{(i,j)}\right]\right)$. Posons aussi pour chaque $(i,j) \in$

$[\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ tel que $q_{(i,j)} > 0$ la variable aléatoire

$$V_{(i,j)} = \frac{W_{(i,j)}}{q_{(i,j)}}$$

ainsi que la fonction

$$T_{(i,j)} : q \geq 0 \longmapsto -\log\left(\mathbb{E}\left[(V_{(i,j)})^q\right]\right).$$

Les fonctions $T_{(i,j)}$ sont concaves, valent 0 en 1 et

$$T_{(i,j)}(0) = -\log\left(\mathbb{P}\left(W_{(i,j)} > 0\right)\right).$$

On a par ailleurs

$$e^{-T(q)} = \sum_{(i,j)} \mathbb{E}\left[W_{(i,j)}\right]^q e^{-T_{(i,j)}(q)},$$

ce qui nous permet après dérivation en 1 d'obtenir la formule

$$\dim_e(\nu) = h((q_{(i,j)})) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} T'_{(i,j)}(1) = h((q_{(i,j)})) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \left(-\mathbb{E}\left[V_{(i,j)} \log(V_{(i,j)})\right]\right),$$

presque sûrement, conditionnellement à $\nu \neq 0$. En particulier, si on pose pour les (i,j) tels que $\mathbb{P}(c_{i,j} = 1) > 0$ (ce qu'implique $q_{(i,j)} > 0$ par hypothèse)

$$\widetilde{W}_{(i,j)} = \frac{q_{(i,j)} \mathbb{1}_{\{c_{i,j}=1\}}}{\mathbb{P}(c_{i,j} = 1)},$$

et $\widetilde{W}_{(i,j)} = 0$ sinon, on peut définir la mesure de Mandelbrot notée $\tilde{\nu}$ associée aux poids $\widetilde{W}_{(i,j)}$, ainsi que les fonctions $\widetilde{T}$ et $\widetilde{T}_{(i,j)}$ associées à $\tilde{\nu}$. On a alors

$$\widetilde{T}'(1) = h((q_{(i,j)})) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log\left(\mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right)\right).$$

Remarquons maintenant que pour chaque (i,j) tel que $p_{(i,j)} > 0$ on a

$$T_{(i,j)}(0) \geq \widetilde{T}_{(i,j)}(0) = -\log\left(\mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right)\right),$$

donc par concavité on a pour tout $q \in [0,1]$

$$\widetilde{T}_{(i,j)}(q) = (q-1)\log\left(\mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right)\right) \leq T_{(i,j)}(q).$$

En particulier on obtient $T'_{(i,j)}(1) \leq \widetilde{T}'_{(i,j)}(1)$. On en déduit que $\tilde{\nu}$ est non dégénérée et que $\dim_e(\nu) \leq \dim_e(\tilde{\nu})$ presque sûrement, conditionnellement à $\nu, \tilde{\nu} \neq 0$. On a l'égalité si et seulement si $\widetilde{T}_{(i,j)} = T_{(i,j)}$ pour tout (i,j) : ceci nous dit en particulier que $T''_{(i,j)} = 0$, puis en utilisant le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de $T_{(i,j)}$ on en déduit que la condition est équivalente à $W_{(i,j)} = \widetilde{W}_{(i,j)}$ presque sûrement pour tout (i,j).

Remarque 2.2.10. Si on pose plutôt (on change dans cette remarque uniquement les notations) les vecteurs

$$V_j = (V_{(i,j)}) = \left(\frac{W_{(i,j)}}{q_j}\right)$$

pour j tel que $q_j = \sum_i q_{(i,j)} > 0$, les fonctions

$$T_j : q \geq 0 \longmapsto -\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_i \left(V_{(i,j)}\right)^q\right]\right)$$

et $\tilde{\nu}$ définie par les poids $\widetilde{W}_{(i,j)} = \frac{q_j \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}}{\mathbb{E}[N_j]}$, où $N_j = \sum\limits_i \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}$, alors on prouve de la même manière que

$$\dim_e(\nu) = h((q_j)) + \sum_j q_j T_j'(1)$$

presque sûrement conditionnellement à $\nu \neq 0$, que $T_j'(1) \leq \widetilde{T}_j'(1) = \log(\mathbb{E}\left[N_j\right])$ et que $\dim_e(\nu) \leq \dim_e(\tilde{\nu})$ avec égalité si et seulement si $W_{(i,j)} = \widetilde{W}_{(i,j)}$ presque sûrement pour tout (i,j).

Posons donc

$$d_1^B((q_{(i,j)})) = \frac{h((q_{(i,j)})|(q_j)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log(\mathbb{P}(c_{i,j}=1))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \frac{h((q_j))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)},$$

$$d_2^B((q_{(i,j)})) = \frac{\sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log(\mathbb{P}(c_{i,j}=1)) + h((q_{(i,j)}))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}.$$

On remarque que si une mesure de Mandelbrot est définie grâce aux poids $(\widetilde{W}_{(i,j)})$ ci-dessus, pour un vecteur de probabilité $(q_{(i,j)}) \in S_B$ initialement fixé, alors si

$$\sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log(\mathbb{P}(c_{i,j}=1)) + h((q_{(i,j)})) > 0, \tag{2.4}$$

notre mesure est non dégénérée et vérifie $\min(d_1^B((q_{(i,j)})), d_2^B((q_{(i,j)}))) > 0$ (c'est en fait une équivalence). Posons aussi

$$d_1^A((q_{(i,j)})) = \frac{h((q_{(i,j)})|(q_i)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log(\mathbb{P}(c_{i,j}=1))}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} + \frac{h((q_i))}{\sum_i q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)},$$

$$d_2^A((q_{(i,j)})) = \frac{\sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log(\mathbb{P}(c_{i,j}=1)) + h((q_{(i,j)}))}{\sum_j q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)}.$$

On en déduit immédiatemment le résultat suivant en utilisant le lemme de Billingsley et les observations précédentes.

Proposition 2.2.11. *Presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$, on a*

$$\begin{aligned}
\dim_H(K) &\geq \sup\{\dim(\mu),\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\} \\
&= \max\Bigg(\sup\left\{\min(d_1^B((q_{(i,j)})), d_2^B((q_{(i,j)}))),\ (q_{(i,j)}) \in S_B \quad \textit{vérifiant} \quad (2.4)\right\}, \\
&\qquad \sup\left\{\min(d_1^A((q_{(i,j)})), d_2^A((q_{(i,j)}))),\ (q_{(i,j)}) \in S_A \quad \textit{vérifiant} \quad (2.4)\right\}\Bigg).
\end{aligned}$$

On cherche donc maintenant à majorer presque sûrement $\dim_H(K)$.

Théorème 2.2.12. *On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\dim_H(K) = \sup\{\dim(\mu),\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\}.$$

Démonstration. Notre preuve est une combinaison de l'approche précédemment utilisée pour le cas déterministe et de l'approche de Gatzouras et Lalley dans le cas des tapis de Sierpiński aléatoires. On définit de nouveau, similairement au cas déterministe l'ensemble K_B des points de $[0,1]^2$ qui ont au moins un antécédent par π appartenant à Γ et tel que ses vecteurs de fréquences appartiennent à S_B pour une infinité de générations. En reprenant les premières idées de la preuve du théorème 2.1.4, on obtient que conditionnellement à $K_B \neq \varnothing$, pour tout $\epsilon > 0$ assez petit on a

$$K_B \subset \bigcup_{(q_{i,j}) \in Q_\epsilon^B} X_{(q_{(i,j)})}$$

où

$$\begin{aligned}
X_{(q_{(i,j)})} = \Bigg\{ & (x,y) \in [0,1]^2 \ \text{ tel qu'il existe } (x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots \in \pi^{-1}(\{(x,y)\}) \cap \Gamma \text{ avec} \\
& |(q_{(i,j)}((x,y),n)) - (q_{(i,j)})| \leq 2\epsilon \text{ pour une infinité de } n \in S_B \text{ et} \\
& \limsup_{n\to\infty} \frac{h((q_{i,j}((x,y),N))|(q_j(y,N)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)}((x,y),N)\log(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,N)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \\
& \leq \frac{h((q_{i,j})|(q_j)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)}\log(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \psi_1(\epsilon) \Bigg\}
\end{aligned}$$

et $\psi_1(\epsilon) \to 0$. Remarquons maintenant que

$$X_{(q_{(i,j)})} \subset \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\geq p} \bigcup_{m=n}^{C_1 n} \bigcup_{(\widetilde{q}_{(i,j)})} \Delta(\epsilon, n, m),$$

où

$$\begin{aligned}\Delta(\epsilon,n,m) = &\Bigg\{ n\times m \text{ quasi-carrés } C = \pi\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)y_{n+1}\cdots y_m]\right) \text{ de diamètre} \\ &\leq C_2 \exp\left(m\sum_{j=0}^{s-1} q_j \log(b_j) + 2rm\sum_{j=0}^{s-1}\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\epsilon\right) \text{ tels que} \\ &|(q_j(y,m)) - (q_j)| \leq 2r\epsilon,\ |(q_{i,j}((x,y),n)) - (\widetilde{q}_{i,j})| \leq \epsilon, \\ &\frac{h((q_{i,j}((x,y),n))|(q_j(y,n)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)}((x,y),n)\log(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i(x,n)\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \\ &\leq \frac{h((q_{i,j})|(q_j)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)}\log(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1))}{\sum_{i=0}^{r-1} q_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} + \psi_1(\epsilon) + \epsilon \\ &\text{et } \ [(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]\cap\Gamma_n \neq \varnothing \Bigg\}.\end{aligned}$$

On a alors

$$\mathbb{E}\left[\#\Delta(\epsilon,n,m)\right] = \sum_{\pi([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)y_{n+1}\cdots y_m])} \mathbb{P}\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]\cap\Gamma_n \neq \varnothing\right),$$

la somme s'effectuant sur les quasi-carrés qui vérifient les trois premières conditions dans la définition de $\Delta(\epsilon,n,m)$. En utilisant le même type de raisonnement que dans la preuve du théorème 2.1.4, on obtient que le nombre de ces quasi-carrés est majoré par

$$\begin{aligned}\exp\Bigg(m\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\Bigg[\max\Bigg(&\frac{h((q_{i,j})|(q_j)) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)}\log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right)}{\sum_i q_i\log\left(\frac{1}{a_i}\right)} \\ &+ \frac{h((q_j))}{\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}, 0\Bigg)\Bigg] + m\psi_2(\epsilon) - n\sum_{(i,j)}\widetilde{q}_{(i,j)}\log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right)\Bigg),\end{aligned}$$

avec $\psi_2(\epsilon) \to 0$. De plus

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]\cap\Gamma_n \neq \varnothing\right) \\ &= \exp\left(n\sum_{(i,j)} q_{(i,j)}((x,y),n)\log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right)\right)\end{aligned}$$

$$\leq \exp\left(n\sum_{(i,j)}\widetilde{q}_{(i,j)}\log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right)+m\epsilon\sum_{(i,j)}\left|\log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right)\right|\right).$$

On en déduit

$$\mathbb{E}\left[\#\Delta(\epsilon,n,m)\right]\leq \exp\left(m\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left[\max\left(d_1^B\left(\left(q_{(i,j)}\right)\right),0\right)\right]+m\psi_3(\epsilon)\right)$$

avec $\psi_3(\epsilon)\to 0$. Par inégalité de Markov on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}\left(\bigcup_{m=n}^{C_1 n}\left\{\#\Delta(\epsilon,n,m)\geq \exp\left(m\left(\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\right)\max(d_1^B((q_{(i,j)})),0)+2m\psi_3(\epsilon)\right\}\right)\right)\\
&\leq \sum_{n\geq 1}\sum_{m=n}^{C_1 n}e^{-m\psi_3(\epsilon)}\\
&\leq C_1\sum_{n\geq 1}ne^{-n\psi_3(\epsilon)}<+\infty.
\end{aligned}$$

Ainsi en utilisant le lemme de Borel-Cantelli

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\Bigg(\bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{n\geq p}\bigcap_{m=n}^{C_1 n}\Bigg\{\#\Delta(\epsilon,n,m)\leq \exp\Bigg(m\left(\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\right)&\max(d_1^B((q_{(i,j)})),0)\\
&+2m\psi_3(\epsilon)\Bigg)\Bigg\}\Bigg)=1.
\end{aligned}$$

Si $\epsilon\leq \frac{C_b}{4\sum_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}$ (C_b étant défini de nouveau par $\min_{(q_j)\in S}\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)$), un quasi-carré de $\Delta(\epsilon,n,m)$ est de diamètre inférieur à $C_2e^{-\frac{C_b}{2}p}$. Donc en choisissant ϵ de cette manière, presque sûrement on a pour tout $t\in[0,2]$, pour tout p assez grand

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^t_{C_2e^{-\frac{C_b}{2}p}}(X_{(q_{(i,j)})})\\
&\leq (C_2)^2(\#Q_\epsilon^B)\sum_{n\geq p}\sum_{m=n}^{C_1 n}\exp\left(tm\sum_j q_j\log(b_j)+2trm\epsilon\sum_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\right)\#\Delta(\epsilon,n,m)\\
&\leq (C_2)^2(\#Q_\epsilon^B)\sum_{n\geq p}\sum_{m=n}^{C_1 n}\exp\left(m\left(\sum_j q_j\log(b_j)\right)\left(t-\max(d_1^B((q_{(i,j)})),0)-4r\epsilon-\frac{2\psi_3(\epsilon)}{C_b}\right)\right)
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque $p\to+\infty$ si $t>\max(d_1^B((q_{(i,j)})),0)+4r\epsilon+\frac{2\phi_2(\epsilon)}{C_b}$, d'où

$$\dim_H(X_{(q_{(i,j)})})\leq \max(d_1^B((q_{(i,j)})),0)+4r\epsilon+\frac{2\psi_3(\epsilon)}{C_b}.$$

Remarquons maintenant qu'on a aussi

$$X_{(q_{(i,j)})} \subset \bigcap_{p\geq 1} \bigcup_{n\geq p} \Delta'(\epsilon, n),$$

où

$$\begin{aligned}\Delta'(\epsilon,n) = \Bigg\{ & \text{Rectangles } C = \pi\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]\right) \text{ de diamètres} \\ & \leq \exp\left(m\sum_{j=0}^{s-1} q_j\log(b_j) + 2rm\sum_{j=0}^{s-1}\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\epsilon\right) \text{ tels que} \\ & |(q_{(i,j)}((x,y),n)) - (q_{(i,j)})| \leq 2\epsilon \text{ et } [(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]\cap\Gamma_n \neq \varnothing \Bigg\}.\end{aligned}$$

On a de même

$$\mathbb{E}\left[\#\Delta'(\epsilon,n)\right] \leq \exp\left(n\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left[\max\left(d_2^B\left(\left(q_{(i,j)}\right)\right),0\right)\right] + n\psi_3'(\epsilon)\right),$$

ce qui nous permet de nouveau d'affirmer en utilisant le lemme de Borel-Cantelli que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{p\geq 1}\bigcap_{n\geq p}\left\{\#\Delta'(\epsilon,n) \leq \exp\left(n\left(\sum_j q_j\log\left(\frac{1}{b_j}\right)\right)\max(d_2^B((q_j)),0) + 2n\psi_3'(\epsilon)\right)\right\}\right) = 1.$$

Avec le même raisonnement que précédemment on obtient alors

$$\dim_H(X_{(q_{(i,j)})}) \leq \max(d_2^B((q_{(i,j)})),0) + 4r\epsilon + \frac{2\psi_3'(\epsilon)}{C_b}$$

avec $\psi_3'(\epsilon) \to 0$. Combinant ces deux résultats on obtient presque sûrement

$$\begin{aligned}&\dim_H(K_B) \\ &\leq \sup_{(q_{(i,j)})\in S_B}\min\left(\max(d_1^B((q_{(i,j)})),0) + 4r\epsilon + \frac{2\psi_3(\epsilon)}{C_b}, \max(d_2^B((q_{(i,j)})),0) + 4r\epsilon + \frac{2\psi_3'(\epsilon)}{C_b}\right) \\ &\leq \max\left(0, \sup_{(q_{(i,j)})\in S_B}\min(d_1^B((q_{(i,j)})), d_2^B((q_{(i,j)})))\right) + 4r\epsilon + \frac{2\max(\psi_3(\epsilon),\psi_3'(\epsilon))}{C_b}.\end{aligned}$$

On majore de la même façon $\dim_H(K_A)$, ce qui permet d'obtenir

$$\dim_H(K) \leq \max\left(\max\left(0, \sup_{(q_{(i,j)})\in S_B}\min(d_1^B((q_{(i,j)})), d_2^B((q_{(i,j)})))\right),\right.$$

$$\max\left(0, \sup_{(q_{(i,j)})\in S_B} \min(d_1^B((q_{(i,j)})), d_2^B((q_{(i,j)})))\right) + \psi_4(\epsilon)$$

avec $\psi_4(\epsilon) \to 0$. Il suffit maintenant pour conclure d'identifier une mesure de Mandelbrot non dégénérée. Pour cela on considère la mesure branchante définie grâce aux poids $q_{(i,j)} = \frac{\mathbb{P}(c_{i,j}=1)}{\sum_{i,j}\mathbb{P}(c_{i,j}=1)}$: on a dans ce cas $h((q_{(i,j)})) + \sum_{(i,j)} q_{(i,j)} \log\left(\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\right) > 0$ car on a fait l'hypothèse $\sum_{i,j}\mathbb{P}(c_{i,j}=1) > 1$. □

On obtient de manière similaire le

Théorème 2.2.13. *Soit K un tapis de Lalley-Gatzouras aléatoire. On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\dim_H(K) = \sup\left\{\dim(\mu),\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\right\}.$$

2.2.2 Étude du projeté d'un tapis de Barański aléatoire

Soit $\pi_2 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto y$. On s'intéresse dans cette section à l'ensemble $\pi_2(K)$ et aux mesures projetées de mesures de Mandelbrot $(\pi_2)_*\mu$.

Théorème 2.2.14. *Presque sûrement, conditionnellement à $\mu \neq 0$, la mesure $(\pi_2)_*\mu$ est exactement dimensionnelle et*

$$\dim((\pi_2)_*\mu) = \frac{\min(T'(1^-), h((\mathbb{E}[W_j])))}{\sum_j \mathbb{E}[W_j]\log\left(\frac{1}{b_j}\right)}.$$

Démonstration. La démonstration est très semblable à celle du théorème 2.2.7, le contexte étant ici plus simple. En remarquant que presque sûrement conditionnellement à $\nu \neq 0$, pour ν-presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ on a

$$\frac{\log(b_{y_1}\dots b_{y_n})}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sum_j \mathbb{E}[W_j]\log(b_j) := \gamma_2 < 0,$$

et en définissant le L^q-spectre de $(\pi_2)_*\nu$ par

$$\rho : q \in \mathbb{R} \mapsto \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\gamma_2 n} \log\left(\sum_{C\in[\![0,s-1]\!]^n} (\pi_2)_*\nu(C)^q\right),$$

on montre de même qu'il suffit de prouver que la suite $\left(\frac{\log\left((\pi_2)_*\nu([y_1\cdots y_n])\right)}{\gamma_2 n}\right)_n$ converge presque sûrement pour $(\pi_2)_*\nu$-presque tout $y \in [\![0,s-1]\!]^{\mathbb{N}^*}$ vers la quantité souhaitée, puis qu'il suffit de montrer que ρ est dérivable en 1, de dérivée la quantité souhaité. Là encore, ceci découle des lemmes 2.2.5 et A.1.5 et de la convexité des fonctions ρ, T et τ. □

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $S(\theta)$ l'unique réel tel que $\sum_j \mathbb{E}[N_j]^\theta b_j^{S(\theta)} = 1$ (on rappelle que $N_j = N_j^B = \sum_i \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}$). La fonction S est alors convexe et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à valeurs strictement positives sur $[0,1]$. De plus, on a pas unicité du point en lequel S atteint son minimum sur $[0,1]$ si et seulement si $\mathbb{E}[N_j] = 1$ pour tout j tel que $\mathbb{E}[N_j] > 0$ (dans ce cas S est constante).

Pour $\delta > 0$ on note E_δ l'ensemble des rectangles de la forme $\pi_2(\pi([y_1 \cdots y_n]))$ tels que $b_{y_1} \cdots b_{y_{n+1}} < \delta \leq b_{y_1} \cdots b_{y_n}$, ainsi que $\widetilde{N}_\delta(\pi_2(K))$ le nombre minimal de segments de E_δ dont a besoin pour recouvrir $\pi_2(K)$. Rappelons que de l'inégalité

$$N_{\frac{\delta}{\left(\min_j b_j\right)}}(\pi_2(K)) \leq \widetilde{N}_\delta(\pi_2(K)) \leq N_\delta(\pi_2(K))$$

on déduit facilement que

$$\underline{\dim}_M(\pi_2(K)) = \liminf_{\delta \to 0} \frac{\log(\widetilde{N}_\delta(\pi_2(K))}{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)},$$

ainsi qu'un résultat similaire pour la dimension supérieure de Minkowski.

Théorème 2.2.15. *On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\begin{aligned}
&\dim_H(\pi_2(K)) = \sup\{\dim((\pi_2)_*\mu),\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\} \\
&= \sup\left\{\frac{\min\left(h((q_j)) + \sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]), h((q_j))\right)}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)},\ (q_j)\ \textit{tq}\ h((q_j)) + \sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) > 0\right\} \\
&= \underline{\dim}_M(\pi_2(K)) = \overline{\dim}_M(\pi_2(K)) = \min_{\theta \in [0,1]} S(\theta).
\end{aligned}$$

Démonstration. La deuxième égalité se prouve en utilisant un raisonnement similaire au cas des dimensions de mesures de Mandelbrot sur K (discussion précédent la proposition 2.2.11), en utilisant la remarque 2.2.10. Prouvons les autres égalités. On a

$$\widetilde{N}_\delta(\pi_2(K)) = \sum_{[y_1 \cdots y_n] \in E_\delta} \mathbb{1}_{\#\left\{(x_1,\ldots,x_n),\ \prod_{i=1}^n c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1}) = 1\right\} \geq 1}$$

Par inégalité de Markov et de Jensen, pour $\theta \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\widetilde{N}_\delta(\pi_2(K))\right] &\leq \sum_{[y_1 \cdots y_n] \in E_\delta} \mathbb{E}\left[\#\left\{(x_1,\ldots,x_n),\ \prod_{i=1}^n c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1}) = 1\right\}\right]^\theta \\
&= \sum_{[y_1 \cdots y_n] \in E_\delta} \frac{\mathbb{E}[N_{y_1}]^\theta \cdots \mathbb{E}[N_{y_n}]^\theta}{b_{y_1}^{S(\theta)} \cdots b_{y_n}^{S(\theta)}} b_{y_1}^{S(\theta)} \cdots b_{y_n}^{S(\theta)}
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{\delta^{S(\theta)}}.$$

En utilisant le lemme A.1.5, on obtient $\underline{\dim}_M(\pi_2(K)) \leq \min_{\theta\in[0,1]} S(\theta)$ presque sûrement. Notons θ_B un point de $[0,1]$ en lequel S atteint son minimum. On définit aussi μ_s la mesure de Mandelbrot sur le tapis associée aux poids

$$W_{(i,j)} = \frac{\mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)} \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}}{\mathbb{E}\left[N_j\right]}$$

si $\mathbb{E}\left[N_j\right] > 0$, et 0 ailleurs. Remarquons que dans ce cas T_{μ_s} est bien définie sur $\mathbb{R}_+$ et que

$$h((\mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)})) = (S(\theta_B) - \theta_B S'(\theta_B)) \sum_j \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)} \log\left(\frac{1}{b_j}\right),$$

$$\sum_j \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)} \log(\mathbb{E}\left[N_j\right]) = S'(\theta_B) \sum_j \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)} \log\left(\frac{1}{b_j}\right).$$

Donc sous l'hypothèse $S(\theta_B) - (\theta_B - 1)S'(\theta_B) > 0$ on a facilement que la mesure aléatoire μ_s est non dégénérée et on a

$$\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = \min(S(\theta_B) - \theta_B S'(\theta_B), S(\theta_B) - (\theta_B - 1)S'(\theta_B)).$$

On a alors plusieurs cas. Si $\theta_B = 1$, alors $S'(\theta_B) \leq 0$ et $\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = S(\theta_B) > 0$. Si $0 < \theta_B < 1$, alors $S'(\theta_B) = 0$ et $\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = S(\theta_0) > 0$. Si $\theta_B = 0$, alors $S'(\theta_B) \geq 0$ et $\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = S(\theta_B) > 0$. Dans tous les cas la mesure est bien non dégénérée, et on a $\dim_H(\pi_2(K)) \geq S(\theta_B)$. On en déduit le résultat voulu par encadrement. □

Si pour $\theta \in [0,1]$ on pose aussi $R(\theta)$ l'unique réel positif tel que $\sum_i \mathbb{E}\left[N_i^A\right]^\theta a_i^{R(\theta)} = 1$ (on pose $N_i^A = \sum_j \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}$), et θ_A un point de $[0,1]$ en lequel R atteint son minimum, on prouverait de même à l'aide de la mesure de Mandelbrot μ_r associée aux poids $\frac{\mathbb{E}\left[N_i^A\right]^{\theta_A} a_i^{R(\theta_A)} \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}}{\mathbb{E}\left[N_i^A\right]}$ que les dimensions de $\pi_1(K)$ coincident et valent $R(\theta_A)$. On va maintenant complèter le théorème précédent afin d'inclure un résultat d'unicité.

Théorème 2.2.16. *Si $S'(0) \leq 0$, alors presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ il existe une unique mesure de Mandelbrot non dégénéré (à savoir μ_s) telle que*

$$\begin{aligned}\dim_H(\pi_2(K)) &= \max\left\{\dim((\pi_2)_*\mu,\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot non dégénérée sur } K\right\} \\ &= \max\left\{\frac{\min\left(h((q_j)) + \sum_j q_j \log(\mathbb{E}\left[N_j\right]), h((q_j))\right)}{\sum_j q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)},\ (q_j)\ \textit{tq}\ h((q_j)) + \sum_j q_j \log(\mathbb{E}\left[N_j\right]) > 0\right\}.\end{aligned}$$

Si $S'(0) > 0$, on a pas unicité d'une telle mesure (il y en a en fait une infinité).

Démonstration. Soit $J = \{j,\ \mathbb{E}[N_j] > 0\}$ (de cardinal supérieur ou égal à 2). Supposons qu'il existe $j \in J$ tel que $\mathbb{E}[N_j] \neq 1$. On suppose aussi que $S'(0) \leq 0$ et qu'il existe un unique $\theta_B \in [0,1]$ tel que $S'(\theta_B) = 0$. Par ce qui précède, si on pose $q_j^B = \mathbb{E}[N_j]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)}$, la mesure de Mandelbrot non dégénérée μ_s associée aux q_j^B est de dimension

$$\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = S(\theta_B) = \dim_H(\pi_2(K)).$$

On souhaite donc prouver que c'est la seule. Soit μ une mesure de Mandelbrot quelconque non dégénérée associée à des poids $W_{(i,j)}$ dont la dimension de la projection est aussi égale à $S(\theta_B)$. On pose $q_j = \mathbb{E}[W_j]$. Supposons tout d'abord qu'il existe un $j \in J$ tel que $q_j = 0$. Dans ce cas, soit $\hat{K}$ le tapis de Barański obtenu en annulant les poids $c_{i,j}$ de la ligne j et en conservant les mêmes que ceux intervenant dans la construction de K pour les autres lignes, ainsi que $\hat{S}$ et $\hat{\theta}_B$ les mêmes quantités que S et θ_B associées à $\hat{K}$. Alors on a

$$\dim_H((\pi_2)_*\mu) = S(\theta_B) \leq \dim_H(\pi_2(\hat{K})).$$

Ceci est impossible, car soit $\hat{K}$ est presque sûrement vide, soit s'il est non vide avec probabilité strictement positive alors sur $\left\{\hat{K} \neq \varnothing\right\}$ on a $\dim_H(\pi_2(\hat{K})) = \hat{S}(\hat{\theta}_B) < S(\theta_B)$ (en effet $S > \hat{S}$ sur tout $\mathbb{R}$). Donc $q_j > 0$ pour tout $j \in J$.

Supposons maintenant que $\sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) > 0$ (ce qui est en fait équivalent à $\sum_j q_j T_j'(1^-) > 0$ en vertu de l'inégalité $\sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) \geq \sum_j q_j T_j'(1^-)$). On définit une nouvelle mesure de Mandelbrot $\tilde{\mu}$ associée aux poids $\tilde{q}_j = \frac{q_j + q_j^B}{2}$. On a alors

$$\sum_j \tilde{q}_j \log(\mathbb{E}[N_j]) = \frac{1}{2} \sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) > 0,$$

et par stricte convexité on a donc

$$\dim_H((\pi_2)_*\tilde{\mu}) \sum_j \tilde{q}_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right) = h((\tilde{q}_j)) > \frac{h((q_j)) + h((q_j^B))}{2} = S(\theta_B) \sum_j \tilde{q}_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right),$$

ce qui est une contradiction. On prouve de la même manière par l'absurde que $\sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j])$ ne peut pas être strictement négatif. Ainsi on a forcément

$$\sum_{j \in J} q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) = \sum_{j \in J} q_j T_j'(1^-) = 0.$$

Ceci nous donne en particulier $T_j'(1^-) = \log(\mathbb{E}[N_j])$ pour tout $j \in J$, car on a toujours

$T_j'(1^-) \leq \log(\mathbb{E}[N_j])$. Ceci nous dit (voir la remarque 2.2.10) que μ a des poids de la forme

$$W_{(i,j)} = q_j \frac{\mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}}{\mathbb{E}[N_j]}.$$

Il reste donc à voir quels vecteurs $(q_j)_{j\in J}$ maximisent l'ensemble

$$\left\{ \frac{h((q_j))}{\sum_{j\in J} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}, \ (q_j)_{j\in J} \ \text{tel que} \ \sum_{j\in J} q_j = 1, \right.$$
$$\left. q_j > 0 \text{ pour tout } j \in J \ \text{ et } \ \frac{\sum_{j\in J} q_j \log(\mathbb{E}[N_j])}{\sum_{j\in J} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} = 0 \right\}.$$

Soit $(q_j)_{j\in J}$ un tel vecteur. On peut appliquer le théorème des extrema liés, qui nous fournit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $j \in J$ on ait

$$-\log(q_j) - 1 + \frac{\lambda \log(\mathbb{E}[N_j]) + h((q_k)) \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}{\sum_k q_k \log\left(\frac{1}{b_k}\right)} + \mu \sum_k q_k \log\left(\frac{1}{b_k}\right) = 0.$$

En multipliant pas q_j et en sommant sur $j \in J$, on obtient facilement $\mu = \left(\sum_k q_k \log\left(\frac{1}{b_k}\right)\right)^{-1}$. Ceci nous permet alors d'avoir

$$q_j = \mathbb{E}[N_j]^{\lambda\mu}\, b_j^{h((q_k))\mu}.$$

De $\sum_j q_j = 1$ et $\sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) = 0$, on déduit finalement que nécessairement $\lambda\mu = \theta_B$ et $h((q_k))\mu = S(\theta_B)$. Ceci permet finalement de conclure sur l'unicité souhaitée : on a bien $\mu = \mu_s$.

Si maintenant $S' < 0$ sur $[0,1]$, alors $\theta_B = 1$. Dans ce cas, on prouve de manière similaire qu'une mesure optimale μ vérifie nécessairement

$$\sum_{j\in J} q_j \log(\mathbb{E}[N_j]) = \sum_{j\in J} q_j T_j'(1^-) < 0.$$

Ensuite, on cherche quels vecteurs $(q_j)_{j\in J}$ maximisent l'ensemble

$$\left\{ \frac{h((q_j)) + \sum_j q_j \log(\mathbb{E}[N_j])}{\sum_{j\in J} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}, \ (q_j)_{j\in J} \ \text{tel que} \ \sum_{j\in J} q_j = 1, \right.$$
$$\left. q_j > 0 \text{ pour tout } j \in J \ \text{ et } \ \frac{\sum_{j\in J} q_j \log(\mathbb{E}[N_j])}{\sum_{j\in J} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)} < 0 \right\}.$$

On obtient alors de la même façon en utilisant le théorème des extremas liés que $\mu = \mu_s$.

Si $\mathbb{E}[N_j] = 1$ pour tout $j \in J$, alors S est constante, et notre problème revient à savoir quels vecteurs $(q_j)_{j\in J}$ maximisent l'ensemble

$$\left\{\frac{h((q_j))}{\sum_{j\in J} q_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)},\quad (q_j)_{j\in J}\ \text{ tel que }\ \sum_{j\in J} q_j = 1\ \text{ et }\ q_j > 0 \text{ pour tout } j\in J\right\}.$$

Ceci nous donne comme précédemment que μ_s est la seule mesure optimale.

Supposons maintenant que $S'(0) > 0$. Alors $\theta_B = 0$ et

$$\dim_H((\pi_2)_*\mu_s) = \min(S(0), S(0)+S'(0)) = S(0).$$

Soit $\lambda > 1$ et U_λ une variable aléatoire indépendante de $C = (c_{(i,j)})$ valant λ avec probabilité $\frac{1}{\lambda}$ et 0 avec probabilité $1-\frac{1}{\lambda}$. Soit aussi μ^λ la mesure de Mandelbrot définie grâce aux poids

$$W^\lambda_{(i,j)} = \frac{q_j^B \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1} U_\lambda}{\mathbb{E}\left[N_j\right]}.$$

Alors un simple calcul prouve que pour λ assez proche de 1 la mesure μ^λ est non dégénérée, de dimension entropique $S(0)+S'(0)-\frac{\log(\lambda)}{\sum_j q_j^B \log\left(\frac{1}{b_j}\right)}$ et donc de dimension de Hausdorff $S(0)$. Ceci permet de conclure au caractère non unique de le mesure optimale. $\square$

2.2.3 Dimension de Minkowski d'un tapis de Barański aléatoire

Intéressons nous maintenant au calcul de la dimension de Minkowski de K. On suppose dans un premier temps que l'on a $a_i \leq b_j$ pour tout (i,j). De manière similaire au cas unidimensionnel ci-dessus, on posera pour $(x,y) \in [0,1]^2$ (quitte à de nouveau exclure les points ayant plusieurs antécédents par π) et $\delta > 0$ les uniques entiers $n_\delta = n_\delta(x,y)$ et $M_\delta = M_\delta(x,y)$ tels que

$$a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}} \leq \delta < a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta-1}}\ \text{ et }\ b_{y_1}\cdots b_{y_{M_\delta}} \leq \delta < b_{y_1}\cdots b_{y_{M_\delta-1}}.$$

On pose aussi F_δ l'ensemble des quasi-carrés de la forme $\pi([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})y_{n_\delta+1}\cdots y_{M_\delta}])$, ainsi que $\widetilde{N}_\delta(K)$ le nombre minimal de quasi-carrés de F_δ dont a besoin pour recouvrir K. On peut alors calculer la dimension de Minkowski de K en utilisant $\widetilde{N}_\delta(K)$ (voir [1, Théorème B]). Par ailleurs, de ces définitions on tire facilement

$$\exists C>0,\ \forall\delta>0,\ \forall(x,y),\ \frac{1}{C}\log\left(\frac{1}{\delta}\right) \leq n_\delta(x,y), M_\delta(x,y) \leq C\log\left(\frac{1}{\delta}\right)+1.$$

On définit aussi le réel positif $T_B = T(S(\theta_B))$ par l'équation

$$\sum_{(i,j)} \mathbb{P}(c_{(i,j)} = 1) \left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S(\theta_B)} a_i^{T(S(\theta_B))} = 1. \tag{2.5}$$

Théorème 2.2.17. *On a presque sûrement, conditionnellement à $K \neq \varnothing$*

$$\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_M(K) = T(S(\theta_B)).$$

On va s'inspirer de la preuve de [1, Théorème B] (cas déterministe). Dans ce cas là, il existe un sous-ensemble fixé au préalable $A \subset [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ tel que $c_{(i,j)} = \mathbb{1}_{(i,j)\in A}$ pour tout (i,j), et $\pi_2(K)$ est un ensemble auto-similaire. Une simple propriété de conservation de la masse nous donne alors pour tout $\delta > 0$

$$\sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]} \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^{n_\delta} c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1})=1} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} \left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{T(S(\theta_B))-S(\theta_B)} = 1. \tag{2.6}$$

Par ailleurs, de $\sum_{j\in J} b_j^{S(\theta_B)} = 1$ (ici $J = \{j|\ \exists i,\ (i,j)\in A\}$) on tire que pour $[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]$ d'intersection non vide avec K on a

$$\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} = \sum_{\substack{\left[y_{n_\delta+1},\dots,y_{M_\delta}\right] \\ y_{n_\delta+1},\dots,y_{M_\delta}\in J}} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{M_\delta}}\right)^{S(\theta_B)}, \tag{2.7}$$

et donc

$$\sum_{\substack{C\in F_\delta \\ C\cap K\neq\varnothing}} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{M_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} \left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{T(S(\theta_B))-S(\theta_B)} = 1.$$

Ceci nous permet directement d'encadrer $\widetilde{N}_\delta(K)$ assez finement pour calculer la dimension de Minkowski du tapis (les 2 produits intervenant dans chaque terme de la somme étant à des constantes près égaux à δ). On peut aussi interpréter ces calculs d'une autre manière : pour un rectangle $[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]$ d'intersection non vide avec K, de (2.7) on déduit que le nombre de quasi-carrés contenus dans ce rectangle et d'intersections non vides avec K est inclus dans l'intervalle

$$\left[\delta^{-S(\theta_B)}\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)},\ \delta^{-S(\theta_B)}\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)}\left(\min_j b_j\right)^{-S(\theta_B)}\right], \tag{2.8}$$

la constante $(\min_j b_j)^{-S(\theta_B)}$ apparaissant dans cet intervalle ne dépendant pas de la localisation du rectangle. Ainsi à des constantes multiplicatives près le nombre de quasi-carrés de F_δ

qui intersectent K est égal à

$$\sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]\cap K\neq\varnothing} \delta^{-S(\theta_B)} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)}$$
$$\simeq \delta^{-t-S(\theta_B)} \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]\cap K\neq\varnothing} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} \left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{t}$$

pour n'importe quel $t \geq 0$. En choisissant donc t comme étant l'unique réel positif tel que cette dernière somme vaille 1 (c'est-à-dire vérifiant l'équation $\sum_{(i,j)\in A} a_i^t\ b_j^{S(\theta_B)} = 1$, soit $t = T(S(\theta_B)) - S(\theta_B)$), on obtient bien de nouveau que la dimension de Minkowski de l'ensemble est égale à $t + S(\theta_B) = T(S(\theta_B))$).

Dans le cas aléatoire, on a seulement en espérance (et non pas - par exemple - presque sûrement) la relation (2.6) grâce à (2.5), ce qui ne permet pas de conclure directement (de plus, il serait impossible d'obtenir un contrôle uniforme du type (2.8) ne dépendant pas de la localisation du rectangle considéré, ayant maintenant affaire à un ensemble $\pi_2(K)$ qui n'est même pas auto-affine en loi, mais seulement le projeté d'un tel objet). On peut cependant tout de même utiliser cette propriété pour obtenir une majoration, grâce au lemme A.1.5. On a de manière similaire au cas du projeté de K

$$\widetilde{N}_\delta(K) = \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]} \Bigg(\mathbb{1}_{\prod_{i=1}^{n_\delta} c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1})=1} \cdot \sum_{y_{n_\delta+1}\cdots y_{M_\delta}} \mathbb{1}_{\#\left\{(x_{n_\delta+1},\dots,x_{M_\delta}),\ \prod_{i=n_\delta+1}^{M_\delta} c_{(x_i,y_i)}((x,y)_{i-1}) \,=\, 1\right\} \,\geq\, 1} \Bigg)$$

et donc

$$\mathbb{E}\left[\widetilde{N}_\delta(K)\right] \leq \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]} \Bigg(\frac{\mathbb{P}(c_{(x_1,y_1)}=1)\cdots\mathbb{P}(c_{(x_{n_\delta},y_{n_\delta})}=1)}{(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}})^{S(\theta_B)-T(S(\theta_B))}} (b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}})^{S(\theta_B)}$$
$$(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}})^{S(\theta_B)-T(S(\theta_B))} \sum_{y_{n_\delta+1}\cdots y_{M_\delta}} \frac{\left(\mathbb{E}\left[N_{y_{n_\delta+1}}\right]\cdots\mathbb{E}\left[N_{y_{M_\delta}}\right]\right)^{\theta_B}}{\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{M_\delta}}\right)^{S(\theta_B)}} \left(b_{y_{n_\delta+1}}\cdots b_{y_{M_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} \Bigg).$$

Ceci nous permet d'affirmer grâce à (2.5) que $\mathbb{E}\left[\widetilde{N}_\delta(K)\right] \leq \frac{Cte}{\delta^{T(S(\theta_B))}}$, d'où on tire de nouveau notre majoration presque sûre grâce au lemme A.1.5.

La minoration de la dimension de Minkowski de K est plus délicate. On posera pour tout

$(x,y)|_j$ l'ensemble $\hat{K}^{(x,y)|_j} = f_{(x_1,y_1)} \circ \cdots \circ f_{(x_j,y_j)}\left(K^{(x,y)|_j}\right)$. On a

$$\widetilde{N_\delta}(K) = \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]} \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^{n_\delta} c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1})=1} \widetilde{N_\delta}\left(\pi_2\left(\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\right).$$

Il s'agit donc de trouver presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ un sous-ensemble K_B de K qui soit "assez gros" (au sens de la masse pour une certaine mesure de Mandelbrot) sur lequel on puisse estimer (et en particulier minorer) pour $\delta > 0$ arbitrairement petit et pour tout $(x,y) \in K_B$ le nombre de quasi-carrés dont on a besoin pour recouvrir $\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}$. Pour cela, on va adapter à notre problème une idée introduite dans [8] pour contrôler presque sûrement pour μ-presque tout (x,y) la vitesse de renouvellement des propriétés multifractales des copies $\mu^{(x,y)|_j}$ d'une mesure de Mandelbrot μ lorsque $j \to +\infty$. On utilise de nouveau la mesure de Mandelbrot μ_s définie lors de la preuve du théorème 2.2.15 et on définit aussi la mesure de Mandelbrot μ_B associée aux poids $W_{(i,j)} = \left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S(\theta_B)} a_i^{T(S(\theta_B))} \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}$. Cette dernière est supportée par K et non dégénérée, en effet on a

$$T'_{\mu_B}(1) = -\sum_{(i,j)} \mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)\left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S(\theta_B)} a_i^{T(S(\theta_B))} \log\left(\left(\frac{b_j}{a_i}\right)^{S(\theta_B)} a_i^{T(S(\theta_B))}\right),$$

et on sait que $T(S(\theta_B)) \geq \overline{\dim}_M(K) \geq \dim_H(K) \geq \dim_H(\pi_2(K)) = S(\theta_B)$. On pose pour $j \geq 2$ $S_j = \left\lfloor \frac{j}{\log(j)} \right\rfloor$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\epsilon_n = \frac{\log(n)}{\sqrt{n}}$. On pose aussi

$$\lambda_B = \sum_j \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} b_j^{S(\theta_B)} \log\left(\frac{1}{b_j}\right).$$

On va prouver le

Lemme 2.2.18. *Soit*

$$E^j_{(x,y)} = \left\{z \ tq \ \ \forall n \geq S_j,\ (\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)([z|_n]) \leq e^{-n(S(\theta_B)\lambda_B - \epsilon_n)} \ et \ b_{z_1}\cdots b_{z_n} \geq e^{-n(\lambda_B+\epsilon_n)}\right\}.$$

Presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, pour μ_B-presque tout $(x,y) \in K$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $j \geq N$ on ait

$$(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)\left(E^j_{(x,y)}\right) \geq \frac{\left\|(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)\right\|}{2}.$$

Démonstration. Soit $1 < q \leq 2$ tel que $\mathbb{E}\left[\|\mu_B\|^q\right] < +\infty$. On définit d'abord les variables aléatoires

$$U^j(\omega,(x,y)) = \left\|(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}(\omega)\right)\right\|.$$

On note Q la mesure de Peyrière sur $\Omega \times [0,1]^2$ associée à μ_B. On a conditionnellement à $\mu_B \neq 0$ (ou de manière équivalente, conditionnellement à $K \neq \varnothing$ ou à $\mu_S \neq 0$), pour tout $j \geq 1$, en utilisant l'inégalité de Hölder, l'inégalité de Markov et le théorème 2.2.3 (on pose $q' > 0$ comme dans l'énoncé de ce théorème)

$$Q\left(0 < U^j \leq e^{-\log(j)^{\frac{3}{2}}}\right) = \mathbb{E}\left[\|\mu_B\| \mathbb{1}_{0<\|\mu_s\| \leq e^{-\log(j)^{\frac{3}{2}}}}\right]$$
$$\leq \mathbb{E}\left[\|\mu_B\|^q\right]^{\frac{1}{q}} \mathbb{P}\left(0 < \|\mu_s\| \leq e^{-\log(j)^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{q-1}{q}} = \mathcal{O}_{j\to\infty}\left(e^{-\frac{q'(q-1)}{q}\log(j)^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Donc $\sum_{j\geq 1} Q\left(0 < U^j \leq e^{-\log(j)^{\frac{3}{2}}}\right) < +\infty$. On définit aussi les variables aléatoires

$$V_n^j(\omega,(x,y)) = e^{n(S(\theta_B)\lambda_B - \epsilon_n)\epsilon_n} \sum_{[z|_n]} (\pi_2)_* \left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)([z|_n])^{1+\epsilon_n} = V_n^{(x,y)|_j}(\omega)$$

ainsi que $V_n^{\varnothing}(\omega,(x,y)) = e^{n(S(\theta_B)\lambda - \epsilon_n)\epsilon_n} \sum_{[z|_n]} (\pi_2)_* (\mu_s)([z|_n])^{1+\epsilon_n}$. Par sous-additivité on a

$$\mathbb{E}_Q\left[\left(\sum_{n\geq S_j} V_n^j\right)^{\frac{q-1}{q}}\right] \leq \sum_{n\geq S_j} \mathbb{E}_Q\left[\left(V_n^j\right)^{\frac{q-1}{q}}\right]$$

et par indépendance et inégalité de Holder on a aussi

$$\mathbb{E}_Q\left[\left(V_n^j\right)^{\frac{q-1}{q}}\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{(x,y)|_j} \left(V_n^{(x,y)|_j}\right)^{\frac{q-1}{q}} W_{(x_1,y_1)}(\varnothing)\cdots W_{(x_j,y_j)}((x,y)|_{j-1}) \left\|\mu_B^{(x,y)|_j}\right\|\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(V_n^{\varnothing}\right)^{\frac{q-1}{q}} \|\mu_B\|\right] \leq \mathbb{E}\left[V_n^{\varnothing}\right]^{\frac{q-1}{q}} \mathbb{E}\left[\|\mu_B^q\|\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Or, en utilisant le théorème 2.2.5, on obtient l'existence d'un polynôme F de degré 1 tel que pour tout n assez grand on ait

$$\mathbb{E}\left[V_n^{\varnothing}\right] = e^{n(S(\theta_B)\lambda_B - \epsilon_n)\epsilon_n} \mathbb{E}\left[\sum_{[z|_n]} (\pi_2)_* \left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)([z|_n])^{1+\epsilon_n}\right] \leq F(n) e^{-n\epsilon_n^2 + \mathcal{O}(\epsilon_n^2)}.$$

On en déduit

$$\sum_{j\geq 1} e^{\frac{q-1}{q}\log(j)^{\frac{3}{2}}} \mathbb{E}_Q\left[\left(\sum_{n\geq S_j} V_n^j\right)^{\frac{q-1}{q}}\right] < +\infty.$$

On pose enfin

$$W_n^j(\omega,(x,y)) = e^{-n(\lambda_B+\epsilon_n)\epsilon_n} \sum_{[z|_n]} \frac{(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)([z|_n])}{(b_{z_1}\cdots b_{z_n})^{\epsilon_n}}.$$

ainsi que $W_n^{\varnothing}(\omega,(x,y)) = e^{-n(\lambda_B+\epsilon_n)\epsilon_n} \sum_{[z|_n]} \frac{(\pi_2)_*(\mu_s)([z|_n])}{(b_{z_1}\cdots b_{z_n})^{\epsilon_n}}$. On a

$$\mathbb{E}\left[W_n^{\varnothing}\right] = e^{-n(\lambda_B+\epsilon_n)\epsilon_n}\left(\sum_j \frac{\mathbb{E}\left[W_j\right]}{b_j^{\epsilon_n}}\right)^n = e^{-n(\lambda+\epsilon_n)\epsilon_n + n\log\left(1+\epsilon_n\lambda_B+\mathcal{O}(\epsilon_n^2)\right)} = ne^{-n\epsilon_n^2+\mathcal{O}(1)},$$

d'où on déduit de même

$$\sum_{j\geq 1} e^{\frac{q-1}{q}\log(j)^{\frac{3}{2}}}\mathbb{E}_Q\left[\left(\sum_{n\geq S_j} W_n^j\right)^{\frac{q-1}{q}}\right] < +\infty.$$

On peut maintenant prouver le lemme grâce à ces trois propriétés. Pour cela, on remarque que

$$\begin{aligned}(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)\Bigg(\bigcup_{n\geq S_j}\Bigg\{ & z \text{ tq } (\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)([z|_n]) \leq e^{-n(S(\theta_B)\lambda_B-\epsilon_n)} \\ & \qquad\qquad \text{et } b_{z_1}\cdots b_{z_n} \geq e^{-n(\lambda_B+\epsilon_n)}\Bigg\}^c\Bigg) \\ & \leq \sum_{n\geq S_j} V_n^j(\omega,(x,y)) + \sum_{n\geq S_j} W_n^j(\omega,(x,y)).\end{aligned}$$

Par lemme de Borel-Cantelli, presque sûrement pour μ_B-presque tout (x,y) il existe un entier N_1 tel que pour tout $j\geq N_1$ on a

$$\left\|(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)\right\|^{-1} \leq e^{\log(j)^{\frac{3}{2}}}$$

si cette quantité est non nulle. De même on a aussi, en utilisant l'inégalité de Markov et le lemme de Borel-cantelli que presque sûrement pour μ_B-presque tout (x,y)

$$\exists N_2,\ \forall j\geq N_2,\ e^{\log(j)^{\frac{3}{2}}}\sum_{n\geq S_j} V_n^j \leq \frac{1}{4}$$

et

$$\exists N_3,\ \forall j\geq N_2,\ e^{\log(j)^{\frac{3}{2}}}\sum_{n\geq S_j} W_n^j \leq \frac{1}{4}.$$

Donc en combinant ces trois propriétés on obtient pour j assez grand

$$\frac{\sum_{n\geq S_j} V_n^j + \sum_{n\geq S_j} W_n^j}{\left\|(\pi_2)_*\left(\mu_s^{(x,y)|_j}\right)\right\|} \leq \frac{1}{2},$$

d'où on déduit le résultat souhaité. □

On va maintenant à l'aide de ce lemme prouver la minoration recherchée. On posera pour tout $(x,y)|_j$ la mesure redimensionnée $\hat{\mu}_s^{(x,y)|_j}$, image de $\mu_s^{(x,y)|_j}$ par $f_{(x_1,y_1)} \circ \cdots \circ f_{(x_j,y_j)}$. On déduit facilement du lemme précédent que presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, il existe $K_B \subset K$ tel que $\mu_B(K_B) \geq \frac{\|\mu_B\|}{2}$ et $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $(x,y) \in K_B$, pour tout $\delta \leq \delta_0$ on ait

$$(\pi_2)_*\left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\left(\left\{z \in \pi_2\left(\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) \text{ tq } \forall k \geq \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta)} \right\rfloor,\ (\pi_2)_*\left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)([z|_{n_\delta+k}]) \right.\right.$$
$$\left.\left. \leq e^{-k(S(\theta_B)\lambda_B - \epsilon_k)} \text{ et } b_{z_{n_\delta+1}} \cdots b_{z_{n_\delta+k}} \geq e^{-k(\lambda_B+\epsilon_k)}\right\}\right) \geq \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{2}.$$

Notons $X^{(x,y)|_{n_\delta}}$ l'ensemble ci-dessus dont on vient de minorer la masse. Presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ on a alors

$$\widetilde{N_\delta}(K) \geq \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots\left(x_{n_\delta},y_{n_\delta}\right)\right]\cap K_B \neq \varnothing} \mathbb{1}_{\prod_{i=1}^{n_\delta} c_{(x_i,y_i)}((x,y)|_{i-1})=1} \widetilde{N_\delta}\left(\pi_2\left(\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\right)$$

Posons aussi

$$X_1^{(x,y)|_{n_\delta}} = \left\{z \in X^{(x,y)|_{n_\delta}},\ M_\delta(z) - n_\delta \geq \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta)} \right\rfloor\right\}$$

et $X_2^{(x,y)|_{n_\delta}} = X^{(x,y)|_{n_\delta}} \setminus X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}$. Fixons un cylindre $[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]$ dont l'intersection avec K_B est non vide. On a alors

$$(\pi_2)_*\left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\left(X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) \geq \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4}$$

ou

$$(\pi_2)_*\left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\left(X_2^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) \geq \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4}.$$

Dans le premier cas, de

$$(\pi_2)_*\left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\left(X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{\left[z|_{M_\delta(z)}\right]\ \cap\ X_1^{(x,y)|_{n_\delta}} \neq \varnothing} (\pi_2)_* \left(\hat{\mu}_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\left(\left[z|_{M_\delta(z)}\right]\right) \\
&\le \sum_{\left[z|_{M_\delta(z)}\right]\ \cap\ X_1^{(x,y)|_{n_\delta}} \neq \varnothing} e^{M_\delta(z)\epsilon_{M_\delta(z)}} \left(b_{z_{n_\delta}} \cdots b_{z_{M_\delta(z)}} e^{M_\delta(z)\epsilon_{M_\delta(z)}}\right)^{S(\theta_B)} \\
&\le \sum_{\left[z|_{M_\delta(z)}\right]\ \cap\ X_1^{(x,y)|_{n_\delta}} \neq \varnothing} e^{M_\delta(z)\epsilon_{M_\delta(z)}(S(\theta_B)+1)} \left(\frac{\delta}{b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}}\right)^{S(\theta_B)}
\end{aligned}
$$

on tire facilement que

$$\widetilde{N_\delta}\left(\pi_2\left(\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\right) \ge \widetilde{N_\delta}\left(X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) \ge \delta^{-S(\theta_B)} \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)}.$$

Dans le deuxième cas, on remarque que pour $z \in X_2^{(x,y)|_{n_\delta}}$ on a

$$n_\delta - M_\delta(z) \le 0 < n_\delta - M_\delta(z) + \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta)} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta)} \right\rfloor \le o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right).$$

On en déduit que

$$\widetilde{N_\delta}\left(\pi_2\left(\hat{K}^{(x,y)|_{n_\delta}}\right)\right) \ge N_{n_\delta + \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta)} \right\rfloor}\left(X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) s^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)}.$$

Maintenant, un calcul similaire au précédent nous permet d'obtenir

$$N_{n_\delta + \left\lfloor \frac{n_\delta}{\log(n_\delta(x,y))} \right\rfloor}\left(X_1^{(x,y)|_{n_\delta}}\right) \ge \delta^{-S(\theta_B)} \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4} \left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S(\theta_B)} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)}.$$

On en déduit finalement que dans tous les cas on a

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{N_\delta}(K) \\
&\ge \delta^{-T(S(\theta_B))} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots\left(x_{n_\delta(x,y)},y_{n_\delta}\right)\right]\cap K_B \neq \varnothing} \mu_B\left(\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})\right]\right) \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}.
\end{aligned}
$$

Rappelons que $K_B \subset K = \operatorname{supp} \mu_B$, donc en particulier les dénominateurs intervenant dans les termes de la somme sont non nuls. Pour conclure, il nous faut maintenant utiliser deux lemmes classiques.

Lemme 2.2.19 ([27])**.** *On a presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, pour μ_B-presque*

tout $(x,y) \in \operatorname{supp} \mu_B$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\left\|\mu_B^{(x,y)|_n}\right\|\right)}{n} = 0$$

Lemme 2.2.20. *On a presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, pour μ_B-presque tout $(x,y) \in \operatorname{supp} \mu_B$*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\left\|\mu_s^{(x,y)|_n}\right\|\right)}{n} = 0$$
Ceci reste vrai si on remplace μ_s par μ_r ou μ_A.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On a

$$\mathbb{E}_Q\left[\mathbb{1}_{U^n>0}\,(U^n)^{-\epsilon}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\|\mu_s\|>0}\ \|\mu_s\|^{-\epsilon}\ \|\mu_B\|\right] \leq \mathbb{E}\left[\|\mu_B\|^q\right]^{\frac{1}{q}}\ \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\|\mu_s\|>0}\ \|\mu_s\|^{-\frac{\epsilon q}{q-1}}\right]^{\frac{q-1}{q}} < +\infty$$

si $\epsilon > 0$ est assez petit, en utilisant de nouveau le théorème 2.2.3. Ceci nous permet de dire que
$$\mathbb{E}_Q\left[\sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{1}_{U^n>0}\,(U^n)^{-\epsilon}}{n^2}\right] < +\infty,$$
et donc que presque sûrement pour μ_B-presque tout $(x,y) \in \operatorname{supp} \mu_B$, pour tout n assez grand on a
$$\frac{\log\left(\left\|\mu_s^{(x,y)|_n}\right\|\right)}{n} \geq -\frac{2\log(n)}{n\epsilon}.$$
Ceci permet de conclure que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\left\|\mu_s^{(x,y)|_n}\right\|\right)}{n} \geq 0$. Pour prouver que la limite inférieure est négative, on applique un raisonnement similaire en montrant que $\mathbb{E}_Q\left[\sum_{n\geq 1} \frac{(U^n)^{\epsilon}}{n^2}\right] < +\infty$ pour $\epsilon > 0$ assez petit. $\square$

En utilisant ces deux lemmes, on obtient donc qu'en fixant $\epsilon > 0$, alors presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ il existe $\widetilde{K_B} \subset K_B \subset K$ tel que $\mu_B(\widetilde{K_B}) \geq \frac{\|\mu_B\|}{2}$ et tel que pour tout $\delta > 0$ assez petit on ait

$$\widetilde{N_\delta}(K) \geq \delta^{-T(S(\theta_B))} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \frac{\mu_B(\widetilde{K_B})}{4} e^{-2C\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\epsilon} \geq \delta^{-T(S(\theta_B))} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \frac{\|\mu_B\|}{8} e^{-2C\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\epsilon}.$$

On a donc bien la minoration voulue. On revient maintenant au cas général. On définit le réel positif $T_A = T(S(\theta_A))$ par l'équation

$$\sum_{(i,j)} \mathbb{P}(c_{(i,j)} = 1) \left(\frac{a_i}{b_j}\right)^{R(\theta_A)} b_j^{T(R(\theta_A))} = 1,$$

ainsi que μ_A la mesure de Mandelbrot associée aux poids $\left(\frac{a_i}{b_j}\right)^{R(\theta_A)} b_j^{T(R(\theta_A))} \mathbb{1}_{c_{(i,j)}=1}$. Soit

$$\lambda_A = \sum_i \mathbb{E}\left[N_i^A\right]^{\theta_A} a_i^{R(\theta_A)} \log\left(\frac{1}{a_i}\right).$$

Théorème 2.2.21. *Presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ on a*

$$\underline{\dim}_M(K) = \overline{\dim}_K = \max(T_A, T_B)$$

Démonstration. F_δ désigne maintenant l'ensemble des quasi-carrés de la forme

$$\pi([(x_1, y_1) \cdots (x_{n_\delta}, y_{n_\delta}) y_{n_\delta+1} \cdots y_{M_\delta}])$$

ou de la forme

$$\pi([(x_1, y_1) \cdots (x_{M_\delta}, y_{M_\delta}) y_{M_\delta+1} \cdots y_{n_\delta}])$$

(selon que $a_{x_1} \cdots a_{x_{n_\delta}} \leq b_{y_1} \cdots b_{y_{n_\delta}}$ ou pas), et $\widetilde{N_\delta}(K)$ désigne l'ensemble des quasi-carrés de F_δ qui intersectent K. L'inégalité $\overline{\dim}_H(K) \leq \max(T_A, T_B)$ se prouve de façon directe comme dans le cas précédent, en utilisant le lemme A.1.5. On cherche donc à prouver maintenant la minoration. Rappellons que la mesure de Mandelbrot μ_r est définie dans le dernier paragraphe de la section 2.2.2. On prouve de la même façon que précédemment que presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, il existe $K'_B \subset K$ tel que $\mu_B(K'_B) \geq \frac{3\|\mu_B\|}{4}$ et tel que pour tout $(x, y) \in K'_B$ et $\delta > 0$ assez petit on ait

$$(\pi_1)_* \left(\hat{\mu}_r^{(x,y)|_{M_\delta}}\right)\left(\left\{z \in \pi_1\left(\hat{K}^{(x,y)|_{M_\delta}}\right) \text{ tq } \forall k \geq \left\lfloor \frac{M_\delta}{\log(M_\delta)} \right\rfloor,\ (\pi_1)_* \left(\hat{\mu}_r^{(x,y)|_{M_\delta}}\right)([z|_{M_\delta+k}]) \right.\right.$$
$$\left.\left. \leq e^{-k(R(\theta_A)\lambda_A - \epsilon_k)} \text{ et } a_{z_{M_\delta+1}} \cdots a_{z_{M_\delta+k}} \geq e^{-k(\lambda_A+\epsilon_k)}\right\}\right) \geq \frac{\left\|\mu_r^{(x,y)|_{M_\delta}}\right\|}{2}.$$

On choisit de même K_B comme précédemment, de mesure $\mu_B(K_B) \geq \frac{3\|\mu_B\|}{4}$. On en déduit que presque sûrement conditionnellement à $\mu_B \neq 0$, il existe un sous-ensemble de K (donné par $K_B \cap K'_B$) de μ_B-masse supérieure à $\frac{\|\mu_B\|}{2}$ et tel que pour tout $(x, y) \in K_B \cap K'_B$ et $\delta > 0$ assez petit on ait les deux propriétés. On obtient donc en effectuant des raisonnements similaires au cas précédent que presque sûrement conditionnellement à $K \neq \varnothing$ on a pour $\delta > 0$ assez petit

$\widetilde{N_\delta}(K)$

$$\geq \delta^{-T_A} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \sum_{\substack{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing \\ b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}} \leq a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}}} \mu_A\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right) \frac{\left\|\mu_r^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4\left\|\mu_A^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}$$

$$+ \delta^{-T_B} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \sum_{\substack{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing \\ b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}} > a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}}} \mu_B\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right) \frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}$$

Soit $\epsilon > 0$. Quitte à réduire un peu $K_B \cap K'_B$ (sans réduire sa μ_B-masse) ou $\delta > 0$, on peut supposer sans perte de généralité à l'aide des lemmes 2.2.19 et du lemme 2.2.20 que

$$\left\|\mu_r^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|, \left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|, \left\|\mu_A^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|, \left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\| \in \left[e^{-\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right)-\epsilon}, e^{\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right)+\epsilon}\right].$$

On va maintenant avoir besoin du

Lemme 2.2.22. *On a* $T_A \leq S(\theta_A) + R(\theta_B)$ *et* $T_B \leq S(\theta_A) + R(\theta_B)$.

Démonstration. On prouve la deuxième inégalité, la première se prouvant de manière similaire. Montrons donc que

$$\sum_{(i,j)} \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right) b_j^{S(\theta_B)} a_i^{R(\theta_A)} \leq 1,$$

ce qui suffira pour conclure. Pour cela il suffit de montrer que pour chaque j on a

$$\sum_i \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right) a_i^{R(\theta_A)} \leq \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B}.$$

On a alors deux cas. Si $\mathbb{E}\left[N_j\right] \leq 1$, on a de manière directe

$$\sum_i \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right) a_i^{R(\theta_A)} \leq \mathbb{E}\left[N_j\right] \leq \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B}.$$

Si maintenant $\mathbb{E}\left[N_j\right] > 1$, soient $p, q > 1$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On a alors grâce à notre hypothèse et à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}\sum_i \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right) a_i^{R(\theta_A)} &= \sum_i \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right)^{\frac{1}{q}} \mathbb{P}\left(c_{(i,j)} = 1\right)^{\frac{1}{p}} a_i^{\frac{R(\theta_A)}{p}} a_i^{\frac{R(\theta_A)}{q}} \\ &\leq \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} \sum_i \mathbb{E}\left[N_i\right]^{\frac{\theta_A}{p}} a_i^{\frac{R(\theta_A)}{p}} a_i^{\frac{R(\theta_A)}{q}} \\ &\leq \mathbb{E}\left[N_j\right]^{\theta_B} \left(\sum_i a_i^{R(\theta_A)}\right)^{\frac{1}{q}},\end{aligned}$$

car $\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)^{\frac{1}{q}} \leq 1 < \mathbb{E}[N_j]$ et $\mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)^{\frac{1}{p}} \leq \mathbb{P}(c_{(i,j)}=1)^{\frac{\theta_A}{p}} \leq \mathbb{E}[N_i]^{\frac{\theta_A}{p}}$. Il suffit alors de faire tendre q vers $+\infty$ pour obtenir l'inégalité souhaitée. $\square$

On a maintenant plusieurs cas. Supposons dans un premier temps que $T_B > T_A$. Dans ce cas, si $(x,y) \in K$ et $b_{y_1} \cdots b_{y_{n_\delta}} \leq a_{x_1} \cdots a_{x_{n_\delta}}$, alors en utilisant le lemme ci-dessus

$$\begin{aligned}
\frac{\mu_B\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\left\|\mu_A^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{\mu_A\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} &= \frac{\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S_B}\left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{T_B-S_B}}{\left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{S_A}\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{T_A-S_A}} \\
&= \frac{\left(b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}}\right)^{S_A+S_B-T_A}}{\left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{S_A+S_B-T_B}} \\
&\leq \left(a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}\right)^{T_B-T_A} \\
&\leq \delta^{T_B-T_A}.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing \\ b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}} \leq a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}}} \mu_B\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} \\
&\leq \delta^{T_B-T_A}\sum_{\substack{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing \\ b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}} \leq a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}}} \mu_A\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{\left\|\mu_A^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} \\
&\leq \delta^{T_B-T_A}\left\|\mu_A\right\| e^{2\epsilon C\log\left(\frac{1}{\delta}\right)+2\epsilon}.
\end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned}
&\widetilde{N_\delta}(K) \\
&\geq \delta^{-T_B}e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)}\sum_{\substack{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing \\ b_{y_1}\cdots b_{y_{n_\delta}} > a_{x_1}\cdots a_{x_{n_\delta}}}} \mu_B\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} \\
&\geq \delta^{-T_B}e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)}\Bigg(\sum_{[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\cap K_B\cap K'_B\neq\varnothing} \mu_B\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta},y_{n_\delta})]\right)\frac{\left\|\mu_s^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|}{4\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} \\
&\qquad - \delta^{T_B-T_A}\left\|\mu_A\right\| e^{2\epsilon C\log\left(\frac{1}{\delta}\right)+2\epsilon}\Bigg)
\end{aligned}$$

$$\geq \delta^{-T_B} e^{-2\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \left(\frac{\|\mu_B\|}{8} - \delta^{T_B - T_A} \|\mu_A\| e^{4\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right) + 4\epsilon} \right)$$

ce qui nous donne (quitte à réduire un peu ϵ au préalable)

$$\underline{\dim}_M(K) \geq T_B - 2C\epsilon.$$

On peut donc conclure. Le cas $T_A > T_B$ se traite de manière similaire. Enfin, si $T_A = T_B = T$, les inégalités 2.9 sont encore vraies mais nous permettent seulement de majorer le rapport en question par 1. On peut donc en déduire

$$\begin{aligned} &\widetilde{N_\delta}(K) \\ &\geq \delta^{-T} e^{-\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \sum_{\left[(x_1,y_1)\cdots\left(x_{n_\delta},y_{n_\delta}\right)\right] \cap K_B \cap K'_B \neq \varnothing} \frac{\mu_B\left(\left[(x_1,y_1)\cdots(x_{n_\delta(x,y)}, y_{n_\delta})\right]\right)}{4\left\|\mu_B^{(x,y)|_{n_\delta}}\right\|} \\ &\geq \delta^{-T} e^{-2\epsilon C \log\left(\frac{1}{\delta}\right)} e^{o\left(\log\left(\frac{1}{\delta}\right)\right)} \frac{\|\mu_B\|}{8}. \end{aligned}$$

ce qui permet de nouveau de conclure. □

2.3 Etude en dimension 2 des mesures de Mandelbrot inhomogènes, des mesures pseudo-Mandelbrot et de leurs projections

On cherche dans cette section à étudier les propriétés de généralisations des mesures de Mandelbrot appelées **mesures de Mandelbrot inhomogènes**. Ces mesures ont été portées à notre intérêt en étudiant l'approche de [11] du problème du calcul de la dimension de Hausdorff d'une éponge de Barański déterministe en toute dimension. Das et Simmons y prouvent en effet qu'à partir de la dimension 3, la dimension de Hausdorff d'une éponge de Barański déterministe peut être strictement supérieure au supremum des dimensions de produits de Bernoulli homogènes sur cette éponge, en exhibant un contre-exemple. Ces derniers énoncent aussi un résultat selon lequel on peut calculer cette dimension à l'aide d'un principe variationnel sur une autre classe de mesures plus générale, à savoir les produits de Bernoulli exponentiellement λ-périodiques (sous-ensemble de la classe des produits de Bernoulli inhomogènes). Cependant, la preuve de ce résultat, très technique et complexe, ne nous a pas complètement convaincus. Etants intéressés par le cas aléatoire, nous nous sommes en premier lieu attachés à obtenir des résultats concernant les mesures de Mandelbrot inhomogènes et leurs projections sur un tapis de Barański aléatoire. Cette étude prépare le terrain pour le cas de la dimension 3 qui sera discuté dans la section 2.4.

Dans un premier temps, on se limitera au cas symbolique afin de poursuivre le travail entrepris dans [4] (étude de la dimension de Hausdorff des mesures de Mandelbrot inhomogènes) et dans [6] (étude des projections sur un axe de mesures de Mandelbrot classiques). On étudiera ensuite les projections de ces mesures sur un tapis de Barański aléatoire et on prouvera en particulier une minoration pour la dimension de Hausdorff inférieure de ces projections. Ceci permettra grâce au lemme de Billingsley d'obtenir un minoration de la dimensions de Hausdorff du tapis. En parallèle de ces résultats, on introduira aussi la classe des mesures pseudo-Mandelbrot, un sous-ensemble des mesures de Mandelbrot inhomogènes dont la définition est inspirée de celle des mesures pseudo-Bernoulli introduites dans [11], puis on introduira plusieurs résultats sur ces mesures et leurs projections.

On pose de nouveau $X = [\![0, r-1]\!] \times [\![0, s-1]\!]$ et $\mathcal{A} = \bigcup\limits_{n\geq 0} X^n$. On munit $X^{\mathbb{N}^*}$ de la distance usuelle ultramétrique

$$d((x,y),(x',y')) = e^{-\min\left\{k\geq 1,\ (x_k,y_k)\neq(x'_k,y'_k)\right\}}. \tag{2.10}$$

Soit $\widetilde{W} = (\widetilde{W}_{(i,j)})_{(i,j)\in X}$ une variable aléatoire à valeurs dans $(\mathbb{R}_+)^X$ vérifiant $\mathbb{E}\left[\widetilde{W}_{(i,j)}\right] = 1$ pour tout $(i,j) \in X$. Soit $(\widetilde{W}(a))_{a\in\mathcal{A}}$ une famille de copies indépendantes de $\widetilde{W}$. On pose aussi

$$p = (p_{(i,j)})_{(i,j)\in X} : t > 0 \mapsto (p_{(i,j)}(t))_{(i,j)\in X} \in S$$

une application continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans S. Soit $\lambda > 1$. Si p vérifie $p(\lambda t) = p(t)$ pour tout $t > 0$, on dira, suivant [11], que p est exponentiellement λ-périodique. Pour tout $a \in \mathcal{A}$ et $(i,j) \in X$ on pose $W_{(i,j)}(a) = p_{(i,j)}^{|a|+1}\widetilde{W}_{(i,j)}(a)$, et pour tout $n \geq 1$ on pose

$$Y_n(a) = \sum_{b_1,\dots,b_n\in X} W_{b_1}(a)\cdots W_{b_n}(ab_1\cdots b_{n-1}),$$

ce qui définit une martingale d'espérance 1, qui converge donc presque sûrement vers une variable aléatoire $Y(a)$ d'espérance ≤ 1. Remarquons que $Y_n(a)$ est de même loi que $Y_n(a')$ si $|a| = |a'|$ (et de même pour $Y(a)$ et $Y(a')$) : on pourra donc noter $||Y_n(|a|)||_{L^q}$ la norme L^q de ces variables de même loi. Remarquons aussi que $Y(a)$ est de même loi que $\sum_{(i,j)\in X} W_{(i,j)}(a)Y(a(i,j))$ pour tout $a \in \mathcal{A}$. Cette dernière relation nous permet de définir presque sûrement la mesure de Mandelbrot inhomogène

$$\begin{aligned}\nu : &[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)] \in X^n \\ &\mapsto W_{(x_1,y_1)}(\varnothing)\cdots W_{(x_n,y_n)}((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))Y((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))\end{aligned}$$

sur l'ensemble des cylindres symboliques, que l'on étend ensuite de manière unique à $(X^{\mathbb{N}^*}, \mathcal{B}(X^{\mathbb{N}^*}))$. On se demande d'abord de nouveau dans quels cas on a $\mathbb{E}[Y(a)] = 1$, afin d'obtenir une mesure non dégénérée. Soit $q \in]1,2]$. On va s'intéresser à la convergence dans L^q de la martingale $(Y_n(a))$. On supposera dorénavant que $\widetilde{W}_{(i,j)} \in L^q$ pour tout $(i,j) \in X$. On pose aussi

$$\phi_q : t > 0 \mapsto \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} \left(p^t_{(i,j)}\widetilde{W}_{(i,j)}\right)^q\right] > 0.$$

Le théorème suivant est un corollaire des résultats obtenus dans [4].

Théorème 2.3.1. *Supposons que la série de terme général* $\left(\prod_{k=1}^{n} \phi_q(|a|+k)^{\frac{1}{q}}\right)_{n\geq 1}$ *converge. Alors* $(Y_n(a))$ *converge vers* $(Y(a))$ *en norme* L^q*, et en particulier* $\mathbb{E}[Y(a)] = 1$.

Démonstration. On sait, suivant [4, Théorème 6], qu'il existe $C_q > 0$ tel que pour tout n

$$||Y_{n+1}(a) - Y_n(a)||_{L^q} \leq C_q \prod_{k=1}^{n} \phi_q(|a|+k)^{\frac{1}{q}}.$$

Ainsi, sous l'hypothèse du théorème, la suite $(Y_n(a))$ est bornée dans L^q, ce qui permet de conclure. □

Théorème 2.3.2. *Supposons*

$$\sup_{|a|\geq 0} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \phi_q(|a|+k)\right)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Alors $(Y_n(a))$ *converge vers* $(Y(a))$ *en norme* L^q *pour tout* $a \in \mathcal{A}$ *et* $\sup_{a\in\mathcal{A}} ||Y(a)||_{L^q} < +\infty$.

Démonstration. Il s'agit de nouveau de [4, Théorème 6]. □

On va énoncer des critères plus maniables dans le cas exponentiellement périodique.

Lemme 2.3.3. *Supposons p exponentiellement λ-périodique. On pose*

$$f : n \geq 1 \mapsto \sup_{|a|\geq 0} \sum_{k=|a|+1}^{n+|a|} \int_{k-1}^{k} |\log(\phi_q(k)) - \log(\phi_q(t))| dt.$$

Alors $f(n) = o(n)$.

Démonstration. Soit

$$C = \max_{x,y\in[1,\lambda]} |\log(\phi_q(x)) - \log(\phi_q(y))|$$

et $\epsilon > 0$. Le caractère exponentiellement λ-périodique nous permet de choisir $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max_{\substack{|x-y|\leq 1 \\ x,y\geq N+1}} |\log(\phi_q(x)) - \log(\phi_q(y))| \leq \epsilon.$$

Soit aussi $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{CN}{n} \leq \epsilon$ et $|a| \in \mathbb{N}$. Si $|a| \geq N$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=|a|+1}^{n+|a|} \int_{k-1}^{k} |\log(\phi_q(k)) - \log((\phi_q(t))| dt \leq \epsilon.$$

Et si $|a| < N$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=|a|+1}^{n+|a|} \int_{k-1}^{k} |\log(\phi_q(k)) - \log((\phi_q(t))| dt \leq \frac{C(N-|a|)}{n} + \frac{\epsilon(n+|a|-N)}{n} \leq 2\epsilon.$$

Ainsi $\frac{f(n)}{n} \leq 2\epsilon$. Ceci permet de conclure. $\square$

Théorème 2.3.4. *Supposons p exponentiellement λ-périodique et*

$$S_q := \max_{x \in [1,\lambda]} \frac{1}{x} \int_0^x \log(\phi_q(t)) dt < 0.$$

Alors pour tout $a \in \mathcal{A}$ la martingale $(Y_n(a))$ converge dans L^q vers $Y(a)$.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$x > 0 \longmapsto \frac{1}{x} \int_0^x \log(\phi_q(t)) dt$$

est exponentiellement λ-périodique. Soit $M = \max_{x \in [1,\lambda]} |\log(\phi_q(x))|$. On a

$$\begin{aligned}
&\prod_{k=1}^{n} \phi_q(|a|+k)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{q} \int_{|a|}^{n+|a|} \log(\phi_q(t)) dt + \frac{f(n)}{q}\right) \\
&= \exp\left(\frac{n}{q}\left[\frac{1}{n}\int_0^n \log(\phi_q(t)) dt - \frac{1}{n}\int_0^{|a|} \log(\phi_q(t)) dt + \frac{1}{n}\int_n^{n+|a|} \log(\phi_q(t)) + \frac{f(n)}{n}\right]\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{n}{q}\left[S_q + \frac{2M|a|}{n} + \frac{f(n)}{n}\right]\right).
\end{aligned}$$

Cette dernière quantité tendant vers 0 lorsque $n \to +\infty$, on peut donc conclure. $\square$

Théorème 2.3.5. *Supposons p exponentiellement λ-périodique et $S_q > 0$. Alors pour tout $a \in \mathcal{A}$ il existe une suite d'entiers naturels $(n_\ell)_{\ell \geq 1}$ telle que $n_\ell \xrightarrow[\ell \to \infty]{} +\infty$ et $||Y_{n_\ell}(a)||_{L^q} \xrightarrow[\ell \to \infty]{} +\infty$.*

Démonstration. Pour $n \geq 1$ notons $k(n)$ l'unique entier tel que $\lambda^{k(n)} \leq n < \lambda^{k(n)+1}$. Soit $x \in [1, \lambda]$ tel que $\frac{1}{x}\int_0^x \log(\phi_q(t)) dt > 0$. Il est facile de voir qu'il existe une suite $(n_\ell)_\ell$ telle que

$n_\ell \xrightarrow[\ell\to\infty]{} +\infty$ et $\frac{n_\ell}{\lambda^{k(n_\ell)}} \xrightarrow[\ell\to\infty]{} x$. Alors par inégalité de Jensen

$$\begin{aligned} ||Y_{n_\ell}(a)||_{L^q} &\geq \prod_{k=|a|+1}^{|a|+n_\ell} \phi_q(k)^{\frac{1}{q}} \geq \exp\left(\frac{1}{q}\int_{|a|}^{n_\ell+|a|} \log(\phi_q(t))dt - \frac{f(n_\ell)}{q}\right) \\ &\geq \exp\left(\frac{n_\ell}{q}\left[\frac{1}{\left(\frac{n_\ell}{\lambda^{k(n_\ell)}}\right)}\int_0^{\frac{n_\ell}{\lambda^{k(n_\ell)}}} \log(\phi_q(t))dt - \frac{2M|a|}{n_\ell} - \frac{f(n_\ell)}{n_\ell}\right]\right) \end{aligned}$$

Cette dernière quantité tendant vers $+\infty$ lorsque $\ell \to +\infty$, on peut donc conclure. $\square$

Sous l'hypothèse $S_q < 0$ la mesure ν est donc non dégénérée, ce qui signifie que $\mathbb{E}\left[\nu(X^{\mathbb{N}^*})\right] = 1$.

Théorème 2.3.6. *Supposons p exponentiellement λ-périodique, $S_q < 0$ et $\phi_q(t) \leq 1$ pour tout $t \in [1, \lambda]$. Alors $||Y(|a|)||_{L^q} = \mathcal{O}(|a|)$ lorsque $|a| \to +\infty$.*

Démonstration. Posons $n_{|a|} = \left\lceil \frac{3M|a|}{-S_q} \right\rceil$. On a $\frac{M|a|}{n_{|a|}} \leq \frac{-S_q}{3}$. Soit aussi $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $\frac{f(n)}{n} \leq -\frac{S_q}{3}$. Soit $|a|$ suffisamment grand pour que $n_{|a|} \geq N$. Alors de nouveau il existe $C_q > 0$ tel que

$$\begin{aligned} &\sum_{n\geq 1} ||Y_{n+1}(|a|) - Y_n(|a|)||_{L^q} \\ &\leq C_q \sum_{n=1}^{n_{|a|}} \exp\left(\frac{1}{q}\sum_{k=|a|+1}^{n+|a|} \log(\phi_q(k))\right) + C_q \sum_{n=n_{|a|+1}}^{+\infty} \exp\left(\frac{1}{q}\int_{|a|}^{n+|a|} \log(\phi_q(t))dt + \frac{f(n)}{q}\right) \\ &\leq C_q \left(n_{|a|} + \sum_{n_{|a|}+1}^{+\infty} \exp\left(\frac{n}{q}\left(\frac{1}{n}\int_0^n \log(\phi_q(t))dt - \frac{1}{n}\int_0^{|a|} \log(\phi_q(t))dt + \frac{f(n)}{n}\right)\right)\right) \\ &\leq C_q \left(n_{|a|} + \sum_{n_{|a|}+1}^{+\infty} \exp\left(\frac{nS_q}{3q}\right)\right) \\ &= C_q \left(\left\lceil \frac{3M|a|}{-S_q} \right\rceil + \exp\left(\frac{S_q}{3q}\left(\left\lceil \frac{3M|a|}{-S_q} \right\rceil + 1\right)\right) \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{S_q}{3q}}}\right). \end{aligned}$$

D'où pour tout $n \geq 1$

$$||Y_n(|a|)||_{L^q} \leq C_q \left(\left\lceil \frac{3M|a|}{-S_q} \right\rceil + \exp\left(\frac{S_q}{3q}\left(\left\lceil \frac{3M|a|}{-S_q} \right\rceil + 1\right)\right) \cdot \frac{1}{1 - e^{\frac{S_q}{3q}}}\right) + \sum_{(i,j)\in X} ||\widetilde{W}_{(i,j)}||_{L^q}.$$

En passant à la limite sur n on obtient le résultat voulu. $\square$

Remarquons que si $1 < q' \leq q \leq 2$ et si $S_q < 0$ et $\phi_q(t) \leq 1$ pour tout $t \in [1, \lambda]$, alors par convexité on a $S_{q'} < 0$ et $\phi_{q'}(t) \leq 1$ pour tout $t \in [1, \lambda]$.

Théorème 2.3.7. *Supposons p exponentiellement λ-périodique. Si $S_q > 0$ et s'il existe $x \in [1,\lambda]$ tel que $\phi_q(x) > 1$, alors il existe une suite d'entier naturels $(|a|(\ell))_{\ell \geq 1}$ telle que $|a|(\ell) \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} +\infty$ et*

$$\frac{||Y(|a|(\ell))||_{L^q}}{|a|(\ell)} \xrightarrow[\ell \to +\infty]{} +\infty.$$

Démonstration. Par continuité il existe un segment $[c,d] \subset [1,\lambda]$ tel que $d - c := A > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tel que $\log(\phi_q(x)) \geq \epsilon_0$ pour tout $x \in [c,d]$. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$ et $k(\ell) = \left\lceil \frac{\log(\frac{\ell}{A})}{\log(\lambda)} \right\rceil$. On a $\lambda^{k(\ell)} A \geq \ell$ et $\lambda^{k(\ell)} \leq \lambda^{k(\ell)} c \leq \lambda^{k(\ell)} d \leq \lambda^{k(\ell)+1}$. Soit

$$|a|(\ell) = \min\left\{n \geq 1,\ n \in \left[\lambda^{k(\ell)}c, \lambda^{k(\ell)}d\right]\right\} - 1.$$

Pour ℓ assez grand on a $|a|(\ell) > 0$. Par propriété de sous-martingale on a alors

$$\mathbb{E}\left[Y(|a|(\ell))^q\right] \geq \mathbb{E}\left[Y_\ell(|a|(\ell))^q\right] \geq \exp\left(\sum_{n=|a|(\ell)+1}^{\ell+|a|(\ell)} \log(\phi_q(k))\right) \geq e^{\epsilon_0 \ell}.$$

De plus $|a|(\ell) \leq \lambda^{k(\ell)+1} \leq \frac{\lambda^2 \ell}{A}$, d'où

$$\frac{||Y(|a|(\ell))||_{L^q}}{|a|(\ell)} \geq \frac{A e^{\frac{\epsilon_0 \ell}{q}}}{\lambda^2 \ell},$$

ce qui permet de conclure. $\square$

Théorème 2.3.8. *Supposons $S_q < 0$ et $\phi_q(t) \leq 1$ pour tout $t \in [1,\lambda]$. Alors presque sûrement, conditionnellement à $\nu \neq 0$, on a (pour la métrique d définie en 2.10)*

$$\underline{\dim}_H(\nu) = \overline{\dim}_H(\nu) = \inf_{x \in [1,\lambda]} \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^t_{(i,j)} \widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j) \in X}\right)\right] dt$$

et

$$\underline{\dim}_P(\nu) = \overline{\dim}_P(\nu) = \sup_{x \in [1,\lambda]} \frac{1}{x} \int_0^x \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^t_{(i,j)} \widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j) \in X}\right)\right] dt$$

De plus, presque sûrement conditionnellement à $\nu \neq 0$, pour ν presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{\log(\nu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]))}{-n}\right)_n$ est le segment $\left[\underline{\dim}_H(\nu), \overline{\dim}_P(\nu)\right]$.

Démonstration. On peut facilement adapter la preuve de [4, Théorème 8] au cas où $||Y(|a|)||_{L^q} = \mathcal{O}_{|a| \to +\infty}(|a|)$. On obtient alors que presque sûrement, conditionnellement à $\nu \neq 0$, pour ν presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\frac{\log(\nu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]))}{-n}\right)_n$ est égal à l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite

$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i,j)}\widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in X}\right)\right]\right)_n$. Ce dernier est un intervalle en utilisant les propriétés usuelles. On obtient donc

$$\underline{\dim}_H(\nu) = \overline{\dim}_H(\nu) = \liminf_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i,j)}\widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in X}\right)\right].$$

On peut alors conclure en utilisant la propriété d'exponentielle périodicité. La formule pour les dimensions de Packing inférieure et supérieure s'obtient de la même manière. □

On pose maintenant $\pi_2 : (x,y) \in X^{\mathbb{N}^*} \mapsto y \in [\![0, s-1]\!]^{\mathbb{N}^*}$ et on cherche à calculer les dimensions de $\eta := (\pi_2)_*\nu$. On va pour cela mettre en oeuvre un principe de grande déviations. Posons pour tout $k \geq 1$

$$\tau^1_k(q) = -\log\left(\sum_{i=0}^{r-1}(p^k_i)^q\right),\ \tau^2_k(q) = -\log\left(\sum_{j=0}^{s-1}(p^k_j)^q\right)$$

et

$$T_k(q) = -\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X}\left(p^k_{(i,j)}\widetilde{W}_{(i,j)}\right)^q\right]\right).$$

Théorème 2.3.9. *Supposons qu'il existe* $q \in\,]1,2]$ *tel que* $\log\left(\mathbb{E}\left[Y(|a|)^q\right]\right) = o_{|a|\to+\infty}(|a|)$ *(ceci est donc plus général que l'hypothèse* $\sup_{|a|\geq 0}\mathbb{E}\left[Y(|a|)^q\right] < +\infty$*). Alors il existe* f_q *une fonction à valeurs positives telle que* $\log(f_q(n)) = o(n)$ *et telle que pour tout* $n \geq 1$ *on ait*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{y_1,\dots,y_n\in[\![0,s-1]\!]^n}((\pi_2)_*\nu([y_1\cdots y_n]))^q\right] \leq f_q(n)\exp\left(-\sum_{k=1}^{n}\min(\tau^2_k(q), T_k(q))\right).$$

Démonstration. Remarquons qu'il suffit de considérer dans l'espérance ci-dessus la somme sur les $y_1,\dots,y_n$ tels que $p^1_{y_1} > 0,\dots,p^n_{y_n} > 0$. Pour ces n-uplets on définit pour $k \in [\![1,n]\!]$ les variables aléatoires

$$V^k_{(x_k,y_k)} = \frac{p^k_{(x_k,y_k)}}{p^k_{y_k}}\widetilde{W}_{(x_k,y_k)},$$

ainsi que les quantités

$$T_{y_k}(q) = -\log\left(\mathbb{E}\left[\sum_{x_k}\left(V_{(x_k,y_k)}\right)^q\right]\right).$$

On a pour $k \in [\![1,n]\!]$

$$e^{-T_k(q)} = \sum_{y_k,\ p^k_{y_k}>0}\left(p^k_{y_k}\right)^q e^{-T_{y_k}(q)}.$$

Posons aussi

$X_{1,\dots,n}(y_1,\dots,y_n)$

$$= \sum_{x_1,\dots,x_n} \frac{p^1_{(x_1,y_1)}}{p^1_{y_1}} \widetilde{W}_{(x_1,y_1)} \cdots \frac{p^n_{(x_n,y_n)}}{p^n_{y_n}} \widetilde{W}_{(x_n,y_n)}((x_1,y_1)\cdots(x_{n-1},y_{n-1}))Y((x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n))$$
$$= \sum_{x_1} V^1_{(x_1,y_1)} X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n).$$

Par sous-additivité de $x \mapsto x^{\frac{q}{2}}$ on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_{1,\dots,n}(y_1,\dots,y_n)^q\right] \\
&\quad \le \mathbb{E}\left[\left(\sum_{x_1} \left(V^1_{(x_1,y_1)}\right)^{\frac{q}{2}} \left(X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n)\right)^{\frac{q}{2}}\right)^2\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[\sum_{x_1} \left(V^1_{(x_1,y_1)}\right)^q \left(X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n)\right)^q\right] \\
&\quad + 2\mathbb{E}\left[\sum_{x_1\neq x_1'} \left(V^1_{(x_1,y_1)}\right)^{\frac{q}{2}} \left(X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n)\right)^{\frac{q}{2}} \left(V^1_{(x_1',y_1)}\right)^{\frac{q}{2}} \left(X_{2,\dots,n}((x_1',y_1),y_2,\dots,y_n)\right)^{\frac{q}{2}}\right] \\
&\quad \le D_q + \sum_{x_1} \mathbb{E}\left[\left(V^1_{(x_1,y_1)}\right)^q\right] \mathbb{E}\left[X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n)^q\right],
\end{aligned}$$

où
$$D_q = r(r-1) \sum_{(i,j)\in X} \mathbb{E}\left[\left(\widetilde{W}_{(i,j)}\right)^q\right].$$

On peut alors réitérer ce procédé par récurrence sur les espérances $\mathbb{E}\left[X_{2,\dots,n}((x_1,y_1),y_2,\dots,y_n)^q\right]$, puis sur celles qui en découlent, et ainsi de suite. On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X_{1,\dots,n}(y_1,\dots,y_n)^q\right] \\
&\quad \le D_q\left(1 + e^{-T_{y_1}(q)} + e^{-T_{y_1}(q)-T_{y_2}(q)} + \cdots + e^{-T_{y_1}(q)-\cdots-T_{y_{n-1}}(q)}\right) + D_q'(n) e^{-T_{y_1}(q)-\cdots-T_{y_n}(q)},
\end{aligned}$$

où $D_q'(n) = \mathbb{E}\left[Y(n)^q\right] = e^{o(n)}$. On en déduit

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{y_1,\dots,y_n\in[\![0,s-1]\!]^n} ((\pi_2)_*\nu([y_1\cdots y_n]))^q\right] \\
&\quad = \left(\sum_{y_1}\left(p^1_{y_1}\right)^q\right)\cdots\left(\sum_{y_n}\left(p^n_{y_n}\right)^q\right) \sum_{y_1,\dots,y_n} \frac{\left(p^1_{y_1}\right)^q}{\sum_{y_1}\left(p^1_{y_1}\right)^q} \cdots \frac{\left(p^n_{y_n}\right)^q}{\sum_{y_n}\left(p^n_{y_n}\right)^q} \mathbb{E}\left[X_{1,\dots,n}(y_1,\dots,y_n)^q\right] \\
&\quad \le e^{-\tau_1^2(q)} \cdots e^{-\tau_n^2(q)} \Big[e^{\tau_1^2(q)-T_1(q)} \cdots e^{\tau_n^2(q)-T_n(q)} D_q'(n) \\
&\quad + D_q\left(1 + e^{\tau_1^2(q)-T_1(q)} + \cdots + e^{\tau_1^2(q)-T_1(q)} \cdots e^{\tau_{n-1}^2(q)-T_{n-1}(q)}\right)\Big]
\end{aligned}$$

$$\leq e^{-\tau_1^2(q)}\dots e^{-\tau_n^2(q)}(D'_q(n)+nD_q)\prod_{k=1}^{n}\max\left(1,e^{\tau_k^2(q)-T_k(q)}\right)$$
$$=(D'_q(n)+nD_q)e^{-\sum\limits_{k=1}^{n}\min(T_k(q),\tau_k^2(q))}.$$

□

Avant de conclure, énonçons un lemme qui nous sera utile.

Lemme 2.3.10. *Soit ρ une mesure finie non nulle sur $[\![0,s-1]\!]^{\mathbb{N}^*}$ et $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite bornée. Supposons que pour tout $\epsilon>0$ il existe $q>1$ tel que $\sum_{n\geq 1}e^{n(q-1)(u_n-\epsilon)}\sum_{|u|=n}\rho([u])^q<+\infty$. Alors $\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\log(\rho([y|_n]))}{-n}-u_n\right)\geq 0$ pour ρ-presque tout y. De même si pour tout $\epsilon>0$ il existe $0<q<1$ tel que $\sum_{n\geq 1}e^{n(q-1)(u_n+\epsilon)}\sum_{|u|=n}\rho([u])^q<+\infty$. Alors $\limsup_{n\to\infty}\left(\frac{\log(\rho([y|_n]))}{-n}-u_n\right)\leq 0$ pour ρ-presque tout y.*

Démonstration. On a

$$\rho\left(\left\{y\in[\![0,s-1]\!]^{\mathbb{N}^*},\ \frac{\log(\rho([y|_n]))}{-n}-u_n\leq-\epsilon\right\}\right)$$
$$=\rho\left(\left\{y\in[\![0,s-1]\!]^{\mathbb{N}^*},\ \rho([y|_n])^{q-1}\geq e^{-n(q-1)(u_n-\epsilon)}\right\}\right)$$
$$\leq e^{n(q-1)(u_n-\epsilon)}\sum_{|u|=n}\rho([u])^q.$$

Sous l'hypothèse du lemme on a donc par théorème de Borel-Cantelli que pour ρ-presque tout y, il existe n tel que pour tout $k\geq n$ on ait $\frac{\log(\rho([y|_k]))}{-k}-u_k\geq-\epsilon$. Donc

$$\liminf_{n\to\infty}\left(\frac{\log(\rho([y|_n]))}{-n}-u_n\right)\geq-\epsilon$$

pour ρ-presque tout y, ce qui permet de conclure. L'autre inégalité se prouve de manière similaire.

□

Théorème 2.3.11. *On se place sous les hypothèses du théorème 2.3.9. Alors presque sûrement, conditionnellement à $\nu\neq 0$, on a*

$$\underline{\dim}_H((\pi_2)_*\nu)\geq\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\min\left(h\left(\left(p_j^k\right)_{j\in[\![0,s-1]\!]}\right),\mathbb{E}\left[h\left(\left(p_{(i,j)}^k\widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in X}\right)\right]\right).$$

Démonstration. Soit $0<\alpha<\beta<1$ tel que $\sup_{|a|\geq 0}||Y(|a|)||_{L^q}<+\infty$ pour tout $1-\beta\leq q\leq$

$1+\beta$. On a pour tout $k \geq 1$

$$(\tau_k^2)''(q) = -\frac{\left(\sum_{j=0}^{s-1}(p_j^k)^q \log^2(p_j^k)\right)\left(\sum_{j=0}^{s-1}(p_j^k)^q\right) - \left(\sum_{j=0}^{s-1}(p_j^k)^q \log(p_j^k)\right)^2}{\left(\sum_{j=0}^{s-1}(p_j^k)^q\right)^2}.$$

On en déduit par continuité sur un compact qu'il existe $M_1 > 0$ tel que

$$\forall (k,q) \in \mathbb{N}^* \times [1-\alpha, 1+\alpha]\,,\ |(\tau_k^1)''(q)| \leq M_1.$$

De la même façon on prouve qu'il existe $M_2 > 0$ tel que

$$\forall (k,q) \in \mathbb{N}^* \times [1-\alpha, 1+\alpha]\,,\ |(\tau_k^1)''(q)| \leq M_2.$$

Remarquons ensuite que pour $q \in [1-\alpha, 1+\alpha]$ et $(i,j) \in X$ on a

$$\mathbb{P}(\widetilde{W}_{(i,j)} > 1) + \mathbb{E}\left[\widetilde{W}_{(i,j)}^{1+\alpha} \mathbb{1}_{\widetilde{W}_{(i,j)} \leq 1}\right] \leq \mathbb{E}\left[\widetilde{W}_{(i,j)}^{q}\right] \leq 1 + \mathbb{E}\left[\widetilde{W}_{(i,j)}^{1+\alpha}\right]$$

et

$$\begin{aligned}\left|\widetilde{W}_{(i,j)}^{q} \log(\widetilde{W}_{(i,j)})\right| &\leq \widetilde{W}_{(i,j)}^{1-\alpha} \left|\log(\widetilde{W}_{(i,j)})\right| \mathbb{1}_{\widetilde{W}_{(i,j)}<1} + \widetilde{W}_{(i,j)}^{1+\alpha} \log(\widetilde{W}_{(i,j)}) \mathbb{1}_{\widetilde{W}_{(i,j)}\geq 1} \\ &\leq C(\alpha) + C'(\alpha) + \widetilde{W}_{(i,j)}^{1+\beta}\end{aligned}$$

avec $C(\alpha), C'(\alpha) > 0$ deux constantes qui dépendent de α. En effet pour $\epsilon > 0$ on a toujours

$$\exists M \geq 1,\ \forall x \geq M,\ \log(x) \leq x^{\epsilon}.$$

Le même raisonnement s'applique à la quantité $\left|W_{(i,j)}^q \log^2(W_{(i,j)})\right|$, avec des constantes éventuellement différentes. On en déduit facilement l'existence de $M_3 > 0$ tel que pour tout $(k,q) \in \mathbb{N}^* \times [1-\alpha, 1+\alpha]$ on ait

$$\begin{aligned}&T_k''(q) \\ &= -\mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} (p_{(i,j)}^k)^q \widetilde{W}_{(i,j)}^q\right]^{-2} \Bigg(\mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} (p_{(i,j)}^k)^q \widetilde{W}_{(i,j)}^q \log^2(p_{(i,j)}^k \widetilde{W}_{(i,j)})\right] \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} (p_{(i,j)}^k)^q \widetilde{W}_{(i,j)}^q\right] \\ &\qquad - \mathbb{E}\left[\sum_{(i,j)\in X} (p_{(i,j)}^k)^q \widetilde{W}_{(i,j)}^q \log(p_{(i,j)}^k \widetilde{W}_{(i,j)})\right]\Bigg)\end{aligned}$$

et $|T_k''(q)| \leq M_3$. Soit maintenant $\epsilon > 0$. Pour $1 < q \leq 1 + \alpha$ assez proche de 1 on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[\sum_{y_1,\ldots,y_n \in [\![0,s-1]\!]^n} ((\pi_2)_*\nu([y_1 \cdots y_n]))^q\right] \\
&\leq f_q(n) \exp\left(-n(q-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min((\tau_k^2)'(1), T_k'(1)) - \max(M_2, M_3)(q-1)\right]\right) \\
&\leq f_q(n) \exp\left(-n(q-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min((\tau_k^2)'(1), T_k'(1)) - \frac{\epsilon}{3}\right]\right).
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme A.1.5 on en déduit que presque sûrement conditionnellement à $\nu \neq 0$ on a pour n assez grand

$$\sum_{y_1,\ldots,y_n \in [\![0,s-1]\!]^n} ((\pi_2)_*\nu([y_1 \cdots y_n]))^q \leq f_q(n) \exp\left(-n(q-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min((\tau_k^2)'(1), T_k'(1)) - \frac{2\epsilon}{3}\right]\right),$$

d'où

$$\sum_{n \geq 1} \left(e^{n(q-1)\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \min((\tau_k^2)'(1), T_k'(1)) - \epsilon\right]} \sum_{y_1,\ldots,y_n \in [\![0,s-1]\!]^n} ((\pi_2)_*\nu([y_1 \cdots y_n]))^q\right) < +\infty.$$

On conclut en utilisant le lemme 2.3.10. $\square$

Si on suppose p exponentiellement λ-périodique et que l'on se place sous les hypothèses du théorème 2.3.6, alors on obtient de la même façon presque sûrement conditionnellement à $\nu \neq 0$

$$\underline{\dim}_H((\pi_2)_*\nu) \geq \inf_{x \in [1,\lambda]} \frac{1}{x}\int_0^x \min\left(h\left(\left(p_j^t\right)_{j \in [\![0,s-1]\!]}\right), \mathbb{E}\left[h\left(\left(p_{(i,j)}^t \widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j) \in X}\right)\right]\right) dt.$$

Gardons dorénavant nos hypothèses du théorème 2.3.9 et supposons de plus maintenant que pour chaque $(i,j) \in X$, s'il existe $x > 0$ tel que $p_{(i,j)}^x > 0$, alors il existe $\eta_{(i,j)} > 0$ tel que $p_{(i,j)}^x \geq \eta_{(i,j)}$ pour tout $x > 0$. Pour $a > 0$ on définit les uniques entiers positifs non nuls $B_1 = B_1(a) \geq 1$ et $B_2 = B_2(a) \geq 1$ tels que

$$\sum_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{B_1(a)} p_i^k\right) \geq a > \sum_i \log\left(\frac{1}{a_i}\right)\left(\sum_{k=1}^{B_1(a)-1} p_i^k\right),$$

$$\sum_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{B_2(a)} p_j^k\right) \geq a > \sum_j \log\left(\frac{1}{b_j}\right)\left(\sum_{k=1}^{B_2(a)-1} p_j^k\right).$$

On note de nouveau π l'application de projection sur un tapis de Barański définie dans la première section, et on pose $\mu = \pi_*\nu$. On définit aussi de nouveau les mesures de Peyrière Q et $\widetilde{Q}$ sur $X^{\mathbb{N}}$ et $[0,1]^2$ respectivement à l'aide de ν et μ. Par loi forte des grands nombres on a presque sûrement pour ν presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$

$$q_{(i,j)}((x,y),n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{(i,j)}^k + o(1).$$

On en déduit que presque sûrement pour ν presque tout $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$

$$\frac{\log(a_{x_1}\cdots a_{x_{B_1(n)}})}{n}, \frac{\log(b_{y_1}\cdots b_{x_{B_2(n)}})}{n} \longrightarrow -1$$

lorsque $n \longrightarrow +\infty$. On définira pour $(x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}$ le cylindre généralisé

$$C_n((x,y)) = \begin{cases} \left[(x_1,y_1)\cdots(x_{B_1(n)},y_{B_1(n)})y_{B_1(n)+1}\cdots y_{B_2(n)}\right] & \text{si } B_1(n) \leq B_2(n) \\ \left[(x_1,y_1)\cdots(x_{B_2(n)},y_{B_2(n)})x_{B_2(n)+1}\cdots x_{B_1(n)}\right] & \text{sinon,} \end{cases}$$

ainsi que $\mathcal{C}_n = \left\{C_n((x,y)),\ (x,y) \in X^{\mathbb{N}^*}\right\}$. On définit de nouveau

$$\widetilde{K} = \left\{(x,y) \in [0,1]^2,\ |\pi^{-1}(\{(x,y)\})| = 1\right\},$$

de même que $Y = \pi^{-1}(\widetilde{K})$. On a similairement $\widetilde{Q}(\Omega \times \widetilde{K}) = Q(\Omega \times Y) = 1$ car en utilisant notre hypothèse sur p on obtient facilement

$$Q(\Omega \times Y^c) = \mathbb{E}\left[\nu\right]\left(Y^c \cap \operatorname{supp}\mathbb{E}\left[\nu\right]\right) = 0.$$

On peut encore définir pour $(x,y) \in \widetilde{K}$ son unique antécédent par π (toujours noté $(x,y) = (x_1,y_1)(x_2,y_2)\cdots$) ainsi que l'unique suite décroissante de quasi-carrés $(\pi(C_n((x,y))))_n$ qui le contiennent, que l'on notera encore plus simplement $(C_n((x,y)))_n$. On peut une nouvelle fois utiliser le lemme 2.1.2 pour obtenir que presque sûrement conditionnellement à $\mu \neq 0$, pour μ-presque tout $(x,y) \in \widetilde{K}$ on a

$$\widetilde{\dim}(\mu,((x,y))) = \liminf_{n\to+\infty}\frac{\log(\mu(C_n((x,y))))}{\log(a_n(x,y)} = \dim(\mu,(x,y)).$$

Théorème 2.3.12. *Soit* $q \in \left]1,2\right]$ *tel que* $\log\left(\mathbb{E}\left[Y(|a|)^q\right]\right) = o_{|a|\to+\infty}(|a|)$. *Alors il existe* f_q *une fonction à valeurs positives telle que* $\log(f_q(n)) = o(n)$ *et telle que pour tout* $n \geq 1$ *on ait*

$$\mathbb{E}\left[\sum_{C\in\mathcal{C}_n}\nu(C)^q\right] \leq \phi(n)$$

où

$$\phi(n) = \begin{cases} f_q(n) \exp\left(- \sum\limits_{i=1}^{B_1(n)} T_i(q) - \sum\limits_{i=B_1(n)+1}^{B_2(n)} \min(T_i(q), \tau_i^2(q)) \right) & \textit{si } B_1(n) \leq B_2(n) \\ \\ f_q(n) \exp\left(- \sum\limits_{i=1}^{B_2(n)} T_i(q) - \sum\limits_{i=B_2(n)+1}^{B_1(n)} \min(T_i(q), \tau_i^1(q)) \right) & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Si $B_1(n) \leq B_2(n)$ alors par indépendance on a

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\sum_{C \in \mathcal{C}_n} \nu(C)^q \right] \\ &= \sum_{(x_1,y_1),\ldots,(x_{B_1(n)},y_{B_1(n)})} \Bigg(\mathbb{E}\left[\nu_n \left(\left[(x,y)|_{B_1(n)} \right] \right)^q \right] \\ &\cdot \sum_{y_{B_1(n)+1},\ldots,y_{B_2(n)}} \mathbb{E}\left[\left(\sum_{x'_{B_1(n)+1},\ldots,x'_{B_2(n)}} \nu^{(x,y)|_{B_1(n)}} \left(\left[(x'_{B_1(n)+1}, y_{B_1(n)+1}) \cdots (x'_{B_2(n)}, y_{B_2(n)}) \right] \right) \right)^q \right] \Bigg), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &\nu_n \left(\left[(x,y)|_{B_1(n)} \right] \right) \\ &= p^1_{(x_1,y_1)} \widetilde{W}_{(x_1,y_1)}(\varnothing) \cdots p^{B_1(n)}_{(x_{B_1(n)},y_{B_1(n)})} \widetilde{W}_{(x_{B_1(n)},y_{B_1(n)})}((x_1,y_1) \cdots (x_{B_1(n)-1}, y_{B_1(n)-1})). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\nu^{(x,y)|_{B_1(n)}} \left(\left[(x'_{B_1(n)+1}, y_{B_1(n)+1}) \cdots (x'_{B_2(n)}, y_{B_2(n)}) \right] \right) \\ &= p^{B_1(n)+1}_{(x'_{B_1(n)+1},y_{B_1(n)+1})} \widetilde{W}_{(x'_{B_1(n)+1},y_{B_1(n)+1})}((x,y)|_{B_1(n)}) \\ &\quad \cdots p^{B_2(n)}_{(x'_{B_2(n)},y_{B_2(n)})} \widetilde{W}_{(x'_{B_2(n)},y_{B_2(n)})}((x,y)|_{B_1(n)}(x'_{B_1(n)+1}, y_{B_1(n)+1}) \cdots (x'_{B_2(n)-1}, y_{B_2(n)-1})). \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le même raisonnement que dans la preuve du théorème 2.3.9. Le cas $B_1(n) > B_2(n)$ se démontre de la même manière. □

Théorème 2.3.13. *Toujours sous les hypothèses du théorème 2.3.9 on pose*

$$\begin{aligned} u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{B_1(n)} \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i,j)} \widetilde{W}_{(i,j)} \right)_{(i,j) \in X} \right) \right] \\ + \frac{1}{n} \sum_{k=B_1(n)+1}^{B_2(n)} \min\left(h\left(\left(p^k_j \right)_{j \in [\![0,s-1]\!]} \right), \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i,j)} \widetilde{W}_{(i,j)} \right)_{(i,j) \in X} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

si $B_1(n) \leq B_2(n)$, et

$$
\begin{aligned}
u_n = & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{B_2(n)} \mathbb{E}\left[h\left(\left(p_{(i,j)}^k \widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in X}\right)\right] \\
& + \frac{1}{n} \sum_{k=B_2(n)+1}^{B_1(n)} \min\left(h\left(\left(p_i^k\right)_{i\in[\![0,r-1]\!]}\right), \mathbb{E}\left[h\left(\left(p_{(i,j)}^k \widetilde{W}_{(i,j)}\right)_{(i,j)\in X}\right)\right]\right)
\end{aligned}
$$

sinon. Alors presque sûrement, conditionnellement à $\mu \neq 0$, on a

$$
\underline{\dim}_H(\mu) \geq \liminf_{n\to+\infty} u_n.
$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Supposons $B_1(n) \leq B_2(n)$. Pour $1 < q \leq 1+\alpha$ assez proche de 1 on a

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[\sum_{C\in\mathcal{C}_n} \nu(C)^q\right] \\
& \leq f_q(n) \exp\left(-n(q-1)\left[u_n - \frac{B_2(n)}{n}\max(M_1, M_2, M_3)(q-1)\right]\right) \\
& \leq f_q(n) \exp\left(-n(q-1)\left[u_n - \frac{\epsilon}{3}\right]\right).
\end{aligned}
$$

On traite le cas $B_1(n) > B_2(n)$ de la même façon. On peut alors conclure de nouveau en utilisant les lemmes 2.3.10 et A.1.5. □

2.4 Discussion du cas de la dimension supérieure ou égale à 3

Les résultats de la section précédente permettent d'obtenir en parallèle de nouvelles minorations pour la dimension de Hausdorff d'un tapis de Barański aléatoire. Ceci n'est pas très utile, car on sait déjà calculer cette dernière grâce aux mesures de Mandelbrot classiques. En revanche, ceci nous permet comme nous allons le voir d'obtenir un bon candidat pour une classe de mesures sur laquelle on pourrait fonder un principe variationnel en dimension quelconque. Soit $d, m_1, \ldots, m_d \geq 2$ des entiers. Soient pour $k \in [\![1, d]\!]$ des réels $a_1^k, \ldots, a_{m_k}^k \in (0,1)$ tels que $\sum_{i=1}^{m_k} a_i^k = 1$. Une éponge de Barański se définit de la même façon que pour les tapis, en utilisant dans ce cas l'alphabet à d lettres $X = [\![0, m_1-1]\!] \times \cdots \times [\![0, m_d-1]\!]$ et la projection

$$
\pi : (x_k^1, \ldots, x_k^d)_{k=1}^\infty \in X^{\mathbb{N}^*} \mapsto \bigcap_{n\geq 1} f_{(x_1^1,\ldots,x_1^d)} \circ \cdots \circ f_{(x_n^1,\ldots,x_n^d)}([0,1]^d) \in [0,1]^d,
$$

où

$$f_{(i_1,\dots,i_d)} : (x^1,\dots,x^d) \in \mathbb{R}^d \mapsto \begin{pmatrix} a^1_{i_1} & & & \\ & a^2_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a^d_{i_d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i'_1=0}^{i_1-1} a^1_{i'_1} \\ \sum_{i'_2=0}^{i_2-1} a^2_{i'_2} \\ \vdots \\ \sum_{i'_d=0}^{i_d-1} a^d_{i'_d} \end{pmatrix}.$$

De nouveau on peut définir de la même façon qu'en dimension 2 la mesure de Mandelbrot inhomogène μ à l'aide d'une application continue

$$p = (p_{(i_1,\dots,i_d)})_{(i_1,\dots,i_d)\in X} : t > 0 \mapsto (p_{(i_1,\dots,i_d)}(t))_{(i_1,\dots,i_d)\in X} \in S$$

(où S est toujours l'ensemble des vecteurs de probabilité à $\#X$ coordonnées) et d'une famille $(\widetilde{W}_{(i_1,\dots,i_d)})_{(i_1,\dots,i_d)\in X}$ de variables aléatoires positives d'espérances 1. Pour $a > 0$ et $k \in [\![1, d]\!]$ on définit les uniques entiers positifs non nuls $B_k = B_k(a)$ tels que

$$\sum_{i_k} \log\left(\frac{1}{a^k_{i_k}}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{B_k(a)} p_{i_k}(\ell)\right) \geq a > \sum_{i_k} \log\left(\frac{1}{a^k_{i_k}}\right)\left(\sum_{\ell=1}^{B_k(a)-1} p_{i_k}(\ell)\right).$$

Pour $n \geq 1$, soit aussi $\sigma_n \in \mathfrak{S}([\![1, d]\!])$ tel que

$$B_{\sigma_n(1)}(n) \leq \cdots \leq B_{\sigma_n(d)}(n),$$

et

$$\begin{aligned} u_n = u_n(\mu) = {} & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{B_{\sigma_n(1)}(n)} \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i_1,\dots,i_d)} \widetilde{W}_{(i_1,\dots,i_d)}\right)\right)\right] \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=B_{\sigma_n(1)}(n)+1}^{B_{\sigma_n(2)}(n)} \min\left(h\left(\left(p^k_{i_1,\dots,i_{\sigma_n(1)-1},i_{\sigma_n(1)+1},\dots,i_d}\right)\right), \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i_1,\dots,i_d)} \widetilde{W}_{(i_1,\dots,i_d)}\right)\right)\right]\right) \\ & + \cdots \\ & + \frac{1}{n} \sum_{k=B_{\sigma_n(d-1)}(n)+1}^{B_{\sigma_n(d)}(n)} \min\left(h\left(\left(p^k_{i_{\sigma_n(d)}}\right)\right), \mathbb{E}\left[h\left(\left(p^k_{(i_1,\dots,i_d)} \widetilde{W}_{(i_1,\dots,i_d)}\right)\right)\right]\right). \end{aligned}$$

On suppose de nouveau que $\mathbb{E}[Y(n)] = e^{o(n)}$ (on rappelle que ceci englobe la situation où $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}[Y(n)^q] < +\infty$) et que pour chaque $(i_1,\dots,i_d) \in X$, s'il existe $x > 0$ tel que $p_{(i_1,\dots,i_d)}(x) > 0$, alors il existe $\eta_{(i_1,\dots,i_d)} > 0$ tel que $p_{(i_1,\dots,i_d)}(x) \geq \eta_{(i_1,\dots,i_d)}$ pour tout $x > 0$. On dira lorsque ces deux hypothèses sont vérifiées que μ est de type Δ. On peut alors prouver en utilisant les techniques de la preuve de [7, Proposition 3.2] le

Théorème 2.4.1. *Soit μ une mesure de Mandelbrot inhomogène de type Δ. Alors presque* *sûrement conditionnellement à* $\mu \neq 0$ *on a*

$$\underline{\dim}_H(\mu) \geq \liminf_{n\to+\infty} u_n.$$

On peut donc minorer presque sûrement la dimension d'une éponge de Barański aléatoire K par le supremum de l'ensemble de ces quantités sur les mesure de Mandelbrot inhomogènes de type Δ sur K. Lors des derniers jours de cette thèse, Julien Barral m'a expliqué avec précision comment construire des familles de recouvrements conduisant à l'énoncé suivant :

Théorème 2.4.2. *Presque sûrement conditionnellement à* $K \neq \varnothing$ *on a*

$$\dim_H(K) = \sup\left\{\liminf_{n\to\infty} u_n(\mu),\ \mu \textit{ mesure de Mandelbrot inhomogène de type } \Delta \textit{ sur } K\right\}.$$

Plus spécifiquement soit $\ell = (\ell(n))_{n\geq 1}$ *une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle que* $\ell(n) = o(L(n))$*, où* $L(n) = \sum_{k=1}^{n} \ell(k)$*. Soit* $\mathcal{B}(\ell)$ *l'ensemble des produits de Bernoulli inhomogènes de type* Δ *tels que la suite* $(p(k))_{k\geq 1}$ *des poids qui les définissent soit constante sur chaque intervalle de la forme* $[L(n-1)+1, L(n)]$*. Alors presque sûrement conditionnellement à* $K \neq \varnothing$ *on a*

$$\dim_H(K) = \sup\left\{\liminf_{n\to\infty} u_n(\mu),\ \mu \in \mathcal{B}(\ell)\right\}.$$

Ceci constitue une alternative au principe variationnel énoncé par Das et Simmons dans le cas déterministe, où ces derniers utilisent des applications de poids p exponentiellement λ-périodiques. La démonstration, élaborée, de cet énoncé ne sera pas incluse dans ce mémoire car je ne dispose plus du temps nécessaire pour la maîtriser complètement.

Chapitre 3

Dimensions of "self-affine sponges" invariant under the action of multiplicative integers

ABSTRACT. Let $m_1 \geq m_2 \geq 2$ be integers. We consider subsets of the product symbolic sequence space $(\{0,\ldots,m_1-1\}\times\{0,\ldots,m_2-1\})^{\mathbb{N}^*}$ that are invariant under the action of the semigroup of multiplicative integers. These sets are defined following Kenyon, Peres and Solomyak and using a fixed integer $q \geq 2$. We compute the Hausdorff and Minkowski dimensions of the projection of these sets onto an affine grid of the unit square. The proof of our Hausdorff dimension formula proceeds via a variational principle over some class of Borel probability measures on the studied sets. This extends well-known results on self-affine Sierpiński carpets. However, the combinatoric arguments we use in our proofs are more elaborate than in the self-similar case and involve a new parameter, namely $j = \left\lfloor \log_q \left(\frac{\log(m_1)}{\log(m_2)}\right)\right\rfloor$. We then generalize our results to the same subsets defined in dimension $d \geq 2$. There, the situation is even more delicate and our formulas involve a collection of $2d-3$ parameters.

Key words : Hausdorff dimension, Minkowski dimension, symbolic dynamics, self-affine carpets, self-affine sponges.

For the reader's convenience we summarize a list of commonly used symbols below :

$\mathcal{A}_i$	Alphabet $\{0, \ldots, m_i - 1\}$
Σ_{m_1,m_2}	Symbolic space $(\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)^{\mathbb{N}^*}$
q	Integer ≥ 2
Ω	Closed subset of Σ_{m_1,m_2}
X_Ω	Closed subset of Σ_{m_1,m_2} invariant under the action of multiplicative integers
σ	Standard shift map on Σ_{m_1,m_2}
γ	$\gamma := \frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}$
$(x,y)\|_{J_i}$	$(x,y)\|_{J_i} := ((x_{q^\ell i}, y_{q^\ell i}))_{\ell=0}^{\infty}$
L	Map $n \in \mathbb{N}^* \mapsto \left\lceil \frac{n}{\gamma} \right\rceil$
μ	Borel probability measure on Ω
$\mathbb{P}_\mu$	Borel probability measure on X_Ω, see Section 3.2.1
π	Projection map of Σ_{m_1,m_2} on the second coordinate
Ω_y	$\Omega_y := \Omega \cap \pi^{-1}(\{y\})$
$[u]$	Generalized cylinder on Σ_{m_1,m_2}, see Section 3.2.1
$\mathrm{Pref}_{p,\ell}(\Omega)$	$(p \times \ell)$-sized prefixes of Ω, see Section 3.2.1
α_k^1	$\alpha_k^1 := \{\Omega \cap [u] : u \in \mathrm{Pref}_{0,k}(\Omega)\}$
α_k^2	$\alpha_k^2 := \{\Omega \cap [u] : u \in \mathrm{Pref}_{k,0}(\Omega)\}$
$H_{m_2}^\mu$	μ-entropy of a finite partition with the base-m_2 logarithm
j	The unique non-negative integer such that $q^j \leq \gamma^{-1} < q^{j+1}$
Ω_u	For $u = (x_1, y_1) \cdots (x_k, y_k) y_{k+1} \cdots y_{k+j} \in \mathrm{Pref}_{k,j}(\Omega)$, Ω_u is the follower set of $(x_1, y_1) \cdots (x_k, y_k)$ in Ω with $y_{k+1}, \ldots, y_{k+j}$ being fixed
μ_u	The normalized measure induced by μ on Ω_u
$\dim_e(\nu)$	Entropy dimension of the measure ν
$\Gamma_j(\Omega)$	j^{th} tree of prefixes of Ω, see Section 3.2.3
$\Gamma_{u,j}(\Omega)$	Tree of followers of u in $\Gamma_j(\Omega)$, see Section 3.2.3
$t = t(u)$	The unique vector defined on the set of vertices of $\Gamma_{u,j}(\Omega)$ satisfying equation (3.3)
$t_\varnothing$	See Section 3.2.3

3.1 Introduction

Let $m_1 \geq m_2 \geq 2$ and $q \geq 2$ be integers. Let Ω be a closed subset of

$$\Sigma_{m_1,m_2} = (\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)^{\mathbb{N}^*},$$

where $\mathcal{A}_1 = \{0, \ldots, m_1 - 1\}$ and $\mathcal{A}_2 = \{0, \ldots, m_2 - 1\}$. We can associate to Ω a closed subset of the torus $\mathbb{T}^2$ by considering $\psi(\Omega)$, where ψ is the coding map defined as

$$\psi : (x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma_{m_1,m_2} \longmapsto \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{m_1^k}, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y_k}{m_2^k} \right) \in \mathbb{T}^2.$$

Let σ be the standard shift map on Σ_{m_1,m_2} and π be the projection on the second coordinate. Closed subsets of Σ_{m_1,m_2} that are σ-invariant are sent through ψ to closed subsets of $\mathbb{T}^2$ that are invariant under the diagonal endomorphism of $\mathbb{T}^2$;

$$(x, y) \in \mathbb{T}^2 \longmapsto (m_1 x, m_2 x).$$

Classical examples of such subsets are Sierpiński carpets. Given

$$\emptyset \neq A \subset \{0, \ldots, m_1 - 1\} \times \{0, \ldots, m_2 - 1\},$$

consider

$$\Omega = \{(x, y) = (x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma_{m_1,m_2} : \forall k \geq 1,\ (x_k, y_k) \in A\}.$$

Then $\psi(\Omega)$ is a Sierpiński carpet. In this case, $\psi(\Omega)$ is the attractor of the iterated function system made of the contractions $f_{(i,j)} : (x, y) \in \mathbb{T}^2 \mapsto \left(\frac{x+i}{m_1}, \frac{y+j}{m_2}\right)$ with $(i, j) \in A$. When $m_1 = m_2 = m$, we obtain a self-similar fractal and it is well-known that

$$\dim_H(\psi(\Omega)) = \dim_M(\psi(\Omega)) = \frac{\log(\#A)}{\log(m)},$$

where $\dim_H$ and $\dim_M$ stand for the Hausdorff and Minkowski (also called box-counting) dimensions respectively. See for example Chapter 2 of [16]. More generally, as proved in [21], if Ω is a closed shift-invariant subset of $\Sigma_{m,m}$ then we have

$$\dim_H(\psi(\Omega)) = \dim_M(\psi(\Omega)) = \frac{h\left(\sigma|_\Omega\right)}{\log(m)},$$

where h stands for the topological entropy. McMullen [33] and Bedford [9] independently computed the Hausdorff and Minkowski dimensions of general Sierpiński carpets when $m_1 > m_2$, which we will assume from now on. Furthermore, the Hausdorff and Minkowski dimensions of Sierpiński sponges - defined as the generalization of Sierpiński carpets in all dimensions - were later computed in [28].

Let

$$\gamma = \frac{\log(m_2)}{\log(m_1)}$$

and

$$L : n \in \mathbb{N}^* \longmapsto \left\lceil \frac{n}{\gamma} \right\rceil.$$

We will need the following metric on Σ_{m_1,m_2} : for (x,y) and (u,v) in Σ_{m_1,m_2} let

$$\begin{aligned} &d((x_k,y_k)_{k=1}^{\infty},(u_k,v_k)_{k=1}^{\infty}) \\ &= \max\left(m_1^{-\min\{k\geq 0:(x_{k+1},y_{k+1})\neq(u_{k+1},v_{k+1})\}},\ m_1^{-\gamma\min\{k\geq 0:y_{k+1}\neq v_{k+1}\}}\right). \end{aligned}$$

This metric allows us to consider "quasi-squares" as defined by McMullen when computing the dimensions of Sierpiński carpets. It is easy to see that for $(x,y)\in\Sigma_{m_1,m_2}$ the balls centered at (x,y) are

$$B_n(x,y) = B_{m_1^{-n}}(x,y) = \{(u,v)\in\Sigma_{m_1,m_2} : u_k = x_k\ \forall 1\leq k\leq n \text{ and } v_k = y_k\ \forall 1\leq k\leq L(n)\}.$$

Using this metric on Σ_{m_1,m_2} the Hausdorff and Minkowski dimensions of Ω are then equal to those of $\psi(\Omega)$. Thus from now on we will only work on the symbolic space. In this paper, our goal is to compute the Hausdorff and Minkowski dimensions of more general carpets that are not shift invariant. More precisely, given an arbitrary closed subset Ω of Σ_{m_1,m_2} we consider

$$X_\Omega = \{(x_k,y_k)_{k=1}^{\infty}\in\Sigma_{m_1,m_2} : (x_{iq^\ell},y_{iq^\ell})_{\ell=0}^{\infty}\in\Omega \text{ for all } i,\ q\nmid i\}.$$

Such sets were studied in [29], where the authors restricted their work to the one dimensional case : they computed the Hausdorff and Minkowski dimensions of sets defined by

$$\left\{(x_k)_{k=1}^{\infty}\in\{0,\dots,m-1\}^{\mathbb{N}^*} : (x_{iq^\ell})_{\ell=0}^{\infty}\in\Omega \text{ for all } i,\ q\nmid i\right\},$$

where Ω is an arbitrary closed subset of $\{0,\dots,m-1\}^{\mathbb{N}^*}$. It is easily seen that this case covers the situation where $m_1 = m_2$ in our setting. Their interest in these sets was prompted by the computation of the Minkowski dimension of the "multiplicative golden mean shift"

$$\left\{x = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x_k}{2^k} : x_k\in\{0,1\} \text{ and } x_k x_{2k} = 0 \text{ for all } k\geq 1\right\}$$

done in [18]. We aim to give formulas for $\dim_H(X_\Omega)$ and $\dim_M(X_\Omega)$ in the two-dimensional case, and then in all dimensions. Note that if Ω is shift-invariant, then X_Ω is invariant under the action of any integer $r\in\mathbb{N}^*$

$$(x_k,y_k)_{k=1}^{\infty}\longmapsto(x_{rk},y_{rk})_{k=1}^{\infty}.$$

For example, as in the case of dimension one we can consider subshifts of finite type on

Σ_{m_1,m_2}. To do so, let $D = \{(0,0),(0,1),\ldots,(0,m_2-1),(1,0),(1,1),\ldots,(1,m_2-1),\ldots,(m_1-1,0),(m_1-1,1),\ldots,(m_1-1,m_2-1)\}$ and let A be an m_1m_2 - sized square matrix indexed by $D \times D$ with entries in $\{0,1\}$. Then define

$$\Sigma_A = \{(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma_{m_1,m_2} : A((x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})) = 1,\ k \geq 1\},$$

and

$$X_A = X_{\Sigma_A} = \{(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma_{m_1,m_2} : A((x_k,y_k),(x_{qk},y_{qk})) = 1,\ k \geq 1\}.$$

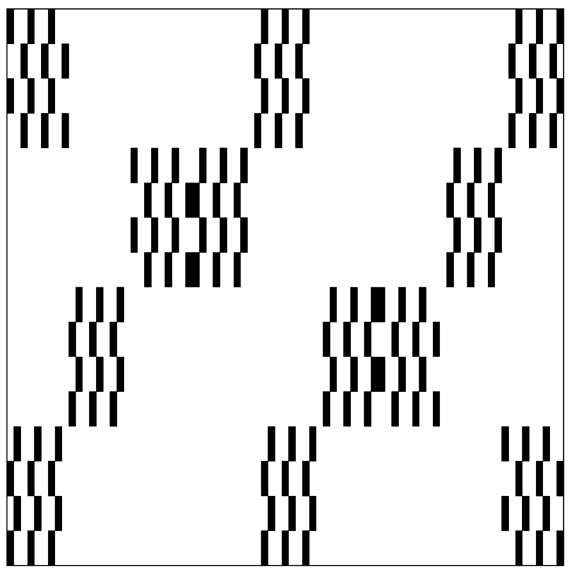

Figure 3.1: Approximation of order 4 of the set X_A for $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $q = 2$ and A a circulant matrix whose first row is $(1,0,0,1,0,0)$.

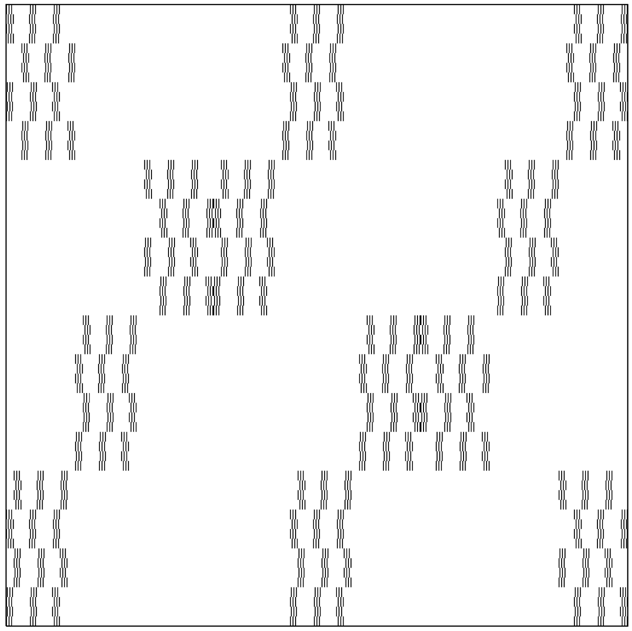

Figure 3.2: Approximation of order 6 of the set X_A for $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $q = 2$ and A a circulant matrix whose first row is $(1, 0, 0, 1, 0, 0)$.

Note that further generalizations of the sets considered in [29] were studied in [36], in the one-dimensional case as well.

The paper is organized as follows. In Section 3.2, we focus on the two-dimensional situation. We first introduce in Subsection 3.2.1 a particular class of measures on X_Ω. We show that these measures are exact dimensional and we compute their Hausdorff dimensions. This class of measures is the same as that considered in [29], but in our case the parameter $j = \left\lfloor \log_q \left(\frac{\log(m_1)}{\log(m_2)} \right) \right\rfloor$ comes into play when studying their local dimension. Indeed, this parameter plays a crucial role in the definition of generalized cylinders whose masses are used to study the mass of balls under the metric d. In Subsection 3.2.2, out of curiosity, we study under which condition the Ledrappier–Young formula (where the entropies of invariant measures are replaced by their entropy dimensions) can hold for these measures, which are not shift-invariant in general.

In Subsections 3.2.3, 3.2.4 and 3.2.5, we compute the Hausdorff and Minkowski dimensions of X_Ω, using a variational principle over the class of measures we studied earlier. We show that there exists a unique Borel probability measure which allows us to bound $\dim_H(X_\Omega)$ both from below and from above.

Then, in Section 3.3, we extend our results to the general multidimensional case. The combinatorics involved there become significantly more complex, as the study of the local dimension of the measures of interest invokes some generalized cylinders which depend in a subtle way on a collection of $2d-3$ parameters.

3.2 The two-dimensional case

3.2.1 The measures $\mathbb{P}_\mu$ and their dimensions

Throughout the paper we will use the notation $[\![m,n]\!] = \{m,\dots,n\}$ if $m \leq n$ are integers.

To compute $\dim_H(X_\Omega)$, we will use the classical strategy of stating a variational principle over a certain class of Borel probability measures $\mathbb{P}_\mu$ on X_Ω defined below, i.e we will show that

$$\dim_H(X_\Omega) = \max_{\mathbb{P}_\mu} \dim(\mathbb{P}_\mu).$$

To do so, we will use the following classical facts (for a proof, see [16, Proposition 2.3]) :

Theorem 3.2.1. *Let μ be a finite Borel measure on Σ_{m_1,m_2} and let $A \subset \Sigma_{m_1,m_2}$ such that $\mu(A) > 0$.*

- *If* $\liminf_{n\to\infty} -\frac{\log_{m_1}(\mu(B_n(x)))}{n} \geq D$ *for μ-almost all x, then* $\underline{\dim}_H(\mu) \geq D$.
- *If* $\liminf_{n\to\infty} -\frac{\log_{m_1}(\mu(B_n(x)))}{n} \leq D$ *for μ-almost all x, then* $\overline{\dim}_H(\mu) \leq D$.
- *If* $\liminf_{n\to\infty} -\frac{\log_{m_1}(\mu(B_n(x)))}{n} \leq D$ *for all $x \in A$, then* $\dim_H(A) \leq D$.

For $p, \ell \in \mathbb{N}$ and $u \in (\{0,\dots,m_1-1\} \times \{0,\dots,m_2-1\})^p \times \{0,\dots,m_2-1\}^\ell$, define the generalized cylinder

$$[u] = \{(x,y) \in \Sigma_{m_1,m_2} : ((x,y)|_p, \pi(\sigma^p((x,y))|_\ell)) = u\},$$

where $(x,y)|_p = (x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)$ and $\pi((x,y)|_p) = y|_p$, and set

$$\mathrm{Pref}_{p,\ell}(\Omega) = \{u \in (\{0,\dots,m_1-1\} \times \{0,\dots,m_2-1\})^p \times \{0,\dots,m_2-1\}^\ell : \Omega \cap [u] \neq \varnothing\}.$$

For $(x,y) \in \Sigma_{m_1,m_2}$, $n \geq 1$ and i an integer such that $q \nmid i$, we define

$$(x,y)|_{J_i^n} = (x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^r i},y_{q^r i})$$

if $q^r i \le n < q^{r+1} i$. Let μ be a Borel probability measure on Ω. Following [29] we define $\mathbb{P}_\mu$ on the semi-algebra of cylinder sets of Σ_{m_1,m_2} by

$$\mathbb{P}_\mu([(x,y)|_n]) = \prod_{\substack{i\le n\\ q\nmid i}} \mu\left(\left[(x,y)|_{J_i^n}\right]\right).$$

This is a well defined pre-measure. Indeed it is easy to see that $\mathbb{P}_\mu([(k,l)]) = \mu([(k,l)])$ for $(k,l) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$, and for $n+1 = q^r i$ with $q \nmid i$,

$$\frac{\mathbb{P}_\mu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)(x_{n+1},y_{n+1})])}{\mathbb{P}_\mu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)])} = \frac{\mu([(x_i,y_1)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^r i},y_{q^r i})])}{\mu\left(\left[(x_i,y_1)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^{r-1}i},y_{q^{r-1}i})\right]\right)},$$

whence

$$\mathbb{P}_\mu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)]) = \sum_{(i,j)\in\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2} \mathbb{P}_\mu([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)(i,j)]).$$

Denote also by $\mathbb{P}_\mu$ the extension of $\mathbb{P}_\mu$ to a Borel probability measure on $(\Sigma_{m_1,m_2}, \mathcal{B}(\Sigma_{m_1,m_2}))$. By construction, $\mathbb{P}_\mu$ is supported on X_Ω, since Ω is a closed subset of Σ_{m_1,m_2} and hence

$$\Omega = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{u\in \mathrm{Pref}_{k,0}(\Omega)} [u].$$

Let us now introduce some more notations. For all $k \ge 1$ we consider the finite partitions of Ω defined by

$$\alpha_k^1 = \{\Omega \cap [u] : u \in \mathrm{Pref}_{0,k}(\Omega)\}$$

and

$$\alpha_k^2 = \{\Omega \cap [u] : u \in \mathrm{Pref}_{k,0}(\Omega)\}.$$

For a Borel probability measure μ on Ω and a finite measurable partition $\mathcal{P}$ on Ω, denote by $H^\mu_{m_2}(\mathcal{P})$ the μ-entropy of the partition, with the base-m_2 logarithm :

$$H^\mu_{m_2}(\mathcal{P}) = -\sum_{C\in\mathcal{P}} \mu(C)\log_{m_2}\mu(C).$$

Let j be the unique non-negative integer such that

$$q^j \le \frac{1}{\gamma} = \frac{\log(m_1)}{\log(m_2)} < q^{j+1}.$$

Note that for all $n \geq 1$ large enough we have

$$q^j n \leq L(n) < q^{j+1} n.$$

Theorem 3.2.2. *Let μ be a Borel probability measure on Ω. Then $\mathbb{P}_\mu$ is exact dimensional and we have*

$$\dim(\mathbb{P}_\mu) = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} + (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p)}{q^{p+1}} \\ + (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)}{q^p}.$$

Proof. Our method is inspired by the calculation of $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ in [29]. The strategy of the proof is the same, nevertheless the computations will be more involved, due to the fact that the $\mathbb{P}_\mu$-mass of a ball for the metric d is a product of μ-masses of generalized cylinders rather than standard ones as in [29].

Let $\ell \geq j+1$. We will first show that for $\mathbb{P}_\mu$-almost all $(x, y) \in X_\Omega$ we have

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{n} \geq (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} \\ + (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p)}{q^{p+1}} \\ + (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)}{q^p},$$

and

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{n} \leq (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} \\ + (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p)}{q^{p+1}} \\ + (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)}{q^k} \\ + \frac{(\ell+1)\log_{m_2}(m_1 m_2)}{q^\ell}.$$

Letting $\ell \to \infty$ will yield the desired equality (cf. Theorem 3.2.1). To check these, we can restrict ourselves to $n = q^\ell r$, $r \in \mathbb{N}$. Indeed if $q^\ell r \le n < q^\ell(r+1)$ then

$$\frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{n} \ge \frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_{q^\ell r}(x,y)))}{q^\ell(r+1)} \ge \frac{r}{r+1}\frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_{q^\ell r}(x,y)))}{q^\ell r},$$

which gives

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{n} = \liminf_{r\to\infty} \frac{-\log_{m_1}(\mathbb{P}_\mu(B_{q^\ell r}(x,y)))}{q^\ell r}.$$

The lim sup is dealt with similarly.

As proved in [29] we have

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-\log_{m_1}\left(\mathbb{P}_\mu\left([(x,y)|_n]\right)\right)}{n} = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_1}(\alpha_p^2)}{q^{p+1}} \text{ for } \mathbb{P}_\mu - \text{almost all } (x,y) \in X_\Omega.$$

Note that

$$\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)) = \sum_{x'_{n+1},\ldots,x'_{L(n)}} \mathbb{P}_\mu\left(\left[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)(x'_{n+1},y_{n+1})\cdots(x'_{L(n)},y_{L(n)})\right]\right),$$

the sum being taken over all $x'_{n+1},\ldots,x'_{L(n)}$ such that

$$\left[(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)(x'_{n+1},y_{n+1})\cdots(x'_{L(n)},y_{L(n)})\right] \cap X_\Omega \neq \emptyset.$$

Let

$$i \in \left]\frac{L(n)}{q^\ell}, L(n)\right] = \bigsqcup_{p=1}^{\ell} \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]$$

such that $q \nmid i$. Note that if $i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]$ then the word $(x,y)|_{J_i^{L(n)}}$ is of length p. Recall that j is defined by $q^j \le \frac{1}{\gamma} < q^{j+1}$. Suppose $j \ge 1$. If $1 \le p \le j$ then $\frac{L(n)}{q^p} \ge n$, so

$$\left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \subset]n, L(n)].$$

If $j+1 \le p \le \ell$ and ℓ is large enough, then $\frac{n}{q^{p-j-1}} \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]$, thus we can partition

$$\left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] = \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right] \bigsqcup \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right].$$

In the case where $i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]$ we have

$$q^{p-j-2}i \leq n < q^{p-j-1}i \leq q^{p-1}i \leq L(n) < q^p i,$$

and if $i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right]$ then

$$q^{p-j-1}i \leq n < q^{p-j}i \leq q^{p-1}i \leq L(n) < q^p i.$$

If $j = 0$ then

$$i \in \left]\frac{n}{q^{p-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \Longrightarrow q^{p-2}i \leq n < q^{p-1}i \leq L(n) < q^p i$$

$$i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-1}}\right] \Longrightarrow q^{p-1}i \leq n \leq L(n) < q^p i.$$

Thus for any j we have

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)) = &\Bigg[\prod_{p=1}^{j} \prod_{\substack{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \\ q \nmid i}} \mu\left(\left[y_i \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right)\Bigg] \\
&\cdot \Bigg[\prod_{p=j+1}^{\ell} \Bigg(\prod_{\substack{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \\ q \nmid i}} \mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-2}i}, y_{q^{p-j-2}i}) y_{q^{p-j-1}i} \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right)\Bigg) \\
&\cdot \Bigg(\prod_{\substack{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right] \\ q \nmid i}} \mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-1}i}, y_{q^{p-j-1}i}) y_{q^{p-j}i} \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right)\Bigg)\Bigg] \cdot D_n(x,y),
\end{aligned}$$

with $D_n(x,y)$ being the product of the remaining quotients (words beginning with (x_i, y_i) with $i \leq \frac{L(n)}{q^\ell}$). Here we used the notion of generalized cylinders we defined earlier :

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left[y_i \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right) = \sum_{x'_i, \ldots, x'_{q^{p-1}i}} \mu\left(\left[(x'_i, y_i) \cdots (x'_{q^{p-1}i}, y_{q^{p-1}i})\right]\right), \\
&\mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-2}i}, y_{q^{p-j-2}i}) y_{q^{p-j-1}i} \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right) \\
&= \sum_{x'_{q^{p-j-1}i}, \ldots, x'_{q^{p-1}i}} \mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-2}i}, y_{q^{p-j-2}i})(x'_{q^{p-j-1}i}, y_{q^{p-j-1}i}) \cdots (x'_{q^{p-1}i}, y_{q^{p-1}i})\right]\right), \\
&\mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-1}i}, y_{q^{p-j-1}i}) y_{q^{p-j}i} \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right) \\
&= \sum_{x'_{q^{p-j}i}, \ldots, x'_{q^{p-1}i}} \mu\left(\left[(x_i, y_i) \cdots (x_{q^{p-j-1}i}, y_{q^{p-j-1}i})(x'_{q^{p-j}i}, y_{q^{p-j}i}) \cdots (x'_{q^{p-1}i}, y_{q^{p-1}i})\right]\right),
\end{aligned}$$

the sums being taken over the cylinders that intersect Ω. If $(u_n), (v_n) \in (\mathbb{R}^*)^{\mathbb{N}^*}$, we say that

$u_n \sim v_n$ if $\frac{u_n}{v_n} \to 1$ as $n \to \infty$. Here we have

$$\begin{aligned}
\#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} &\sim \frac{(q-1)^2 n}{\gamma q^{p+1}}, \\
\#\left\{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} &\sim \frac{n(q-1)(1-q^j\gamma)}{\gamma q^p}, \\
\#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right] : q \nmid i\right\} &\sim \frac{n(q-1)(q^{j+1}\gamma-1)}{\gamma q^{p+1}}.
\end{aligned}$$

Note that for $i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]$, $q \nmid i$ the random variables

$$Y_{i,n,p} : (x,y) \in X_\Omega \longmapsto -\log_{m_1}\left(\mu\left(\left[(x_i,y_i)\cdots(x_{q^{p-j-2}i}, y_{q^{p-j-2}i})y_{q^{p-j-1}i}\cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right)\right)$$

are i.i.d and uniformly bounded, with expectation being $H^\mu_{m_1}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)$. Fixing $j+1 \le p \le l$ and letting $n = q^\ell r, r \to \infty$, we can use Lemma A.1.7 to get that for $\mathbb{P}_\mu$-almost all $(x,y) \in X_\Omega$

$$\frac{\gamma q^p}{n(q-1)(1-q^j\gamma)} \sum_{\substack{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \\ q \nmid i}} Y_{i,n,p}(x,y) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} H^\mu_{m_1}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p).$$

Thus

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{(q-1)(1-q^j\gamma)}{\gamma q^p} \sum_{\substack{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \\ q \nmid i}} \frac{\gamma q^p Y_{i,n,p}(x,y)}{n(q-1)(1-q^j\gamma)} \\
&\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)}{q^p}.
\end{aligned}$$

Similarly if we define

$$Z_{i,n,p} : (x,y) \longmapsto -\log_{m_1}\left(\mu\left(\left[y_i \cdots y_{q^{p-1}i}\right]\right)\right),$$

whose expectation is $H^\mu_{m_1}(\alpha^1_p)$, for $\mathbb{P}_\mu$-almost all $(x,y) \in X_\Omega$ we have

$$\frac{\gamma q^{p+1}}{n(q-1)^2} \sum_{\substack{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] \\ q \nmid i}} Z_{i,n,p}(x,y) \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} H^\mu_{m_1}(\alpha^1_p),$$

hence

$$\sum_{p=1}^{j}\frac{(q-1)^2}{\gamma q^{p+1}}\sum_{\substack{i\in\left]\frac{L(n)}{q^p},\frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]\\ q\nmid i}}\frac{\gamma q^{p+1}Z_{i,n,p}(x,y)}{n(q-1)^2}\underset{r\to\infty}{\longrightarrow}(q-1)^2\sum_{p=1}^{j}\frac{H^{\mu}_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}}.$$

The third term is treated in similar manner. We have thus proved the first inequality. Now it remains to prove the second inequality using $D_n(x,y)$. It is easily seen that there exists $C\geq 0$ such that for all $b>a>0$

$$\left|\#\{i\in\mathbb{N}\cap]a,b]:q\nmid i\}-\frac{q-1}{q}(b-a)\right|\leq C.$$

Thus the number of letters in $\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2$ appearing in the words of the developed $D_n(x,y)$ is

$$\begin{aligned}
d_n &:= L(n)-\sum_{p=1}^{\ell}\#\left\{i\in\mathbb{N}\cap\left]\frac{L(n)}{q^p},\frac{L(n)}{q^{p-1}}\right]:q\nmid i\right\}p\\
&\leq L(n)-\sum_{p=1}^{\ell}\frac{(q-1)^2L(n)p}{q^{p+1}}+\frac{\ell(\ell+1)}{2}C\\
&=\frac{L(n)}{q^\ell}\left[(\ell+1)-\frac{\ell}{q}\right]+\frac{\ell(\ell+1)}{2}C\\
&\leq\frac{(\ell+1)L(n)}{q^\ell}+\frac{\ell(\ell+1)}{2}C.
\end{aligned}\tag{3.1}$$

On the other hand

$$d_n\geq L(n)-\sum_{p=1}^{\ell}\frac{(q-1)^2L(n)p}{q^{p+1}}-\frac{\ell(\ell+1)}{2}C\geq r\left[(\ell+1)-\frac{\ell}{q}\right]-\frac{\ell(\ell+1)}{2}C,$$

so $\sum_{r=1}^{\infty}2^{-d_{q^\ell r}}<+\infty$. Define

$$S_n=\{(x,y)\in X_\Omega:D_n(x,y)\leq(2m_1m_2)^{-d_n}\}.$$

Clearly $\mathbb{P}_\mu(S_n)\leq 2^{-d_n}$, so $\mathbb{P}_\mu\left(\bigcap_{N\geq1}\bigcup_{r=N}^{\infty}S_{q^\ell r}\right)=0$, using Borel-Cantelli lemma. Hence for $\mathbb{P}_\mu$-almost all $(x,y)\in X_\Omega$ there exists $N(x,y)$ such that $(x,y)\notin S_n$ for all $n=q^\ell r\geq N(x,y)$. For such (x,y) and $n\geq N(x,y)$, using (3.1), we have

$$\begin{aligned}
\frac{-\log_{m_1}(D_n(x,y))}{n}&\leq\frac{d_n\log_{m_1}(2m_1m_2)}{n}\\
&\leq\frac{(\ell+1)L(n)\log_{m_1}(2m_1m_2)}{nq^\ell}+\frac{\ell(\ell+1)\log_{m_1}(2m_1m_2)}{2n}.
\end{aligned}$$

So

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{-\log_{m_1}(D_{q^\ell r}(x,y))}{q^\ell r} \leq \frac{(\ell+1)\log_{m_2}(2m_1m_2)}{q^\ell}.$$

Finally for such (x,y) we get the second desired inequality.

□

3.2.2 Study of the validity of the Ledrappier-Young formula

Here we will discuss the validity of the Ledrappier-Young formula in our context. Recall that for a shift-invariant ergodic measure μ on Σ_{m_1,m_2}, the Ledrappier-Young formula is (see [28, Lemma 3.1] for a proof)

$$\dim(\mu) = \frac{1}{\log(m_1)} h_\mu(\sigma) + \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right) h_{\pi_*\mu}(\tilde{\sigma}),$$

where $\tilde{\sigma}$ is the standard shift map on Σ_{m_2}, π is the projection on the second coordinate and $h_\mu(\sigma)$ is the entropy of μ with respect to σ. This rewrites as

$$\dim(\mu) = \frac{1}{\log(m_1)} \dim_e(\mu) + \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right) \dim_e(\pi_*\mu), \tag{3.2}$$

where for any Borel probability measure ν on Σ_{m_1,m_2}, $\dim_e(\nu)$ denotes, whenever it exists, its entropy dimension defined by

$$\dim_e(\nu) = \lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \sum_{u\in(\mathcal{A}_1\times\mathcal{A}_2)^n} \nu([u]) \log\left(\nu\left([u]\right)\right),$$

and where $\dim_e(\pi_*\nu)$ is defined similarly. We will show that this fails to hold for $\mathbb{P}_\mu$ in general. This is expected since $\mathbb{P}_\mu$ is not shift-invariant in general. However, we will give a sufficient condition on μ for $\mathbb{P}_\mu$ to satisfy (3.2).

Let $(\nu^y)_{y\in\pi(\Sigma_{m_1,m_2})}$ be the $\pi_*\nu$-almost everywhere uniquely determined disintegration of the Borel probability measure ν on Σ_{m_1,m_2} with respect to π. Each ν^y is a Borel probability measure on Σ_{m_1,m_2} supported on $\pi^{-1}(\{y\})$, which can be computed using the formula

$$\nu^y([x|_n]\times\{y\}) = \lim_{p\to\infty} \frac{\nu\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)y_{n+1}\cdots y_p]\right)}{\pi_*\nu\left([y_1\cdots y_p]\right)} \text{ for } \pi_*\nu\text{-almost all } y\in\pi(\Sigma_{m_1,m_2}).$$

For some basics on the notion of disintegrated measure we advise [35] to the reader.

Theorem 3.2.3. *Let μ be a Borel probability measure on Ω. Then $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$ is exact dimen-*

sional. Moreover $\mathbb{P}_\mu^y$ is exact dimensional for $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$-almost all $y \in \pi(X_\Omega)$, and we have

$$\operatorname*{essinf}_{y\sim\pi_*(\mathbb{P}_\mu)} \dim_e(\mathbb{P}_\mu^y) = \operatorname*{esssup}_{y\sim\pi_*(\mathbb{P}_\mu)} \dim_e(\mathbb{P}_\mu^y).$$

Finally

$$\dim_e(\pi_*(\mathbb{P}_\mu)) + \operatorname*{essinf}_{y\sim\pi_*(\mathbb{P}_\mu)} \dim_e(\mathbb{P}_\mu^y) \leq \dim_e(\mathbb{P}_\mu),$$

with equality if and only if for all $p \geq 1$, for all $I \in \alpha_p^2$, the map $y \in \pi(I) \mapsto \mu^y(I)$ is $\pi_*\mu$-almost surely constant.

Proof. First note that for $(x, y) \in \Sigma_{m_1,m_2}$

$$\pi_*(\mathbb{P}_\mu)([y_1 \cdots y_n]) = \sum_{x_1,\dots,x_n} \prod_{\substack{i\leq n\\ q\nmid i}} \mu\left(\left[(x,y)|_{J_i^n}\right]\right) = \prod_{\substack{i\leq n\\ q\nmid i}} \sum_{x_i,\dots,x_{q^r i}} \mu\left(\left[(x,y)|_{J_i^n}\right]\right) = \mathbb{P}_{\pi_*\mu}([y_1 \cdots y_n]).$$

Thus $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$ is a Borel probability measure supported on $\pi(X_\Omega) = X_{\pi(\Omega)}$, which is equal to $\mathbb{P}_{\pi_*\mu}$. Thus, using the one-dimensional case studied in [29] we easily get that $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$ is exact dimensional with

$$\dim_e(\pi_*(\mathbb{P}_\mu)) = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{H^\mu(\alpha_p^1)}{q^{p+1}}.$$

Now we study $\mathbb{P}_\mu^y$. First observe that for i such that $q \nmid i$, the map

$$\phi_i : y \in \pi(X_\Omega) \longmapsto y|_{J_i} = (y_{q^\ell i})_{\ell=0}^\infty \in \pi(\Omega)$$

is measure-preserving, i.e. $(\phi_i)_*(\mathbb{P}_{\pi_*\mu}) = \pi_*\mu$. Let $p \geq n \geq 1$. For $(x, y) \in X_\Omega$ we have

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathbb{P}_\mu\left([(x_1,y_1)\cdots(x_n,y_n)y_{n+1}\cdots y_p]\right)}{\mathbb{P}_{\pi_*\mu}\left([y_1\cdots y_p]\right)} \\
&= \frac{\prod_{\substack{i\leq p\\ q\nmid i}} \sum_{x'_{q^k i},\dots,x'_{q^\ell i}} \mu\left(\left[(x_i,y_i)\cdots\left(x_{q^{k-1}i},y_{q^{k-1}i}\right)\left(x'_{q^k i},y_{q^k i}\right)\cdots\left(x'_{q^\ell i},y_{q^\ell i}\right)\right]\right)}{\prod_{\substack{i\leq p\\ q\nmid i}} \sum_{x'_i,\dots,x'_{q^\ell i}} \mu\left(\left[(x'_i,y_i)\cdots\left(x'_{q^\ell i},y_{q^\ell i}\right)\right]\right)} \\
&= \prod_{\substack{i\leq n\\ q\nmid i}} \frac{\mu\left(\left[(x_i,y_i)\cdots\left(x_{q^{k-1}i},y_{q^{k-1}i}\right)y_{q^k i}\cdots y_{q^\ell i}\right]\right)}{\pi_*\mu\left(\left[y_i\cdots y_{q^\ell i}\right]\right)},
\end{aligned}$$

where $q^{k-1}i \leq n < q^k i \leq q^\ell i \leq p < q^{\ell+1} i$. Using the remark above and letting $p \to \infty$ we deduce that for $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$-almost all y

$$(\mathbb{P}_\mu)^y\left([x|_n]\times\{y\}\right)=\prod_{\substack{i\leq n\\ q\nmid i}}\mu^{y|_{J_i}}\left(\left[x|_{J_i^n}\right]\times\{y|_{J_i}\}\right).$$

We will use the $\mathbb{P}_\mu$-almost everywhere defined i.i.d. random variables

$$X_{i,n}:(x,y)\in X_\Omega\longmapsto-\log(\mu^{y|_{J_i}}\left(\left[x|_{J_i^n}\right]\times\{y|_{J_i}\}\right)\text{ for }q\nmid i$$

whose expectation is

$$\begin{aligned}
&-\int_{\pi(X_\Omega)}\left(\int_{\pi^{-1}(\tilde{y})}\log\left(\mu^{\tilde{y}|_{J_i}}\left(\left[x|_{J_i^n}\right]\times\{\tilde{y}|_{J_i}\}\right)\right)d(\mathbb{P}_\mu^{\tilde{y}})(x,y)\right)d(\pi_*(\mathbb{P}_\mu))(\tilde{y})\\
&=\int_{\pi(X_\Omega)}H^{\mu^{\tilde{y}|_{J_i}}}\left(\Delta_p\left(\Omega_{\tilde{y}|_{J_i}}\right)\right)d(\pi_*(\mathbb{P}_\mu))(\tilde{y})\\
&=\int_{\pi(\Omega)}H^{\mu^y}\left(\Delta_p\left(\Omega_y\right)\right)d(\pi_*\mu)(y),
\end{aligned}$$

where $\Omega_y=\pi^{-1}(\{y\})\cap\Omega$ and Δ_p is the partition of Ω_y into cylinders of length p on the first coordinate x, if $x|_{J_i^n}$ is of length p. Using again the same reasoning as in the one dimensional case when computing $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ (see [29]), we get that for $\pi_*(\mathbb{P}_\mu)$-almost all y, $\mathbb{P}_\mu^y$ is exact dimensional and

$$\dim_e(\mathbb{P}_\mu^y)=(q-1)^2\sum_{p=1}^{\infty}\int_{\pi(\Omega)}\frac{H^{\mu^y}\left(\Delta_p\left(\Omega_y\right)\right)}{q^{p+1}}d(\pi_*\mu)(y).$$

Now we have

$$\begin{aligned}
&\int_{\pi(\Omega)}H^{\mu^y}\left(\Delta_p\left(\Omega_y\right)\right)d(\pi_*\mu)(y)\\
&=-\int_{\pi(\Omega)}\sum_{I\in\theta_p(\Omega_y)}\mu^y(I)\log(\mu^y(I))d(\pi_*\mu)(y)\\
&=-\sum_{I\in\alpha_p^2}\int_{\pi(\Omega)}\mu^y(I\cap\pi^{-1}(\{y\}))\log(\mu^y(I\cap\pi^{-1}(\{y\})))d(\pi_*\mu)(y)\\
&=-\sum_{I\in\alpha_p^2}\int_{\pi(I)}\mu^y(I)\log(\mu^y(I))d(\pi_*\mu)(y)\\
&\leq-\sum_{I\in\alpha_p^2}\pi_*\mu(\pi(I))\left(\int_{\pi(I)}\frac{\mu^y(I)}{\pi_*\mu(\pi(I))}d(\pi_*\mu)(y)\right)\log\left(\int_{\pi(I)}\frac{\mu^y(I)}{\pi_*\mu(\pi(I))}d(\pi_*\mu)(y)\right)\\
&=-\sum_{I\in\alpha_p^2}\mu(I)\log\left(\frac{\mu(I)}{\pi_*\mu(\pi(I))}\right)\\
&=H^\mu(\alpha_p^2|\alpha_p^1),
\end{aligned}$$

using Jensen's inequality. The function $x \in [0,1] \mapsto -x\log(x)$ being strictly concave, this is a strict inequality unless for all $p \geq 1$, for all $I \in \alpha_p^2$, the map $y \in \pi(I) \mapsto \mu^y(I)$ is $\pi_*\mu$-almost surely constant. $\square$

Using Lemma A.1.9 we get

Corollary 3.2.4. *If for all $p \geq 1$, for all $I \in \alpha_p^2$, the map $y \in \pi(I) \mapsto \mu^y(I)$ is almost surely constant, then $\mathbb{P}_\mu$ satisfies the Ledrappier-Young formula :*

$$\dim(\mathbb{P}_\mu) = \frac{1}{\log(m_1)}\dim_e(\mathbb{P}_\mu) + \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right)\dim_e\left(\pi_*\left(\mathbb{P}_\mu\right)\right).$$

This sufficient condition is equivalent to saying that for all $p \geq 1$, for all $I = [(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)] \in \alpha_p^2$, for $\pi_*\mu$-almost all $y \in \pi(I)$ we have

$$\mu^y(I) = \frac{\mu(I)}{\pi_*\mu(\pi(I))} = \frac{\mu\left([(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)]\right)}{\mu\left([y_1\cdots y_p]\right)}.$$

For instance, this is clearly satisfied when μ is an inhomogeneous Bernoulli product on Ω. In this case $\mathbb{P}_\mu$ is not shift-invariant in general. However, we can easily build examples where the equality in Corollary 3.2.4 does not hold.

Example 3.2.5. Suppose that $j = 0$. Then there exists Ω and μ a Borel probability measure on Ω such that

$$\dim(\mathbb{P}_\mu) < \frac{1}{\log(m_1)}\dim_e(\mathbb{P}_\mu) + \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right)\dim_e(\pi_*(\mathbb{P}_\mu)).$$

Indeed, using the property $H^\mu(\alpha_{p-1}^2 \vee \alpha_p^1) = H^\mu(\alpha_p^1|\alpha_{p-1}^2) + H^\mu(\alpha_{p-1}^2)$ we have

$$\dim(\mathbb{P}_\mu) = (q-1)^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H_{m_1}^\mu(\alpha_p^2)}{q^{p+1}} + (q-1)(1-\gamma)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H_{m_2}^\mu(\alpha_p^1|\alpha_{p-1}^2)}{q^p}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\log(m_1)}\dim_e(\mathbb{P}_\mu) + \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right)\dim_e(\pi_*(\mathbb{P}_\mu))\\ &= (q-1)^2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H_{m_1}^\mu(\alpha_p^2)}{q^{p+1}} + (q-1)^2\left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right)\sum_{p=1}^{\infty}\frac{H^\mu(\alpha_p^1)}{q^{p+1}},\end{aligned}$$

It is then enough to choose Ω and μ such that

- $H^\mu(\alpha_1^1) = 0$,
- $H^\mu(\alpha_p^1|\alpha_{p-1}^2) = 0$ for all $p \geq 2$,
- $H^\mu(\alpha_p^1) > 0$ for $p \geq 2$.

Such Ω and μ yield the desired example.

3.2.3 Lower bound for $\dim_H(X_\Omega)$

We are now interested in maximizing $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ over all Borel probability measures μ on Ω. We define first the j^{th} tree of prefixes of Ω, which is a directed graph $\Gamma_j(\Omega)$ whose set of vertices is $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathrm{Pref}_{k,j}(\Omega)$, where $\mathrm{Pref}_{0,j}(\Omega) = \{\varnothing\}$. There is a directed edge from a prefix

$$u = (x_1, y_1)\cdots(x_k, y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j}$$

to another one v if

$$v = (x_1, y_1)\cdots(x_k, y_k)(x_{k+1}, y_{k+1})y_{k+2}\cdots y_{k+j}y_{k+j+1}$$

for some $x_{k+1} \in \{0, \ldots, m_1 - 1\}$ and $y_{k+j+1} \in \{0, \ldots, m_2 - 1\}$. Moreover there is an edge from $\varnothing$ to every $u \in \mathrm{Pref}_{1,j}(\Omega)$. $\Gamma_j(\Omega)$ is then a tree with its outdegree being bounded by $m_1 m_2$ (except the first edges from $\varnothing$, which can be more numerous). The following result is an analog of [29, Lemma 2.1].

Lemma 3.2.6. *Let $u \in \mathrm{Pref}_{1,\mathrm{j}}(\Omega)$ and $\Gamma_{u,j}(\Omega)$ be the tree of followers of u in $\Gamma_j(\Omega)$. Let $V_{u,j}(\Omega)$ be its set of vertices. Then there exists a unique vector $t = t(u) \in \left[1, m_2^{\frac{2}{\gamma(q-1)}}\right]^{V_{u,j}(\Omega)}$ such that for all $(x_1, y_1)\cdots(x_k, y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j} \in V_{u,j}(\Omega)$*

$$t_{(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j}}^{q^{j+1}\gamma} = \sum_{y'_{k+j+1}} \left(\sum_{x'_{k+1}} t_{(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)(x'_{k+1},y_{k+1})y_{k+2}\cdots y_{k+j}y'_{k+j+1}} \right)^{q^j\gamma}, \tag{3.3}$$

the sums being taken over the followers of $(x_1, y_1)\cdots(x_k, y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j}$ in $\Gamma_{u,j}(\Omega)$.

Proof. Let $Z = \left[1, m_2^{\frac{2}{\gamma(q-1)}}\right]^{V_{u,j}(\Omega)}$ and $F : Z \to Z$ be given by

$$F(z_{(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j}}) = \left(\sum_{y'_{k+j+1}} \left(\sum_{x'_{k+1}} z_{(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)(x'_{k+1},y_{k+1})y_{k+2}\cdots y_{k+j}y'_{k+j+1}} \right)^{q^j\gamma} \right)^{\frac{1}{q^{j+1}\gamma}}.$$

We can see that F is monotone for the pointwise partial order $\leq$, defined as

$$z \leq z' \Leftrightarrow \forall v \in V_{u,j}(\Omega),\ z_v \leq z'_v$$

for $z, z' \in Z$. Indeed since $q^j\gamma$, $\frac{1}{q^{j+1}\gamma} \geq 0$ we have

$$z \leq z' \Longrightarrow F(z) \leq F(z').$$

Denote by 1 the constant function equal to 1 over Z. Then $1 \leq F(1) \leq F^2(1) \leq \cdots$, so by compactness $(F^n(1))_{n\geq 1}$ has a pointwise limit t, which is a fixed point of F. Let us now verify the uniqueness. Suppose that t and t' are two fixed points of F and that t is not smaller than t' for $\leq$ (without loss of generality). Let

$$\omega = \inf\{\xi > 1,\ t \leq \xi t'\}.$$

Clearly $\omega \leq m_2^{\frac{2}{\gamma(q-1)}}$, and by continuity we have $t \leq \omega t'$, so $\omega > 1$. Now

$$t = F(t) \leq F(\omega t') = \omega^{\frac{1}{q}} F(t') = \omega^{\frac{1}{q}} t',$$

contradicting the definition of ω.

□

Furthermore we define

$$t_\varnothing = \sum_{y_1'}\left(\sum_{y_2'}\left(\cdots\left(\sum_{y_{j+1}'}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1')y_2'\cdots y_{j+1}'}\right)^{q^j\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Theorem 3.2.7. *For $u = (x_1, y_1)\cdots(x_k, y_k)y_{k+1}\cdots y_{k+j} \in \mathrm{Pref}_{k,j}(\Omega)$ define*

$$\begin{aligned}\mu([u]) =& \frac{t_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)^{q^j\gamma-1}}{t_\varnothing}\\ &\cdot\prod_{p=0}^{j-1}\left(\sum_{y_{j+1-p}'}\left(\sum_{y_{j+2-p}'}\left(\cdots\left(\sum_{y_{j+1}'}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2\cdots y_{j-p}y_{j+1-p}'\cdots y_{j+1}'}\right)^{q^j\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1-q}{q}}\\ &\cdot\prod_{p=2}^{k}\frac{t_{(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)y_{p+1}\cdots y_{p+j}}\left(\sum_{x_p'} t_{(x_1,y_1)\cdots(x_p',y_p)y_{p+1}\cdots y_{p+j}}\right)^{q^j\gamma-1}}{t^{q^{j+1}\gamma}_{(x_1,y_1)\cdots(x_{p-1},y_{p-1})y_p\cdots y_{p-1+j}}},\end{aligned}$$

where there are $p+2$ sums and p exponents $\frac{1}{q}$ in each term of the first product. This defines a Borel probability measure on Ω such that $\mathbb{P}_\mu$ is the unique optimal measure, i.e. such that $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ is maximal over all Borel probability measures μ on Ω. Moreover we have $\dim_H(\mathbb{P}_\mu) = \frac{q-1}{q}\log_{m_2}(t_\varnothing)$. Using Theorem 3.2.1 we deduce that

$$\dim_H(X_\Omega) \geq \frac{q-1}{q}\log_{m_2}(t_\varnothing).$$

Proof. Let

$$S(\Omega,\mu) = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} + (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p)}{q^p} + (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p)}{q^{p+1}}.$$

We try to optimize $S(\Omega,\mu)$ over all Borel probability measures μ on Ω. Let $S(\Omega) = \max_\mu S(\Omega,\mu)$. Recall that for some measurable partitions $\mathcal{P}$,$\mathcal{Q}$ of Ω we have

$$H^\mu_{m_2}(\mathcal{P}|\mathcal{Q}) = \sum_{Q\in\mathcal{Q}} \left(-\sum_{P\in\mathcal{P}} \mu(P|Q) \log_{m_2}(\mu(P|Q)) \right) \mu(Q).$$

Let $p \geq j+2$. We have

$$H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p) = H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p | \alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) + H^\mu_{m_2}(\alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1})$$

and

$$H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p) = H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p | \alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) + H^\mu_{m_2}(\alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}).$$

Moreover

$$\begin{aligned} &H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_p | \alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) \\ &= \sum_{x_1,y_1,y_2,\ldots,y_{j+1}} \theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} H^{\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}_{m_2} \left(\alpha^2_{p-j-2} \vee \alpha^1_{p-1} \left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} \right) \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} &H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j} \vee \alpha^1_p | \alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) \\ &= \sum_{x_1,y_1,y_2,\ldots,y_{j+1}} \theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} H^{\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}_{m_2} \left(\alpha^2_{p-j-1} \vee \alpha^1_{p-1} \left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} \right) \right), \end{aligned}$$

where

$$\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} = \mu([(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}]),$$

and $H^{\mu_{(x_1,y_1)y_2,\cdots y_{j+1}}}_{m_2} \left(\alpha^2_{p-j-2} \vee \alpha^1_{p-1} \left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} \right) \right)$ is the entropy of the partition of $\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$, the follower set of (x_1,y_1) in Ω with $y_2\cdots y_{j+1}$ being fixed, with respect to $\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$ which is the normalized measure induced by μ on $\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$. Then

$$\begin{aligned} S(\Omega,\mu) = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} + \frac{(q-1)(1-q^j\gamma)}{q^{j+1}} H^\mu_{m_2}(\alpha^1_{j+1}) + \frac{\gamma(q-1)}{q} H^\mu_{m_2}(\alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) \\ + \frac{1}{q} \sum_{x_1,y_1,y_2,\ldots,y_{j+1}} \theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}, \mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} \right). \end{aligned}$$

Observe that the measure is completely determined by the knowledge of $\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$ and $\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$ for all $(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}$. The optimization problems on $\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$ being independent we get

$$\begin{aligned} S(\Omega) = \max_{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}} (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{H^{\mu}_{m_2}(\alpha^1_p)}{q^{p+1}} &+ \frac{(q-1)(1-q^j\gamma)}{q^{j+1}} H^{\mu}_{m_2}(\alpha^1_{j+1}) \\ &+ \frac{\gamma(q-1)}{q} H^{\mu}_{m_2}(\alpha^2_1 \vee \alpha^1_{j+1}) \\ &+ \frac{1}{q} \sum_{x_1,y_1,y_2,\ldots,y_{j+1}} \theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right). \end{aligned}$$

After factorizing, we have

$$\begin{aligned} S(\Omega) = \max \frac{q-1}{q} \Bigg(& H^{\mu}_{m_2}(\beta_1) + \frac{1}{q} \sum_{y_1} \theta_{y_1} \Bigg(- \sum_{y_2} \frac{\theta_{y_1y_2}}{\theta_{y_1}} \log_{m_2}\left(\frac{\theta_{y_1y_2}}{\theta_{y_1}}\right) \\ & + \frac{1}{q} \sum_{y_2} \frac{\theta_{y_1y_2}}{\theta_{y_1}} \Bigg(- \sum_{y_3} \frac{\theta_{y_1y_2y_3}}{\theta_{q_1y_2}} \log_{m_2}\left(\frac{\theta_{y_1y_2y_3}}{\theta_{q_1y_2}}\right) \\ & + \frac{1}{q} \sum_{y_3} \frac{\theta_{y_1y_2y_3}}{\theta_{y_1y_2}} \Bigg(\cdots + q^j\gamma \sum_{y_{j+1}} \frac{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_j}} \Bigg(- \sum_{x_1} \frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}} \log_{m_2}\left(\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}}\right) \\ & + \frac{1}{\gamma(q-1)} \sum_{x_1} \frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}} S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right) \Bigg) \cdots \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg). \end{aligned}$$

We can now recursively optimize these quantities. First fix $y_1,\ldots,y_{j+1}$. To optimize the last part of the above expression of $S(\Omega)$, we use Lemma A.1.6 and we obtain

$$\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}} = \frac{m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)}{\gamma(q-1)}}}{\sum_{x_1'} m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1',y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)}{\gamma(q-1)}}}$$

and

$$\begin{aligned} -\sum_{x_1} \frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}} \log_{m_2}\left(\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}}\right) + \frac{1}{\gamma(q-1)} \sum_{x_1} \frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}} S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right) \\ = \log_{m_2}\left(\sum_{x_1} m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)}{\gamma(q-1)}} \right). \end{aligned}$$

Using again Lemma A.1.6, we get $\frac{\theta_{y_1\cdots y_{j+1}}}{\theta_{y_1\cdots y_j}}$, and so on. This gives us the weights $\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}$, which are equal to

$$\frac{z_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\left(\sum_{x_1'} z_{(x_1',y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)^{q^j\gamma-1}}{z_\varnothing}$$
$$\cdot\prod_{p=0}^{j-1}\left(\sum_{y'_{j+1-p}}\left(\sum_{y'_{j+2-p}}\left(\cdots\left(\sum_{y'_{j+1}}\left(\sum_{x'_1} z_{(x'_1,y_1)y_2\cdots y_{j-p}y'_{j+1-p}\cdots y'_{j+1}}\right)^{q^j\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1-q}{q}},$$

where $z_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} = m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)}{\gamma(q-1)}}$ and $z_\varnothing = m_2^{\frac{qS(\Omega)}{q-1}}$. In particular we get

$$z_\varnothing = \sum_{y'_1}\left(\sum_{y'_2}\left(\cdots\left(\sum_{y'_{j+1}}\left(\sum_{x'_1} z_{(x'_1,y'_1)y'_2\cdots y'_{j+1}}\right)^{q^j\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Now let us consider Ω_u for fixed $u = (x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1} \in \mathrm{Pref}_{1,j}(\Omega)$. The optimization problem is now analogous on this tree, but simpler : we now have to optimize the quantity

$$\begin{aligned}\frac{(q-1)(1-q^j\gamma)}{q^{j+1}} & H_{m_2}^{\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}\left(\alpha^1_{j+1}\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)\right)\\ &+\frac{\gamma(q-1)}{q}H_{m_2}^{\mu_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}\left(\alpha^2_1\vee\alpha^1_{j+1}\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)\right)\\ &+\frac{1}{q}\sum_{x_2,y_{j+2}}\frac{\theta_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}S\left(\Omega_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}\right),\end{aligned}$$

which is after factorization

$$\begin{aligned}\frac{q-1}{q^{j+1}}\Bigg(&-\sum_{y_{j+2}}\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}\log_{m_2}\left(\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}\right)\\ &+q^j\gamma\sum_{y_{j+2}}\frac{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}}\Bigg(-\sum_{x_2}\frac{\theta_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}\log_{m_2}\left(\frac{\theta_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}\right)\\ &+\frac{1}{\gamma(q-1)}\sum_{x_2}\frac{\theta_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+2}}}S\left(\Omega_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}\right)\Bigg)\Bigg).\end{aligned}$$

This gives the weights

$$\frac{\theta_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}}{\theta_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}} = \frac{z_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}\left(\sum_{x'_2} z_{(x_1,y_1)(x'_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}\right)^{q^j\gamma-1}}{z^{q^{j+1}\gamma}_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}},$$

with $z_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}} = m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1,y_1)(x_2,y_2)y_3\cdots y_{j+2}}\right)}{\gamma(q-1)}}$, $z_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}} = m_2^{\frac{S\left(\Omega_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}\right)}{\gamma(q-1)}}$ and

$$z_{(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}}^{q^{j+1}\gamma} = \sum_{y'_{j+2}} \left(\sum_{x'_2} z_{(x_1,y_1)(x'_2,y_2)y_3\cdots y'_{j+2}} \right)^{q^j\gamma}.$$

This is exactly equation (3.3) at the root of the graph $\Gamma_{u,j}(\Omega)$. The problem being the same at each vertex for $\Gamma_{u,j}(\Omega)$, for all $u \in \mathrm{Pref}_{1,j}(\Omega)$, we can repeat the argument for the entire graphs. We also get the given formula for the optimal measure from the form of all optimal probability vectors that we found. The solutions $z = z(u)$ of the systems (3.3) which we get this way are in $\left[1, m_2^{\frac{2}{\gamma(q-1)}}\right]^{V_{u,j}(\Omega)}$, thus we have $z(u) = t(u)$ for all u (indeed for all $k \geq 1$, for all $v \in \mathrm{Pref}_{k,j}(\Omega)$, for all μ on Ω_v we have $\dim(\mathbb{P}_\mu) \leq 2$, so $S(\Omega_v) \leq 2$).

□

3.2.4 Upper bound for $\dim_H(X_\Omega)$

Theorem 3.2.8. *Let μ be the Borel probability measure on Ω defined in the last theorem, and let $\mathbb{P}_\mu$ be the corresponding Borel probability measure on X_Ω. Let $(x, y) \in X_\Omega$. Then*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{-\log_{m_2}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{L(n)} \leq \frac{q-1}{q} \log_{m_2}(t_\varnothing),$$

from which we deduce that $\dim_H(X_\Omega) = \frac{q-1}{q}\log_{m_2}(t_\varnothing)$.

Proof. Recall that

$$-\log_{m_2}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y))) = -\sum_{\substack{i,\ q\nmid i \\ i\leq L(n)}} \log_{m_2}\left(\mu\left(\left[(x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^{k-1}i},y_{q^{k-1}i})y_{q^k i}\cdots y_{q^\ell i}\right]\right)\right),$$

where k and ℓ are determined by $i < qi < \cdots < q^{k-1}i \leq n < q^k i < \cdots < q^\ell i \leq L(n) < q^{\ell+1}i$ in each term of the sum.

Suppose first that $j = 1$ for the sake of simplicity. We have

$$\mu([(x_1,y_1)\cdots(x_k,y_k)y_{k+1}]) = \frac{t_{(x_1,y_1)y_2}\left(\sum_{x'_1} t_{(x'_1,y_1)y_2}\right)^{q\gamma-1}\left(\sum_{y'_2}\left(\sum_{x'_1} t_{(x'_1,y_1)y'_2}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1-q}{q}}}{t_\varnothing} \cdot \prod_{p=2}^{k} \frac{t_{(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)y_{p+1}}\left(\sum_{x'_p} t_{(x_1,y_1)\cdots(x'_p,y_p)y_{p+1}}\right)^{q\gamma-1}}{t^{q^2\gamma}_{(x_1,y_1)\cdots(x_{p-1},y_{p-1})y_p}},$$

$$\mu\left([(x_1,y_1)\cdots(x_{k-1},y_{k-1})y_ky_{k+1}]\right) = \frac{t_{(x_1,y_1)y_2}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2}\right)^{q\gamma-1}\left(\sum_{y_2'}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2'}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1-q}{q}}}{t_\varnothing}$$
$$\cdot\prod_{p=2}^{k-1}\frac{t_{(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)y_{p+1}}\left(\sum_{x_p'} t_{(x_1,y_1)\cdots(x_p',y_p)y_{p+1}}\right)^{q\gamma-1}}{t^{q^2\gamma}_{(x_1,y_1)\cdots(x_{p-1},y_{p-1})y_p}}$$
$$\cdot\frac{\left(\sum_{x_k'} t_{(x_1,y_1)\cdots(x_k',y_k)y_{k+1}}\right)^{q\gamma}}{t^{q^2\gamma}_{(x_1,y_1)\cdots(x_{k-1},y_{k-1})y_k}}$$

for $k \geq 2$,

$$\mu\left([y_1y_2]\right) = \frac{\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2}\right)^{q\gamma}\left(\sum_{y_2'}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2'}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1-q}{q}}}{t_\varnothing},$$

and

$$\mu\left([y_1]\right) = \frac{\left(\sum_{y_2'}\left(\sum_{x_1'} t_{(x_1',y_1)y_2'}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}}{t_\varnothing}.$$

For each positive integer $\kappa \leq L(n)$, we can write $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$ for some unique (r,i). Now, developing the product $\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y))$, we pick up

- $\frac{1}{t_\varnothing}$ for each $i \leq L(n)$ such that $q \nmid i$,
- $t_{(x_i,y_i)\cdots(x_{q^ri},y_{q^ri})y_{q^{r+1}i}}$ for each $\kappa = q^r i \leq n$,
- $\frac{1}{t^{q^2\gamma}_{(x_i,y_i)\cdots\left(x_{q^ri},y_{q^ri}\right)y_{q^{r+1}i}}}$ for each $\kappa \leq \left\lfloor \frac{L(n)}{q^2} \right\rfloor$: that is because for these κ we have $q^2\kappa = q^{r+2}i \leq L(n)$, and for $\kappa > \left\lfloor \frac{L(n)}{q^2} \right\rfloor$ we have $q^2\kappa \geq q^2\left\lfloor \frac{L(n)}{q^2} \right\rfloor + q^2 > L(n)$,
- $\left(\sum_{x'_{q^ri}} t_{(x_i,y_i)\cdots(x'_{q^ri},y_{q^ri})y_{q^{r+1}i}}\right)^{q\gamma-1}$ for each $\kappa \leq n$,
- $\left(\sum_{x'_{q^ri}} t_{(x_i,y_i)\cdots(x'_{q^ri},y_{q^ri})y_{q^{r+1}i}}\right)^{q\gamma}$ for each $n < \kappa \leq \left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor$,
- $\left(\sum_{y'_{qi}}\left(\sum_{x_i'} t_{(x_i',y_i)y'_{qi}}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1-q}{q}}$ for each $i \leq \left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor$ such that $q \nmid i$,
- $\left(\sum_{y'_{qi}}\left(\sum_{x_i'} t_{(x_i',y_i)y'_{qi}}\right)^{q\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}$ for each $\left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor < i \leq L(n)$ such that $q \nmid i$.

Thus if we define

$$R(\kappa) = \log_{m_2}\left(t_{(x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^ri},y_{q^ri})y_{q^{r+1}i}}\right)$$

for $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$,

$$\tilde{R}(\kappa) = \log_{m_2}\left(\sum_{x'_{q^r i}} t_{(x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x'_{q^r i},y_{q^r i})y_{q^{r+1}i}}\right)$$

for $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$, and

$$u_n^1 = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} R(\kappa), \qquad u_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} \tilde{R}(\kappa),$$

$$u_n^3 = \frac{1}{n}\sum_{i\le n,\ q\nmid i} \log_{m_2}\left(\sum_{y'_{qi}}\left(\sum_{x'_i} t_{(x'_i,y_i)y'_{qi}}\right)^{q\gamma}\right),$$

we get

$$\begin{aligned}\log_{m_2}\left(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y))\right) = n u_n^1 - \gamma q^2 \left\lfloor \frac{L(n)}{q^2} \right\rfloor u^1_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^2} \right\rfloor} + \gamma q \left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor u^2_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor} - n u_n^2 \\ + \frac{1}{q} L(n) u^3_{L(n)} - \left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor u^3_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q} \right\rfloor} - \#\{i \in [\![1, L(n)]\!],\ q \nmid i\} \log_{m_2}(t_\varnothing).\end{aligned}$$

Getting back to the general case, let us define $j+2$ sequences as follows. At first, set

$$u_n^1 = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} R(\kappa) \qquad u_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{\kappa=1}^{n} \tilde{R}(\kappa),$$

where

$$R(\kappa) = \log_{m_2}\left(t_{(x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x_{q^r i},y_{q^r i})y_{q^{r+1}i}\cdots y_{q^{r+j}i}}\right)$$

if $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$, and

$$\tilde{R}(\kappa) = \log_{m_2}\left(\sum_{x'_{q^r i}} t_{(x_i,y_i)(x_{qi},y_{qi})\cdots(x'_{q^r i},y_{q^r i})y_{q^{r+1}i}\cdots y_{q^{r+j}i}}\right)$$

if $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$. Then, for $3 \le k \le j+2$ let

$$u_n^k = \frac{1}{n}\sum_{i\le n,\ q\nmid i} \log_{m_2}\left(\sum_{y'_{q^{j+3-k}i}}\left(\sum_{y'_{q^{j+4-k}i}}\left(\cdots\left(\sum_{y'_{q^j i}}\left(\sum_{x'_i} t_{(x'_i,y_i)y_{qi}\cdots y'_{q^j i}}\right)^{q^j\gamma}\right)^{\frac{1}{q}}\cdots\right)^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{1}{q}}\right),$$

where there are exactly $k-1$ sums and $k-3$ exponents $\frac{1}{q}$ in each $\log_{m_2}$ term. It is easy to see that all these sequences are nonnegative, bounded, with

$$\forall 1 \le k \le j+2,\ \lim_{n\to\infty} u_{n+1}^k - u_n^k = 0.$$

Let $\epsilon > 0$. Using the definition of μ we can get the following expression for n large enough, which will be justified when studying the case $d \geq 2$

$$\begin{aligned}
\frac{-\log_{m_2}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x,y)))}{L(n)} &= \gamma \frac{q^{j+1}}{L(n)} \left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j+1}} \right\rfloor u^1_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j+1}} \right\rfloor} - \frac{n}{L(n)} u^1_n + \frac{n}{L(n)} u^2_n - \gamma \frac{q^j}{L(n)} \left\lfloor \frac{L(n)}{q^j} \right\rfloor u^2_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^j} \right\rfloor} \\
&+ \frac{1}{L(n)} \sum_{k=0}^{j-1} \left(\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k}} \right\rfloor u^{k+3}_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k}} \right\rfloor} - \frac{1}{q} \left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k-1}} \right\rfloor u^{k+3}_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k-1}} \right\rfloor} \right) \\
&+ \frac{\#\{i \in [\![1, L(n)]\!],\ q \nmid i\}}{L(n)} \log_{m_2}(t_\varnothing) \\
&\leq \gamma \left(u^1_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j+1}} \right\rfloor} - u^1_n \right) + \gamma \left(u^2_n - u^2_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^j} \right\rfloor} \right) \\
&+ \sum_{k=0}^{j-1} \frac{1}{q^{j-k}} \left(u^{k+3}_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k}} \right\rfloor} - u^{k+3}_{\left\lfloor \frac{L(n)}{q^{j-k-1}} \right\rfloor} \right) \\
&+ \frac{q-1}{q} \log_{m_2}(t_\varnothing) + \epsilon.
\end{aligned}$$

To conclude we now use Lemma A.1.8 and then let $\epsilon \to 0$.

$\square$

Example 3.2.9. If Ω is a Sierpiński carpet, then clearly $X_\Omega = \Omega$. Using uniqueness in Theorem 3.2.6 we deduce that the values $t_{(x_1,y_1)y_2\dots y_{j+1}}$ do not depend on x_1 and y_1. We call them $t_{y_2\cdots y_{j+1}}$. Equation (3.3) now reduces to

$$t^{q^{j+1}\gamma}_{y_2\cdots y_{j+1}} = N(y_2)^{q^j\gamma} \sum_{y_{j+2}} t^{q^j\gamma}_{y_3\cdots y_{j+2}},$$

where $N(y_2) = \#\{x_2,\ (x_2,y_2) \in A\}$. Thus

$$\sum_{y_{j+1}} t^{q^j\gamma}_{y_2\cdots y_{j+1}} = N(y_2)^{q^{j-1}\gamma} \sum_{y_{j+1}} \left(\sum_{y_{j+2}} t^{q^j\gamma}_{y_3\cdots y_{j+2}} \right)^{\frac{1}{q}},$$

and so on. After having summed on the different coordinates we get

$$\sum_{y_2} \left(\sum_{y_3} \left(\cdots \left(\sum_{y_j} \left(\sum_{y_{j+1}} t^{q^j\gamma}_{y_2\cdots y_{j+1}} \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \cdots \right)^{\frac{1}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{y_2} N(y_2)^\gamma \right)^{\frac{q}{q-1}}.$$

So finally $t_\varnothing = \left(\sum_{y_2} N(y_2)^\gamma\right)^{\frac{q}{q-1}}$ and $\dim_H(X_\Omega) = \log_{m_2}\left(\sum_{y_2} N(y_2)^\gamma\right)$, which is as expected in the McMullen formula. Also, we check that the maximizing measure is the Bernoulli product measure used by McMullen.

Example 3.2.10. Let $q = 2$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$ and $D = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),(2,0),(2,1)\}$. We have $j = 0$. Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

be a $0-1$ matrix indexed by $D \times D$. Let

$$X_A = \{(x_k, y_k)_{k=1}^{\infty} \in \Sigma_{3,2},\ A((x_k, y_k),(x_{2k}, y_{2k})) = 1,\ k \geq 1\}.$$

We look for the solutions t of the systems of equations described in Lemma 3.2.6. Using uniqueness we know that

$$t_{(0,0)} = t_{(0,1)} = t_{(1,0)} = t_{(2,0)}, \qquad t_{(1,1)} = t_{(2,1)}.$$

Moreover

$$t_{(0,0)}^{\gamma q} = \Big(t_{(1,0)} + t_{(2,0)}\Big)^{\gamma} + \Big(t_{(0,1)} + t_{(1,1)} + t_{(2,1)}\Big)^{\gamma} = 2^{\gamma} t_{(0,0)}^{\gamma} + \Big(t_{(0,0)} + 2t_{(1,1)}\Big)^{\gamma},$$

$$t_{(1,1)}^{\gamma q} = \Big(t_{(0,0)} + t_{(1,0)} + t_{(2,0)}\Big)^{\gamma} + t_{(0,1)}^{\gamma} = (3^{\gamma} + 1) t_{(0,0)}^{\gamma},$$

thus $t_{(0,0)}^{\gamma q} = 2^{\gamma} t_{(0,0)}^{\gamma} + \left(t_{(0,0)} + 2\,(3^{\gamma}+1)^{\frac{1}{\gamma q}}\, t_{(0,0)}^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma}$. Finally we have

$$t_{\varnothing} = \Big(t_{(1,0)} + t_{(1,0)} + t_{(2,0)}\Big)^{\gamma} + \Big(t_{(0,1)} + t_{(1,1)} + t_{(2,1)}\Big)^{\gamma} = 3^{\gamma} t_{(0,0)}^{\gamma} + \left(t_{(0,0)} + 2\,(3^{\gamma}+1)^{\frac{1}{\gamma q}}\, t_{(0,0)}^{\frac{1}{q}}\right)^{\gamma}.$$

Using *Scilab* we get $t_{(0,0)} \simeq 7.1446$, thus $\dim_H(X_A) = \frac{1}{2}\log_2(t_{\varnothing}) \simeq 1.878$.

3.2.5 The Minkowski dimension of X_Ω

Theorem 3.2.11. *We have*

$$\dim_M(X_\Omega) = (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)|)}{q^{p+1}} + (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j-1,j+1}(\Omega)|)}{q^p}$$
$$+ (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\infty} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|)}{q^{p+1}}$$

Proof. Recall that, by definition

$$\underline{\dim}_M(X_\Omega) = \liminf_{n\to\infty} \frac{\log_{m_1}(\mathrm{Pref}_{n,L(n)-n}(X_\Omega))}{n}.$$

We can again fix $\ell \geq j+1$ and take $n = q^\ell r$ with $r \to \infty$ in this lim inf. Now using the computations used in the proof of Theorem 3.2.2 we get

$$\begin{aligned}
\log_{m_1}(\mathrm{Pref}_{n,L(n)-n}(X_\Omega)) \geq &\sum_{p=1}^{j} \#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)|) \\
&+ \sum_{p=j+1}^{\ell} \#\left\{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{p-j-1,j+1}(\Omega)|) \\
&+ \sum_{p=j+1}^{\ell} \#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|).
\end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned}
\log_{m_1}(\mathrm{Pref}_{n,L(n)-n}(X_\Omega)) \leq &\sum_{p=1}^{j} \#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)|) \\
&+ \sum_{p=j+1}^{\ell} \#\left\{i \in \left]\frac{n}{q^{p-j-1}}, \frac{L(n)}{q^{p-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{p-j-1,j+1}(\Omega)|) \\
&+ \sum_{p=j+1}^{\ell} \#\left\{i \in \left]\frac{L(n)}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j-1}}\right] : q \nmid i\right\} \log_{m_1}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|) \\
&+ \log_{m_1}(m_1 m_2) d_n
\end{aligned}$$

by putting arbitrary digits in the remaining places (d_n being defined in (3.1)). Remember that $d_n \leq \frac{(\ell+1)L(n)}{q^\ell} + C\frac{\ell(\ell+1)}{2}$. By letting $r \to \infty$ we obtain

$$\begin{aligned}
\underline{\dim}_M(X_\Omega) \geq (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)|)}{q^{p+1}} &+ (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j-1,j+1}(\Omega)|)}{q^p} \\
&+ (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|)}{q^{p+1}}
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
\overline{\dim}_M(X_\Omega) \leq (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)|)}{q^{p+1}} &+ (q-1)(1-q^j\gamma) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j-1,j+1}(\Omega)|)}{q^p} \\
&+ (q-1)(q^{j+1}\gamma - 1) \sum_{p=j+1}^{\ell} \frac{\log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|)}{q^{p+1}}
\end{aligned}$$

$$+\log_{m_2}(m_1m_2)\frac{\ell+1}{q^\ell}.$$

Since ℓ is arbitrary we can conclude.

$\square$

Theorem 3.2.12. *We have $\dim_M(X_\Omega)=\dim_H(X_\Omega)$ if and only if the following four conditions are satisfied*

- *the tree $\Gamma_j(\Omega)$ is spherically symmetric,*
- *$\#\{x_1:(x_1,y_1)y_2\cdots y_{j+1}\in \mathrm{Pref}_{1,j}(\Omega)\}$ does not depend on $y_1\cdots y_{j+1}\in \mathrm{Pref}_{0,j+1}(\Omega)$,*
- *for $1\le p\le j$, $\#\{y_{p+1}:y_1\cdots y_{p+1}\in \mathrm{Pref}_{0,p+1}(\Omega)\}$ does not depend on $y_1\cdots y_p\in \mathrm{Pref}_{0,p}(\Omega)$,*
- *for $p\geq 2$, $\#\{x_p:(x_1,y_1)\cdots(x_p,y_p)y_{p+1}\cdots y_{p+j}\in \mathrm{Pref}_{p,j}(\Omega)\}$ does not depend on $(x_1,y_1)\cdots(x_{p-1},y_{p-1})y_p\cdots y_{p+j}\in \mathrm{Pref}_{p-1,j}(\Omega)$.*

Proof. Compare the formulas in Theorems 3.2.2 and 3.2.11. We have

$$H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j}\vee\alpha^1_p)\le \log_{m_2}(|\mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)|),$$

with equality if and only if every $[u]$ for $u\in \mathrm{Pref}_{p-j,j}(\Omega)$ has equal measure μ, and similar results for $H^\mu_{m_2}(\alpha^1_p)$ and $H^\mu_{m_2}(\alpha^2_{p-j-1}\vee\alpha^1_p)$. Now, the expression of μ in Theorem 3.2.7 and uniqueness in Lemma 3.2.6 give the conditions we stated.

$\square$

3.3 Generalization to the higher dimensional cases

We are now trying to compute $\dim_H(\mathbb{P}_\mu)$ in any dimension $d\geq 2$. Ω is now a closed subset of

$$\Sigma_{m_1,\dots,m_d}=(\mathcal{A}_1\times\cdots\times\mathcal{A}_d)^{\mathbb{N}^*},$$

where $m_1\geq\cdots\geq m_d\geq 2$ and $\mathcal{A}_i=\{0,\dots,m_i-1\}$. We define

$$\gamma_i=\frac{\log(m_i)}{\log(m_{i-1})}$$

and

$$L_i:n\in\mathbb{N}\mapsto\left\lceil\frac{n}{\gamma_i}\right\rceil$$

for $2 \leq i \leq d$ (L_1 being the identity on $\mathbb{N}$). We can again define the Borel probability measures $\mathbb{P}_\mu$ on X_Ω as in the two-dimensional case. For $(x^1, \dots, x^d) \in X_\Omega$ we need to compute $\mathbb{P}_\mu(B_n(x^1, \dots, x^d))$, where

$$B_n(x^1, \dots, x^d) = \{(u^1, \dots, u^d) \in \Sigma_{m_1,\dots,m_d} : \forall 1 \leq k \leq d,\ \forall 1 \leq i \leq (L_k \circ \cdots \circ L_1)(n),\ u_i^k = x_i^k\}.$$

3.3.1 Computation of $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ for 3-dimensional sponges

First suppose that $d = 3$, as the computation of $\dim_H(\mathbb{P}_\mu)$ in this case helps to better understand the general one. Let j_2, j_3 be the unique non-negative integers such that $q^{j_2} \leq \frac{1}{\gamma_2} < q^{j_2+1}$ and $q^{j_3} \leq \frac{1}{\gamma_3} < q^{j_3+1}$. Now we get two cases : either $q^{j_2+j_3} \leq \frac{1}{\gamma_2\gamma_3} < q^{j_2+j_3+1}$ or $q^{j_2+j_3+1} \leq \frac{1}{\gamma_2\gamma_3} < q^{j_2+j_3+2}$. Suppose we are in the first one. In this case for all n large enough we have $q^{j_2} n \leq L_2(n) < q^{j_2+1}n$, $q^{j_3}n \leq L_3(n) < q^{j_3+1}n$ and $q^{j_2+j_3}n \leq L_3(L_2(n)) < q^{j_2+j_3+1}n$. In order to compute $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ we now use the same method as in Proposition 3.2.2. For $n = q^\ell r$ with ℓ fixed we can write

$$\left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^\ell}, L_3(L_2(n))\right] = \bigsqcup_{p=1}^{\ell} \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right].$$

We now have for all r large enough

- $1 \leq p \leq j_3 \Longrightarrow \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right] \subset \left]L_2(n), L_3(L_2(n))\right]$
- $j_3 + 1 \leq p \leq j_3 + j_2 \Longrightarrow \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right] \subset \left]n, L_3(L_2(n))\right]$. We have $\frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}} \in \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right]$ and

  $$i \in \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}\right] \Longrightarrow n < i \leq q^{p-j_3-1}i \leq L_2(n) < q^{p-j_3}i \leq q^{p-1}i \leq L_3(L_2(n)) < q^p i,$$

  $$i \in \left]\frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right] \Longrightarrow n < i \leq q^{p-j_3-2}i \leq L_2(n) < q^{p-j_3-1}i \leq q^{p-1}i \leq L_3(L_2(n)) < q^p i.$$

- For $j_3+j_2+1 \leq p \leq \ell$ we have $\frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}, \frac{n}{q^{p-j_2-j_3-1}} \in \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right]$ and $\frac{n}{q^{p-j_2-j_3-1}} \leq \frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}$, thus if $i \in \left]\frac{L_3(L_2(n))}{q^p}, \frac{n}{q^{p-j_2-j_3-1}}\right]$ then

  $$q^{p-j_2-j_3-1}i \leq n < q^{p-j_2-j_3}i \leq q^{p-j_3-1}i \leq L_2(n) < q^{p-j_3}i \leq q^{p-1}i \leq L_3(L_2(n)) < q^p i,$$

  if $i \in \left]\frac{n}{q^{p-j_2-j_3-1}}, \frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}\right]$ then

  $$q^{p-j_2-j_3-2}i \leq n < q^{p-j_2-j_3-1}i \leq q^{p-j_3-1}i \leq L_2(n) < q^{p-j_3}i \leq q^{p-1}i \leq L_3(L_2(n)) < q^p i,$$

and if $i \in \left]\frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}}, \frac{L_3(L_2(n))}{q^{p-1}}\right]$ then

$$q^{p-j_2-j_3-2}i \le n < q^{p-j_2-j_3-1}i \le q^{p-j_3-2}i \le L_2(n) < q^{p-j_3-1}i \le q^{p-1}i \le L_3(L_2(n)) < q^p i.$$

Denote by α_p^3, α_p^2 and α_p^1 the partitions of Ω into cylinders of length p along all three coordinates, the second and the third ones, and the third one respectively. Using the same approach as in the two dimensional case we can get

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{P}_\mu) &= (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j_3} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha_p^1)}{q^{p+1}} + (q-1)(\gamma_3 q^{j_3+1}-1) \sum_{p=j_3+1}^{j_2+j_3} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^2_{p-j_3} \vee \alpha_p^1)}{q^{p+1}} \\
&\quad + (q-1)(1-\gamma_3 q^{j_3}) \sum_{p=j_3+1}^{j_2+j_3} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^2_{p-j_3-1} \vee \alpha_p^1)}{q^p} \\
&\quad + (q-1)(\gamma_2\gamma_3 q^{j_2+j_3+1}-1) \sum_{p=j_2+j_3+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3} \vee \alpha^2_{p-j_3} \vee \alpha_p^1)}{q^{p+1}} \\
&\quad + (q-1)(\gamma_3 q^{j_3} - \gamma_2\gamma_3 q^{j_2+j_3}) \sum_{p=j_2+j_3+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3-1} \vee \alpha^2_{p-j_3} \vee \alpha_p^1)}{q^p} \\
&\quad + (q-1)(1-\gamma_3 q^{j_3}) \sum_{p=j_2+j_3+1}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3-1} \vee \alpha^2_{p-j_3-1} \vee \alpha_p^1)}{q^p}.
\end{aligned}$$

If we suppose now that $q^{j_2+j_3+1} \le \frac{1}{\gamma_2\gamma_3} < q^{j_2+j_3+2}$, we have $\frac{L_2(n)}{q^{p-j_3-1}} \le \frac{n}{q^{p-j_2-j_3-2}}$ for n large enough and we get

$$\begin{aligned}
\dim(\mathbb{P}_\mu) &= (q-1)^2 \sum_{p=1}^{j_3} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha_p^1)}{q^{p+1}} + (q-1)(\gamma_3 q^{j_3+1}-1) \sum_{p=j_3+1}^{j_2+j_3+1} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^2_{p-j_3} \vee \alpha_p^1)}{q^{p+1}} \\
&\quad + (q-1)(1-\gamma_3 q^{j_3}) \sum_{p=j_3+1}^{j_2+j_3+1} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^2_{p-j_3-1} \vee \alpha_p^1)}{q^p} \\
&\quad + (q-1)(\gamma_3 q^{j_3+1}-1) \sum_{p=j_2+j_3+2}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3-1} \vee \alpha^2_{p-j_3} \vee \alpha_p^1)}{q^{p+1}} \\
&\quad + (q-1)(\gamma_2\gamma_3 q^{j_2+j_3+1} - \gamma_3 q^{j_3}) \sum_{p=j_2+j_3+2}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3-1} \vee \alpha^2_{p-j_3-1} \vee \alpha_p^1)}{q^p} \\
&\quad + (q-1)(1-\gamma_2\gamma_3 q^{j_2+j_3+1}) \sum_{p=j_2+j_3+2}^{\infty} \frac{H^\mu_{m_3}(\alpha^3_{p-j_2-j_3-2} \vee \alpha^2_{p-j_3-1} \vee \alpha_p^1)}{q^p}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

In the next subsection we will adopt a more general point of view to avoid this dichotomy case.

3.3.2 Results in any dimension

We get back to the general case, by first introducing some notations and making a few observations before stating the theorems. Let $I \subset \mathbb{N}^*$ and $K \subset [\![1,d]\!]$ be finite sets. If $x \in \Omega$ and $(x_i^k)_{\substack{i\in I\\ k\in K}}$ is a finite set of coordinates of x (the upper index corresponding to the "geometric" coordinate and the lower one being the digit) we define the generalized cylinder

$$\left[(x_i^k)_{\substack{i\in I\\ k\in K}}\right] = \{y \in \Omega : y_i^k = x_i^k \ \ \forall i \in I,\ \forall k \in K\}.$$

For some arbitrary coordinate functions $\chi_1, \dots, \chi_N \in \{\{x \in \Omega \mapsto x_i^k\} : k \in [\![1,d]\!],\ i \geq 1\}$ we also define

$$\mathrm{Pref}_{\chi_1,\dots,\chi_N}(\Omega) = \{(\chi_1(x), \dots, \chi_N(x)) : x \in \Omega\}.$$

For all $t \in [\![2,d]\!]$, let $j_t \in \mathbb{N}$ such that

$$q^{j_t} \leq \frac{1}{\gamma_t} < q^{j_t+1}.$$

There is a unique sequence of integers $(n_t)_{2\leq t\leq d}$ such that

$$\forall t \in [\![1,d-1]\!],\ q^{j_d+j_{d-1}+\cdots+j_{t+1}+n_{t+1}} \leq \frac{1}{\gamma_d\gamma_{d-1}\cdots\gamma_{t+1}} < q^{j_d+j_{d-1}+\cdots+j_{t+1}+n_{t+1}+1}.$$

Let

$$p_t = j_d + j_{d-1} + \cdots + j_{t+1} + n_{t+1}.$$

The sequence (n_t) takes its values in $[\![0,d-2]\!]$ and is non-decreasing; moreover $n_d = 0$ and $n_t \in \{n_{t+1}, n_{t+1}+1\}$ for $2 \leq t \leq d-1$. The integers j_t, $t \in [\![2,d]\!]$ and n_t, $t \in [\![2,d-1]\!]$ are the $2d-3$ parameters mentioned in the introduction. Thus we get that for all n large enough, for $s \in [\![1,d-1]\!]$

$$\forall t \in [\![s,d-1]\!],\ \forall p \in [\![p_s+1, p_{s-1}]\!],\ \frac{L_t \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_t-1}} \in \left]\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}}\right]$$

and

$$\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p} \geq L_{s-1} \circ \cdots \circ L_1(n),$$

with $p_0 = \ell$ and $L_0(n) = 0$. If $p \in [\![1, p_{d-1}]\!]$ then

$$\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p} \geq L_{d-1} \circ \cdots \circ L_1(n).$$

For $s \in [\![1, d-1]\!]$ let $\sigma_s \in \mathfrak{S}([\![s, d-1]\!])$ be the unique permutation such that the sequence

$$\left(\frac{L_{\sigma_s(t)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(t)}-1}}\right)_{t \in [\![s, d-1]\!]}$$

is non-decreasing for all n large enough and all p. We define

$$I_p^{s,s-1} = \left]\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_{\sigma_s(s)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(s)}-1}}\right],$$

$$I_p^{s,t} = \left]\frac{L_{\sigma_s(t)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(t)}-1}}, \frac{L_{\sigma_s(t+1)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(t+1)}-1}}\right]$$

for $t \in [\![s, d-2]\!]$ and

$$I_p^{s,d-1} = \left]\frac{L_{\sigma_s(d-1)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(d-1)}-1}}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}}\right].$$

We will use the partitions

$$\left]\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}}\right] = \bigsqcup_{t=s-1}^{d-1} I_p^{s,t}$$

for all $p \in [\![p_s + 1, p_{s-1}]\!]$. Observe that for $i \in \left]\frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}}\right]$ such that $q \nmid i$ we have

$$q^{p-p_k-2} i \leq L_k \circ \cdots \circ L_1(n) < q^{p-p_k} i$$

for all $k \in [\![1, d-1]\!]$. Hence for $k \in [\![1, d-1]\!]$ either

$$q^{p-p_k-2} i \leq L_k \circ \cdots \circ L_1(n) < q^{p-p_k-1} i$$

or

$$q^{p-p_k-1} i \leq L_k \circ \cdots \circ L_1(n) < q^{p-p_k} i.$$

Moreover if $i \in I_p^{s,t}$ then

$$\frac{L_{\sigma_s(s)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(s)}-1}} \leq \cdots \leq \frac{L_{\sigma_s(t)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(t)}-1}} < i \leq$$
$$\frac{L_{\sigma_s(t+1)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(t+1)}-1}} \leq \cdots \leq \frac{L_{\sigma_s(d-1)} \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-p_{\sigma_s(d-1)}-1}}.$$

For $s \in [\![1, d-1]\!]$ and $t \in [\![s-1, d-1]\!]$ let $(p_k^{s,t})_{k \in [\![s, d-1]\!]}$ be defined by $p_k^{s,t} = p_k + 1$ if

$k \in \sigma_s(\llbracket s, t \rrbracket)$, and $p_k^{s,t} = p_k$ otherwise. Then we have

$$i \in I_p^{s,t} \Longrightarrow \forall\ k \in \llbracket s, d-1 \rrbracket,\ q^{p-p_k^{s,t}-1} i \leq L_k \circ \cdots \circ L_1(n) < q^{p-p_k^{s,t}} i.$$

Thus the $\mathbb{P}_\mu$-mass of an arbitrary "quasi-cube" is

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\mu(B_n(x^1, \ldots, x^d)) = &\Bigg(\prod_{p=1}^{j_d} \prod_{\substack{i \in \left] \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}} \right] \\ q \nmid i}} \mu\left(\left[x_i^d \cdots x_{q^{p-1}i}^d \right] \right) \Bigg) \\
&\cdot \prod_{s=2}^{d-1} \Bigg(\prod_{p=p_s+1}^{p_{s-1}} \prod_{t=s-1}^{d-1} \prod_{\substack{i \in I_p^{s,t} \\ q \nmid i}} \mu(C_{p,i}^{s,t}(x)) \Bigg) \\
&\cdot \Bigg(\prod_{p=p_1+1}^{\ell} \prod_{t=0}^{d-1} \prod_{\substack{i \in I_p^{1,t} \\ q \nmid i}} \mu(C_{p,i}^{1,t}(x)) \Bigg) \cdot D_n(x^1, \ldots, x^d),
\end{aligned} \tag{3.5}$$

where

$$\begin{aligned}
C_{p,i}^{s,t}(x) = &\left[\left(x_i^s, \ldots, x_i^d \right) \cdots \left(x^s_{q^{p-p_s^{s,t}-1}i}, \ldots, x^d_{q^{p-p_s^{s,t}-1}i} \right) \right] \\
&\bigcap \left[\left(x^{s+1}_{q^{p-p_s^{s,t}}i}, \ldots, x^d_{q^{p-p_s^{s,t}}i} \right) \cdots \left(x^{s+1}_{q^{p-p_{s+1}^{s,t}-1}i}, \ldots, x^d_{q^{p-p_{s+1}^{s,t}-1}i} \right) \right] \bigcap \cdots \\
&\bigcap \left[\left(x^{d-1}_{q^{p-p_{d-2}^{s,t}}i}, x^d_{q^{p-p_{d-2}^{s,t}}i} \right) \cdots \left(x^{d-1}_{q^{p-p_{d-1}^{s,t}-1}i}, x^d_{q^{p-p_{d-1}^{s,t}-1}i} \right) \right] \bigcap \left[x^d_{q^{p-p_{d-1}^{s,t}}i} \cdots x^d_{q^{p-1}i} \right]
\end{aligned}$$

and $D_n(x^1, \ldots, x^d)$ is the residual term. Note that $C_{p,i}^{s,t}(x)$ can also be compactly written as

$$\begin{aligned}
&\left[\pi^s(x)_i \cdots \pi^s(x)_{q^{p-p_s^{s,t}-1}i} \right] \bigcap \left[\pi^{s+1}(x)_{q^{p-p_s^{s,t}}i} \cdots \pi^{s+1}(x)_{q^{p-p_{s+1}^{s,t}-1}i} \right] \bigcap \cdots \\
&\bigcap \left[\pi^d(x)_{q^{p-p_{d-1}^{s,t}}i} \cdots \pi^d(x)_{q^{p-1}i} \right],
\end{aligned}$$

using the projections $\pi^k : x \mapsto (x^k, \ldots, x^d)$ for $k \in \llbracket 1, d \rrbracket$.

Now, for all $p \geq 1$ we define

$$\begin{aligned}
\delta_p^{d,d-1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\#\left\{ i \in \left] \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}} \right] : q \nmid i \right\}}{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)} = \frac{(q-1)^2}{q^{p+1}}, \\
\delta_p^{s,s-1} &= \lim_{n \to \infty} \frac{\#\left\{ i \in I_p^{s,0} : q \nmid i \right\}}{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)} = \frac{(q^{p_{\sigma_s(s)}+1} \prod_{i=\sigma_s(s)+1}^d \gamma_i - 1)(q-1)}{q^{p+1}},
\end{aligned}$$

$$\delta_p^{s,t} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{i \in I_p^{s,t} : q \nmid i\right\}}{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}$$

$$= \frac{(q^{p_{\sigma_s(t+1)}} \prod_{i=\sigma_s(t+1)+1}^{d} \gamma_i - q^{p_{\sigma_s(t)}} \prod_{i=\sigma_s(t)+1}^{d} \gamma_i)(q-1)}{q^p} \text{ for } t \in [\![s, d-2]\!]$$

and

$$\delta_p^{s,d-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{i \in I_p^{s,s} : q \nmid i\right\}}{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)} = \frac{(1 - q^{p_{\sigma_s(d-1)}} \prod_{i=\sigma_s(d-1)+1}^{d} \gamma_i)(q-1)}{q^p}.$$

Moreover denote by α_p^k the partition of Ω into cylinders of length p along the last k coordinates for $k \in [\![1, d]\!]$. Finally let

$$\widetilde{H}_{s,p}^{\mu} = \sum_{t=s-1}^{d-1} \delta_p^{s,t} H_{m_d}^{\mu} \left(\alpha_p^1 \vee \alpha^2_{p-p_{d-1}^{s,t}} \vee \alpha^3_{p-p_{d-2}^{s,t}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-s+1}_{p-p_s^{s,t}}\right)$$

for $s \in [\![1, d]\!]$.

Theorem 3.3.1. *The Borel probability measure $\mathbb{P}_\mu$ is exact dimensional and its dimension is*

$$S(\Omega, \mu) = \left(\sum_{p=1}^{j_d} \widetilde{H}_{d,p}^{\mu}\right) + \left(\sum_{s=2}^{d-1} \sum_{p=p_s+1}^{p_{s-1}} \widetilde{H}_{s,p}^{\mu}\right) + \sum_{p=p_1+1}^{\infty} \widetilde{H}_{1,p}^{\mu}.$$

Proof. We use exactly the same method as in the proof of Theorem 3.2.2, using the computation of $\mathbb{P}_\mu(B_n(x^1, \ldots, x^d))$ above, the different families of i.i.d random variables

$$\left\{Y_{p,i}^{s,t} : x \in X_\Omega \mapsto -\log(\mu(C_{p,i}^{s,t}(x)))\right\}_{i \in I_p^{s,t}}$$

whose expectations are $H_{m_d}^{\mu}\left(\alpha_p^1 \vee \alpha^2_{p-p_{d-1}^{s,t}} \vee \alpha^3_{p-p_{d-2}^{s,t}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-s+1}_{p-p_s^{s,t}}\right)$ respectively, and Theorem 3.2.1 and Lemma A.1.7 repeatedly. We then show again that the residual term $D_n(x^1, \ldots, x^d)$, which is larger than or equal to the $\mathbb{P}_\mu$-mass of those points in X_Ω which share the same symbolic coordinates as x for those indices j which do not appear in the cylinders of the forme $C_{p,i}^{s,t}(x)$ with $p \leq \ell$, is $\mathbb{P}_\mu$-almost always negligible. To this end, we use like in the proof of Theorem 3.2.2 Borel–Cantelli lemma and the set

$$S_n = \{(x^1, \ldots, x^d) \in X_\Omega : D_n(x^1, \ldots, x^d) \leq (2m_1 m_2 \cdots m_d)^{-d_n}\},$$

where the exponent

$$d_n = L_d \circ \cdots \circ L_1(n) - \sum_{p=1}^{\ell} \# \left\{ i \in \mathbb{N} \cap \left] \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^p}, \frac{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)}{q^{p-1}} \right] : q \nmid i \right\} p$$

can likewise easily be controlled. □

We can again optimize this quantity following the method we used in the two-dimensional case, by conditioning all the entropy terms appearing in the third part of this expression for $p \geq p_1 + 2$ by the finest partition appearing in the term $\widetilde{H}^{\mu}_{1,p_1+1}$. We know that for all s we have

$$\begin{aligned} t \leq t' &\Longrightarrow \forall k,\ p_k^{s,t} \leq p_k^{s,t'}, \\ t < t' &\Longrightarrow \exists k,\ p_k^{s,t} < p_k^{s,t'}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

so this partition is the one appearing in the $t = 0$ term, i.e.

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha^1_{p_1+1} \vee \alpha^2_{p_1+1-p^{1,0}_{d-1}} \vee \alpha^3_{p_1+1-p^{1,0}_{d-2}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+1-p^{1,0}_1}. \\ &= \alpha^1_{p_1+1} \vee \alpha^2_{p_1+1-p_{d-1}} \vee \alpha^3_{p_1+1-p_{d-2}} \vee \cdots \vee \alpha^d_1. \end{aligned}$$

If C is a cylinder of this partition in Ω, denote by Ω_C, θ_C and μ_C the associate rooted set at $C \in \alpha$ in Ω, its μ-mass and the normalized measure induced on it respectively. Since for $p \geq p_1 + 2$ and $t \in [\![0, d-1]\!]$ we can write

$$\begin{aligned} &H^{\mu}_{m_d}\left(\alpha^1_p \vee \alpha^2_{p-p^{1,t}_{d-1}} \vee \alpha^3_{p-p^{1,t}_{d-2}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p-p^{1,t}_1}\right) \\ &= H^{\mu}_{m_d}(\alpha) + H^{\mu}_{m_d}\left(\alpha^1_p \vee \alpha^2_{p-p^{1,t}_{d-1}} \vee \alpha^3_{p-p^{1,t}_{d-2}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p-p^{1,t}_1} | \alpha\right) \\ &= H^{\mu}_{m_d}(\alpha) + \sum_{C \in \mathcal{C}} \theta_C H^{\mu_C}_{m_d}\left(\alpha^1_{p-1} \vee \alpha^2_{p-p^{1,t}_{d-1}-1} \vee \alpha^3_{p-p^{1,t}_{d-2}-1} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p-p^{1,t}_1-1}(\Omega_C)\right), \end{aligned}$$

we get

$$\begin{aligned} S(\Omega, \mu) = &\sum_{p=1}^{j_d} \widetilde{H}^{\mu}_{d,p} + \sum_{s=2}^{d-1} \sum_{p=p_s+1}^{p_{s-1}} \widetilde{H}^{\mu}_{s,p} \\ &+ \sum_{t=1}^{d-1} \delta^{1,t}_{p_1+1} H^{\mu}_{m_d}\left(\alpha^1_{p_1+1} \vee \alpha^2_{p_1+1-p^{1,t}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+1-p^{1,t}_1}\right) \\ &+ \left(\delta^{1,0}_{p_1+1} + \sum_{p=p_1+2}^{\infty} \sum_{t=0}^{d-1} \delta^{1,t}_p\right) H^{\mu}_{m_d}(\alpha) + \frac{1}{q} \sum_{C \in \mathcal{C}} \theta_C S(\Omega_C, \mu_C). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Now we can obtain the unique optimal measure as in the proof of Theorem 3.2.7 by getting the q_C with a recursive reasoning and repeating the argument for the entire suitable graphs. To make things clearer and to highlight the fact that the structure of the optimal measure is similar to the one appearing in the two-dimensional case, we introduce now the unique sequence of coordinate functions $(\chi_i)_{i\geq 1}$ such that if we reorder the partitions of Ω appearing in the expression of $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ above as an increasing sequence $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots$ (the symbol $\leq$ corresponding there to the "finer than" partial order) we have

$$H^\mu(\beta_i) = -\int_\Omega \log_{m_d}\left(\mu\left([\chi_1(x)\cdots\chi_i(x)]\right)\right) d\mu(x)$$

for all $i \geq 1$. Here we used a slight generalization of the notion of cylinders we defined at the beginning of Section 3.3.2, allowing ourselves to use any family $A \subset \mathbb{N}^* \times [\![1,d]\!]$ of coordinates of x and not necessarily a product. This order is exactly the following (using again facts (3.6)):

$$\begin{aligned}
&\alpha^1_1 \leq \cdots \leq \alpha^1_{p_{d-1}} \leq \alpha^1_{p_{d-1}+1} \vee \alpha^2_{p_{d-1}+1-p^{d-1,d-1}_{d-1}} \leq \alpha^1_{p_{d-1}+1} \vee \alpha^2_{p_{d-1}+1-p^{d-1,d-2}_{d-1}} \leq \\
&\alpha^1_{p_{d-1}+2} \vee \alpha^2_{p_{d-1}+2-p^{d-1,d-1}_{d-1}} \leq \alpha^1_{p_{d-1}+2} \vee \alpha^2_{p_{d-1}+2-p^{d-1,d-2}_{d-1}} \leq \cdots \leq \alpha^1_{p_{d-2}} \vee \alpha^2_{p_{d-2}-p^{d-1,d-1}_{d-1}} \leq \\
&\alpha^1_{p_{d-2}} \vee \alpha^2_{p_{d-2}-p^{d-1,d-2}_{d-1}} \leq \cdots \leq \alpha^1_{p_2+1} \vee \alpha^2_{p_2+1-p^{2,d-1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-1}_{p_2+1-p^{2,d-1}_2} \leq \cdots \leq \\
&\alpha^1_{p_2+1} \vee \alpha^2_{p_2+1-p^{2,1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-1}_{p_2+1-p^{2,1}_2} \leq \cdots \leq \alpha^1_{p_1} \vee \alpha^2_{p_1-p^{2,d-1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-1}_{p_1-p^{2,d-1}_2} \leq \cdots \leq \\
&\alpha^1_{p_1} \vee \alpha^2_{p_1-p^{2,1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^{d-1}_{p_1-p^{2,1}_2} \leq \alpha^1_{p_1+1} \vee \alpha^2_{p_1+1-p^{1,d-1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+1-p^{1,d-1}_1} \leq \cdots \leq \\
&\alpha^1_{p_1+1} \vee \alpha^2_{p_1+1-p^{1,0}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+1-p^{1,0}_1} = \alpha \leq \alpha^1_{p_1+2} \vee \alpha^2_{p_1+2-p^{1,d-1}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+2-p^{1,d-1}_1} \leq \cdots \leq \\
&\alpha^1_{p_1+2} \vee \alpha^2_{p_1+2-p^{1,0}_{d-1}} \vee \cdots \vee \alpha^d_{p_1+2-p^{1,0}_1} \leq \cdots
\end{aligned}$$

For example, when $d = 3$ and $\dim(\mathbb{P}_\mu)$ is given by (3.4), this sequence is given by

$$(\chi_i)_{i\geq 1} = \left(x^3_1, \ldots, x^3_{j_3}, x^3_{j_3+1}, x^2_1, x^3_{j_3+2}, x^2_2, \ldots, x^3_{j_2+j_3+2}, x^1_1, x^2_{j_2+2}, \ldots\right).$$

We also denote by $(\delta_i)_{i\in[\![1,N]\!]}$ the sequence of real factors giving weights to the N entropies in $S(\Omega,\mu)$ (see (3.7)) when being reordered that way. Let

$$N = p_1 + 1 + \sum_{k=1}^{d-1}(p_1 + 1 - p_k)$$

be the number of coordinates χ_i appearing in the partition α distinguished above. Finally for $(X_1,\ldots,X_N) \in \mathrm{Pref}_{\chi_1,\ldots,\chi_N}(\Omega)$ let $\Gamma_{(X_1,\ldots,X_N)}(\Omega)$ be the directed graph whose set of vertices is $(X_1,\ldots,X_N) \cup \bigcup_{\ell=1}^\infty \mathrm{Pref}_{\chi_1,\ldots,\chi_{N+\ell d}}(\Omega)$, and where for all $\ell \geq 0$ there is a directed edge from $u = X_1\cdots X_{N+\ell d}$ to another one v if and only if $v = X_1\cdots X_{N+\ell d}X_{N+\ell d+1}\cdots X_{N+(\ell+1)d}$ for some X_i, $i \in [\![N+\ell d+1, N+(\ell+1)d]\!]$.

Theorem 3.3.2. *Let* $\omega_1 = \sum_{i=1}^N \delta_i$, $\omega_k = \frac{\sum_{i=k}^N \delta_i}{\sum_{i=k-1}^N \delta_i}$ *for* $2 \le k \le N$ *and* $\omega_{N+1} = \frac{1}{q\delta_N}$. *For all* $(X_1,\dots,X_N) \in \mathrm{Pref}_{\chi_1,\dots,\chi_N}(\Omega)$ *there is a unique vector* $t \in \left[1, m_d^{\omega_{N+1}d}\right]^{\Gamma_{(X_1,\dots,X_N)}(\Omega)}$ *such that for all* $\ell \ge 0$ *and* $(X_1,\dots,X_{N+\ell d}) \in \Gamma_{(X_1,\dots,X_N)}(\Omega)$ *we have*

$$\left(t_{X_1\cdots X_{N+\ell d}}\right)^{\frac{1}{\tilde\omega_{N-d+1}\omega_{N+1}}} = \sum_{X'_{N+\ell d+1}} \left(\sum_{X'_{N+\ell d+2}} \left(\cdots \left(\sum_{X'_{N+(\ell+1)d}} t_{X_1\cdots X'_{N+(\ell+1)d}} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-d+3}} \right)^{\omega_{N-d+2}},$$

where $\tilde\omega_{N-d+1} = \omega_1\omega_2\cdots\omega_{N-d+1}$. *Moreover if we define*

$$t_\varnothing = \sum_{X'_1} \left(\sum_{X'_2} \left(\cdots \left(\sum_{X'_{N-1}} \left(\sum_{X'_N} t_{X'_1\cdots X'_N} \right)^{\omega_N} \right)^{\omega_{N-1}} \cdots \right)^{\omega_3} \right)^{\omega_2},$$

the unique Borel probability measure maximizing $S(\Omega,\mu)$ *is defined for all* $\ell \ge 0$ *by*

$$\begin{aligned}
&\mu\left([X_1\cdots X_{N+\ell d}]\right) \\
&= \frac{t_{X_1\cdots X_N}}{t_\varnothing} \prod_{p=2}^{N} \left(\sum_{X'_p} \left(\sum_{X'_{p+1}} \left(\cdots \left(\sum_{X'_{N-1}} \left(\sum_{X'_N} t_{X_1\cdots X_{p-1}X'_p\cdots X'_N} \right)^{\omega_N} \right)^{\omega_{N-1}} \cdots \right)^{\omega_{p+2}} \right)^{\omega_{p+1}} \right)^{\omega_p - 1} \\
&\cdot \prod_{k=1}^{\ell} t_{X_1\cdots X_{N+kd}}\, t_{X_1\cdots X_{N+(k-1)d}}^{-\frac{1}{\tilde\omega_{N-d+1}\omega_{N+1}}} \prod_{p=2}^{d} \left(\sum_{X'_{N+(k-1)d+p}} \left(\cdots \left(\sum_{X'_{N+kd}} t_{X_1\cdots X'_{N+kd}} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-d+p+1}} \right)^{\omega_{N-d+p}-1}
\end{aligned} \tag{3.8}$$

and its Hausdorff dimension is equal to $\omega_1 \log_{m_d}(t_\varnothing)$.

Proof. The existence and uniqueness of t are checked using a fixed point theorem as in Lemma 3.2.6. We get with these notations that

$$\begin{aligned}
S(\Omega,\mu) &= \sum_{i=1}^{N} \delta_i H_{m_d}^{\mu}(\beta_i) + \frac{1}{q} \sum_{X_1,\dots,X_N} \theta_{X_1\cdots X_N} S(\Omega_{X_1\cdots X_N}, \mu_{X_1\cdots X_N}) \\
&= \omega_1 \Bigg(H_{m_d}^{\mu}(\beta_1) + \omega_2 \sum_{X_1} \theta_{X_1} \Bigg(- \sum_{X_2} \frac{\theta_{X_1X_2}}{\theta_{X_1}} \log_{m_d}\left(\frac{\theta_{X_1X_2}}{\theta_{X_1}}\right) \\
&+ \omega_3 \sum_{X_2} \frac{\theta_{X_1X_2}}{\theta_{X_1}} \Bigg(- \sum_{X_3} \frac{\theta_{X_1X_2X_3}}{\theta_{X_1X_2}} \log_{m_d}\left(\frac{\theta_{X_1X_2X_3}}{\theta_{X_1X_2}}\right) \\
&+ \omega_4 \sum_{X_3} \frac{\theta_{X_1X_2X_3}}{\theta_{X_1X_2}} \Bigg(\cdots + \omega_N \sum_{X_{N-1}} \frac{\theta_{X_1\cdots X_{N-1}}}{\theta_{X_1\cdots X_{N-2}}} \Bigg(- \sum_{X_N} \frac{\theta_{X_1\cdots X_N}}{\theta_{X_1\cdots X_{N-1}}} \log_{m_d}\left(\frac{\theta_{X_1\cdots X_N}}{\theta_{X_1\cdots X_{n-1}}}\right) \\
&+ \omega_{N+1} \sum_{X_N} \frac{\theta_{X_1\cdots X_N}}{\theta_{X_1\cdots X_{N-1}}} S\left(\Omega_{X_1\cdots X_N}, \mu_{X_1\cdots X_N}\right) \Bigg) \cdots \Bigg)\Bigg)\Bigg)\Bigg).
\end{aligned}$$

Optimizing this expression as before, we get that $\theta_{X_1\cdots X_N}$ equals

$$\frac{z_{X_1\cdots X_N}}{z_\varnothing}\prod_{p=2}^{N}\left(\sum_{X'_p}\left(\sum_{X'_{p+1}}\left(\cdots\left(\sum_{X'_{N-1}}\left(\sum_{X'_N} z_{X_1\cdots X_{p-1}X'_p\cdots X'_N}\right)^{\omega_N}\right)^{\omega_{N-1}}\cdots\right)^{\omega_{p+2}}\right)^{\omega_{p+1}}\right)^{\omega_p-1}$$

where $z_{X_1\cdots X_N} = m_d^{\omega_{N+1}S(\Omega_{X_1\cdots X_N})}$ and $z_\varnothing = m_d^{\frac{S(\Omega)}{\omega_1}}$. It remains to optimize the conditional measures on the subtrees $\Omega_{X_1\cdots X_N}$, by maximizing the expression $S\left(\Omega_{X_1\cdots X_N}, \mu_{X_1\cdots X_N}\right)$ which is equal to

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=N-d+1}^{N}\delta_i H_{m_d}^{\mu_{X_1\cdots X_N}}\left(\beta_i\left(\Omega_{X_1\cdots X_N}\right)\right)+\frac{1}{q}\sum_{X_{N+1},\ldots,X_{N+d}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+d}}}{\theta_{X_1\cdots X_N}}S\left(\Omega_{X_1\cdots X_{N+d}}, \mu_{X_1\cdots X_{N+d}}\right)\\
&=\widetilde{\omega}_{N-d+1}\Bigg(-\sum_{X_{N+1}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+1}}}{\theta_{X_1\cdots X_N}}\log_{m_d}\left(\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+1}}}{\theta_{X_1\cdots X_N}}\right)\\
&+\omega_{N-d+2}\sum_{X_{N+1}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+1}}}{\theta_{X_1\cdots X_N}}\Bigg(\cdots\\
&+\omega_N\sum_{X_{N+d-1}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+d-1}}}{\theta_{X_1\cdots X_{N+d-2}}}\Bigg(-\sum_{X_{N+d}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+d}}}{\theta_{X_1\cdots X_{N+d-1}}}\log_{m_d}\left(\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+d}}}{\theta_{X_1\cdots X_{N+d-1}}}\right)\\
&+\omega_{N+1}\sum_{X_{N+d}}\frac{\theta_{X_1\cdots X_{N+d}}}{\theta_{X_1\cdots X_{N+d-1}}}S\left(\Omega_{X_1\cdots X_{N+d}}, \mu_{X_1\cdots X_{N+d}}\right)\Bigg)\cdots\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}$$

and repeating the argument for the entire graphs. This yields the desired results.

□

Theorem 3.3.3. *Let μ be the Borel probability measure on Ω defined in the last theorem, and let $\mathbb{P}_\mu$ be the corresponding probability measure on X_Ω. Let $x \in X_\Omega$. Then*

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{-\log_{m_d}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x)))}{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)} \le \omega_1\log_{m_d}(t_\varnothing).$$

Using Theorem 3.2.1 we deduce that

$$\dim_H(X_\Omega) = \omega_1\log_{m_d}(t_\varnothing) = \frac{q-1}{q}\log_{m_d}(t_\varnothing).$$

Proof. Let $\Lambda(n) = \bigcup_{k=1}^{d}\left\{\frac{L_k\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^r} : r\in\mathbb{N}\right\}$. We can reorder the elements of $\Lambda(n)$ as the following increasing sequence :

$$L_d\circ\cdots\circ L_1(n) \ge \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q} \ge \cdots \ge \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-1}}} \ge L_{d-1}\circ\cdots\circ L_1(n) \ge$$

$$
\frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-1}+1}} \geq \frac{L_{d-1}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q} \geq \cdots \geq \frac{L_{d-1}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-2}-p_{d-1}-1}} \geq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-2}}} \geq
$$
$$
\frac{L_{\sigma_{d-2}(d-1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-2}-p_{\sigma_{d-2}(d-1)}}} \geq \frac{L_{\sigma_{d-2}(d-2)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-2}-p_{\sigma_{d-2}(d-2)}}} \geq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-2}+1}} \geq \cdots \geq
$$
$$
\frac{L_{\sigma_{d-2}(d-1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-3}-p_{\sigma_{d-2}(d-1)}-1}} \geq \frac{L_{\sigma_{d-2}(d-2)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-3}-p_{\sigma_{d-2}(d-2)}-1}} \geq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_{d-3}}} \geq \cdots \geq
$$
$$
\frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1}} \geq \frac{L_{\sigma_1(d-1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1-p_{\sigma_1(d-1)}}} \geq \cdots \geq \frac{L_{\sigma_1(1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1-p_{\sigma_1(1)}}} \geq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1+1}} \geq
$$
$$
\frac{L_{\sigma_1(d-1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1-p_{\sigma_1(d-1)}+1}} \geq \cdots \geq \frac{L_{\sigma_1(1)}\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1-p_{\sigma_1(1)}+1}} \geq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1+2}} \geq \cdots
$$

We denote by

$$
\phi_0(n) = L_d\circ\cdots\circ L_1(n) \geq \phi_1(n) \geq \phi_2(n) \geq \dots
$$

this sequence, which is valid for all n. Observe that $\phi_N(n) = \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q^{p_1+1}}$. We now fix $n \geq 1$. Let $S \geq 0$ be the unique integer such that we have

$$
\phi_S(n) < 1 \leq \phi_{S-1}(n) \leq \cdots \leq \phi_0(n).
$$

We can write $S = N + Md + R$, with $M \geq 0$ and $R \in [\![0, d-1]\!]$. Recall formula (3.5). With these notations we get that

$$
\mathbb{P}_\mu(B_n(x)) = \prod_{k=1}^{S} \prod_{\substack{\phi_k(n)<i\leq\phi_{k-1}(n)\\ q\nmid i}} \mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_k\left(x|_{J_i}\right)\right]\right). \tag{3.9}
$$

Now, for all $1 \leq k \leq N-1$, we have

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_k\left(x|_{J_i}\right)\right]\right)\\
&= \frac{1}{t_\varnothing}\prod_{p=2}^{k}\left(\sum_{\chi_p\left(x|_{J_i}\right)'}\cdots\left(\sum_{\chi_N\left(x|_{J_i}\right)'} t_{\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_{p-1}\left(x|_{J_i}\right)\chi_p\left(x|_{J_i}\right)'\cdots\chi_N\left(x|_{J_i}\right)'}\right)^{\omega_N}\cdots\right)^{\omega_p-1}\\
&\cdot\left(\sum_{\chi_{k+1}(x|_{J_i})'}\cdots\left(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_k(x|_{J_i})\chi_{k+1}(x|_{J_i})'\cdots\chi_N(x|_{J_i})'}\right)^{\omega_N}\cdots\right)^{\omega_{k+1}}.
\end{aligned} \tag{3.10}
$$

If $R = 0$ then

$$
\begin{aligned}
&\mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_{N+Md}\left(x|_{J_i}\right)\right]\right)\\
&= \mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_N\left(x|_{J_i}\right)\right]\right)\cdot\prod_{r=1}^{M}\left[t_{\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_{N+rd}\left(x|_{J_i}\right)}\; t_{\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_{N+(r-1)d}\left(x|_{J_i}\right)}^{-\frac{1}{\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1}}}\right.
\end{aligned}
$$

$$\prod_{p=2}^{d}\Bigg(\sum_{\chi_{N+(r-1)d+p}(x|_{J_i})'}\Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'}\Bigg)^{\omega_N}\cdots\Bigg)^{\omega_{N-d+p+1}}\Bigg)^{\omega_{N-d+p}-1}\Bigg],$$

and if $R \in [\![1, d-1]\!]$ then

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_{N+Md+R}\left(x|_{J_i}\right)\right]\right)\\
&=\mu\left(\left[\chi_1\left(x|_{J_i}\right)\cdots\chi_N\left(x|_{J_i}\right)\right]\right)\cdot\prod_{r=1}^{M}\Bigg[t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})}\, t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+(r-1)d}(x|_{J_i})}^{-\frac{1}{\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1}}}\\
&\prod_{p=2}^{d}\Bigg(\sum_{\chi_{N+(r-1)d+p}(x|_{J_i})'}\Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'}\Bigg)^{\omega_N}\cdots\Bigg)^{\omega_{N-d+p+1}}\Bigg)^{\omega_{N-d+p}-1}\Bigg]\\
&\cdot t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+Md}(x|_{J_i})}^{-(\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1}}\\
&\cdot\prod_{p=2}^{R}\Bigg(\sum_{\chi_{N+Md+p}(x|_{J_i})'}\Bigg(\cdots\Bigg(\sum_{\chi_{N+(M+1)d}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+(M+1)d}(x|_{J_i})'}\Bigg)^{\omega_N}\cdots\Bigg)^{\omega_{N-d+p+1}}\Bigg)^{\omega_{N-d+p}-1}\\
&\cdot\Bigg(\sum_{\chi_{N+Md+R+1}(x|_{J_i})'}\cdots\Bigg(\sum_{\chi_{N+(M+1)d}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+(M+1)d}(x|_{J_i})'}\Bigg)^{\omega_N}\cdots\Bigg)^{\omega_{N-d+R+1}}.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

Observe that for $k \in [\![0, d]\!]$ and $r \in \mathbb{N}$ we have $\phi_{N-k+rd}(n) = \frac{\phi_{N-k}(n)}{q^r}$. Thus for $k \in [\![0, d-1]\!]$ and $r \in \mathbb{N}$

$$\phi_{N-k+rd}(n) < i \le \phi_{N-k+rd-1}(n) \Longleftrightarrow \phi_{N-k}(n) < q^r i \le \phi_{N-k-1}(n). \tag{3.12}$$

Now we can develop the expression (3.9) of $\mathbb{P}_\mu(B_n(x))$ and group together the terms with the same number of sums. We get $t_\varnothing^{-1}$ for all $1 \le i \le \phi_0(n)$ such that $q \nmid i$; using property (3.12) we get

$$\prod_{r=0}^{M}\prod_{\substack{1\le i\le\phi_{N+rd-1}(n)\\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})} = \prod_{\substack{\kappa=q^r i\le\phi_{N-1}(n)\\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})},$$

and

$$\prod_{r=0}^{M}\prod_{\substack{1\le i\le\phi_{N+rd}(n)\\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})}^{-(\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1}} = \prod_{\substack{\kappa=q^r i\le\phi_{N}(n)\\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})}^{-(\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1}};$$

we gather the product of terms coming from (3.10) with $k \in [\![1, N-d]\!]$ to get

$$\prod_{k=1}^{N-d}\prod_{\phi_k(n)<i\le\phi_{k-1}(n)}\Bigg(\sum_{\chi_{k+1}(x|_{J_i})'}\cdots\Bigg(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_k(x|_{J_i})\chi_{k+1}(x|_{J_i})'\cdots\chi_N(x|_{J_i})'}\Bigg)^{\omega_N}\cdots\Bigg)^{\omega_{k+1}}$$

$$= \prod_{p=d+1}^{N} \prod_{\substack{\phi_{N-p+1}(n)<i\le\phi_{N-p}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_N(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}};$$

and similarly

$$\prod_{k=N-d+1}^{N-1} \prod_{\phi_k(n)<i\le\phi_{k-1}(n)} \Bigg(\sum_{\chi_{k+1}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_k(x|_{J_i})\chi_{k+1}(x|_{J_i})'\cdots\chi_N(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{k+1}}$$

$$= \prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\phi_{N-p+1}(n)<i\le\phi_{N-p}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_N(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}},$$

that we combine with

$$\prod_{k=0}^{M} \prod_{R=1}^{d-1} \prod_{\substack{\phi_{N+kd+R}(n)<i\le\phi_{N+kd+R-1}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N+kd+R+1}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_{N+(k+1)d}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+(M+1)d}(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-d+R+1}}$$

$$= \prod_{r=1}^{M+1} \prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\phi_{N+rd-p+1}(n)<i\le\phi_{N+rd-p}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}},$$

to get

$$\prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\phi_{N-p+1}(n)<\kappa=q^r i\le\phi_{N-p}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}};$$

finally we combine in a similar way all the remaining terms from the products (3.11) and (3.10) and obtain

$$\prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\kappa=q^r i\le\phi_{N-p+1}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}-1}$$

$$\cdot \prod_{p=d+1}^{N} \prod_{\substack{i\le\phi_{N-p+1}(n) \\ q\nmid i}} \Bigg(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \Bigg(\sum_{\chi_N(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_N(x|_{J_i})'} \Bigg)^{\omega_N} \cdots \Bigg)^{\omega_{N-p+2}-1}.$$

Thus

$$\mathbb{P}_\mu(B_n(x))$$
$$= t_{\varnothing}^{-\#\{i\in[\![1,\phi_0(n)]\!],\ q\nmid i\}} \Bigg(\prod_{\substack{\kappa=q^r i\le\phi_{N-1}(n) \\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})} \Bigg) \Bigg(\prod_{\substack{\kappa=q^r i\le\phi_N(n) \\ q\nmid i}} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})}^{-(\tilde\omega_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1}} \Bigg)$$

$$\cdot \prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\kappa=q^r i \leq \phi_{N-p+1}(n) \\ q\nmid i}} \left(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \left(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+2}-1}$$

$$\cdot \prod_{p=2}^{d} \prod_{\substack{\phi_{N-p+1}(n) < \kappa=q^r i \leq \phi_{N-p}(n) \\ q\nmid i}} \left(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \left(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+2}}$$

$$\cdot \prod_{p=d+1}^{N} \prod_{\substack{i \leq \phi_{N-p+1}(n) \\ q\nmid i}} \left(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \left(\sum_{\chi_{N}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+2}-1}$$

$$\cdot \prod_{p=d+1}^{N} \prod_{\substack{\phi_{N-p+1}(n) < i \leq \phi_{N-p}(n) \\ q\nmid i}} \left(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \cdots \left(\sum_{\chi_{N}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+2}}.$$

For $\kappa = q^r i$ with $q \nmid i$, let

$$\begin{aligned} R_1(\kappa) &= \log_{m_d}\left(t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})}\right), \\ R_2(\kappa) &= \log_{m_d}\left(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \right), \end{aligned}$$

and for $p \in [\![3, d]\!]$, let

$$R_p(\kappa) = \log_{m_d}\left(\sum_{\chi_{N+rd-p+2}(x|_{J_i})'} \left(\cdots \left(\sum_{\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} t_{X_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N+rd}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+3}} \right).$$

For $p \in [\![1, d]\!]$ and $n \geq 1$ let

$$u_n^p = \frac{1}{n} \sum_{\kappa=1}^{n} R_p(\kappa)$$

and for $p \in [\![d+1, N]\!]$ let

$$u_n^p = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n,\ q\nmid i} \log_{m_d}\left(\sum_{\chi_{N-p+2}(x|_{J_i})'} \left(\cdots \left(\sum_{\chi_{N}(x|_{J_i})'} t_{\chi_1(x|_{J_i})\cdots\chi_{N}(x|_{J_i})'} \right)^{\omega_N} \cdots \right)^{\omega_{N-p+3}} \right).$$

This gives us N bounded sequences. We can now write

$$\begin{aligned} -\log_{m_d}(\mathbb{P}_\mu(B_n(x))) = (\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1} &\lfloor \phi_N(n) \rfloor u^1_{\lfloor \phi_N(n) \rfloor} - \lfloor \phi_{N-1}(n) \rfloor u^1_{\lfloor \phi_{N-1}(n) \rfloor} \\ &+ \sum_{k=0}^{N-2} \left(\lfloor \phi_{k+1}(n) \rfloor u^{N-k}_{\lfloor \phi_{k+1}(n) \rfloor} - \omega_{k+2} \lfloor \phi_k(n) \rfloor u^{N-k}_{\lfloor \phi_k(n) \rfloor} \right) \\ &+ \#\{i \in [\![1, \phi_0(n)]\!]\} \log_{m_d}(t_\varnothing). \end{aligned}$$

Furthermore some basic recursive computations give us the values of the exponents

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sum_{p=1}^{j_d} \delta_p^{d,d-1} + \sum_{s=2}^{d-1} \sum_{p=p_s+1}^{p_{s-1}} \sum_{t=s-1}^{d-1} \delta_p^{s,t} + \sum_{p=p_1+1}^{\infty} \sum_{t=0}^{d-1} \delta_p^{1,t} = \frac{q-1}{q} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{i \leq L_d \circ \cdots \circ L_1(n) : q \nmid i\right\}}{L_d \circ \cdots \circ L_1(n)},\end{aligned}$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 - \delta_1}{\omega_1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{i \leq \frac{L_d\circ\cdots\circ L_1(n)}{q} : q \nmid i\right\}}{\#\left\{i \leq L_d \circ \cdots \circ L_1(n) : q \nmid i\right\}} = \frac{1}{q}, \quad \omega_3 = \frac{\omega_1 - \delta_1 - \delta_2}{\omega_1 - \delta_1} = \frac{1}{q},$$

$$\omega_4 = \cdots = \omega_{p_{d-1}+2} = \frac{1}{q}, \quad \omega_{p_{d-1}+3} = \gamma_d q^{p_{d-1}},$$

$$\omega_{p_{d-1}+4} = \frac{1}{\gamma_d q^{p_{d-1}+1}}, \quad \ldots\ , \ \omega_k = \frac{\omega_1 - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \delta_i}{\omega_1 - \sum\limits_{i=1}^{k-2} \delta_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\#\left\{i \leq \phi_{k-1}(n) : q \nmid i\right\}}{\#\left\{i \leq \phi_{k-2}(n) : q \nmid i\right\}}, \quad \ldots$$

$$\omega_N = q^{p_{\sigma_1(1)} - p_{\sigma_1(2)}} \frac{\prod_{i=\sigma_1(1)+1}^{d} \gamma_i}{\prod_{i=\sigma_1(2)+1}^{d} \gamma_i}, \quad \omega_{N+1} = \frac{q^{p_1 - p_{\sigma_1(1)}}}{(q-1)\prod_{\sigma_1(1)+1}^{d} \gamma_i}.$$

This yields

$$(\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1} = q^{p_{\sigma_1(1)}+1} \prod_{i=\sigma_1(1)+1}^{d} \gamma_i$$

and the asymptotic equivalences

$$\lfloor \phi_{N-1}(n) \rfloor \sim (\tilde{\omega}_{N-d+1}\omega_{N+1})^{-1} \lfloor \phi_N(n) \rfloor,$$

$$\lfloor \phi_{k+1}(n) \rfloor \sim \omega_{k+2} \lfloor \phi_k(n) \rfloor$$

for all $k \in [\![0, N-2]\!]$, when $n \to +\infty$. We conclude by using again lemma A.1.8.

□

Theorem 3.3.4. *For $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$ let*

$$\mathrm{Pref}_{n_1,\ldots,n_d}(\Omega) = \left\{ u \in \prod_{i=1}^{d} ([\![0, m_i - 1]\!] \times \cdots \times [\![0, m_d - 1]\!])^{n_i} : \Omega \cap [u] \neq \varnothing \right\}.$$

We have

$$\dim_M(X_\Omega) = \sum_{p=1}^{j_d} \delta_p^{d,d-1} |\mathrm{Pref}_{0,\ldots,0,p}(\Omega)|$$

$$+\sum_{s=2}^{d-1}\sum_{p=p_s+1}^{p_{s-1}}\sum_{t=s-1}^{d-1}\delta_p^{s,t}|\mathrm{Pref}_{0,\dots,0,p-p_s^{s,t},p_s^{s,t}-p_{s+1}^{s,t},\dots,p_{d-2}^{s,t}-p_{d-1}^{s,t},p_{d-1}^{s,t}}(\Omega)|$$

$$+\sum_{p=p_1+1}^{\infty}\sum_{t=0}^{d-1}\delta_p^{1,t}|\mathrm{Pref}_{p-p_1^{1,t},p_1^{1,t}-p_2^{1,t},\dots,p_{d-2}^{1,t}-p_{d-1}^{1,t},p_{d-1}^{1,t}}(\Omega)|.$$

Proof. The proof follows the same path as in the two-dimensional case. We leave it to the reader, along with the characterization of the equality case with the Hausdorff dimension. □

Appendice

Lemma A.1.5. *Let* (Z_n) *be a sequence of non-negative random variables on a probability space* $(\Omega, \mathbb{P})$*. Then almost surely*

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(Z_n)}{n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \frac{\log(\mathbb{E}[Z_n])}{n}.$$

Proof. See [6, Lemme C.1]. $\square$

Lemma A.1.6. *Let* $p_1, \ldots, p_m \geq 0$ *with* $\sum_{i=1}^m p_1 = 1$*, and let* $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{R}$*. Then*

$$\sum_{i=1}^m p_i(-\log(p_i) + q_i) \leq \log\left(\sum_{i=1}^m e^{q_i}\right),$$

with equality if and only if $p_i = \frac{e^{q_i}}{\sum_{j=1}^m e^{q_j}}$ *for all* i*.*

Proof. See [16, Corollary 1.5].

$\square$

Lemma A.1.7. *Let* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *be a probability space,* $(m_n) \in (\mathbb{N}^*)^{\mathbb{N}^*}$ *be a strictly increasing sequence such that* $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{m_n^2} < +\infty$ *and for all* $n \geq 1$ *let* $(X_{i,n})_{i\in[\![1,m_n]\!]}$ *be a family of independent centered random variables on* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$*. Assume that there exists* $K \geq 0$ *such that*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall i \in [\![1, m_n]\!],\ \mathbb{E}\left[X_{i,n}^4\right] \leq K.$$

Then $\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n} X_{i,n} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} 0$*.*

Proof. Fix $n \geq 1$. We have

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m_n} X_{i,n}\right)^4\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m_n} X_{i,n}^4 + 6\sum_{i<j} X_{i,n}^2 X_{j,n}^2\right] \\
&\leq m_n K + 3m_n(m_n-1)K \\
&\leq 3Km_n^2
\end{aligned}$$

by using independence and Jensen's inequality. Now $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}\right)^4$ is a well-defined random variable taking values in $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$. Moreover by the monotone convergence theorem

$$\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}\right)^4\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n^4}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}\right)^4\right]\leq 3K\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m_n^2}<+\infty.$$

Thus $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}\right)^4<+\infty$ a.s and $\frac{1}{m_n}\sum_{i=1}^{m_n}X_{i,n}\xrightarrow[n\to\infty]{\text{a.s}}0$.

□

Lemma A.1.8. *Let $p\in\mathbb{N}^*$ and for $1\leq j\leq p$ let $(u_n^j)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ be p bounded sequences with*

$$\lim_{n\to\infty}u_{n+1}^j-u_n^j=0.$$

For $j\in[\![1,p]\!]$ let $\phi_j,\psi_j:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ be such that

$$\exists c_j,r_j>0,\ \exists A_j,B_j\in\mathbb{N},\ \forall n,\ |\phi_j(n)-\lceil r_jn\rceil|\leq A_j \text{ and } |\psi_j(n)-\lceil c_jn\rceil|\leq B_j.$$

Then we have

$$\liminf_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{p}\left(u_{\phi_j(n)}^j-u_{\psi_j(n)}^j\right)\leq 0.$$

Proof. Observe that for all j and n we have $\lceil r_jn\rceil\in\{\phi_j(n)+k,\ |k|\leq A_j\}$ and $\lceil c_jn\rceil\in\{\psi_j(n)+k,\ |k|\leq B_j\}$. Thus

$$|u_{\phi_j(n)}^j-u_{\lceil r_jn\rceil}^j|\leq\max_{|k|\leq A_j}|u_{\phi_j(n)}^j-u_{\phi_j(n)+k}^j|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

using the hypothesis on u^j above. Similarly $|u_{\psi_j(n)}^j-u_{\lceil c_jn\rceil}^j|\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. Now conclude with [20, Lemma 5.4] or [28, Lemma 4.1].

□

Lemma A.1.9. *Let μ be a Borel probability measure on Σ_{m_1,m_2}. Suppose that μ is exact dimensional with respect to the metric*

$$\tilde{d}((x_k,y_k)_{k=1}^{\infty},(u_k,v_k)_{k=1}^{\infty})=e^{-\min\{k\geq1,\ (x_k,y_k)\neq(u_k,v_k)\}},$$

with dimension δ. Denote by δ_2 the lower Hausdorff dimension of $\pi_*\mu$ with respect to the metric induced by $\tilde{d}$, and let $\underline{\delta_1}$ and $\overline{\delta_1}$ be the essential infimum and the essential supremum of the lower Hausdorff dimensions of the conditional measures μ^y with respect to $\tilde{d}$ again, where μ_y is obtained from the disintegration of μ with respect to $\pi_*\mu$. Then, with respect to *the metric d, for μ-almost every point z we have*

$$\frac{\overline{\delta_1}}{\log(m_1)} + \frac{\delta_2}{\log(m_2)} \leq \underline{\dim}_{loc}(\mu, z) \leq \overline{\dim}_{loc}(\mu, z) \leq \frac{\delta}{\log(m_2)} - \left(\frac{1}{\log(m_2)} - \frac{1}{\log(m_1)}\right) \underline{\delta_1}.$$

So, if $\underline{\delta_1} = \overline{\delta_1}$ and $\delta = \underline{\delta_1} + \delta_2$ then μ is exact dimensional with respect to d.

Proof. The first inequality follows from the proof of a result of Marstrand (see [16, Theorem 5.8]), while the second one can be deduced from the proof of [19, Theorem 2.11]. □

Bibliographie

[1] K. Barański. Hausdorff dimension of the limit sets of some planar geometric constructions. *Adv. Math.*, 210 :215-245, 2007.

[2] B. Bärány, M. Hochman, and A. Rapaport. Hausdorff dimension of planar self-affine sets and measures. *Invent. Math.*, 216 :601-659, 2019.

[3] B. Bärány, M. Rams, and K. Simon. On the dimension of triangular self-affine sets. *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 39 :1751–1783, 2019.

[4] J. Barral. Generalized vector multiplicative cascades. *Adv. in Appl. Prob.*, 33 :874-895, 2002.

[5] J. Barral and D.-J. Feng. Non-uniqueness of ergodic measures with full hausdorff dimension on gatzouras-lalley carpet. *Nonlinearity*, 24 :2563-2567, 2011.

[6] J. Barral and D.-J. Feng. Projections of random Mandelbrot measures. *Adv. Math.*, 325 :640-718, 2018.

[7] J. Barral and D.-J. Feng. Dimensions of random statistically self-affine sierpinski sponges in $\mathbb{R}^k$. *J. Math. Pures Appl.*, 149 :254-303, 2021.

[8] J. Barral and S. Seuret. Renewal of singularity sets of random self-similar measures. *Adv. Appl. Probab.*, 39 :162–188, 2007.

[9] T. Bedford. Crinkly curves, Markov partitions and box dimension in self-similar sets. Ph.D. Thesis. 1984.

[10] G. Brunet. Dimensions of "self-affine sponges" invariant under the action of multiplicative integers. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, À paraître.

[11] T. Das and D. Simmons. The hausdorff and dynamical dimensions of self-affine sponges : a dimension gap result. *Invent. Math.*, 210 :85-134, 2017.

[12] F. M. Dekking and G.R. Grimmett. Superbranching processes and projections of random Cantor sets. *Probab. Theory Related Fields*, 78 :335-355, 1988.

[13] R. Durrett and T.-M. Liggett. Fixed points of the smoothing transformation. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 64 :275–301, 1983.

[14] K. Falconer. Projections of random Cantor sets. *J. Theoret. Probab.*, 2 :65-70, 1989.

[15] K. Falconer. *Fractal Geometry : Mathematical Foundations and Applications.* Wiley, 1990.

[16] K. Falconer. *Techniques in fractal geometry.* Wiley, 1997.

[17] A.-H. Fan, K.-S. Lau, and H. Rao. Relationships between different dimensions of a measure. *Monatsh. Math.*, 135 :191–201, 2002.

[18] A.-H. Fan, L. Liao, and J.-H. Ma. Level sets of multiple ergodic averages. *Monatsh. Math.*, 168 :17-26, 2012.

[19] D.-J. Feng and H. Hu. Dimension theory of iterated function systems. *Comm. Pure Appl. Math.*, 62 :1435-1500, 2009.

[20] D.-J. Feng and W. Huang. Variational principle for weighted topological pressure. *J. Math. Pures Appl.*, 106 :411-452, 2016.

[21] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Math. Sys. Th.*, 1 :1-49, 1967.

[22] D. Gatzouras and S. Lalley. Hausdorff and box dimensions of certain self-affine fractals. *Indiana Univ. Math. J.*, 41 :533-568, 1992.

[23] D. Gatzouras and S. Lalley. Statistically self-affine sets : Hausdorff and box dimensions. *J. Theoret. Probab.*, 7 :437-468, 1994.

[24] M. Hochman. Dimension theory of self-similar sets and measures. *Proc. Int. Cong. of Math. - 2018 Rio de Janeiro*, 3 :1967-1990, 2018.

[25] M. Hochman and A. Rapaport. Hausdorff dimension of planar self-affine sets and measures with overlaps. *J. Eur. Math. Soc.*, 24 :2361–2441, 2022.

[26] A. Kaënmäki and M. Vilppolainen. Dimension and measures on sub-self-affine sets. *Monatsh. Math.*, 161 :271-293, 2010.

[27] J.-P. Kahane and J. Peyrière. Sur certaines fmmartingales de B. Mandelbrot. *Adv. Math.*, 22 :131-145, 1976.

[28] R. Kenyon and Y. Peres. Measures of full dimension on affine-invariant sets. *Ergod. Th. and Dyn. Sys.*, 16 :307-323, 1996.

[29] R. Kenyon, Y. Peres, and B. Solomyak. Hausdorff dimension for fractals invariant under multiplicative integers. *Ergod. Th. and Dyn. Syst.*, 32 :1567-1584, 2012.

[30] Q. Liu. Asymptotic properties and absolute continuity of laws stable by random weighted mean. *Stochastic Process. Appl.*, 95 :83–107, 2001.

[31] B.B. Mandelbrot. Intermittent turbulence in self-similar cascades, divergence of high moments and dimension on the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62 :331-358, 1974.

[32] B.B. Mandelbrot. Multiplications aléatoires itérées et distributions invariantes par moyennes pondérées. *C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A 278*, pages 289-292, 1974.

[33] C. McMullen. Hausdorff dimension of general Sierpiński carpets. *Nagoya Math. J.*, 96 :1-9, 1984.

[34] S.-M. Ngai. A dimension result arising from the L^q-spectrum of a measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 125 :2943–2951, 1997.

[35] K. Oliveira and M. Viana. *Foundations of ergodic theory.* Cambridge University Press, 2016.

[36] Y. Peres, J. Schmeling, S. Seuret, and B. Solomyak. Dimensions of some fractals defined via the semigroup generated by 2 and 3. *Israel J. Math.*, 199 :687-709, 2012.

[37] J. Peyrière. Mesures singulières associées à des découpages aléatoires d'un hypercube. *Colloquium Math.*, 51 :267–276, 1987.