

**UNIVERSITÉ PARIS XIII - SORBONNE PARIS NORD**

**École doctorale Sciences, Technologies, Santé Galilée**

---

**Production d'un gaz de Bose unidimensionnel, résonances  
de Feshbach micro-onde et dynamique hors équilibre**

---

**THÈSE DE DOCTORAT**

présentée par

**Manon BALLU**

Laboratoire de Physique des Lasers

pour l'obtention du grade de

**DOCTEUR EN PHYSIQUE**

soutenue le 16 septembre 2024 devant le jury d'examen constitué de :

Mme AMY-KLEIN Anne, Université Sorbonne Paris Nord, Présidente du jury

M. BEUGNON Jérôme, Sorbonne Université, Rapporteur

M. PAVLOFF Nicolas, Université Paris-Saclay, Rapporteur

Mme BOUCHOULE Isabelle, Institut d'Optique, Examinatrice

M. TREUTLEIN Philipp, Université de Bâle, Examineur

Mme PERRIN Hélène, Université Sorbonne Paris Nord, Directrice de thèse

M. PERRIN Aurélien, Université Sorbonne Paris Nord, Co-encadrant de thèse



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>7</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>11</b>
<b>1 Gaz quantiques et résonances de Feshbach</b>	<b>17</b>
1.1 Gaz de Bose dégénéré . . . . .	17
1.1.1 Condensat de Bose-Einstein . . . . .	17
1.1.2 Gaz de Bose unidimensionnel . . . . .	22
1.1.3 Transition entre le régime tridimensionnel et le régime unidimensionnel	28
1.2 Interactions entre atomes froids . . . . .	29
1.2.1 Bases de la théorie de la diffusion et des collisions . . . . .	29
1.2.2 Résonances de Feshbach . . . . .	33
1.3 Conclusion . . . . .	36
<b>2 Montage expérimental</b>	<b>37</b>
2.1 Aperçu du montage expérimental . . . . .	37
2.1.1 Système laser et montage optique . . . . .	38
2.1.2 Premières étapes de refroidissement . . . . .	42
2.1.3 Transport magnétique . . . . .	45
2.2 Imagerie par absorption dans l'enceinte de la puce . . . . .	46
2.2.1 Principe . . . . .	47
2.2.2 Configuration . . . . .	47
2.2.3 Objectif de faible grandissement . . . . .	49
2.2.4 Objectif de grandissement 1,8 . . . . .	49
2.3 Puce à atomes . . . . .	49
2.3.1 Principe du piège magnétique créé par la puce . . . . .	49
2.3.2 Description de la puce à atomes . . . . .	52
2.3.3 Choix de l'alimentation de la puce et risques d'endommagement . . . . .	54
2.4 Fil en Z . . . . .	56
2.5 Bobines de champ magnétique uniforme pour les pièges magnétiques . . . . .	58
2.5.1 Conception des bobines . . . . .	58
2.5.2 Coupure des champs magnétiques . . . . .	60

2.6	Refroidissement par évaporation . . . . .	61
2.7	Modification du fil Z et reconstruction de l'expérience . . . . .	64
2.7.1	Difficultés lors du refroidissement par évaporation . . . . .	65
2.7.2	Conception d'un nouveau fil en Z . . . . .	68
2.7.3	Reconstruction de l'expérience . . . . .	70
2.8	Conclusion . . . . .	74
<b>3</b>	<b>Du condensat 3D au quasi-condensat 1D</b>	<b>75</b>
3.1	Obtention du condensat de Bose-Einstein . . . . .	75
3.1.1	Optimisation de la séquence de transfert vers le piège magnétique de la puce et du refroidissement par évaporation . . . . .	75
3.1.2	Comparaison de la situation avant et après reconstruction de l'expérience	78
3.1.3	Condensat de Bose-Einstein . . . . .	80
3.2	Fréquences d'oscillation dans le piège de la puce . . . . .	81
3.3	Rugosité du potentiel . . . . .	84
3.4	Calibration du nombre d'atomes . . . . .	86
3.5	Thermométrie . . . . .	88
3.5.1	Spectre de puissance . . . . .	89
3.5.2	Résultats expérimentaux . . . . .	89
3.6	Transition du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel . . . . .	90
3.7	Conclusion . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Résonances de Feshbach micro-onde</b>	<b>95</b>
4.1	Enjeux expérimentaux . . . . .	96
4.2	Guide micro-onde . . . . .	97
4.3	Calibration de l'amplitude micro-onde et optimisation de la position des atomes	99
4.3.1	Rapprocher les atomes du guide d'ondes . . . . .	99
4.3.2	Théorie sur les oscillations de Rabi . . . . .	100
4.3.3	Résultats expérimentaux pour les oscillations de Rabi . . . . .	102
4.4	Transitions vers les états moléculaires . . . . .	108
4.4.1	Spectroscopies micro-onde des transitions moléculaires . . . . .	108
4.4.2	Comparaison avec un modèle simple pour l'hamiltonien . . . . .	109
4.5	Pertes d'atomes au voisinage des résonances moléculaires . . . . .	116
4.6	Déplacement des niveaux avec la puissance micro-onde . . . . .	121
4.6.1	Déplacement des fréquences de résonance moléculaires . . . . .	121
4.6.2	Excitation du condensat et pertes d'atomes . . . . .	122
4.7	Effet des résonances sur la longueur de diffusion ? . . . . .	124
4.8	Conclusion . . . . .	126
<b>5</b>	<b>Dynamique hors équilibre d'un gaz de Bose unidimensionnel dans une boîte</b>	<b>127</b>
5.1	Introduction . . . . .	127
5.1.1	L'expérience du laboratoire Cavendish . . . . .	127
5.1.2	Motivations . . . . .	128
5.2	Cadre théorique . . . . .	129
5.2.1	Cheminement . . . . .	129
5.2.2	Turbulence d'onde faible . . . . .	130
5.2.3	Turbulences intégrables . . . . .	130
5.2.4	Solitons . . . . .	131

5.2.5	Équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle adimensionnée . . . . .	131
5.2.6	Transformée de diffusion inverse . . . . .	131
5.3	Méthode . . . . .	133
5.4	Observations sur le profil de densité et l'énergie . . . . .	135
5.4.1	Profils de densité . . . . .	135
5.4.2	Énergie . . . . .	135
5.5	Observations sur la distribution en impulsion . . . . .	139
5.5.1	Remarques générales . . . . .	139
5.5.2	Lois de puissance . . . . .	143
5.5.3	Queue de la distribution en impulsion . . . . .	145
5.5.4	Robustesse de la distribution en impulsion . . . . .	146
5.6	Analyse des solitons du système à l'aide de la transformée de diffusion inverse	147
5.6.1	Spectre de Lax pour une boîte . . . . .	148
5.6.2	Identification des solitons . . . . .	149
5.6.3	Nombre de solitons . . . . .	151
5.6.4	Vitesse du son et vitesse des solitons . . . . .	152
5.6.5	Évolution du nombre de solitons et de leurs vitesses au cours du temps.	153
5.7	Analyse de la distribution en impulsion . . . . .	155
5.7.1	Début de la loi en $k^{-2}$ . . . . .	155
5.7.2	Début de la deuxième loi de puissance . . . . .	156
5.7.3	Queue de la distribution en impulsion . . . . .	157
5.8	Discussion pour la mise en œuvre expérimentale . . . . .	158
5.9	Conclusion . . . . .	160
<b>Conclusion</b>		<b>161</b>
<b>Annexes</b>		<b>165</b>
<b>A Calibration des champs magnétiques des bobines</b>		<b>167</b>
<b>B Simulations des champs magnétiques du fil en Z et de la puce</b>		<b>169</b>
<b>Bibliographie</b>		<b>172</b>



# Remerciements

La thèse aura été pour moi à la fois une aventure très enrichissante et passionnante, avec des moments de joie intense et d'enthousiasme débordant lorsque les choses marchaient enfin, mais aussi une expérience éprouvante et pleine de doutes, avec une succession sans fin de problèmes à résoudre. L'opiniâtreté est loin d'être suffisante pour surmonter ces épreuves et mieux vaut être bien accompagné! À ce titre, je me dois de remercier les nombreuses personnes qui m'ont aidée, tant sur le plan scientifique que moral.

Tout d'abord, je remercie les membres de mon jury, sans qui cette thèse n'aurait pas pu aboutir. Merci à Jérôme Beugnon et Nicolas Pavloff pour leur lecture attentive de mon manuscrit en tant que rapporteurs de ma thèse. Je remercie également Isabelle Bouchoule, Philipp Treutlein et Anne Amy-Klein pour avoir accepté d'être examinateurs. Je souhaite aussi souligner la grande efficacité d'Anne à résoudre des problèmes en tant que directrice du laboratoire.

Mes remerciements s'adressent ensuite aux membres de l'équipe BEC, dont j'ai partagé le quotidien pendant quatre ans.

Un immense merci à ma directrice de thèse Hélène Perrin pour m'avoir accueillie dans son équipe. J'avais été initialement frappée par tes qualités d'enseignante, avec tes explications limpides et ta sympathie pendant les cours de Master 2. J'ai pu découvrir en thèse ta grande rigueur scientifique, qui s'accompagne d'idées toujours pertinentes, ainsi que tes qualités humaines d'écoute. Je soupçonne que tes journées durent en réalité 48 h puisque tu as toujours réussi à m'accorder du temps dès que j'en avais besoin, malgré une charge monstrueuse de travail. Sache que je te tiens en très haute estime.

Je remercie Aurélien Perrin pour avoir co-encadré ma thèse. Merci de m'avoir très patiemment formée sur l'expérience sodium, j'ai passé l'une des meilleures années de ma vie en première année de thèse. Merci aussi de ne jamais m'avoir mis de pression et d'avoir répondu à toutes mes questions sans que je ne me sente jamais jugée. La bienveillance dont tu as fait preuve face à mon manque de confiance en moi a été précieuse. Enfin, merci d'avoir financé une quatrième année de thèse, qui a permis d'enrichir considérablement mon travail en termes de résultats et me permettra de continuer plus sereinement mon aventure dans la recherche.

Je souhaite ensuite remercier Thomas Badr qui a été très présent sur l'expérience, notamment durant la période de reconstruction qui a été très difficile pour moi. Je ne suis pas sûre que j'aurais été au bout de ma thèse si tu n'avais pas été là. Ta contribution a été absolument

indispensable pour faire fonctionner cette expérience et le soin que tu mets dans ton travail nous permet de te faire confiance les yeux fermés. J'ai énormément appris à tes côtés sur tout un tas de points techniques si importants au bon fonctionnement de ces expériences.

Je remercie aussi Romain Dubessy pour avoir débloqué la situation plus d'une fois grâce à toutes ses idées lumineuses, qui vont de la résolution de problèmes expérimentaux très techniques aux raisonnements théoriques les plus abstraits. Je te remercie en particulier pour l'aide considérable que tu as apportée à mon projet de simulations numériques malgré un emploi du temps bien chargé. On aura bien rigolé ensemble et je te souhaite une bonne continuation en « province » à Marseille.

Merci à Laurent Longchambon, qui m'a accompagnée pour mes premiers pas dans l'enseignement avec de précieux conseils et beaucoup d'encouragements. Merci aussi d'avoir pris le temps de participer aux « réunions de crise » de l'expérience sodium et d'avoir égayé les repas avec tes histoires.

Enfin, je remercie bien évidemment tous les membres non permanents de l'équipe, sans qui la thèse aurait été bien moins agréable. Merci à David pour tout le soutien qu'il m'a apporté dans les moments difficiles et pour avoir animé mon quotidien pendant les deux premières années. Merci à Rishabh pour m'avoir fait tant rire avec son sacré tempérament. Tu es maintenant dans la dernière ligne droite, promis on survit ! Merci à Matthieu pour toutes les discussions intéressantes qu'on a eues et bon courage pour la suite de ta thèse, il faut croire en toi et en tes rêves. Merci à Bastien qui a pris la relève sur la « manip' sodium » et avec qui j'ai eu le plaisir de travailler pendant mes derniers mois sur l'expérience. Tu m'as impressionnée par ta maîtrise technique et j'envie ton absence de stress. Zhibin, même si nous n'avons pas eu le temps de travailler ensemble je suis persuadée qu'avec toi l'expérience est entre de bonnes mains.

Je remercie chaleureusement Anna Minguzzi pour m'avoir lancée sur un projet de simulations numériques dans un moment où l'expérience semblait bloquée et pour avoir consacré du temps à ce projet jusqu'à son terme. Ça a été très enrichissant pour moi d'avoir un aperçu du côté théorique de la recherche. Merci également aux membres de l'équipe GQM pour les discussions scientifiques intéressantes et en particulier à Benjamin Pasquiou qui venait me sortir de la salle d'expérience le soir et qui m'apportait gentiment son aide au passage.

L'enseignement aura été un grand « bol d'air frais » pendant ma thèse et je n'imaginai pas y prendre autant de plaisir. En plus de Laurent, je me dois de remercier Christophe Daussy et Paolo Pedri qui m'ont accompagnée dans cette aventure, ainsi qu'Andrea avec qui j'ai préparé mes premiers travaux pratiques. J'ai une pensée particulière pour les trois promotions de L3 PC auxquelles j'ai enseigné et dont la gratitude m'a beaucoup touchée.

Un laboratoire ne pourrait pas tourner sans les ateliers, surtout dans les périodes de construction d'une expérience et je remercie donc Albert Kaladjian et Matthieu Goncalves de l'atelier de mécanique ainsi que Fabrice Wiotte, Haniffe Mouhamad et Loïc Malinge de l'atelier d'électronique. J'ai été impressionnée par la minutie du travail de Thierry Billeton de l'atelier d'optique, qui nous a été d'une très grande aide lors du changement de puce et je lui souhaite une bonne retraite. Merci également aux informaticiens du laboratoire Stéphane Simonazzi et Arnaud Lefèvre.

Je souhaite remercier les personnels administratifs du laboratoire qui nous facilitent la vie et nous font gagner un temps précieux : Alexandre Sourie, Belaïd Nait-Sidnas, Carole Grangier, Maryse Medina et Chrystel Redon. Merci aussi à la directrice de la recherche

Alexandra Lépine dont la disponibilité et la capacité à répondre à quasiment n'importe quelle question m'ont été d'une grande aide.

Ma thèse aurait été bien maussade sans la compagnie des autres doctorants du laboratoire. Merci notamment à Ali et Louis de m'avoir pris sous leur aile lors de mon arrivée au laboratoire, pendant cette étrange période du covid. J'ai rapidement été rejointe par Yara et Tatiana qui sont venues féminiser les rangs du laboratoire. Merci à Ayoub Marylise, Agathe, Yuhao, Pauline, Esther, Isabelle, Julien, Mamadou, Ayoub II, Hippolyte, Matthieu et Husain pour la bonne ambiance des repas du vendredi ou pour ces matchs enflammés de volley !

Merci à ma bande de copains Corentin, Camille, Guillaume, Elyes, Amanda, Xavier, Emma, Zéphyr, Aaron et Quentin de m'avoir supportée pendant cette période où je n'ai pas toujours été facile à vivre, de m'avoir patiemment écoutée et changé les idées. Un grand merci à Xavier qui a en partie relu mon manuscrit et à Yehudi qui m'a fait répéter mon séminaire en Allemagne. Vos mots toujours justes ont été salvateurs dans les moments de doutes et de découragement. Merci aussi à Géraud pour cette incroyable carte géante de puce à atomes que je vais encadrer. Merci à mes copines de toujours Aurore, Lolita et Maïlys d'avoir tout fait pour venir à ma soutenance de thèse malgré la distance.

Je termine mes remerciements par ma famille. Merci papa d'avoir suivi mes aventures pendant ma thèse en 180 s et d'être venu à ma soutenance, je sais que tu es fier de moi. Merci à mamie Simone et papi René de m'avoir requinquée avec des bons petits plats le week-end et de toujours vous inquiéter pour moi. J'étais si contente de voir les étoiles dans vos yeux quand je vous ai vulgarisé ma thèse et je suis heureuse que vous ayez pu être présents à ma soutenance. Merci pour le pot et les dix-huit bouteilles de Vouvray ! Merci à mon petit frère Théo qui me permet de prendre du recul et de dédramatiser les choses. Tu aides tout le monde avec beaucoup de pudeur sans jamais te plaindre et c'est une qualité rare. Plein de courage pour la fin de ta thèse ! Un immense merci à ma maman qui a été un soutien incommensurable dans les pires moments de cette thèse. Merci de m'avoir écoutée avec une patience infinie, d'avoir calmé mes angoisses, de m'avoir remise sur pieds à la fin de la rédaction quand j'ai eu peur de ne plus être capable de continuer. Merci aussi d'avoir partagé mon enthousiasme dans les moments joyeux qui ont heureusement aussi été nombreux et d'avoir fait tant d'efforts pour essayer de comprendre ce que je faisais.

Enfin, finalement merci à Antoine. Il faudrait sûrement trois pages supplémentaires de ces remerciements déjà beaucoup trop longs pour te remercier à la hauteur de l'aide que tu m'as apportée au quotidien. Tu possèdes une patience légendaire qui rivalise avec ton calme infini et qui m'aident à gérer ma grande anxiété et mes débordements. Merci d'avoir quasiment tout géré à la maison, ce qui m'a permis de me concentrer sur ma thèse et de me reposer lorsque je rentrais épuisée le soir. Merci de m'avoir aidée sur le plan scientifique avec ta capacité de calcul, tes compétences en éléments finis et ta rapidité à trouver les nombreux bugs dans mes codes. J'admire beaucoup ta grande vivacité d'esprit. Merci aussi de m'avoir fait répéter encore et encore et encore mes présentations jusqu'à ce qu'elles ressemblent à quelque chose et d'avoir relu entièrement mon manuscrit. Merci de m'avoir toujours encouragée et d'avoir cru en moi. Tu méritais de posséder une demi agrégation de physique, tu mérites maintenant de posséder une demi thèse. Je conclus avec quelque chose que je ne te dis pas assez : je t'aime fort.



# Introduction Générale

À température ambiante, un gaz d'atomes est bien décrit par la physique classique. Chaque particule peut être caractérisée par sa position et sa vitesse, et la distribution en énergie pour un gaz parfait est donnée par la distribution de Maxwell-Boltzmann :

$$f_{\text{MB}}(E) \propto e^{-E/k_B T} \quad (1)$$

avec  $E$  l'énergie cinétique,  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température. À très basse température cette description n'est plus correcte et il est nécessaire d'utiliser une description quantique. Il faut en effet tenir compte de la nature ondulatoire de la matière, ce qui a été introduit par Louis de Broglie en 1923 [1]. On ne peut alors plus associer une position donnée aux atomes, qui se trouvent avec une certaine probabilité sur une zone de l'espace où l'amplitude de l'onde est importante. La taille de cette zone est donnée par la longueur d'onde thermique de de Broglie :

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}} \quad (2)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite et  $m$  la masse de l'atome. Plus la température est basse, plus cette longueur d'onde est grande. Lorsque la longueur d'onde thermique de de Broglie devient de l'ordre de la distance moyenne entre atomes, c'est-à-dire pour une densité dans l'espace des phases  $n\lambda_{\text{dB}}^3 \sim 1$ , avec  $n$  la densité d'atomes, on doit utiliser les statistiques quantiques. Le comportement est en effet très différent selon la nature fermionique ou bosonique des particules. Les fermions sont des particules de spin demi-entier et obéissent au principe d'exclusion de Pauli [2], qui empêche deux particules de se trouver dans le même état quantique, tandis que les bosons sont des particules de spin entier qui peuvent se trouver simultanément dans le même état quantique. Le comportement des bosons a été décrit par les physiciens Satyendra Nath Bose pour des photons [3] et généralisé par Albert Einstein à des particules de masse non nulle [4]. Les deux physiciens ont donné leurs noms à la statistique de Bose-Einstein, où le nombre moyen de particules dans un état quantique  $\lambda$  est donné par :

$$\bar{N}_\lambda = \frac{1}{e^{(\epsilon_\lambda - \mu)/k_B T} - 1}, \quad (3)$$

avec  $\epsilon_\lambda$  l'énergie de l'état  $\lambda$  et  $\mu$  le potentiel chimique. En 1925, Einstein prévoit le phénomène de condensation de Bose-Einstein [5] : en dessous d'une température critique les particules s'accumulent dans l'état de plus basse énergie. Cet état est alors peuplé par une fraction macroscopique des particules.

Le condensat de Bose-Einstein est longtemps resté un sujet d'étude théorique. La première réalisation expérimentale de cet état dans des gaz atomiques n'aura en effet lieu qu'en 1995, 70 ans après les prédictions d'Einstein [6, 7]. L'une des difficultés vient du fait qu'à basse température la matière est généralement sous forme solide et non pas gazeuse. En travaillant à très basse densité il est cependant possible de conserver la phase gazeuse, mais il faut alors atteindre des températures très proches du zéro absolu, de l'ordre du microkelvin, pour atteindre une densité dans l'espace des phases  $n\lambda_{dB}^3$  de l'ordre de l'unité. Le refroidissement des atomes à ces températures est notamment rendu possible grâce à l'utilisation du laser, mis au point dans les années 1960. Les techniques de refroidissement laser d'atomes neutres, qui utilisent la pression de radiation de la lumière sur les atomes, ont été développées dans les années 1980 et ont valu le prix Nobel de physique à Claude Cohen-Tannoudji [8], Steven Chu [9] et William D. Phillips [10] en 1997. On peut ainsi ralentir un jet d'atomes à l'aide d'un laser et d'un champ magnétique dans un ralentisseur Zeeman [11]. Une fois les atomes ralentis il est possible de les piéger et de les refroidir dans un piège magnéto-optique, formé par trois paires de faisceaux lasers se propageant dans des sens contraires, désaccordés vers le rouge de la transition atomique, ainsi qu'un champ magnétique quadrupolaire [12]. Les mélasses optiques, formées par des atomes à l'intersection de faisceaux lasers contra-propageants, permettent d'atteindre des températures inférieures à la limite Doppler, à la grande surprise des physiciens de l'époque [13, 14]. Le mécanisme a été expliqué par le modèle Sisyphe [15].

Les températures atteintes dans ces mélasses, de l'ordre de dizaines de microkelvins, sont limitées par la diffusion des photons. Pour atteindre la condensation on peut piéger les atomes dans des pièges conservatifs magnétiques [16] ou optiques grâce à la force dipolaire [17], puis effectuer du refroidissement par évaporation en laissant les atomes les plus énergétiques s'échapper du piège [18–20]. Cette ultime étape a permis la production des premiers condensats de Bose-Einstein en 1995, avec du rubidium 87 dans l'équipe de Eric Cornell et Carl Wieman [6], puis des condensats de sodium dans le groupe de Wolfgang Ketterle [7]. Ces trois physiciens ont été récompensés par le prix Nobel de 2001 [21, 22].

Depuis ces travaux pionniers, le domaine des atomes ultrafroids s'est grandement développé. De nombreuses espèces atomiques ont été condensées et des gaz de Fermi dégénérés ont également été produits [23]. Les atomes ultrafroids constituent notamment un outil précieux dans des domaines comme la métrologie – avec par exemple les horloges optiques [24] et les tests de lois fondamentales [25] – ou la simulation quantique [26–28]. L'idée de simulateur quantique a été introduite par Richard Feynman en 1982 [29] et consiste à reproduire le comportement d'un système quantique compliqué, que les simulations numériques échouent à décrire en raison de l'augmentation exponentielle de la complexité avec le nombre de particules, à l'aide d'un système quantique modèle plus simple qui obéit aux mêmes équations et dont on peut contrôler les paramètres. L'une des premières réalisations expérimentales est la simulation d'un solide cristallin et de la transition métal-isolant par des atomes froids dans un réseau optique, avec la mise en évidence de la transition entre un superfluide et un isolant de Mott [30]. La simulation quantique à l'aide d'atomes froids est rendue possible par la très grande flexibilité offerte par ces systèmes : il est possible de contrôler le nombre d'atomes, la température, la géométrie, la dimension ou bien les interactions entre les atomes. Dans cette thèse nous nous intéressons plus particulièrement à ces deux derniers points.

Bien que notre monde physique soit tridimensionnel, il est possible de réduire la dimension pour les gaz quantiques. On peut alors réaliser des systèmes à une ou deux dimensions. Au cours de cette thèse nous avons réalisé des gaz unidimensionnels. L'étude des gaz quantiques de basse dimension a d'abord suscité un intérêt théorique car ils se comportent différemment

des gaz tridimensionnels. On peut noter par exemple l'absence de vrai condensat de Bose-Einstein pour le cas d'un gaz homogène à 1D et 2D à température finie, causée par les fluctuations de phase [31–34]. Par ailleurs, le cas unidimensionnel est un exemple de système intégrable, qu'il est possible de résoudre en utilisant l'ansatz de Bethe [35]. On peut noter aussi l'existence de plusieurs régimes aux comportements très différents pour les gaz dégénérés de bosons à une dimension selon la force des interactions entre atomes. Ainsi, dans le régime de faible interaction le gaz est appelé quasi-condensat car son comportement est proche de celui d'un condensat de Bose-Einstein, à l'exception des fluctuations de phase, tandis que dans le régime de forte interaction, aussi appelé régime de Tonks-Girardeau, les bosons se comportent comme des fermions sans interaction, à la symétrie près [36].

Pour produire ces systèmes de basse dimension expérimentalement, il est nécessaire de confiner les atomes très fortement selon une direction de l'espace pour préparer un gaz 2D et selon deux directions de l'espace pour préparer un gaz 1D. La dynamique est alors gelée selon ces directions. Il est possible de réaliser de tels pièges à l'aide de réseaux optiques en utilisant la force dipolaire [37–41] ou bien grâce à des champs magnétiques [42–44]. Les puces à atomes, des microstructures développées dans les années 2000 [45–50], permettent notamment de réaliser des pièges magnétiques très allongés et sont ainsi particulièrement utiles pour produire un échantillon unique de gaz 1D [51]. Nous utilisons ce dispositif dans notre expérience.

Il est possible de contrôler les interactions entre atomes en utilisant le mécanisme des résonances de Fano-Feshbach. Ces résonances ont initialement été décrites dans le cadre de la physique nucléaire par Herman Feshbach en 1958 [52], puis dans celui de la physique atomique par Ugo Fano en 1961 [53]. L'idée d'utiliser ces résonances comme outil de contrôle des interactions pour les atomes froids a été introduite par Tiesinga et al. [54] en 1993 et les premières réalisations expérimentales datent de 1998 [55, 56]. Les résonances de Feshbach sont depuis très largement utilisées dans la communauté des atomes froids et on peut consulter par exemple l'article de revue de Chin, Grimm, Julienne et Tiesinga à ce sujet [57]. Ces résonances se produisent lors des collisions entre atomes, lorsqu'on couple un canal de diffusion ouvert à un canal fermé. Au voisinage de ces résonances, la longueur de diffusion – qui est le paramètre clé pour décrire les interactions – diverge. Elles sont usuellement induites à l'aide d'un champ magnétique statique. Il est cependant aussi possible de coupler les canaux avec des photons. Le cas des résonances de Feshbach optiques a été étudié expérimentalement [58] mais est limité par les pertes causées par l'émission spontanée. Dans l'article théorique [59], David Papouhar, Gora Shlyapnikov et Jean Dalibard étudient la possibilité d'utiliser un champ micro-onde pour induire des résonances de Feshbach.

L'expérience sur laquelle nous travaillons a pour objectif d'étudier des gaz de Bose unidimensionnels, notamment dans le régime de forte interaction. Ce régime a été atteint pour des atomes piégés dans des réseaux optiques, constitués de multiples exemplaires de gaz 1D [41, 60]. Il n'a pas encore été atteint pour des atomes piégés magnétiquement, même si l'équipe d'Isabelle Bouchoule a réussi à s'en approcher [61]. L'intérêt d'utiliser un piège magnétique est qu'on peut réaliser un unique échantillon de gaz 1D, ce qui permet notamment d'étudier les corrélations. Pour atteindre ce régime, il serait utile d'augmenter la longueur de diffusion, afin d'accroître la force des interactions. Comme mentionné précédemment, il est possible de contrôler les interactions en utilisant des résonances de Feshbach, qui sont usuellement induites à l'aide d'un champ magnétique statique. Cependant, il n'est pas possible d'utiliser de résonance de Feshbach magnétique sur notre montage expérimental car les atomes sont piégés magnétiquement, ce qui nécessite de travailler avec des champs ma-

gnétiques faibles. Nous nous sommes donc concentrés sur la réalisation expérimentale des résonances de Feshbach induites par un champ micro-onde [59, 62].

Durant ma thèse, j'ai travaillé sur une expérience d'atomes ultrafroids, dans laquelle nous utilisons l'isotope stable du sodium  $^{23}\text{Na}$ , qui est un boson. Nous pouvons préparer des gaz dans le régime tridimensionnel, obtenant ainsi un condensat de Bose-Einstein, mais aussi dans la limite unidimensionnelle. Pour cela, nous utilisons une puce à atomes, qui crée des pièges magnétiques très allongés avec un fort confinement transverse. Ces travaux font suite aux thèses de Dany Ben Ali [63] et Joseph Seaward [64], durant lesquelles les premières étapes de l'expérience ont été conçues, comme le système optique, le ralentisseur Zeeman [65], le piège magnéto-optique, le transport magnétique des atomes [66] et la puce à atomes.

Une partie conséquente de ma thèse a été consacrée au transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce et au refroidissement par évaporation, qui constituent les dernières étapes avant d'obtenir un condensat sur puce. Des modifications importantes sur le montage expérimental, impliquant de casser le vide et de changer la puce, ont été nécessaires pour atteindre un refroidissement par évaporation efficace. Suite à ces changements, nous sommes parvenus à produire le premier condensat de Bose-Einstein sur l'expérience, deux ans et demi après le début de ma thèse [67].

Nous avons alors caractérisé les gaz quantiques produits en termes de nombre d'atomes, de température et de fréquences d'oscillation des pièges, afin d'étudier notamment le passage du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel. Nous sommes actuellement capables de produire des gaz 1D dans le régime du quasi-condensat, pour lequel les interactions sont faibles.

Afin d'atteindre le régime de forte interaction, nous nous sommes intéressés aux résonances de Feshbach micro-onde dans le but d'augmenter la longueur de diffusion. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser des champs micro-onde de grande amplitude, que nous produisons grâce à un guide micro-onde coplanaire intégré à la puce à atomes [67, 68]. Après avoir calibré les puissances micro-onde en effectuant des oscillations de Rabi entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental, nous avons effectué la spectroscopie des états moléculaires envisagés pour ces résonances de Feshbach micro-onde. Les pertes d'atomes rapides que nous observons au voisinage des résonances semblent limiter leur intérêt comme outil de contrôle des interactions.

En parallèle de ce travail expérimental, j'ai mené un projet de simulations numériques sur la dynamique hors équilibre d'un gaz de Bose unidimensionnel dans une boîte, afin de préparer une potentielle expérience sur ce sujet. Nous nous sommes initialement inspirés de l'expérience du groupe de Zoran Hadzibabic de l'article [69], qui s'intéressait à un condensat de Bose-Einstein tridimensionnel piégé dans une boîte cylindrique et conduit hors d'équilibre à l'aide d'un potentiel magnétique oscillant au cours du temps. Une cascade d'excitation turbulente apparaît dans leur système, caractérisée par une loi de puissance stationnaire pour la distribution en impulsion, appelée spectre de Kolomogorov-Zakharov [70]. Ces cascades d'excitation, décrites par la théorie de turbulence d'onde faible [71], apparaissent dans de très nombreux domaines de la physique, comme par exemple en hydrodynamique [72], en physique des plasmas [73] ou en optique non-linéaire [74]. Dans le cas unidimensionnel qui nous intéresse, la théorie de turbulence d'onde faible n'est cependant pas adaptée et nous nous sommes tournés vers les turbulences intégrables [75], introduites par Vladimir Zakharov en 2009. Ce champ de recherche est particulièrement actif dans le domaine de l'optique non-linéaire [76].

Dans nos simulations nous résolvons l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, qui

décrit le régime de quasi-condensat, en présence d'un potentiel linéaire oscillant au cours du temps et avec comme conditions aux limites des murs infinis. Nous avons notamment étudié les solitons du système, à l'aide du spectre de Lax, dont le calcul est issu des méthodes de transformée de diffusion inverse qui s'appliquent aux systèmes intégrables [77].

Ce manuscrit est composé de cinq chapitres. Les quatre premiers chapitres sont consacrés à l'expérience, tandis que le dernier chapitre est dédié au projet de simulations numériques.

- Le chapitre 1 pose les bases théoriques de la physique étudiée dans cette thèse. On commence par présenter la condensation de Bose-Einstein, d'abord dans le cas idéal puis en présence d'interactions. On discute ensuite du cas d'un gaz unidimensionnel et des différents régimes associés. Dans une deuxième partie, on s'intéresse plus en détails aux interactions entre atomes à basse énergie, décrites par la théorie de la diffusion, qui nous permet d'introduire un paramètre clé pour les collisions : la longueur de diffusion. Cette longueur de diffusion peut être modifiée en utilisant des résonances de Feshbach. Nous nous concentrerons sur les résonances induites par un champ micro-onde.
- Le chapitre 2 est consacré au dispositif expérimental et se concentre sur les avancées techniques qui ont été faites au cours de cette thèse. Nous avons transporté les atomes jusqu'à l'enceinte dans laquelle se trouve la puce à atomes et installé l'imagerie par absorption. Nous avons ensuite transféré les atomes vers le piège magnétique de la puce à atomes, tout en effectuant du refroidissement par évaporation. Des difficultés lors du refroidissement par évaporation nous ont conduits à effectuer des modifications importantes sur le montage expérimental, qui seront détaillées dans cette partie.
- Le chapitre 3 porte sur la caractérisation des condensats de Bose-Einstein et quasi-condensats unidimensionnels produits sur l'expérience. On détaillera dans un premier temps la séquence du transfert vers le piège de la puce et du refroidissement par évaporation utilisée pour produire des condensats. On discutera ensuite des fréquences d'oscillation réalisables dans le piège de la puce et de mesures du nombre d'atomes et de la température. Enfin, on s'intéressera au passage du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel.
- Le chapitre 4 s'intéresse à la recherche et la caractérisation des résonances de Feshbach induites par micro-onde. On présentera d'abord le guide d'ondes coplanaire intégré à la puce à atomes, qui permet d'atteindre de fortes puissances micro-onde, ainsi que des mesures d'oscillations de Rabi permettant de calibrer les amplitudes magnétiques du champ micro-onde. Nous étudierons ensuite les transitions vers les états moléculaires associés aux résonances de Feshbach micro-onde et nous discuterons des pertes rapides d'atomes observées au voisinage des résonances ainsi que des déplacements lumineux des niveaux d'énergie. Enfin, nous discuterons de pistes pour mesurer un effet de ces résonances sur la longueur de diffusion.
- Finalement, le chapitre 5 est consacré à l'étude de la dynamique hors équilibre d'un gaz de Bose unidimensionnel dans une boîte. Ce projet a été mené à l'aide de simulations numériques résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, en présence d'un potentiel extérieur linéaire oscillant au cours du temps. Nous nous sommes no-

tamment intéressés au profil de densité, à l'énergie du système et à sa distribution en impulsion. Les méthodes de transformée de diffusion inverse, avec le calcul du spectre de Lax, nous ont permis de mesurer le nombre de solitons et leurs vitesses ainsi que la vitesse du son et la longueur de relaxation dans les systèmes hors équilibre.

# Gaz quantiques et résonances de Feshbach

Dans ce chapitre nous introduisons les concepts et les bases théoriques nécessaires à la compréhension des travaux effectués dans cette thèse, qui portent sur l'étude de gaz de Bose unidimensionnels et leurs interactions.

Dans une première partie, nous présenterons des résultats généraux sur les gaz de Bose dégénérés au paragraphe 1.1. Nous étudierons la condensation de Bose-Einstein (1.1.1), d'abord dans le cas d'un gaz idéal, puis en présence d'interactions de contact. Nous introduirons l'équation de Gross-Pitaevskii et l'approximation de Thomas-Fermi dans le cas tridimensionnel, qui permettent de décrire les gaz quantiques produits dans l'expérience lorsque nous travaillons avec un grand nombre d'atomes. Nous traiterons ensuite du cas d'un gaz de Bose unidimensionnel (1.1.2) et présenterons les différents régimes qui existent dans cette limite : gaz de Bose quasi-idéal, quasi-condensat et régime de forte interaction. Enfin, nous discuterons de la transition entre le régime tridimensionnel et le régime unidimensionnel (1.1.3).

Avec les fréquences de confinement transverse accessibles dans notre expérience il semble nécessaire d'augmenter les interactions entre atomes pour atteindre le régime de forte interaction pour un gaz unidimensionnel, ce qui est l'un des objectifs de l'expérience. Dans une deuxième partie de ce chapitre, nous nous concentrerons donc sur l'étude des interactions à basse énergie au paragraphe 1.2 en donnant les bases de la théorie de diffusion (1.2.1) afin notamment d'introduire la longueur de diffusion. Nous parlerons ensuite des résonances de Feshbach (1.2.2), qui permettent de contrôler les interactions en modifiant la longueur de diffusion. Nous détaillerons les résultats théoriques pour le cas de résonances de Feshbach induites par un champ micro-onde, que nous avons essayé de mettre en œuvre expérimentalement durant cette thèse.

## 1.1 Gaz de Bose dégénéré

### 1.1.1 Condensat de Bose-Einstein

Pour un gaz de bosons à très basse température le phénomène de condensation de Bose-Einstein se produit : il existe une transition de phase pour laquelle, en dessous d'une température critique  $T_c$ , l'état fondamental est peuplé macroscopiquement par les particules.

Dans cette partie je m'appuierai sur les cours de Master de Jérôme Beugnon [78] et de Jean Dalibard [79], sur le cours d'Yvan Castin [80] ainsi que sur l'article de revue de Dalfovo, Giorgini, Pitaevskii et Stringari [81].

### 1. Condensation pour un gaz de Bose idéal

Pour montrer le phénomène de condensation de Bose-Einstein, on considère tout d'abord un gaz de Bose idéal, c'est-à-dire sans interaction entre les bosons. Dans l'ensemble grand canonique, le système à l'équilibre est décrit par la matrice densité :

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\mathcal{Z}_G} \exp\left(-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})\right) \quad (1.1)$$

où  $\hat{H}$  est l'hamiltonien,  $\hat{N}$  le nombre total de particules,  $\beta = 1/k_B T$  avec  $k_B$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température,  $\mu$  le potentiel chimique et  $\mathcal{Z}_G = \text{Tr}(e^{-\beta(\hat{H} - \mu\hat{N})})$  la fonction de partition grand canonique. Comme les particules n'interagissent pas, on peut écrire l'hamiltonien comme la somme de  $N$  hamiltoniens à une particule  $\hat{h}$  :

$$\hat{H} = \hat{h}_1 + \hat{h}_2 + \dots + \hat{h}_N \quad (1.2)$$

où  $\hat{h}_i = \mathbb{1} \otimes \dots \otimes \mathbb{1} \otimes \hat{h} \otimes \dots \otimes \mathbb{1}$ , avec  $\hat{h}$  placé en position  $i$ . Soit  $\{|\lambda\rangle\}$  une base d'états propres de  $\hat{h}$ , on note  $\epsilon_\lambda$  les énergies propres associées à  $|\lambda\rangle$  et  $N_\lambda$  le nombre de particules dans l'état  $|\lambda\rangle$ . L'état fondamental d'énergie  $\epsilon_0$ , qu'on suppose non dégénéré, est noté  $|0\rangle$ . On peut factoriser la fonction de partition grand canonique comme un produit des fonctions de partition  $\zeta_\lambda$  associées aux états  $|\lambda\rangle$  :

$$\mathcal{Z}_G = \prod_{\lambda} \zeta_{\lambda} = \prod_{\lambda} \left( \sum_{N_{\lambda}} e^{-\beta N_{\lambda}(\epsilon_{\lambda} - \mu)} \right). \quad (1.3)$$

Pour des bosons,  $N_\lambda$  peut être un entier positif quelconque et on a donc :

$$\zeta_{\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\beta n(\epsilon_{\lambda} - \mu)} = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)}}. \quad (1.4)$$

On en déduit le nombre d'occupation moyen de l'état  $|\lambda\rangle$  :

$$\bar{N}_{\lambda} = k_B T \frac{\partial \ln(\zeta_{\lambda})}{\partial \mu} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \mu)} - 1}. \quad (1.5)$$

Cette équation correspond à la statistique de Bose-Einstein. On a  $\bar{N}_{\lambda} \geq 0$ , ce qui implique que le potentiel chimique  $\mu$  est inférieur à l'énergie de l'état fondamental  $\epsilon_0$ . Le nombre de particules est donné par :

$$N = \sum_{\lambda} \bar{N}_{\lambda} = N_0 + N' \quad (1.6)$$

où  $N_0$  est le nombre d'occupation de l'état fondamental et  $N' = \sum_{\lambda \neq 0} \bar{N}_{\lambda}$  est le nombre de particules dans les états excités. À partir de l'expression (1.5), dans laquelle on borne  $\mu$  par  $\epsilon_0$ , on trouve qu'à une température  $T$  donnée le nombre de particules dans les états excités  $N'$  est borné par le nombre de saturation :

$$N'_{\max} = \sum_{\lambda \neq 0} \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_{\lambda} - \epsilon_0)} - 1}. \quad (1.7)$$

Lorsque cette somme converge, si on a un nombre de particules plus grand que  $N'_{\max}$ , alors toutes les particules supplémentaires  $N - N'_{\max}$  peupleront nécessairement l'état fondamental pour former un condensat de Bose-Einstein. La convergence de cette somme dépend de la dimension du système et du type de piège.

### Cas d'un gaz homogène à trois dimensions

Considérons un gaz dans une boîte cubique de côté  $L$ , avec des conditions aux limites périodiques. Les vecteurs d'onde s'écrivent alors sous la forme :

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n} \quad (1.8)$$

avec  $\vec{n} = n_x\vec{e}_x + n_y\vec{e}_y + n_z\vec{e}_z$  où  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  sont des entiers. Les énergies propres sont données par :

$$\epsilon = \frac{\hbar^2\vec{k}^2}{2m} \quad (1.9)$$

avec l'énergie de l'état fondamental  $\epsilon_0 = 0$ .  $N'_{\max}$  peut alors être approximé par l'intégrale :

$$N'_{\max} \simeq \int_0^\infty \rho(\epsilon) \frac{1}{e^{\beta\epsilon} - 1} d\epsilon \quad (1.10)$$

avec la densité d'états en énergie  $\rho(\epsilon)$  qu'on déduit des équations (1.8) et (1.9) :

$$\rho(\epsilon) = \frac{L^3}{4\pi^2} \left( \frac{2m}{\hbar^2} \right)^{3/2} \sqrt{\epsilon}. \quad (1.11)$$

Pour cette densité d'états en énergie, l'intégrale de l'équation (1.10) converge et la condensation de Bose-Einstein peut donc se produire. En faisant le changement de variable  $u = \beta\epsilon$  et en utilisant

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{u}}{e^u - 1} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta(3/2), \quad (1.12)$$

où  $\zeta(3/2) \simeq 2,612$  avec  $\zeta$  la fonction zeta de Riemann, on trouve :

$$N'_{\max} \simeq L^3 \left( \frac{m}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \beta^{-3/2} \zeta(3/2) = L^3 \lambda_{\text{dB}}^{-3} \zeta(3/2) \quad (1.13)$$

avec  $\lambda_{\text{dB}}$  la longueur d'onde thermique de de Broglie introduite à l'équation (2). On a donc :

$$n'_{\max} \lambda_{\text{dB}}^3 = \zeta(3/2) \quad (1.14)$$

où on a posé  $n'_{\max} = N'_{\max}/L^3$ . Pour une densité dans l'espace des phases supérieure à cette valeur, on obtient un condensat de Bose-Einstein. À partir de cette expression on peut introduire une température critique  $T_c$ , à densité de particules  $n$  donnée, en dessous de laquelle la condensation se produit :

$$k_B T_c = \frac{2\pi\hbar^2}{m} \left( \frac{n}{\zeta(3/2)} \right)^{2/3}. \quad (1.15)$$

En dessous de cette température critique la densité de particules est donnée par :

$$n = n_0 + n'_{\max} \quad (1.16)$$

avec  $n_0$  la densité condensée dans l'état fondamental, qu'on peut écrire comme :

$$n_0 = n - n'_{\max} = n \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^{3/2} \right]. \quad (1.17)$$

### Cas d'un piège harmonique à trois dimensions

On considère maintenant le cas d'un piège harmonique, comme c'est le cas dans notre expérience :

$$U(\vec{r}) = \frac{1}{2}m(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2). \quad (1.18)$$

Les énergies des états propres sont alors données par :

$$\epsilon_{n_x, n_y, n_z} = \hbar\omega_x(n_x + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_y(n_y + \frac{1}{2}) + \hbar\omega_z(n_z + \frac{1}{2}) \quad (1.19)$$

avec  $n_x$ ,  $n_y$  et  $n_z$  des entiers positifs. L'énergie de l'état fondamental vaut donc  $\epsilon_0 = \hbar(\omega_x + \omega_y + \omega_z)/2$ . Posons  $\bar{\omega} = (\omega_x\omega_y\omega_z)^{1/3}$ , qui correspond à la moyenne géométrique des pulsations du piège. Dans la limite où  $k_B T \gg \hbar\bar{\omega}$  on peut remplacer la somme par une intégrale pour estimer  $N'_{\max}$  [81] (approximation semi-classique). On a une densité d'états en énergie  $\rho(\epsilon) \propto \epsilon^2$  et l'intégrale de l'équation (1.10) converge. On trouve alors :

$$N'_{\max} \simeq \zeta(3) \left( \frac{k_B T}{\hbar\bar{\omega}} \right)^3 \quad (1.20)$$

où  $\zeta(3) \simeq 1,202$ . La température critique  $T_c$ , en dessous de laquelle on forme un condensat de Bose-Einstein, correspond à la température pour laquelle  $N = N'_{\max}$ . On en déduit :

$$k_B T_c = \hbar\bar{\omega} \left( \frac{N}{\zeta(3)} \right)^{1/3}. \quad (1.21)$$

En dessous de cette température  $T_c$  on a  $N' \rightarrow N'_{\max}$  et la population de l'état fondamental vaut alors :

$$N_0 = N - N'_{\max} = N \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_c} \right)^3 \right]. \quad (1.22)$$

Notons que dans notre expérience les fréquences transverses du piège sont élevées, de l'ordre de quelques kilohertz, et on a  $k_B T_c$  de l'ordre de  $\hbar\omega_{\perp}$  lorsqu'on travaille à petits nombre d'atomes ( $\sim 10^4$ ). Dans cette limite l'approximation semi-classique n'est pas adaptée et il faut prendre en compte la structure discrète des énergies propres pour calculer la température critique  $T_c$ .

## 2. Équation de Gross-Pitaevskii et approximation de Thomas-Fermi

Pour décrire correctement les observations expérimentales, il faut en réalité prendre en compte les interactions entre les atomes. À très basse température, pour un gaz de bosons, les collisions à deux corps en onde s prédominent. On peut décrire ces collisions sans tenir compte du détail du potentiel d'interaction grâce à un unique paramètre : la longueur de diffusion<sup>1</sup>  $a$ . Pour modéliser simplement l'interaction entre atomes on remplace le potentiel d'interaction entre deux particules par un potentiel effectif de contact :

$$V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = g_{3D} \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (1.23)$$

avec  $\delta$  la distribution de Dirac et  $g_{3D}$  la constante d'interaction à trois dimensions qui vaut :

$$g_{3D} = \frac{4\pi\hbar^2}{m} a. \quad (1.24)$$

1. Nous y reviendrons plus en détail au paragraphe 1.2.1.

Pour modéliser un condensat de Bose-Einstein dans la limite du champ moyen, valable lorsque la distance inter-particules est grande devant la longueur de diffusion  $a$ , on utilise l'équation de Gross-Pitaevskii [82, 83]. Cette équation permet de décrire l'état fondamental d'un système de bosons identiques. Elle repose sur l'approximation de Hartree-Fock, selon laquelle la fonction d'onde à  $N$  particules  $\Psi$  peut se décomposer en produit de fonctions d'onde à une particule  $\psi$  :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \psi(\vec{r}_1)\psi(\vec{r}_2)\dots\psi(\vec{r}_N). \quad (1.25)$$

En partant de l'équation de Schrödinger :

$$\hat{H} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{r}_i) \right) + \sum_{i<j} g_{3D} \delta(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (1.26)$$

où  $\vec{p}_i$  est l'impulsion et  $U$  est le potentiel extérieur, et en appliquant une méthode variationnelle qui minimise la fonctionnelle d'énergie  $\langle \Psi | \hat{H} | \Psi \rangle / \langle \Psi | \Psi \rangle$ , on trouve l'équation de Gross-Pitaevskii à trois dimensions :

$$\mu_{3D} \psi(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}) + g_{3D} N |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) + U \psi(\vec{r}) \quad (1.27)$$

avec  $\mu_{3D}$  le potentiel chimique et la condition de normalisation  $\int |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1$ .

La méthode de Bogoliubov [84] permet de trouver le spectre d'excitations à basse énergie pour un système homogène de densité  $n$ , donné par la relation de dispersion :

$$\omega = ck \left( 1 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \frac{1}{2mc^2} \right)^{1/2} \quad (1.28)$$

avec  $c = \sqrt{g_{3D} n / m}$  la vitesse du son. En présence d'interactions cette relation de dispersion est linéaire à petits nombres d'onde  $k$ , ce qui conduit à la superfluidité du condensat. Cette partie du spectre correspond au régime phononique. À plus grands nombres d'onde, la relation de dispersion est quadratique : on est dans le régime de particule libre. La frontière entre ces régimes est donnée par  $k \simeq 1/\xi$  où  $\xi$  est la longueur de relaxation :

$$\xi = \frac{\hbar}{\sqrt{2}mc} = \frac{\hbar}{\sqrt{2m g_{3D} n}}. \quad (1.29)$$

Cette longueur de relaxation  $\xi$  correspond à la taille caractéristique sur laquelle la densité peut varier dans le condensat.

Pour un piège harmonique, dans la limite du régime de Thomas-Fermi, où on a  $Na \gg \sqrt{\hbar/m\omega}$  – avec  $\sqrt{\hbar/m\omega}$  qui correspond à la taille de l'oscillateur harmonique – on peut négliger le terme d'énergie cinétique dans l'équation de Gross-Pitaevskii. Le potentiel chimique vaut alors :

$$\mu_{3D}^{\text{TF}} \psi(\vec{r}) \simeq g_{3D} N |\psi(\vec{r})|^2 \psi(\vec{r}) + U \psi(\vec{r}). \quad (1.30)$$

En prenant  $\psi$  réel on a :

$$\psi(\vec{r}) = \left( \frac{\mu_{3D}^{\text{TF}} - U(\vec{r})}{g_{3D} N} \right)^{1/2} \quad (1.31)$$

pour les positions  $\vec{r}$  telles que  $U(\vec{r}) < \mu_{3D}$  et  $\psi(\vec{r}) = 0$  sinon. Dans le cas du potentiel harmonique (1.18) les bords du condensat où la densité s'annule, qui correspondent aux

positions pour lesquelles  $U(\vec{r}) = \mu_{3D}^{\text{TF}}$ , forment un ellipsoïde de rayons  $R_\alpha$  (avec  $\alpha = x, y, z$ ) tels que :

$$\mu_{3D}^{\text{TF}} = \frac{1}{2}m\omega_\alpha^2 R_\alpha^2. \quad (1.32)$$

On en déduit :

$$R_\alpha = \sqrt{\frac{2\mu_{3D}^{\text{TF}}}{m\omega_\alpha^2}}. \quad (1.33)$$

La densité d'atomes est donc donnée par :

$$n_{3D}(\vec{r}) = N\psi(\vec{r})^2 = \frac{\mu_{3D}^{\text{TF}}}{g_{3D}} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} \right) \right]. \quad (1.34)$$

En intégrant cette équation sur le volume de l'ellipsoïde avec la condition de normalisation  $\int |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1$  on en déduit l'expression du potentiel chimique :

$$\mu_{3D}^{\text{TF}} = \frac{1}{2}\hbar\bar{\omega} \left( 15Na\sqrt{\frac{m\bar{\omega}}{\hbar}} \right)^{2/5}. \quad (1.35)$$

Si on intègre l'équation seulement selon les axes  $y$  et  $z$ , on trouve le profil de densité selon l'axe  $x$  :

$$n(x) = \frac{\pi}{2} \frac{\mu_{3D}^{\text{TF}}}{g_{3D}} R_y R_z \left[ 1 - \left( \frac{x}{R_x} \right)^2 \right]^2. \quad (1.36)$$

### 1.1.2 Gaz de Bose unidimensionnel

La dimension joue un rôle très important dans la condensation de Bose-Einstein. Ainsi, pour un gaz unidimensionnel idéal uniforme, il n'y a pas de condensation à la limite thermodynamique, contrairement au cas tridimensionnel, car la densité d'états en énergie  $\rho(\epsilon)$  est proportionnelle à  $\epsilon^{-1/2}$ , ce qui entraîne l'absence de saturation des états excités. Dans le cas d'un piège harmonique on a  $\rho(\epsilon) \propto \epsilon^0$  et on ne trouve pas non plus de condensation dans la limite semi-classique<sup>2</sup> [33]. Malgré l'absence de vrai condensat, la physique des gaz de Bose unidimensionnels est riche et présente des propriétés différentes de celles des gaz à deux et trois dimensions. Dans cette partie nous nous appuyerons sur l'article de revue de Bouchoule et al. [51] et du cours des Houches de Petrov et al. [86] ainsi que sur les thèses d'Aisling Johnson [87], de Maximilian Schemmer [88] et de Joseph Seaward [64].

#### 1. Comment atteindre le régime unidimensionnel expérimentalement

Bien que nous vivions dans un monde à trois dimensions, l'étude de systèmes de plus basse dimension n'est pas seulement théorique, elle est réalisable expérimentalement. Pour atteindre le régime unidimensionnel dans les expériences d'atomes ultrafroids on utilise des pièges harmoniques très anisotropes, avec des fréquences d'oscillation selon les deux directions transverses très grandes devant la fréquence d'oscillation longitudinale, ce qui permet de piéger les atomes « sur une ligne ». On supposera dans la suite du manuscrit que la direction longitudinale est orientée selon l'axe  $x$ . L'énergie pour l'oscillateur harmonique selon chacune

2. Les calculs prenant en compte la structure discrète des états d'énergie montrent en réalité que la condensation est possible [85].

des deux directions transverses est donnée par  $\epsilon_{\perp} = \hbar\omega_{\perp}(n + 1/2)$ , avec  $\omega_{\perp}/2\pi$  la fréquence d'oscillation transverse et  $n$  un entier positif. L'énergie de l'état fondamental transverse est donc  $\hbar\omega_{\perp}$  et l'écart entre l'état fondamental et le premier état excité vaut  $\hbar\omega_{\perp}$ . Pour être dans le régime unidimensionnel il faut que les échelles d'énergie du système soient très petites devant  $\hbar\omega_{\perp}$ , afin d'empêcher les excitations transverses, ce qui correspond aux deux critères suivants :

$$\begin{cases} k_B T \ll \hbar\omega_{\perp} \\ \mu_{1D} \ll \hbar\omega_{\perp} \end{cases} \quad (1.37)$$

où on définit le potentiel chimique unidimensionnel  $\mu_{1D}$  par rapport au potentiel chimique tridimensionnel  $\mu_{3D}$  en soustrayant l'énergie de point zéro transverse :  $\mu_{1D} = \mu_{3D} - \hbar\omega_{\perp}$ .  $\mu_{1D}$  correspond à la contribution des interactions au potentiel chimique. Lorsque ces critères sont respectés, les degrés de liberté transverses sont « gelés » et la dynamique est purement longitudinale. On peut alors factoriser la fonction d'onde à  $N$  particules sous la forme :

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) = \Psi_{1D}(x_1, x_2, \dots, x_N) \prod_{i=1}^N \phi_0(y_i, z_i) \quad (1.38)$$

où  $\phi_0$  est la fonction d'onde de l'état fondamental selon les deux directions transverses :

$$\phi_0(y, z) = \frac{1}{\sqrt{\pi a_{\perp}}} e^{-\frac{y^2+z^2}{2a_{\perp}^2}} \quad (1.39)$$

avec la taille de l'état fondamental  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/m\omega_{\perp}}$ .

## 2. Équation de Gross-Pitaevskii à une dimension

Nous allons établir ici l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle à partir de celle à trois dimensions, ce qui permet notamment de trouver l'expression pour la constante de couplage à une dimension  $g_{1D}$ . Cette équation repose sur l'approximation de champ moyen et est valable pour le régime de quasi-condensat [89]. On suppose par ailleurs que les interactions sont suffisamment faibles pour que l'on puisse décrire les collisions en dimension 3, ce qui correspond à une longueur de diffusion  $a$  petite devant  $a_{\perp} = \sqrt{\hbar/(m\omega_{\perp})}$ . On peut écrire la fonction d'onde à une particule comme un produit de deux fonctions :  $\psi_{3D}(x, y, z) = \psi_{1D}(x)\phi_0(y, z)$ , où  $\phi_0$  a été défini à l'équation (1.39). On suppose que le confinement est harmonique, de pulsation  $\omega_{\perp}$  dans les directions  $y$  et  $z$  et que le potentiel longitudinal est découplé et peut se mettre sous la forme  $U(x)$ . L'équation de Gross-Pitaevskii 1.27 devient :

$$\begin{aligned} \mu_{3D}\psi_{1D}\phi_0 &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi_{1D}}{\partial x^2} \phi_0 + \psi_{1D} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \psi_{1D} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \right) \\ &+ g_{3D} N |\psi_{1D}\phi_0|^2 \psi_{1D}\phi_0 + U(x)\psi_{1D}\phi_0 + \frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) \psi_{1D}\phi_0. \end{aligned} \quad (1.40)$$

En utilisant le fait que  $\phi_0$  est l'état fondamental d'énergie  $\hbar\omega_{\perp}$  des degrés de liberté transverses, ce qui donne

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2} m\omega_{\perp}^2 (y^2 + z^2) \phi_0 = \hbar\omega_{\perp} \phi_0, \quad (1.41)$$

on obtient :

$$\mu_{3D}\psi_{1D}\phi_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{1D}}{\partial x^2}\phi_0 + g_{3D}N|\psi_{1D}|^2\psi_{1D}|\phi_0|^2\phi_0 + U(x)\psi_{1D}\phi_0 + \hbar\omega_{\perp}\psi_{1D}\phi_0. \quad (1.42)$$

En multipliant l'équation par  $\phi_0^*$  et en l'intégrant selon les axes  $y$  et  $z$  on trouve :

$$\mu_{3D}\psi_{1D} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{1D}}{\partial x^2} + \frac{g_{3D}N}{2\pi a_{\perp}^2}|\psi_{1D}|^2\psi_{1D} + U(x)\psi_{1D} + \hbar\omega_{\perp}\psi_{1D} \quad (1.43)$$

car  $\int |\phi_0|^2 dydz = 1$  et

$$\int |\phi_0|^4 dydz = \frac{1}{\pi^2 a_{\perp}^4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2y^2/a_{\perp}^2} dy \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2z^2/a_{\perp}^2} dz = \frac{1}{2\pi a_{\perp}^2}. \quad (1.44)$$

En introduisant le potentiel chimique unidimensionnel  $\mu_{1D} = \mu_{3D} - \hbar\omega_{\perp}$  et la constante de couplage unidimensionnelle [90] :

$$g_{1D} = g_{3D}/(2\pi a_{\perp}^2) = 2\hbar a\omega_{\perp} \quad (1.45)$$

on trouve finalement l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle à l'équilibre :

$$\mu_{1D}\psi_{1D} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_{1D}}{\partial x^2} + g_{1D}N|\psi_{1D}|^2\psi_{1D} + U(x)\psi_{1D}. \quad (1.46)$$

Dans la limite du régime de Thomas-Fermi, on peut négliger le terme d'énergie cinétique de sorte que :

$$n_{1D}(x) = N|\psi_{1D}(x)|^2 = \frac{\mu_{1D}^{\text{TF}} - U(x)}{g_{1D}}. \quad (1.47)$$

Dans le cas du piège harmonique  $U(x) = m\omega_x^2 x^2/2$  on a alors :

$$n_{1D}(x) = N|\psi_{1D}(x)|^2 = \frac{\mu_{1D}^{\text{TF}}}{g_{1D}} \left(1 - \frac{x^2}{R_x^2}\right) \quad (1.48)$$

pour  $U(x) < \mu_{1D}^{\text{TF}}$  et 0 sinon, avec  $R_x = \sqrt{2\mu_{1D}^{\text{TF}}/m\omega_x^2}$ . En intégrant cette équation sur  $x$  on trouve finalement :

$$\mu_{1D}^{\text{TF}} = \frac{1}{2}\hbar\omega_x \left(\frac{3Na a_x}{a_{\perp}^2}\right)^{\frac{2}{3}} \quad (1.49)$$

avec  $a_x = \sqrt{\hbar/m\omega_x}$ .

### 3. Hamiltonien de Lieb-Liniger

Nous considérons dans la suite des interactions de contact répulsives entre les atomes, caractérisées par la constante d'interaction  $g_{1D}$  [90] introduite à l'équation (1.45). L'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle qu'on a établie au paragraphe précédent n'est valable que dans la limite des faibles interactions, dans le régime de quasi-condensat. À température nulle et en l'absence de potentiel extérieur – donc pour un gaz uniforme – l'hamiltonien qui décrit le système unidimensionnel dans le cas général, appelé hamiltonien de Lieb-Liniger, est donné par :

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + g_{1D} \sum_{i<j} \delta(x_i - x_j). \quad (1.50)$$

Cet hamiltonien a la propriété remarquable d'être intégrable, c'est-à-dire qu'il est possible de trouver des solutions exactes pour les états propres du problème à  $N$  corps grâce à la méthode de l'ansatz de Bethe [35]. Dans le cas de particules impénétrables le problème a d'abord été résolu par Girardeau [36] puis pour n'importe quelle valeur positive de  $g_{1D}$  par Lieb et Liniger [91, 92].

Pour cet hamiltonien on peut distinguer les régimes de fortes et faibles interactions en comparant l'énergie d'interaction par particule  $\epsilon_{\text{int}} = n_{1D}g_{1D}$  et l'énergie cinétique caractéristique des particules  $\epsilon_{\text{cin}} = \hbar^2 n_{1D}^2/m$ , où  $n_{1D}$  est la densité de particules à une dimension. On introduit le paramètre de Lieb-Liniger :

$$\gamma = \frac{\epsilon_{\text{int}}}{\epsilon_{\text{cin}}} = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n_{1D}}. \quad (1.51)$$

Le cas où  $\gamma \ll 1$  correspond à la limite du régime de faible interaction, tandis que pour  $\gamma \gg 1$  on est dans le régime de forte interaction. On fait remarquer que  $\gamma \propto 1/n_{1D}$  : contrairement aux cas 2D et 3D, pour un gaz unidimensionnel on se rapproche du régime de forte interaction en diminuant la densité  $n_{1D}$ .

Dans les expériences, la température des gaz de Bose est en réalité non nulle et la méthode de l'ansatz de Bethe a été étendue à température finie par Yang et Yang [93]. Nous introduisons un second paramètre, proportionnel à  $T$  et adimensionné, afin de caractériser les différents régimes :

$$t = \frac{k_B T}{E_g} = \frac{2\hbar^2 k_B T}{mg_{1D}^2} \quad (1.52)$$

où  $E_g = mg_{1D}^2/2\hbar^2$  est une échelle d'énergie intrinsèque pour les interactions.

#### 4. Fonctions de corrélation et régimes du gaz de Bose 1D

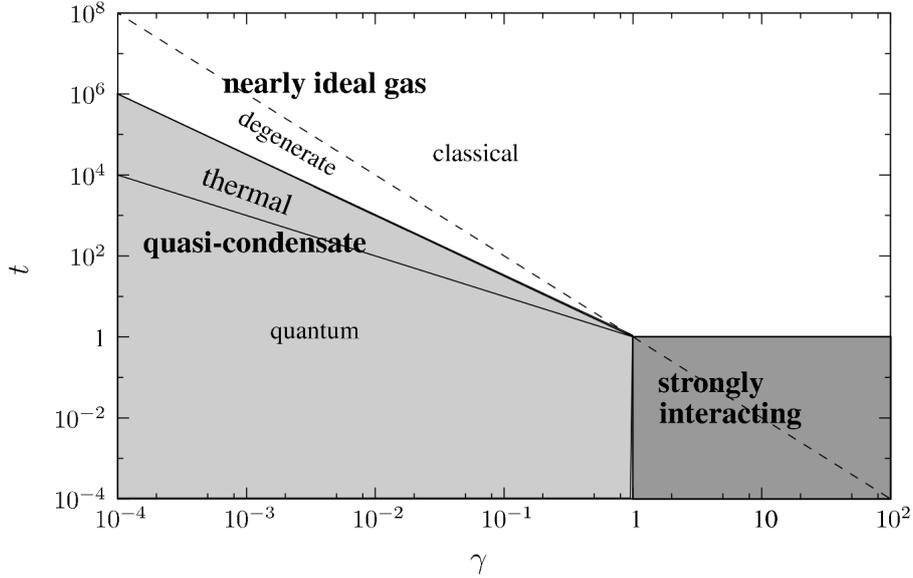
La description du système par l'équation de Gross-Pitaevskii suppose d'avoir une fonction d'onde cohérente, ce qui pose problème lorsqu'il y a des fluctuations quantiques ou thermiques. Un moyen d'étudier ces fluctuations est d'introduire la fonction de corrélation à une particule :

$$g^{(1)}(x, x') = \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x') \rangle}{\sqrt{n(x)n(x')}} \quad (1.53)$$

avec  $\hat{\Psi}$  l'opérateur champ et  $n(x) = \langle \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \rangle$ . Dans un système homogène, invariant par translation, on peut poser  $g^{(1)}(x) = g^{(1)}(x, 0)$ . Pour le gaz de Bose unidimensionnel, les fluctuations quantiques à grande longueur d'onde sont à l'origine d'une décroissance exponentielle de cette fonction de corrélation à une particule  $g^{(1)}(x)$  [94, 95], ce qui entraîne une absence de cohérence à longue portée, contrairement au cas tridimensionnel, et donc une absence de vrai condensat de Bose-Einstein. À température finie les fonctions thermodynamiques sont analytiques et il n'existe pas de transition de phase [93]. Cependant, on peut identifier différents régimes selon les valeurs des paramètres  $\gamma$  et  $t$  introduits au paragraphe précédent, en s'intéressant aux fonctions de corrélation et plus particulièrement à la fonction de corrélation à deux particules

$$g^{(2)}(x, x') = \frac{\langle \hat{\Psi}^\dagger(x') \hat{\Psi}^\dagger(x) \hat{\Psi}(x) \hat{\Psi}(x') \rangle}{n(x)n(x')}, \quad (1.54)$$

qui caractérise les fluctuations de densité, comme cela est fait dans les articles [96] et [51]. Ces différents régimes sont représentés sur la figure 1.1 dans le cas d'un gaz uniforme. On



**Figure 1.1** — Cette figure est tirée de l'article [51]. Les différents régimes pour un gaz de Bose unidimensionnel uniforme sont représentés sur ce graphique selon les valeurs des paramètres  $\gamma$ , introduit à l'équation (1.51), et  $t$ , introduit à l'équation 1.52. Pour le régime de gaz de Bose quasi-idéal  $g^{(2)}(0) \simeq 2$ , pour celui de quasi-condensat  $g^{(2)}(0) \simeq 1$  et pour celui de forte interaction  $g^{(2)}(0) \ll 1$ . Le régime de gaz de Bose quasi-idéal peut être subdivisé en deux sous-régimes classique et dégénéré selon la valeur de  $n_{1D}\lambda_{dB}$ . Le régime de quasi-condensat peut lui aussi être subdivisé en deux parties selon si les fluctuations sont dominées par les effets thermiques ou quantiques.

peut décomposer le diagramme des phases en trois zones : le régime du gaz de Bose quasi-idéal pour lequel  $g^{(2)}(0) \simeq 2$ , celui de quasi-condensat où  $g^{(2)}(0) \simeq 1$  et le régime de forte interaction où  $g^{(2)}(0) \ll 1$  [96]. Les régimes de gaz de Bose quasi-idéal et de quasi-condensat peuvent être subdivisés selon le comportement de la fonction de corrélation à une particule  $g^{(1)}$ . On souligne qu'il n'existe pas à proprement parler de frontières nettes entre ces régimes en l'absence de transition de phase et qu'on passe continûment d'un régime à l'autre.

### Gaz de Bose quasi-idéal

Cette description du gaz de Bose quasi-idéal est valable à suffisamment haute température. Dans ce régime, aussi appelé régime de décohérence quantique, on a  $g^{(2)}(0) \simeq 2$  comme pour un gaz de Bose sans interaction, avec un phénomène de groupement dû à la nature bosonique des atomes : on a plus de chances de trouver deux particules proches l'une de l'autre, qu'éloignées. Lorsque le terme d'interaction  $g_{1D}n_{1D}$  n'est plus négligeable devant le potentiel chimique  $\mu_{1D}$ , les fluctuations de densité ont tendance à être réduites et on passe dans le régime de quasi-condensat, ce qui se produit pour  $t \simeq 1/\gamma^{3/2}$  [51]. Au sein du régime de gaz de Bose quasi-idéal on peut distinguer deux cas : la limite classique pour laquelle  $n_{1D}\lambda_{dB} \ll 1$ , où l'équation de Maxwell-Boltzmann est valable et la limite du gaz dégénéré où  $n_{1D}\lambda_{dB} \gg 1$ . Dans la limite classique la fonction de corrélation à une particule décroît

comme une gaussienne et vaut :

$$g^{(1)}(x) \simeq e^{-\frac{x^2}{4\pi\lambda_{\text{dB}}^2}}. \quad (1.55)$$

Pour le régime dégénéré cette fonction de corrélation décroît exponentiellement comme :

$$g^{(1)}(x) \simeq e^{-\frac{2\pi x}{n_{1\text{D}}\lambda_{\text{dB}}^2}} = e^{-x/l_c} \quad (1.56)$$

avec une longueur de cohérence  $l_c = n_{1\text{D}}\lambda_{\text{dB}}^2/2\pi$  [51].

### Quasi-condensat

On trouve ce régime dans la limite de faible interaction  $\gamma \ll 1$  et de basse température, avec  $t \ll 1/\gamma^{3/2}$ . Il est aussi appelé régime de Gross-Pitaevskii, car il correspond au domaine de validité de cette équation. Dans le régime de quasi condensat on a  $g^{(2)}(0) \simeq 1$ , ce qui indique une absence de corrélations entre les particules. Les fluctuations de densité sont fortement réduites par rapport au cas du gaz de Bose quasi-idéal : en écrivant l'opérateur champ sous la forme

$$\hat{\Psi} = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{\hat{n}} = \exp(i\hat{\phi})\sqrt{n_0 + \delta\hat{n}}, \quad (1.57)$$

avec  $\hat{n}$  et  $\hat{\phi}$  les opérateurs densité et phase conjugués et  $n_0$  la densité moyenne, on trouve que  $\langle \delta\hat{n}^2 \rangle \ll n_0^2$ . En revanche les fluctuations de phase ne sont pas supprimées et entraînent une absence de cohérence vis-à-vis de la fonction de corrélation à un corps. Lorsque ces fluctuations sont dominées par les effets thermiques, avec des excitations phononiques, elle décroît exponentiellement avec la distance comme :

$$g^{(1)}(x) \simeq e^{-\frac{\pi x}{n_{1\text{D}}\lambda_{\text{dB}}^2}} = e^{-x/l_\phi} \quad (1.58)$$

avec une longueur de cohérence  $l_\phi = n_{1\text{D}}\lambda_{\text{dB}}^2/\pi = 2l_c$  [51]. Le comportement de  $g^{(1)}$  est proche de celui du gaz de Bose quasi-idéal dégénéré, avec un facteur deux de différence pour la longueur de cohérence. Ce facteur deux s'explique par le fait que, dans la limite du gaz de Bose quasi-idéal, il y a à la fois des fluctuations de densité et des fluctuations de phase, tandis que dans le régime de quasi-condensat les fluctuations de densité sont supprimées. Soit  $\xi = \hbar/\sqrt{2mg_{1\text{D}}n_{1\text{D}}}$  la longueur de relaxation pour un système unidimensionnel. On a  $l_\phi \gg \xi$  : si on découpe le gaz en segments de taille  $l$ , avec  $\xi \ll l \ll l_\phi$  on obtient localement des vrais condensats avec une cohérence de phase, d'où le nom de quasi-condensat. À très basse température on s'attend à ce que ce soient les fluctuations quantiques qui dominent. La limite entre ces deux régimes est donnée par  $k_B T \simeq n_{1\text{D}}g_{1\text{D}}$ , c'est-à-dire pour  $t \simeq 1/\gamma$ .

### Régime de forte interaction

Ce régime, aussi appelé régime de Tonks-Girardeau, a d'abord été étudié par Tonks dans le cas classique [97] et Girardeau dans le cas quantique [36] pour des particules impénétrables. Il est valable dans le cas où le terme d'énergie d'interaction est dominant par rapport à celui d'énergie cinétique, avec  $\gamma \gg 1$ . Dans ce régime la fonction d'onde s'annule pour deux particules à la même position, ce qui crée une sorte de principe d'exclusion de Pauli, avec la fonction de corrélation à deux corps  $g^{(2)}(0) \ll 1$ . On peut établir une correspondance entre la fonction d'onde à  $N$  corps du système de bosons en forte interaction avec celle de fermions sans interaction, à la symétrie près. Les deux systèmes partagent notamment les mêmes énergies propres.

### 1.1.3 Transition entre le régime tridimensionnel et le régime unidimensionnel

Les descriptions tridimensionnelles et unidimensionnelles correspondent à des cas limites et il existe une zone de transition entre ces deux régimes.

Ainsi, les fluctuations de phase ne se limitent pas au régime purement unidimensionnel. Pour des gaz à trois dimensions très allongés on peut aussi observer des fluctuations de phase pour des températures significativement inférieures à la température critique [98, 99]. Ces fluctuations de phase, qui transforment le vrai condensat en quasi-condensat y compris dans le régime de Thomas-Fermi 3D, avaient été prédites dans l'article [100]. Elles sont causées par des excitations axiales de basse énergie  $\epsilon_\nu < \hbar\omega_\perp$ , qui ont une longueur d'onde supérieure au rayon de Thomas-Fermi transverse et présentent donc un caractère unidimensionnel. La température  $T_\phi$  au dessus de laquelle on observe des fluctuations de phase est donnée par [100] :

$$k_B T_\phi = 15 \frac{(\hbar\omega_x)^2}{32\mu_{3D}} N. \quad (1.59)$$

Lorsque  $T_\phi$  est inférieure à la température critique  $T_c$ , il existe une zone de température  $T_\phi < T < T_c$  pour laquelle la phase fluctue sur une longueur inférieure au rayon de Thomas-Fermi longitudinal 3D. Les fluctuations de densité restent quant à elles négligeables. En abaissant la température sous  $T_\phi$  on diminue les fluctuations de phase jusqu'à retrouver un vrai condensat.

Les fluctuations de phase se manifestent par des modulations de la densité selon l'axe longitudinal après temps de vol [98]. En effet, tant que le gaz d'atomes est piégé, les fluctuations de phase n'affectent pas la distribution de densité à cause des interactions de champ moyen entre les particules. Une fois que le piège est coupé il y a une expansion très rapide selon les directions transverses, ce qui entraîne une baisse rapide de l'énergie d'interaction. Les variations importantes de la vitesse longitudinale  $v(x, t) = \hbar\nabla\phi(x, t)/m$ , dues aux fluctuations de phase, conduisent à des déplacements différents après temps de vol, ce qui aboutit à des interférences et une distribution finale présentant des fluctuations de densité longitudinales. Ce phénomène est analogue à l'effet Talbot temporel [101]. Le calcul du spectre en puissance des modulations de densité, relié au peuplement thermique d'excitations de basse énergie (phonons), permet de mesurer la température du gaz comme on le verra au paragraphe 3.5.1.

La transition entre régime tridimensionnel et unidimensionnel a été étudiée par Fabrice Gerbier dans l'article [102], qui donne des résultats analytiques utiles. Ainsi, dans un piège harmonique selon l'axe longitudinal  $U(x) = m\omega_x^2 x^2/2$ , le profil de densité selon  $x$  s'écarte du profil de Thomas-Fermi unidimensionnel. Il doit être corrigé selon :

$$n(x) = \frac{\alpha}{16a} (1 - \tilde{x}^2) [\alpha (1 - \tilde{x}^2) + 4] \quad (1.60)$$

où  $\alpha = 2\mu_{1D}/\hbar\omega_\perp$  et  $\tilde{x} = x/L$ .  $L$  est la demi-longueur du condensat, c'est-à-dire la distance  $x$  à partir de laquelle la densité s'annule, qui diffère du rayon de Thomas-Fermi  $R_x$ . Son expression est donnée par  $L = a_x^2 \sqrt{\alpha}/a_\perp$ . On remarque que dans la limite  $\alpha \ll 1$ , c'est-à-dire  $\mu_{1D} \ll \hbar\omega_\perp$ , on a  $n(x) \propto (1 - \tilde{x}^2)$  : on retrouve le profil de Thomas-Fermi longitudinal dans le cas unidimensionnel, donné à l'équation (1.48). Pour  $\alpha \gg 1$  on a  $n(x) \propto (1 - \tilde{x}^2)^2$  et on retrouve le profil de Thomas-Fermi longitudinal intégré selon les directions  $y$  et  $z$  pour la limite 3D, donné à l'équation (1.36). En utilisant  $\int_{-L}^L n(x) dx = N$  et en intégrant l'équation (1.60) on en déduit :

$$\alpha^3(\alpha + 5)^2 = (15\chi)^2 \quad (1.61)$$

où  $\chi = Naa_{\perp}/a_x^2$ , ce qui permet d'en déduire  $\alpha$  et donc le potentiel chimique. Le paramètre  $\chi$  peut être utilisé pour définir une limite entre régime 3D et 1D, bien qu'il n'existe pas de vraie frontière entre les deux régimes. En effet, dans la limite où  $\alpha \gg 5$ , donc pour  $\mu_{1D} \gg \hbar\omega_{\perp}$ , on a  $\alpha \simeq (15\chi)^{\frac{2}{5}} = 2\mu_{3D}^{\text{TF}}/\hbar\omega_{\perp}$ , où  $\mu_{3D}^{\text{TF}}$  est le potentiel chimique déduit de l'approximation de Thomas-Fermi dans le régime 3D, tandis que pour  $\alpha \ll 5$  on a  $\alpha \simeq (3\chi)^{\frac{2}{3}} = 2\mu_{1D}^{\text{TF}}/\hbar\omega_{\perp}$ , avec  $\mu_{1D}^{\text{TF}}$  le potentiel chimique déduit de l'approximation de Thomas-Fermi dans le régime 1D. Si on définit la transition entre les deux régimes comme la limite où  $\mu_{3D}^{\text{TF}} = \mu_{1D}^{\text{TF}}$  on trouve  $\chi_f \simeq 3,73$ .

## 1.2 Interactions entre atomes froids

Les interactions entre atomes permettent d'enrichir considérablement l'étendue des phénomènes physiques accessibles avec des atomes ultrafroids. Nous avons par exemple vu que pour des gaz de Bose unidimensionnels on observe des comportements très différents dans la limite des régimes de faible interaction et de forte interaction. L'un des objectifs de l'expérience sodium serait d'étudier le régime de forte interaction pour lequel

$$\gamma = \frac{mg_{1D}}{\hbar^2 n_{1D}} = \frac{2m\omega_{\perp}a}{\hbar n_{1D}} \gg 1. \quad (1.62)$$

On a donc  $\gamma \propto a$  : pour atteindre ce régime il pourrait être intéressant d'augmenter la longueur de diffusion  $a$ . Pour cela, il est possible d'utiliser des résonances de Feshbach [55,57].

### 1.2.1 Bases de la théorie de la diffusion et des collisions

On peut décrire les interactions entre des atomes ultrafroids à l'aide d'un paramètre appelé longueur de diffusion, sans connaître en détail le potentiel d'interaction entre atomes, comme mentionné au paragraphe 1.1. Nous allons donner ici les bases de la théorie de la diffusion et des collisions à basse énergie, afin d'introduire notamment cette longueur de diffusion. Nous nous appuyerons dans cette partie sur le cours de Jean Dalibard de 2021 au Collège de France [103].

#### Interactions entre deux atomes

Les interactions entre deux atomes sont décrites par le potentiel d'interaction  $V(r)$ , avec  $r$  la distance relative entre les atomes, dans le cas d'un potentiel isotrope<sup>3</sup>. À longue distance – c'est-à-dire lorsque les fonctions d'onde de deux atomes ne se recouvrent pas – les interactions sont dominées par les forces de Van der Waals. Ces forces sont causées par l'interaction entre dipôles électriques induits et conduisent à un potentiel de la forme :

$$V(r) = -\frac{C_6}{r^6} \quad (1.63)$$

avec  $C_6$  un coefficient positif.

À courte distance l'interaction d'échange, à l'origine de la liaison chimique, prédomine. Celle-ci est causée par la possibilité pour les électrons de passer d'un atome à l'autre par effet

---

3. Ce que nous supposerons dans toute la suite du chapitre

tunnel. Le potentiel décrivant cette interaction peut être approximé en utilisant la méthode de Heitler-London [104]. Pour les atomes alcalins il existe deux canaux d'interaction

$$V_{\text{eff},+}(r) = \frac{\epsilon_{\text{dir}}(r) + \epsilon_{\text{ech}}(r)}{1 + \Delta^2(r)} \quad (1.64)$$

et

$$V_{\text{eff},-}(r) = \frac{\epsilon_{\text{dir}}(r) - \epsilon_{\text{ech}}(r)}{1 - \Delta^2(r)} \quad (1.65)$$

avec l'énergie directe  $\epsilon_{\text{dir}}(r)$  qui correspond à l'élément de matrice de l'hamiltonien pour lequel chaque électron est sur son atome de départ,  $\epsilon_{\text{ech}}$  celui pour lequel les électrons sont échangés et  $\Delta(r)$  le recouvrement des états des deux atomes [103]. Le potentiel  $V_{\text{eff},+}(r)$  est associé à l'état de spin singulet pour les électrons des deux atomes

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad (1.66)$$

et l'état correspondant est appelé orbitale liante. Le potentiel  $V_{\text{eff},-}(r)$  est associé aux états de spin triplet

$$\left\{ |-, -\rangle, |+, +\rangle, \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \right\}. \quad (1.67)$$

Les états correspondants sont appelés orbitale antiliante. On peut réécrire ces deux canaux d'interaction sous la forme plus compacte :

$$V_{\text{st}}(r) = V_0(r) + \frac{\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2}{\hbar^2} V_1(r) \quad (1.68)$$

avec  $V_0 = (V_{\text{eff},+} + 3V_{\text{eff},-})/4$ ,  $V_1 = V_{\text{eff},-} - V_{\text{eff},+}$  et  $\hat{\mathbf{s}}_1$  et  $\hat{\mathbf{s}}_2$  le spin de chacun des électrons.

### Théorie de la diffusion

L'interaction entre deux atomes 1 et 2 de masse  $m$  peut être décrite par un problème à deux corps dans la limite de l'approximation de Born, avec l'hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m} + \hat{V}(|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|). \quad (1.69)$$

On peut se ramener à un problème à un corps en introduisant les variables positions et impulsions du centre de masse :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{r}}_1 + \hat{\mathbf{r}}_2) \\ \hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2 \end{cases} \quad (1.70)$$

et les variables relatives :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{r}}_1 - \hat{\mathbf{r}}_2 \\ \hat{\mathbf{p}} = \frac{1}{2}(\hat{\mathbf{p}}_1 - \hat{\mathbf{p}}_2). \end{cases} \quad (1.71)$$

On peut alors réécrire l'hamiltonien comme la somme de deux termes

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{cdm}} + \hat{H}_{\text{rel}} \quad (1.72)$$

avec l'hamiltonien du centre de masse

$$\hat{H}_{\text{cdm}} = \frac{\hat{\mathbf{P}}^2}{4m} \quad (1.73)$$

et l'hamiltonien relatif, qui décrit la collision entre les deux atomes

$$\hat{H}_{\text{rel}} = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m_r} + \hat{V}(r) \quad (1.74)$$

où  $m_r = m/2$  est la masse réduite. En écrivant les états propres sous la forme

$$\hat{H}_{\text{rel}}\psi(\mathbf{r}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_r}\psi(\mathbf{r}) \quad (1.75)$$

on obtient l'équation

$$\frac{\hbar^2}{2m_r}(\nabla^2 + k^2)\psi(\mathbf{r}) = V(r)\psi(\mathbf{r}). \quad (1.76)$$

On peut écrire une solution de cette équation sous la forme [105]

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int \mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')V(r')\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}')d^3r' \quad (1.77)$$

avec  $\mathcal{G}_0^{(+)}$  la fonction de Green sortante :

$$\frac{\hbar^2}{2m_r}\mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r}) = -\frac{e^{ikr}}{4\pi r}. \quad (1.78)$$

Il s'agit d'une équation implicite puisque l'intégrale dépend de  $\psi_{\mathbf{k}}$ , cependant on peut trouver une expression approchée pour  $\psi_{\mathbf{k}}$  en effectuant un développement perturbatif par rapport à  $V$ , appelé développement de Born. Au premier ordre on a :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \int \mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')V(r')e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}d^3r'. \quad (1.79)$$

Si on suppose que  $r$  est grand devant la taille sur laquelle le potentiel  $V$  prend des valeurs significatives on a

$$\mathcal{G}_0^{(+)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\mathbf{u}_f\cdot\mathbf{r}'} \quad (1.80)$$

où  $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_f$ . On obtient finalement :

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \simeq e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + f(k, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_f) \frac{e^{ikr}}{r} \quad (1.81)$$

où  $\mathbf{k} = k\mathbf{u}_i$  et l'amplitude de diffusion vaut

$$f(k, \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_f) = -\frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int e^{-ik(\mathbf{u}_f - \mathbf{u}_i)\cdot\mathbf{r}'}V(r')d^3r'. \quad (1.82)$$

L'hamiltonien relatif  $\hat{H}_{\text{rel}}$  est invariant par rotation et il y a donc une base d'états propres communs à  $\hat{H}_{\text{rel}}$  et au carré du moment cinétique  $\hat{\mathbf{L}}^2$  qui vérifient :

$$\hat{\mathbf{L}}^2\psi = \hbar^2 l(l+1)\psi \quad (1.83)$$

où  $l$  est un entier positif. On peut alors décomposer le problème en un sous-ensemble de problèmes indépendants, avec différents canaux de collision associés à la valeur de  $l$ , pour lesquels le potentiel effectif est :

$$V_{\text{eff}}(r) = V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m_r r^2}. \quad (1.84)$$

Dans le cas d'un moment cinétique nul  $l = 0$  la fonction d'onde est isotrope et  $V_{\text{eff}}(r) = V(r)$ . On appelle les collisions de ce canal des collisions en onde s. Pour  $l \neq 0$  le potentiel effectif est composé de deux termes,  $V(r) \simeq -C_6/r^6$  et un terme répulsif en  $1/r^2$ . À longue distance c'est le terme en  $1/r^2$  qui prédomine, ce qui crée une barrière de potentiel, appelé barrière centrifuge. Dans les expériences d'atomes froids l'énergie thermique est généralement très petite devant la hauteur de cette barrière centrifuge. Le maximum du potentiel pour  $l = 1$ , atteint en  $r = (3m_r C_6/\hbar^2)^{1/4}$  vaut en effet :

$$V_{\text{bc}} = \frac{2\hbar^3}{(3m_r)^{3/2}\sqrt{C_6}} \quad (1.85)$$

et vaut pour le sodium  $V_{\text{bc}} \simeq k_B \times 1 \text{ mK}$ , ce qui est très grand devant les températures typiques de condensation de l'ordre du microkelvin. La diffusion se produit donc essentiellement dans le canal  $l = 0$ , avec des collisions isotropes en onde s. Dans ce cas l'amplitude de diffusion  $f(k)$  est isotrope et on appelle longueur de diffusion  $a$  la limite de  $-f(k)$  quand  $k$  tend vers 0. Ce paramètre permet à lui seul (la plupart du temps) de décrire les collisions pour des atomes ultrafroids et vaut, à l'approximation de Born :

$$a = \frac{m_r}{2\pi\hbar^2} \int V(r') d^3r'. \quad (1.86)$$

Lorsque  $a > 0$  les interactions sont répulsives, tandis que pour  $a < 0$  elles sont attractives.

Comme la longueur de diffusion est le seul paramètre pertinent pour décrire les collisions à basse énergie, on peut remplacer le vrai potentiel par un potentiel plus simple de même longueur de diffusion. Par exemple on peut penser à un potentiel de contact de portée nul de type :

$$\hat{V} = g_{3\text{D}}\delta(\mathbf{r}) \quad (1.87)$$

avec  $g_{3\text{D}}$  la constante de couplage et  $\delta$  la fonction de Dirac. Un problème de divergence se pose lorsqu'on applique cet potentiel avec une fonction d'onde en  $1/r$  et il faut plutôt utiliser le pseudo-potentiel [106] dont l'action sur une fonction d'onde  $\psi(\mathbf{r})$  est donnée par :

$$\hat{V}[\psi(\mathbf{r})] = g_{3\text{D}}\delta(\mathbf{r})\frac{\partial}{\partial r}[r\psi(\mathbf{r})]. \quad (1.88)$$

Avec ce potentiel on trouve que

$$\lim_{k \rightarrow 0} f(k) = -\frac{g_{3\text{D}}m_r}{2\pi\hbar^2}. \quad (1.89)$$

On en déduit qu'il faut prendre pour la constante de couplage :

$$g_{3\text{D}} = \frac{2\pi\hbar^2}{m_r}a = \frac{4\pi\hbar^2}{m}a. \quad (1.90)$$

### 1.2.2 Résonances de Feshbach

#### Généralités

Les résonances de Feshbach constituent un outil de contrôle des interactions pour les atomes froids [57]. Ces résonances se produisent lorsqu'on couple deux canaux de diffusion, dont l'un est ouvert et l'autre fermé (voir figure 1.2). Lors d'une collision les deux atomes arrivent dans le canal ouvert (canal d'entrée), décrit par un potentiel  $V_1(r)$ , avec une énergie cinétique supérieure à la valeur de  $V_1$  à l'infini. Le canal fermé est décrit par un deuxième potentiel  $V_2(r)$ , dont l'énergie à l'infini est supérieure à celle des atomes. La résonance se produit lorsque le canal fermé comporte un état lié d'énergie  $E_1$  proche de l'énergie à l'infini du potentiel  $V_1$ , ce qui crée un couplage entre les deux canaux à l'origine d'une modification de l'amplitude de diffusion lors de la collision. Pour induire une résonance de Feshbach, on utilise usuellement un champ magnétique statique  $B$  pour avoir  $E_1 \simeq V_1(\infty)$  en tirant profit du fait que les deux canaux correspondent à des états de moments magnétiques différents. La longueur de diffusion au voisinage de la résonance diverge alors avec la loi :

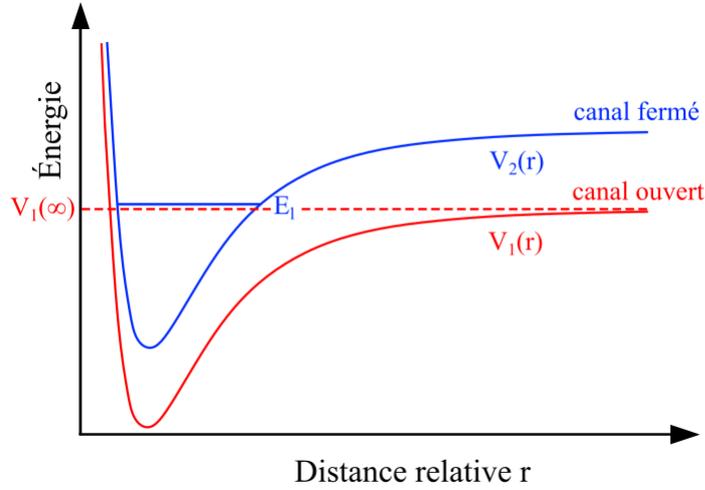
$$a = a_{\text{bg}} \left( 1 - \frac{\Delta B}{B - B_{\text{res}}} \right) \quad (1.91)$$

où  $a_{\text{bg}}$  est la longueur de diffusion pour le canal ouvert, hors résonance,  $B_{\text{res}}$  correspond au champ magnétique à résonance pour lequel  $a$  diverge et  $\Delta B$  donne la largeur en champ magnétique de la résonance. Pour  $B = B_{\text{res}} - \Delta B$  la longueur de diffusion vaut  $a = 2a_{\text{bg}}$  tandis que pour  $B = B_{\text{res}} + \Delta B$  elle vaut  $a = 0$ .

La première démonstration expérimentale de cette divergence pour la longueur de diffusion a été faite par Inouye et al. [55]. Les résonances de Feshbach sont souvent détectées grâce à des pertes d'atomes. En effet, à proximité des résonances de Feshbach les pertes inélastiques à deux ou trois corps sont fortement augmentées, avec un couplage des états liés de Feshbach vers des canaux sortants inélastiques. Lorsque les atomes finissent dans un état d'énergie inférieur à celui de départ ou forment une molécule, l'énergie interne est en effet transformée en énergie cinétique supérieure à celle du piège et les atomes sont donc perdus.

Il est possible d'induire des résonances de Feshbach à l'aide d'un champ électromagnétique plutôt qu'un champ magnétique statique, pour coupler l'état incident à l'état lié, avec une fréquence correspondant à la différence d'énergie entre les deux états. Dans ce cas la force du couplage entre les deux états peut être contrôlée car elle est proportionnelle à l'amplitude du champ électromagnétique. Ainsi, des résonances de Feshbach optiques, utilisant un laser, ont été observées [58]. Pour ces résonances, le canal d'entrée correspond à deux atomes dans l'état électronique fondamental, tandis que le canal fermé correspond à un atome dans un état électronique excité et l'autre dans l'état fondamental. Cette technique est cependant limitée par des pertes d'atomes rapides, liées à l'émission spontanée.

Une autre possibilité, envisagée par Papoular, Shlyapnikov et Dalibard dans l'article [59], est d'utiliser un champ micro-onde pour coupler des atomes alcalins initialement dans un état hyperfin  $f_1$  de l'état fondamental vers un canal fermé correspondant à un atome dans l'état  $f_1$  et le deuxième atome dans un autre état hyperfin de l'état fondamental  $f_2$ . Pour ces résonances il n'y a donc pas d'émission spontanée. C'est ce type de résonances de Feshbach que nous avons exploré expérimentalement au chapitre 4, avec comme motivation d'augmenter la longueur de diffusion pour se rapprocher du régime de forte interaction. En effet, nous ne pouvons pas utiliser les résonances de Feshbach magnétiques dans notre expérience car les atomes sont piégés dans un minimum de champ magnétique. Ce minimum de champ



**Figure 1.2** – Illustration du phénomène de résonance de Feshbach. Lors de la collision les atomes arrivent dans le canal ouvert décrit par le potentiel  $V_1$  et sont couplés à l'état lié d'énergie  $E_l$  du canal fermé décrit par le potentiel  $V_2$ . Au voisinage de la résonance la longueur de diffusion diverge.

magnétique doit être faible (de l'ordre du gauss) afin d'atteindre un confinement transverse important, ce qui est incompatible avec les valeurs de champs magnétiques nécessaires à l'observation de résonances de Feshbach magnétiques pour le sodium, qui sont de l'ordre de 1000 G [55].

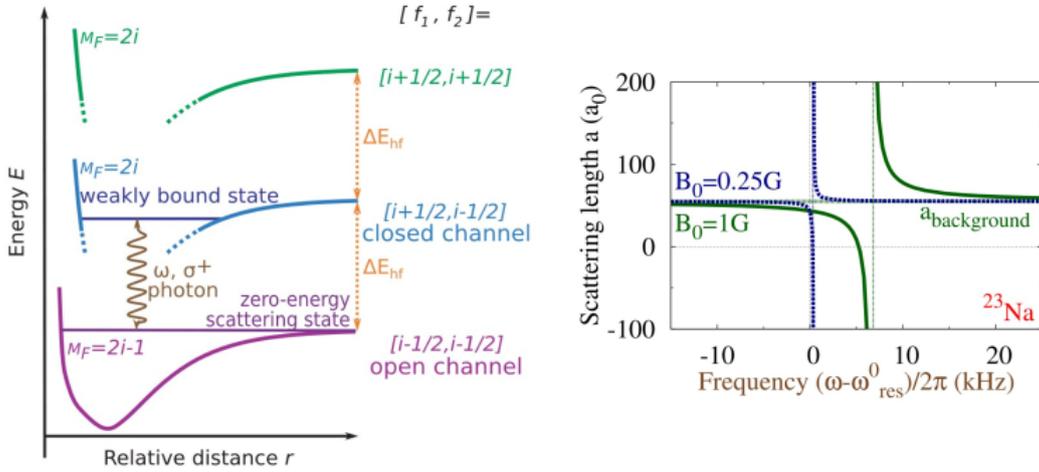
### Résonances de Feshbach micro-onde

Dans l'article [59] et la thèse [62], les auteurs considèrent des atomes alcalins, dont l'état fondamental se sépare en deux niveaux hyperfins :  $f_1 = i - 1/2$  et  $f_2 = i + 1/2$ , où  $i$  est le spin nucléaire. On prendra  $i = 3/2$  dans la suite, comme c'est le cas pour les atomes de sodium. Les deux niveaux hyperfins sont donc  $f_1 = 1$  et  $f_2 = 2$ . Les deux atomes mis en jeu dans la collision sont initialement dans l'état  $|f = 1, m_f = 1\rangle$ , que l'on peut écrire comme l'état à deux particules :  $|f_1 f_1, F = 2, M_F = 2\rangle$ , avec  $F$  le spin total et  $M_F$  sa projection. Pour induire une résonance de Feshbach les auteurs considèrent un couplage vers l'état moléculaire rovibrationnel « le moins lié », c'est-à-dire le plus proche de l'énergie de dissociation, du canal où on a asymptotiquement un atome dans l'état  $f_1 = 1$  et un atome dans l'état  $f_2 = 2$ . Ils choisissent une polarisation de la micro-onde  $\sigma^+$ , dont la fréquence est égale à la différence d'énergie entre l'état libre de départ et l'état lié, qui crée un couplage vers un dimère de projection de spin total  $M_F = 3$  (voir figure de gauche 1.3). Pour le sodium, la fréquence de cette résonance est attendue autour de 1,6 GHz.

Les calculs ont été réalisés grâce à des méthodes de canaux couplés. Au voisinage de la résonance, la longueur de diffusion diverge avec une loi de la forme :

$$a(\omega) = a_{\text{bg}} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega - \omega_{\text{res}}} \right) \quad (1.92)$$

où  $a_{\text{bg}}$  est la longueur de diffusion sans micro-onde,  $\omega_{\text{res}}/2\pi$  est la fréquence de résonance entre les deux états et  $\Delta\omega/2\pi$  est la largeur en fréquence de la résonance. La longueur de



**Figure 1.3** – Figure de gauche : résonance de Feshbach induite par un champ micro-onde, qui couple deux atomes libres de la branche  $[f_1 = 1, f_2 = 1]$  vers un état moléculaire faiblement lié de la branche  $[f_1 = 2, f_2 = 1]$  pour  $i = 3/2$ . Cette figure est tirée de l'article [59]. Figure de droite : longueur de diffusion du sodium en fonction de la fréquence du champ micro-onde pour des amplitudes du champ  $B_0 = 0,25$  G et  $B_0 = 1$  G au voisinage de la résonance. Cette figure est tirée de la thèse de David Papoular [62].

diffusion en fonction de la fréquence du champ micro-onde au voisinage de la résonance pour le sodium est représentée sur la figure de droite de 1.3.

La largeur de la résonance est proportionnelle au carré de l'amplitude du champ micro-onde  $B_0$  – donc à la puissance du champ micro-onde – avec  $B_0$  qui est défini par rapport au couplage de Rabi  $\Omega_R$  entre les états  $|f = 1, m_f = 1\rangle$  et  $|f = 2, m_f = 2\rangle$  :

$$\mu_B B_0 = \frac{\hbar \Omega_R}{2}. \quad (1.93)$$

Contrairement aux résonances de Feshbach magnétiques il est donc a priori possible de contrôler la largeur de la résonance, car elle est proportionnelle à la puissance du champ micro-onde. Cependant, pour atteindre des largeurs de résonance qui rendent ces résonances exploitables il faut atteindre des puissances micro-onde très importantes. Pour le sodium, qui est l'atome avec la plus grande largeur de résonance après le césium, on a ainsi  $\Delta\omega/2\pi = 1,4$  kHz pour  $B_0 = 1$  G, c'est-à-dire pour une fréquence de Rabi  $\Omega_R/2\pi = 2,8$  MHz. À titre de comparaison on a seulement  $\Delta\omega/2\pi = 60$  Hz à  $B_0 = 1$  G pour du rubidium, car les longueurs de diffusion des états singulet et triplet sont très proches.

La position de la résonance  $\omega_{\text{res}}$  est donnée par :

$$\hbar\omega_{\text{res}} = \Delta E_{\text{hf}} - |E_{\text{T}}| + \alpha B_0^2, \quad (1.94)$$

où  $\Delta E_{\text{hf}}$  est l'écart en énergie entre les niveaux hyperfins,  $E_{\text{T}}$  est l'énergie de liaison de l'état lié et  $\alpha B_0^2$  est un décalage de la fréquence causé par le couplage entre les canaux ouvert et fermé. Les valeurs de  $|E_{\text{T}}|$ ,  $\omega_{\text{res}}$ ,  $\alpha$  et  $\Delta\omega$  pour  $B_0 = 1$  G sont données dans le tableau 1.1 pour différents alcalins.

	${}^7\text{Li}$	${}^{23}\text{Na}$	${}^{41}\text{K}$	${}^{87}\text{Rb}$	${}^{133}\text{Cs}$
$ E_T/h $ (MHz)	12000	200	140	25	110
$\omega_{\text{res}}/2\pi$ (GHz)	12	1,6	0,12	6,8	9,1
$\alpha$ (kHz/G <sup>2</sup> )	0,33	6,8	21	120	30
$\Delta\omega/2\pi$ (Hz)	6	1400	350	60	- 4500

**Table 1.1** – Tableau tiré de l'article [59]. Les valeurs sont données pour une amplitude micro-onde  $B_0$  de 1 G.

### 1.3 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit les outils essentiels pour comprendre le travail effectué dans cette thèse. Après une phase de construction du dispositif expérimental, qui sera détaillée au chapitre 2, nous avons ainsi réussi à produire des condensats de Bose-Einstein de sodium. Les pièges magnétiques très allongés créés par la puce à atomes permettent d'explorer le régime unidimensionnel introduit dans ce chapitre au paragraphe 1.1.2, lorsqu'on travaille à faible nombre d'atomes. La caractérisation expérimentale des quasi-condensats ainsi que le passage du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel seront étudiés au chapitre 3. La mise en œuvre expérimentale des résonances de Feshbach micro-onde qui ont été introduites au paragraphe 1.2.2 de ce chapitre sera discutée au chapitre 4. Enfin, dans le chapitre 5 nous présenterons des simulations numériques effectuées en résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, que nous avons introduite au paragraphe 1.1.2.

# Chapitre 2

## Montage expérimental

Ce chapitre a pour but de présenter le montage expérimental. Nous ferons dans un premier temps l'état des lieux du dispositif expérimental à mon arrivée en thèse (paragraphe 2.1), dont on trouvera une description détaillée dans les thèses de Dany Ben Ali [63] et de Joseph Seaward [64]. Nous présenterons ensuite les aspects techniques et les étapes de la construction de l'expérience menées durant ma thèse, qui ont permis d'obtenir un condensat de Bose-Einstein d'atomes de sodium sur puce. Après avoir installé l'imagerie par absorption (2.2), nous avons travaillé sur le transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce à atomes, qui sera décrite en détail au paragraphe 2.3. Ce transfert nécessite l'utilisation d'un piège magnétique intermédiaire créé par un fil de cuivre en forme de « Z » (2.4) ainsi que des bobines produisant des champs magnétiques homogènes (2.5). Pour refroidir les atomes à une température inférieure à la température critique de condensation, nous effectuons du refroidissement par évaporation à l'aide d'un champ radiofréquence au cours du transfert vers le piège de la puce (2.6).

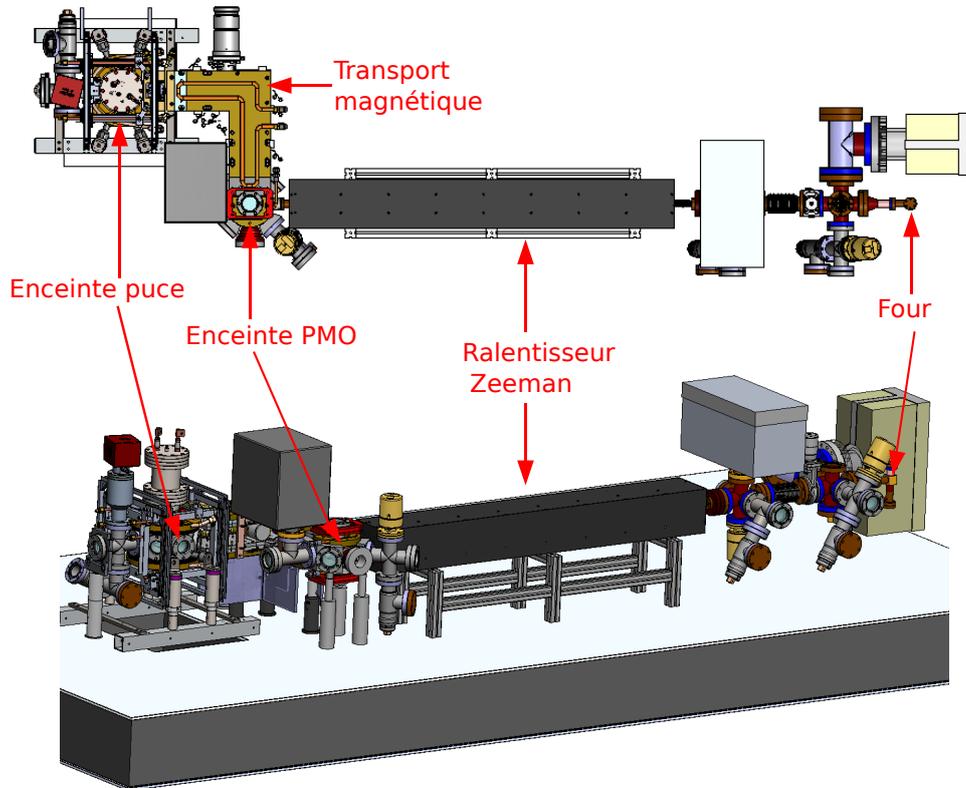
La conception initiale du fil en Z ne permettait pas d'atteindre un régime d'emballement pour le refroidissement par évaporation. Nous avons dû changer cette pièce, ce qui a nécessité des modifications importantes sur l'expérience, avec notamment l'installation d'une nouvelle puce à atomes. Ces étapes sont décrites au paragraphe 2.7.

### 2.1 Aperçu du montage expérimental

Dans cette partie, nous allons décrire rapidement les éléments qui étaient déjà installés sur l'expérience à mon arrivée en thèse. On trouvera une description plus détaillée du dispositif expérimental dans les thèses de Dany Ben Ali [63] et de Joseph Seaward [64].

L'expérience est constituée de plusieurs enceintes à vide reliées entre elles. Une vue générale est présentée sur la figure 2.1. La première enceinte joue le rôle de four dans lequel les atomes de sodium sont initialement chauffés. Ils traversent ensuite un ralentisseur Zeeman et sont capturés et refroidis dans un piège magnéto-optique, dans une enceinte métallique comportant 8 hublots. Ils sont par la suite chargés dans un piège magnétique quadrupolaire et transportés vers la dernière enceinte dans laquelle se trouve la puce à atomes.

Utiliser deux enceintes différentes pour le piège magnéto-optique (PMO) et la puce permet d'atteindre une pression plus faible dans l'enceinte où se trouve la puce, ce qui augmente le



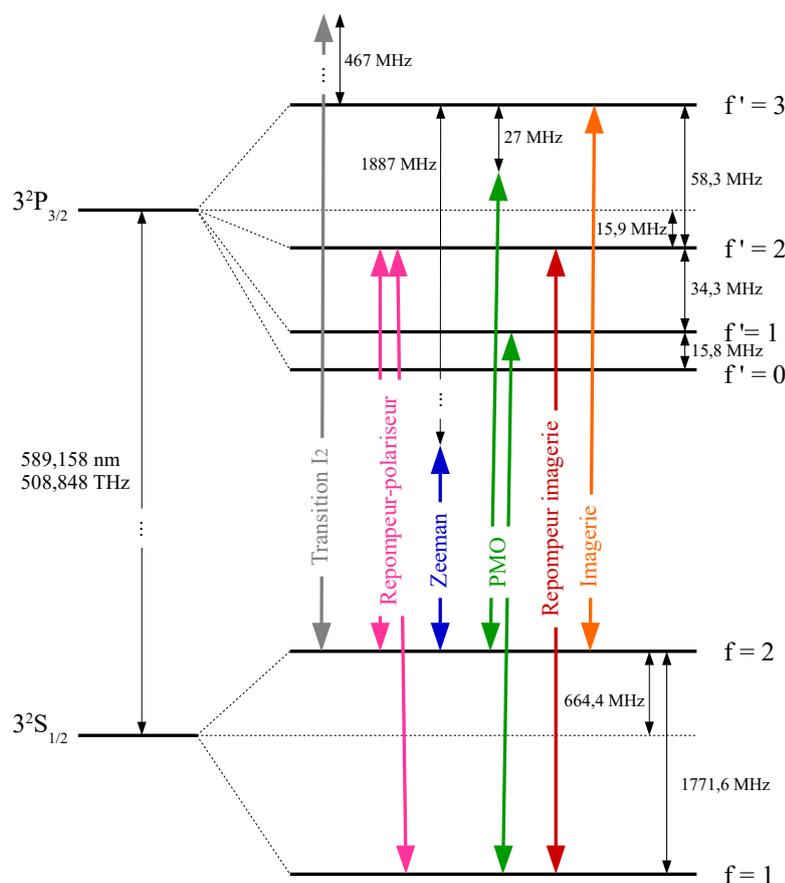
**Figure 2.1** – Vue générale de l’expérience de dessus et de côté, modélisée sur Solidworks par Thomas Badr. Les éléments principaux – four, ralentisseur Zeeman, enceinte du piège magnéto-optique, transport magnétique et enceinte de la puce – sont indiqués sur l’image.

temps de vie du condensat de Bose-Einstein. De plus, il devrait être possible de charger des atomes dans le piège magnéto-optique en même temps qu’on produit un condensat dans l’enceinte de la puce, ce qui augmenterait le taux de répétition de l’expérience, même si nous n’avons pas encore mis en place cette option.

À mon arrivée sur l’expérience l’ultravide venait d’être atteint dans l’enceinte contenant la puce et nous avons transporté les atomes jusqu’à cette dernière pour la première fois.

### 2.1.1 Système laser et montage optique

Pour comprendre quelles fréquences lasers utiliser pour refroidir les atomes de sodium, il faut s’intéresser à leur structure. Le sodium est un atome alcalin : il possède un unique électron sur sa couche de valence ( $n = 3$ ). Pour décrire correctement les états d’énergie il faut prendre en compte le couplage entre le spin  $\vec{S}$  et le moment cinétique orbital  $\vec{L}$ , ce qui aboutit à la structure fine avec l’état fondamental noté  $3^2S_{1/2}$  et le premier état excité qui se sépare en deux niveaux :  $3^2P_{1/2}$  et  $3^2P_{3/2}$ . La transition entre l’état fondamental  $3^2S_{1/2}$  et l’état excité  $3^2P_{3/2}$  est appelée raie  $D_2$ . C’est cette transition que nous utilisons pour refroidir les atomes. Elle correspond à une longueur d’onde de 589,158 nm. Afin de décrire plus précisément la structure du sodium il faut aussi prendre en compte le couplage avec le spin nucléaire  $I = 3/2$  ce qui donne la structure hyperfine : chaque état de la structure fine

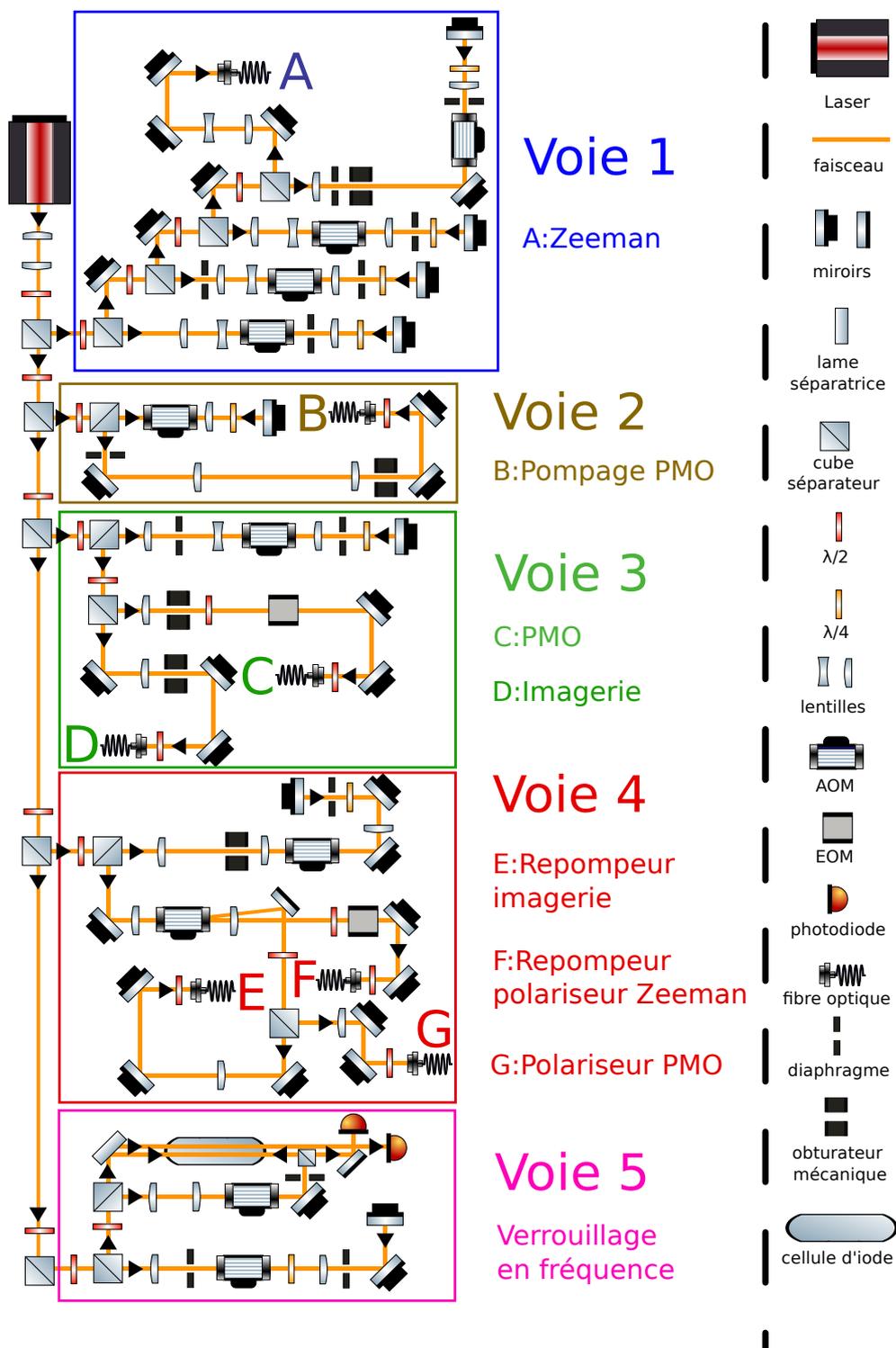


**Figure 2.2** — Structure hyperfine de la raie  $D_2$  du sodium avec les fréquences des différents faisceaux lasers utilisés dans l'expérience.

se sépare en sous-niveaux d'énergie, repérés par le nombre quantique  $f$ . L'état fondamental  $3^2S_{1/2}$  se sépare ainsi en deux niveaux :  $f = 1$  et  $f = 2$ . L'état excité  $3^2P_{3/2}$  se sépare en quatre niveaux :  $f' = 0$ ,  $f' = 1$ ,  $f' = 2$  et  $f' = 3$ . La transition entre les états  $f = 2$  et  $f' = 3$  est une transition cyclante : à cause des règles de sélection les atomes dans  $f' = 3$  ne peuvent se désexciter que dans  $f = 2$ . En accordant le laser sur cette transition les atomes vont cycliser entre ces deux états. C'est donc cette transition qui est utilisée pour ralentir et refroidir les atomes efficacement. La structure hyperfine de la raie  $D_2$  du sodium ainsi que les fréquences des différents faisceaux lasers utilisées lors de la séquence sont représentées sur la figure 2.2.

Pour manipuler les atomes de sodium, nous avons besoin d'un laser à une longueur d'onde de 589 nm. Pour cela, nous utilisons une diode laser à cavité étendue (modèle DL100/pro design de Toptica), qui génère un faisceau laser d'une cinquantaine de milliwatts à 1178 nm. Ce faisceau est amplifié jusqu'à 8 W grâce à un amplificateur à effet Raman (modèle VRFA-P-1800-589-SF de MPB Communications Inc). La fréquence est ensuite doublée par un cristal doubleur PPLN (niobate de lithium périodiquement polarisé) qui convertit deux photons à 1178 nm en un photon à 589 nm. La puissance maximale disponible pour le faisceau à 589 nm est de 1,8 W et nous travaillons actuellement avec 1,44 W.

Le système optique utilisé dans l'expérience sodium est représenté sur le schéma de la figure 2.3, sur lequel nous nous appuyerons pour la description qui suit. Le laser est réparti



**Figure 2.3** – Système optique de l'expérience sodium. Le faisceau laser est séparé en 5 voies, encadrées sur l'image. Chaque entrée de fibre optique est indexée par une lettre. Les éléments d'optiques représentés sur ce schéma sont issus de la collection d'images ComponentLibrary.

en 5 voies sur la table optique.

- La voie 5 permet de verrouiller le laser en fréquence grâce à un montage d'absorption saturée. Le faisceau passe par un modulateur acousto-optique 350 MHz en double passage, dont nous utilisons l'ordre +1. Il est séparé en faisceaux pompe et sonde, qui traversent une cellule contenant un gaz de diiode ( $I_2$ ). Le diiode a la particularité d'avoir une transition proche en fréquence de la transition cyclante entre les états  $f = 2$  et  $f' = 3$ , décalée de 467 MHz vers le bleu [107] (voir paragraphe 1.1.3.3 de la thèse [63]). L'intérêt d'utiliser un gaz de diiode est que la cellule n'a pas besoin d'être chauffée pour atteindre une pression de vapeur saturante suffisante, contrairement à une cellule contenant du sodium. Lorsque le laser est verrouillé en fréquence grâce à ce montage d'absorption saturé, la fréquence en sortie du laser est décalée de 253 MHz vers le rouge par rapport à la transition cyclante.

- La voie 1 est utilisée pour le faisceau du ralentisseur Zeeman. Le faisceau traverse quatre modulateurs acousto-optiques 200 MHz en double passage, dont nous utilisons les ordres -1, ce qui permet de décaler en fréquence le laser vers le rouge de 1887 MHz par rapport à la transition cyclante.

- La voie 2 n'est pas encore utilisée. Le faisceau passe à travers un modulateur acousto-optique 110 MHz en double passage. La fréquence est accordée sur la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 2$ . Des atomes éclairés par ce faisceau vont alors s'accumuler dans l'état  $f = 1$ . L'idée est de le conjuguer à un faisceau accordé sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 1$  et polarisé  $\sigma^-$ , afin d'accumuler les atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , pour piéger magnétiquement l'ensemble des atomes capturés dans le piège magnéto-optique, d'où le nom de « pompage PMO ».

- Le faisceau dans la voie 3 traverse un modulateur acousto-optique 110 MHz en double passage, donc nous utilisons l'ordre +1, puis est séparé en deux. Le faisceau injecté dans la fibre C (voir figure 2.3) est utilisé pour les faisceaux du piège magnéto-optique. Le laser passe par un modulateur électro-optique qui crée des bandes latérales décalées de 1,7075 GHz par rapport à la fréquence centrale. La fréquence centrale est décalée de 27 MHz vers le rouge de la transition cyclante entre  $f = 2$  et  $f' = 3$  tandis que l'une des bandes latérales permet de repomper les atomes de l'état  $f = 1$  vers l'état  $f' = 1$ . Le faisceau injecté dans la fibre D est utilisé pour l'imagerie par absorption et est à résonance de la transition cyclante  $f = 2 \rightarrow f' = 3$ .

- Dans la quatrième voie, le faisceau passe par un modulateur acousto-optique 110 MHz en double passage, dont nous utilisons l'ordre +1. Il traverse ensuite un modulateur acousto-optique 1,700 GHz. Nous utilisons l'ordre 0 et l'ordre +1. L'ordre 0 est injecté dans la fibre F. Il passe à travers un modulateur électro-optique qui crée des bandes latérales décalées de 1,771 GHz. La fréquence centrale est à résonance de la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 2$ , tandis que l'une des bandes latérales est accordée sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 2$ . Ce faisceau, utilisé en polarisation  $\sigma^-$ , est utilisé juste avant le ralentisseur Zeeman afin de « repomper et polariser » les atomes dans l'état  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ . Cela permet de maximiser le nombre d'atomes ralentis (voir l'article [65] et la thèse [63]). L'ordre +1 après le modulateur acousto-optique 1,700 GHz est séparé en deux parties. La partie injectée dans la fibre E est accordée sur la transition de  $f = 1 \rightarrow f' = 2$ . Elle permet de « repomper » les atomes dans l'état  $f = 2$  juste avant de faire l'image des atomes. La partie injectée dans la fibre G n'est pas encore utilisée. Elle est accordée sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 1$  et doit permettre, conjuguée au faisceau de la voie 2, d'accumuler les atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , afin de piéger magnétiquement les atomes juste après le piège magnéto-optique.

### 2.1.2 Premières étapes de refroidissement

#### Contrôle de l'expérience

Les séquences expérimentales sont pilotées par un séquenceur (Modèle ADwin-Pro-II) qui contrôle les 64 sorties numériques et 32 sorties analogiques permettant de commander les divers appareils de l'expérience, comme les alimentations de courant, les oscillateurs commandés en tension, les sources radiofréquences, les obturateurs mécaniques, etc. Un programme Matlab développé dans l'équipe par Aurélien Perrin envoie les instructions au séquenceur.

#### Four

Les atomes de sodium sont initialement chauffés dans un four à recirculation, dont la conception a été inspirée de celui de l'article [108]. Au cours de ma thèse nous avons remplacé les colliers chauffants par des cordons, afin de mieux chauffer la sortie du four et d'avoir une meilleure recirculation. Trois cordons chauffants permettent de liquéfier et vaporiser une partie du sodium. Les cordons placés en haut et à gauche du four sont actuellement à une température de 275°C tandis que le cordon placé en bas du four est à 235°C<sup>1</sup>. Ce différentiel de température permet d'accumuler le sodium en bas du four afin qu'il se vide plus lentement et ainsi espacer les rechargements en sodium.

#### Ralentisseur Zeeman

Le ralentisseur Zeeman utilisé dans notre expérience est décrit en détail dans l'article [65] et dans le chapitre 2 de la thèse [63]. Le gaz de sodium peut s'échapper du four par deux orifices de 4 mm puis 8 mm de diamètre, qui permettent de collimater le jet d'atomes en direction du ralentisseur Zeeman.

Un ralentisseur Zeeman permet de ralentir les atomes à une vitesse suffisamment faible pour pouvoir les capturer. Pour cela, on utilise un faisceau laser se propageant dans le sens opposé au jet d'atomes. C'est la pression de radiation qui ralentit les atomes. Cette force s'écrit pour un système à deux niveaux avec un faisceau se propageant selon l'axe  $x$ , dans la direction  $(-x)$  :

$$\vec{F} = -\eta \frac{\Gamma}{2} \hbar k \vec{u}_x \quad (2.1)$$

où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite,  $k$  est le vecteur d'onde,  $\Gamma$  est la largeur naturelle de la raie. On a :

$$\eta = \frac{s_0}{1 + s_0 + 4\delta^2/\Gamma^2} \quad (2.2)$$

avec  $\delta$  le désaccord en fréquence entre le laser et la transition atomique, incluant les effets Doppler et Zeeman éventuels, et  $s_0 = I/I_{\text{sat}}$  le paramètre de saturation. Pour le sodium on a  $I_{\text{sat}} = 6,26 \text{ W.cm}^{-2}$ .

Dans notre cas on utilise la transition cyclante  $f = 2 \rightarrow f' = 3$ . Cependant, à cause de l'effet Doppler, la fréquence de résonance de cette transition varie avec la vitesse des atomes. Pour que les atomes restent proches de résonance pendant tout le ralentissement, on compense le décalage en fréquence causé par l'effet Doppler avec l'effet Zeeman, en utilisant un champ magnétique statique avec un profil spatial judicieusement choisi. Le champ magnétique est

1. Nous avons augmenté la température du four de 25°C après la reconstruction de l'expérience, ce qui a permis de gagner un facteur 2,5 sur le nombre d'atomes dans le piège magnéto-optique et ainsi obtenir un condensat de Bose-Einstein.

créé par des aimants permanents au néodyme (NdFeB), en configuration Halbach, sur une longueur de 0,96 m. Le champ magnétique est orienté verticalement et augmente le long du ralentisseur Zeeman, de 300 G à 1152 G, ce qui permet de ralentir les atomes allant à une vitesse inférieure à  $950 \text{ m.s}^{-1}$ , soit environ 60% des atomes.

Pour ralentir les atomes on utilise la transition cyclante entre les états  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  et  $|f = 3, m_f = -3\rangle$ . La polarisation idéale serait une polarisation purement  $\sigma^-$ , cependant il faudrait pour cela que le champ magnétique soit aligné selon l'axe du ralentisseur Zeeman. Le meilleur choix dans notre configuration est donc d'utiliser une polarisation linéaire horizontale, qui est orthogonale au champ magnétique vertical et correspond donc à une somme de polarisations  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$  de même poids. À cause de cette polarisation qui n'est pas purement  $\sigma^-$ , une partie des atomes est pompée vers l'état  $f = 1$  avant l'entrée du ralentisseur Zeeman, alors que nous pouvons uniquement ralentir les atomes initialement dans l'état  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ . Pour remédier à ce problème, une phase de pompage optique a été installée à l'entrée du ralentisseur Zeeman pour préparer les atomes dans l'état  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  [65]. On utilise le faisceau « repompeur-polariseur » de la voie 4 injecté dans la fibre F (figure 2.3), dont la fréquence centrale est à résonance de la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 2$  et l'une des bandes latérales est accordée sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 2$ , en polarisation purement  $\sigma^-$ . Cette phase de pompage optique permet de multiplier par 3,5 le taux de chargement du piège magnéto-optique.

Actuellement, la puissance utilisée pour le faisceau laser du ralentisseur Zeeman est de 42 mW, avec une fréquence décalée de 1887 MHz vers le rouge par rapport à la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 3$  (pour une vitesse et un champ magnétique nuls). La puissance du faisceau de pompage optique est de 20 mW.

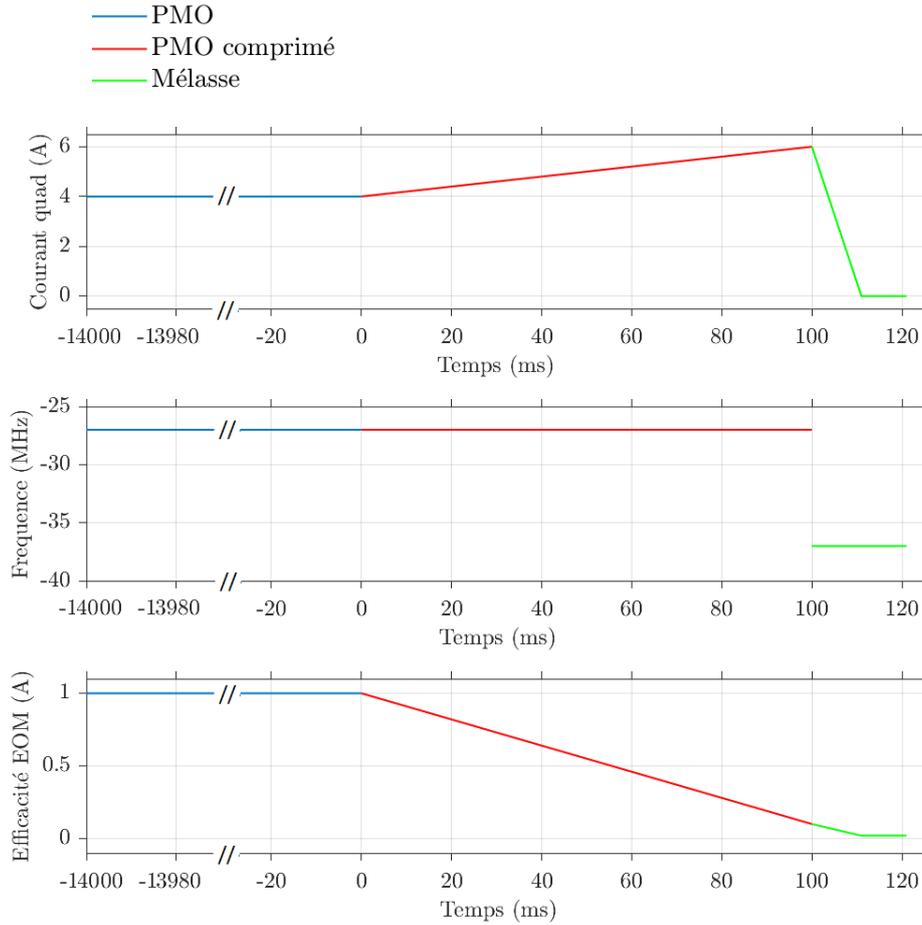
### Piège magnéto-optique (PMO)

Les atomes sont ensuite capturés et refroidis dans un piège magnéto-optique. Nous utilisons pour cela le faisceau de la voie 3, dont la fréquence centrale est désaccordée de 27 MHz vers le rouge de la transition cyclante  $f = 2 \rightarrow f' = 3$ . L'une des bandes latérales est accordée sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 1$ , afin de repomper les atomes qui se désexcitent par émission spontanée dans l'état  $f = 1$ , pour qu'ils reviennent dans la boucle de la transition cyclante. Ce faisceau est séparé en six faisceaux de même puissance grâce à un système de lames demi-onde et de cubes, qui sont ensuite injectés dans des fibres (système commercial 60FC-Q589-4-M200-01 de Schäfter+Kirchhoff). Pour le piège magnéto-optique, on utilise ces six faisceaux, se propageant deux à deux en sens opposés dans trois directions orthogonales de l'espace, au niveau de l'enceinte du piège magnéto-optique. Ils sont collimatés, avec une largeur  $w = 16 \text{ mm}$ , et polarisés circulairement. Chaque faisceau a une puissance de 17 mW, avec 60% de la puissance pour la fréquence centrale et 20% de la puissance dans chacune des bandes latérales.

Le champ magnétique quadrupolaire :

$$\vec{B}(x, y, z) = \begin{pmatrix} -b'x \\ -b'y \\ 2b'z \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

est créé par des bobines en configuration anti-Helmholtz : deux bobines sont parcourues par un courant de 4 A, dans des sens opposés, ce qui crée un gradient  $b' = 4 \text{ G.cm}^{-1}$ . Le piège magnéto-optique est chargé pendant une durée typique de 14 s, ce qui permet de capturer jusqu'à  $6.10^9$  atomes pour un four à  $275^\circ\text{C}$ . On augmente ensuite le courant des bobines



**Figure 2.4** – Évolution temporelle du courant dans les bobines du piège quadrupolaire (graphique supérieur), du désaccord en fréquence du faisceau laser par rapport à la transition cyclante (graphique du milieu) et de l’efficacité en puissance du modulateur électro-optique créant les bandes latérales (graphique inférieur) pour les trois étapes de piège magnéto-optique, piège magnéto-optique comprimé et mélasse optique. La référence de temps  $t = 0$  correspond au début de la phase de PMO comprimé.

quadrupolaires de 4 à 6 A en 100 ms pour comprimer le nuage d’atomes, tout en baissant la puissance des bandes latérales. Enfin, on fait une phase de mélasse, pour atteindre une température sub-Doppler d’environ  $40 \mu\text{K}$ , pendant laquelle on éteint le champ magnétique avec une rampe de 10 ms, on diminue la puissance des bandes latérales jusqu’à 2% de leur valeur initiale et on décale abruptement la fréquence centrale du faisceau laser de 10 MHz vers le rouge. L’évolution des paramètres clés de ces trois étapes de piège magnéto-optique, piège magnéto-optique comprimé et mélasse sont représentés sur la figure 2.4.

Enfin, on piège les atomes dans un champ magnétique quadrupolaire, en utilisant les mêmes bobines en configuration anti-Helmholtz que celles du piège magnéto-optique. Juste avant de couper les faisceaux du PMO on éteint complètement les bandes latérales pendant  $40 \mu\text{s}$ , ce qui permet d’accumuler les atomes dans l’état  $f = 1$ . On allume ensuite brusquement

les bobines avec un courant de 16 A, qu'on augmente linéairement pendant 1 s jusqu'à 64,5 A, ce qui permet d'atteindre un gradient de champ magnétique  $b' = 65 \text{ G.cm}^{-1}$ .

Le potentiel magnétique pour un atome de moment magnétique  $\vec{\mu}$  dont le spin reste aligné avec le champ magnétique  $\vec{B}(\vec{r})$  vaut  $U(\vec{r}) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = g_f m_f \mu_B B(\vec{r})$ , où  $g_f$  est le facteur de Landé,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr,  $m_f$  le nombre quantique magnétique de spin et  $B$  le module du champ magnétique. Dans l'état fondamental  $f = 1$  pour des atomes de sodium, le facteur de Landé  $g_f$  vaut  $-1/2$ . Seuls les atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  peuvent donc être piégés dans un minimum de champ magnétique et les 2/3 des atomes sont perdus à cette étape. Une phase de polarisation en spin, pour accumuler les atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , a été envisagée lors de la reconstruction de l'expérience et les faisceaux lasers nécessaires ont été mis en place sur la table optique. L'une des difficultés de mise en œuvre de cette polarisation en spin est que, pour les atomes de sodium, les transitions optiques sont très proches en fréquence, ce qui entraîne notamment la dépolarisation des atomes de l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ . Pour remédier à ce problème, on peut utiliser un champ magnétique élevé [109], ce qui nécessite d'adapter notablement le montage autour de la chambre à vide. Après les améliorations apportées au cœur de l'expérience (voir paragraphe 2.7), nous avons facilement réussi à obtenir un condensat de Bose-Einstein sans utiliser cette technique, ce qui explique qu'elle n'ait pas encore été implémentée. Il pourrait cependant être intéressant de l'utiliser sur le long terme, car cela permettrait de réduire la température du four et donc d'espacer les rechargements en sodium.

### 2.1.3 Transport magnétique

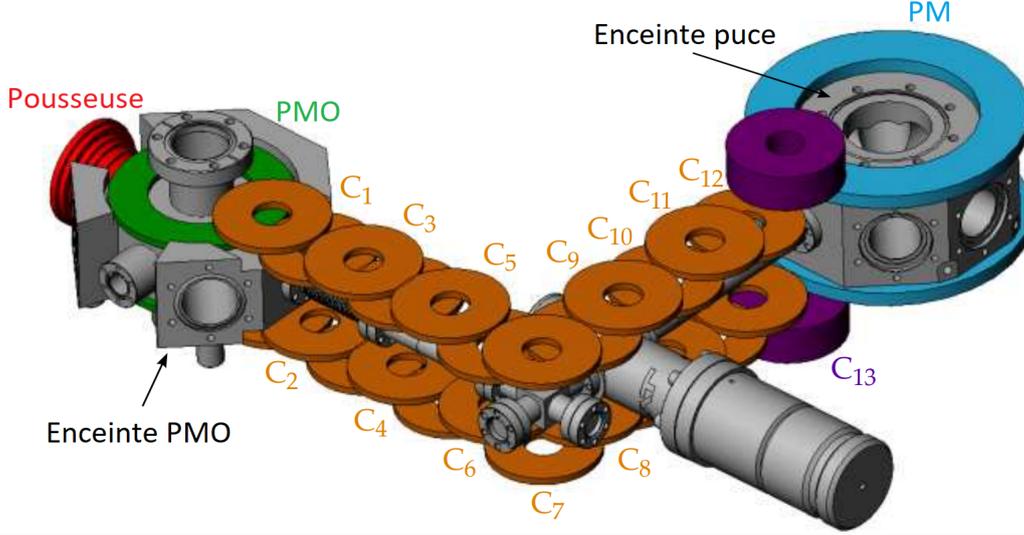
Une fois les atomes chargés dans le piège magnétique quadrupolaire, on les transporte dans des pièges magnétiques vers l'enceinte où se trouve la puce. Cette étape de transport est détaillée dans l'article [66].

Le trajet du transport est coudé afin que les faisceaux lasers du piège magnéto-optique ne puissent pas atteindre directement l'enceinte de la puce, dans l'idée de pouvoir charger le piège magnéto-optique en même temps qu'on refroidit et manipule les atomes dans la seconde enceinte. On déplace d'abord les atomes sur une longueur de 30,7 cm, puis sur une deuxième section orthogonale à la première de 34,4 cm de longueur. Le transport sur la première portion a été optimisée avant mon arrivée en thèse et les détails sont donnés dans la thèse [64]. Le transport sur la deuxième portion jusqu'à l'enceinte où se trouve la puce a été réalisé au début de ma thèse.

Pour transporter les atomes on utilise 15 bobines en configuration anti-Helmholtz ainsi qu'une bobine « pousseuse » (voir figure 2.5). En alimentant successivement ces bobines on crée un champ magnétique quadrupolaire, qu'on peut déplacer le long de l'axe de transport, que l'on notera  $y$ . On alimente indépendamment trois bobines simultanément, ce qui crée un champ magnétique de la forme :

$$\vec{B}(x, y, z) = 2b' \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{1+\alpha}x \\ -\frac{1}{1+\alpha}(y - y_0) \\ z \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

où on peut contrôler indépendamment  $\alpha$ , le gradient  $b'$  (fixé à  $65 \text{ G.cm}^{-1}$ ) et la position  $y_0$  du piège selon l'axe  $y$ . Les profils de courant ont été optimisés temporellement pour obtenir une trajectoire  $y_0(t)$  qui minimise les pertes et le chauffage. La fonction retenue pour chacune des



**Figure 2.5** – Schéma de la série de bobines utilisées pour le transport magnétique tiré de l'article [66]. Le nuage d'atomes est initialement piégé dans le piège quadrupolaire des bobines PMO et est transporté jusqu'au piège magnétique créé par les bobines bleues entourant l'enceinte où se trouve la puce.

deux portions orthogonales du transport est de la forme :

$$y_0(t) = \frac{L}{2} \left[ 1 + \operatorname{erf} \left( -\gamma \left( \frac{t}{\Delta t} \right)^{-\delta} + \gamma \left( 1 - \frac{t}{\Delta t} \right)^{-\delta} \right) \right] \quad (2.5)$$

avec  $\gamma = 2^{-3/2-\delta} \sqrt{(\delta+1)(\delta+2)}/\delta$  et  $\delta = 0,02$ . Cela permet d'accélérer en douceur les atomes, de maintenir une vitesse constante puis de les décélérer. Les atomes parcourent la première portion du transport en un temps  $\Delta t_1 = 1$  s . Pour la deuxième portion, le passage entre les bobines C13 et celles autour de l'enceinte de la puce est plus délicat et il faut aller plus lentement pour limiter les pertes. Nous effectuons cette deuxième partie du transport sur une durée  $\Delta t_2 = 3$  s. À la fin du transport, on piège jusqu'à  $1,2 \cdot 10^9$  atomes dans les bobines quadrupolaires de l'enceinte puce, ce qui représente 65% des atomes initialement piégés par les bobines de l'enceinte PMO. Ces pertes sont principalement causées par les collisions avec le gaz résiduel, qui limitent la durée de vie du nuage d'atomes. Après le transport, les atomes sont typiquement à une température de  $130 \mu\text{K}$ .

## 2.2 Imagerie par absorption dans l'enceinte de la puce

La configuration de l'imagerie par absorption utilisée sur le montage expérimental est présentée au (a) de la figure 2.6. Nous utiliserons les axes définis sur cette figure dans toute la suite du manuscrit. L'axe  $x$  est orienté selon le faisceau repompeur, orthogonalement au faisceau d'imagerie. L'axe  $y$  est selon le faisceau d'imagerie et l'axe  $z$  correspond à l'axe vertical.

### 2.2.1 Principe

Pour prendre des images des atomes, nous faisons de l'imagerie par absorption. Cette technique consiste à faire passer un faisceau laser à résonance de la transition cyclante à travers le nuage d'atomes. Les atomes vont absorber une partie des photons. En plaçant une caméra en face du faisceau laser on peut donc faire une image de « l'ombre des atomes ». Nous nous plaçons dans le régime de faible saturation  $I \ll I_{\text{sat}}$ , ce qui nous permet d'avoir une section efficace d'absorption  $\sigma$  indépendante de l'intensité locale.

Pour un faisceau orienté selon l'axe  $y$  la loi de Beer-Lambert donne :

$$dI(x, y, z) = -\sigma I(x, y, z)n(x, y, z)dy \quad (2.6)$$

où  $I$  est l'intensité du faisceau et  $n(x, y, z)$  est la densité locale du nuage d'atome. Nous pouvons en déduire le profil intégré selon  $y$  du nuage d'atomes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z)dy = \frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{I_0(x, z)}{I_{\text{at}}(x, z)} \right] \quad (2.7)$$

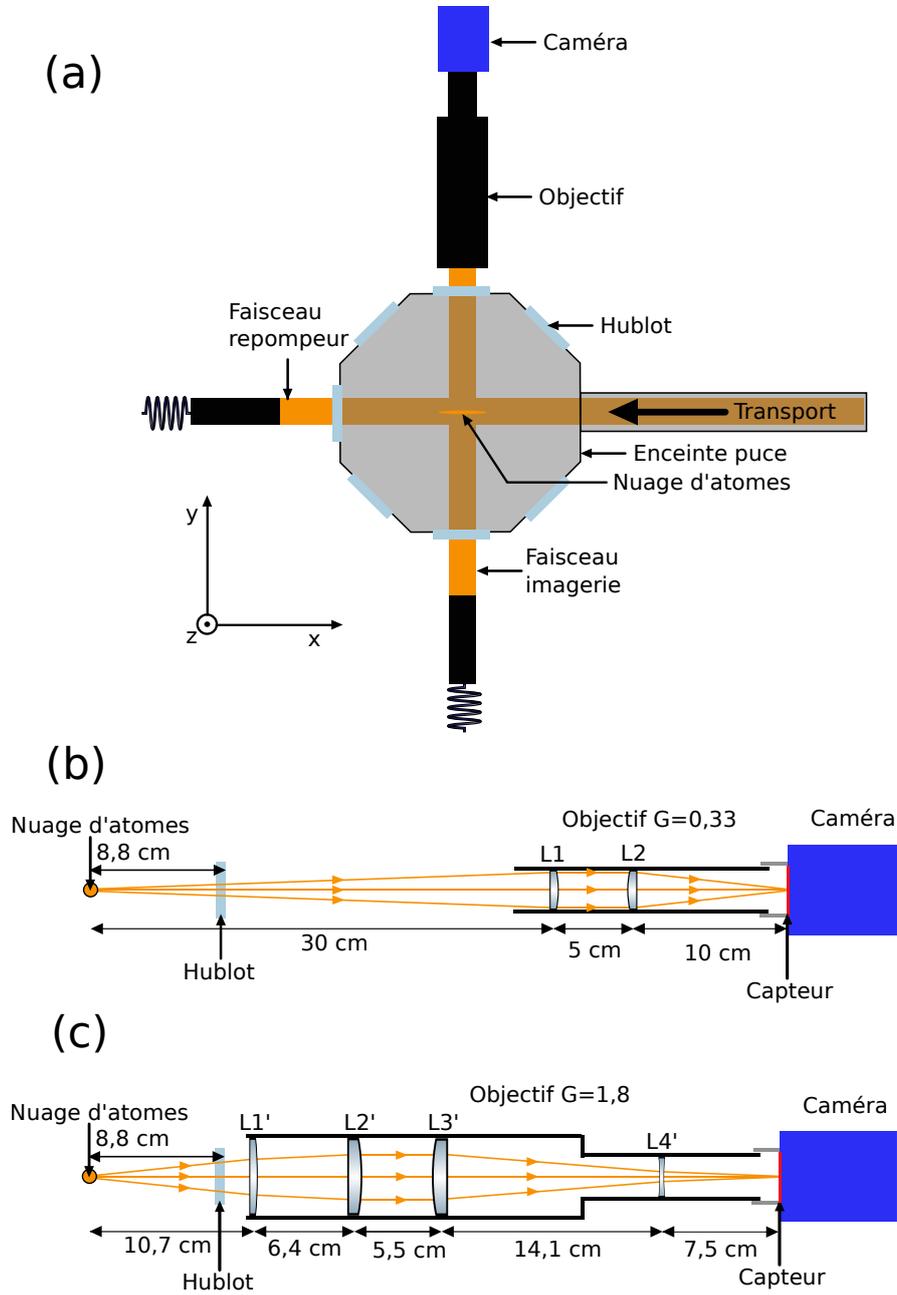
avec  $I_{\text{at}}(x, z)$  l'intensité pour un faisceau à résonance avec les atomes et  $I_0(x, z)$  l'intensité du faisceau sans absorption par les atomes. Afin de s'affranchir du bruit causé par la lumière ambiante, nous utilisons une troisième image sans faisceau laser ni atomes qui donne l'intensité résiduelle  $I_{\text{res}}(x, z)$ . Le profil intégré selon  $y$  s'écrit alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z)dy = \frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{I_0(x, z) - I_{\text{res}}(x, z)}{I_{\text{at}}(x, z) - I_{\text{res}}(x, z)} \right]. \quad (2.8)$$

### 2.2.2 Configuration

Nous imageons les atomes suivant l'axe  $y$ . Pour cela, nous utilisons un faisceau à résonance avec la transition cyclante  $f = 2 \rightarrow f' = 3$ , avec une puissance de 0,7 mW et d'intensité au centre  $I_0 = 0,14 \text{ W.cm}^{-2} = 0,022 I_{\text{sat}}$  pour l'objectif de faible grandissement ou bien une puissance de 3,5 mW correspondant à une intensité au centre  $I_0 = 0,68 \text{ W.cm}^{-2} = 0,11 I_{\text{sat}}$  pour l'objectif de grandissement 1,8. Les atomes dans le piège quadrupolaire étant initialement dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , il est nécessaire de les repomper dans l'état  $f = 2$  juste avant de prendre l'image par absorption. Pour cela, nous utilisons un faisceau « repompeur » de puissance 1,1 mW, se propageant dans la direction  $x$  orthogonale au faisceau d'imagerie et accordé sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 2$ .

Les images sont prises par une caméra Pixelfly (modèle PF-M-QE) de  $1392 \times 1040$  pixels, avec une taille de pixel de  $6,45 \times 6,45 \mu\text{m}^2$ . Nous utilisons le mode « double shutter » qui permet de prendre deux images rapprochées dans le temps. Nous prenons une première image avec le faisceau d'imagerie allumé pendant une impulsion de  $12 \mu\text{s}$  alors que les atomes sont encore dans l'état  $f = 1$ . Les atomes n'absorbent donc pas le faisceau et cette image correspond à  $I_0(x, z)$ . Nous allumons ensuite le faisceau repompeur durant une impulsion de  $32 \mu\text{s}$ , puis nous prenons une deuxième image avec le faisceau d'imagerie allumé durant une impulsion de  $12 \mu\text{s}$ . Cette fois les atomes sont initialement dans  $f = 2$  et vont absorber le faisceau d'imagerie, ce qui permet d'obtenir  $I_{\text{at}}(x, z)$ . Les deux impulsions lasers du faisceau d'imagerie sont séparées par un temps de  $200 \mu\text{s}$ . Cet écart temporel faible permet de limiter le bruit sur les images, comme des franges causées par des vibrations qui entraînent de petits déplacements du faisceau entre les deux images. Nous prenons ensuite deux images sans atomes ni faisceau d'imagerie qui correspondent à  $I_{\text{res}}(x, z)$ . Afin de réduire encore le bruit sur les images, nous



**Figure 2.6** – (a) Vue de dessus pour la configuration de la caméra et des faisceaux imagerie et repompeur autour de l'enceinte puce. Les axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentés sur cette figure seront utilisés dans toute la suite du manuscrit. (b) Objectif de grandissement  $0,33$  utilisé lors de l'optimisation du transfert vers le piège de la puce et du refroidissement par évaporation. (c) Objectif de grandissement  $1,8$  utilisé pour prendre des images du condensat.

sauvegardons les 50 dernières images donnant  $I_0$  et  $I_{\text{res}}$  et nous utilisons une combinaison linéaire de ces images qui minimise le signal sur une fenêtre où les atomes sont absents, sur le principe de ce qui est fait dans l'article [110].

### 2.2.3 Objectif de faible grandissement

Lors de ma thèse, nous avons utilisé deux objectifs pour la caméra, qui ont été conçus et optimisés par Joseph Seaward (voir détails dans le chapitre 4 de la thèse [64]) et que j'ai construits et installés sur l'expérience. Le premier objectif, représenté au (b) de la figure 2.6, a un grandissement de 0,33 ce qui permet de prendre des images sur 20,3 mm par 27,2 mm dans l'espace réel. Ce champ de vue est suffisamment grand pour prendre des images de nuages d'atomes assez « chauds » (de l'ordre de la centaine de microkelvins), qui s'étendent rapidement pendant un temps de vol. Nous l'avons utilisé lors de la phase d'optimisation du transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce et du refroidissement par évaporation.

Cet objectif est constitué de deux doublets achromatiques convergents  $L_1$  et  $L_2$  de distances focales respectives  $f_1 = 300$  mm et  $f_2 = 100$  mm (modèles AC254-300-A et AC254-100-A de Thorlabs). Il est utilisé en configuration télescope : l'objet à imager est placé au plan focal objet de la lentille  $L_1$ , les rayons provenant de l'objet sont parallèles à la sortie de cette lentille, ils passent ensuite par la lentille  $L_2$  et convergent pour former l'image au plan focal image de cette lentille, où se trouve le capteur CCD de la caméra.

### 2.2.4 Objectif de grandissement 1,8

Une fois le condensat de Bose-Einstein obtenu, nous travaillons avec un objectif de grandissement 1,8, représenté sur le (c) de la figure 2.6, qui permet d'avoir une meilleure résolution pour imager de petits objets, en gardant une profondeur de champ suffisamment grande pour que le nuage d'atomes soit au point sur la taille de sa profondeur après un temps de vol de quelques millisecondes. L'ouverture numérique de l'objectif vaut 0,105 et sa résolution, mesurée à l'aide de mires, est de 4,2(3)  $\mu\text{m}$ .

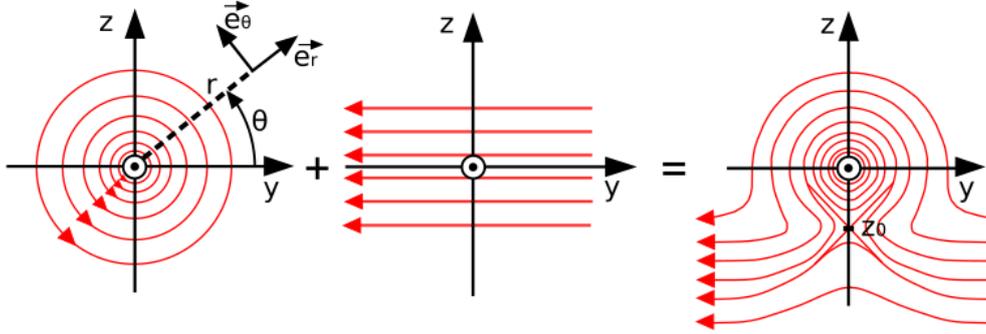
Cet objectif est constitué de quatre lentilles. La première lentille  $L'_1$  est un ménisque convergent de distance focale  $f'_1 = 250$  mm (modèle LE 1613-A de Thorlabs), la deuxième lentille  $L'_2$  est un doublet achromatique convergent de distance focale  $f'_2 = 250$  mm (modèle AC508-250-A), la troisième lentille  $L'_3$  est un doublet achromatique convergent de distance focale  $f'_3 = 200$  mm (modèle AC508-200-A), enfin la dernière lentille  $L'_4$  est un ménisque divergent de distance focale  $f'_4 = -300$  mm.

## 2.3 Puce à atomes

L'un des éléments clés de l'expérience sodium est la puce à atomes. Grâce à cette puce nous pouvons créer des pièges magnétiques très anisotropes, permettant d'atteindre le régime unidimensionnel. Un guide d'ondes coplanaire intégré à la puce nous permet aussi d'atteindre de grandes puissances de champ micro-onde au niveau des atomes, nécessaires à l'observation des résonances de Feshbach induites par micro-onde.

### 2.3.1 Principe du piège magnétique créé par la puce

Pour atteindre le régime unidimensionnel, il est nécessaire d'atteindre de grandes fréquences d'oscillation transverses afin de remplir les conditions de l'équation (1.37). Pour



**Figure 2.7** – Schéma de principe pour le piège créé par la combinaison du champ magnétique d'un fil de courant et un champ magnétique homogène. Le champ s'annule sur une ligne selon  $x$ , en  $y = 0$  et  $z = z_0$ . Ce schéma est adapté de [111]. Des axes correspondant à la configuration de notre expérience ont été ajoutés pour plus de clarté.

créer un tel piège, il est possible d'utiliser un fil de courant qui peut être intégré à une puce à atomes [48, 49, 111]. Dans notre expérience, deux fils de la puce, que nous appelons fil « DC50 » et fil « DC 100 », peuvent jouer ce rôle (voir paragraphe suivant).

Nous donnons le principe d'un tel piège dans le cas simple d'un fil infini. Le champ magnétique créé par un fil infini parcouru par un courant  $I$ , selon un axe  $x$ , s'écrit dans les coordonnées cylindriques :

$$\vec{B}_{\text{fil}}(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad (2.9)$$

avec  $\mu_0$  la perméabilité magnétique du vide,  $r = \sqrt{y^2 + z^2}$  la distance au fil et  $\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{e}_y + \cos(\theta)\vec{e}_z$ . Cette formule est une bonne approximation pour un fil réel, si on se place loin de ses extrémités et à une distance grande devant son diamètre. Supposons qu'on ajoute un champ magnétique uniforme selon  $y$ , qu'on peut créer avec des bobines en configuration Helmholtz :  $\vec{B}_Y = -B_Y \vec{e}_y$ . Le champ magnétique s'annule alors en :

$$\left( r = \frac{\mu_0 I}{2\pi B_Y}, \theta = -\frac{\pi}{2} \right), \quad (2.10)$$

c'est-à-dire pour tout  $x$  en :

$$\left( y = 0, z_0 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi B_Y} \right). \quad (2.11)$$

Les atomes étant attirés par les minima de champ magnétique on peut donc les piéger sur une ligne parallèle au fil, à une distance  $r = |z_0| = \mu_0 I / (2\pi B_Y)$  du fil (voir schéma de principe figure 2.7).

Lorsque les atomes sont proches d'un champ magnétique nul, ils peuvent subir un retournement de spin vers des états non piégés magnétiquement, entraînant des pertes Majorana. Pour remédier à ce problème, on peut utiliser un champ magnétique homogène selon la direction du fil ( $x$ ), qui peut lui aussi être créé par des bobines de biais en configuration Helmholtz :  $\vec{B}_X = B_X \vec{e}_x$ . Le minimum de champ magnétique a alors une valeur  $B_X$ , ce qui lève la dégénérescence entre les états de spin piégés et non piégés.

En réalité nous n'avons pas un fil infini et les atomes peuvent s'échapper par les extrémités le long de la direction  $x$ . La configuration est donc un peu plus complexe que ce qui est décrit

précédemment, car il faut fermer le piège selon la direction  $x$ . Pour cela, nous utilisons quatre fils supplémentaires sur la puce, orientés selon l'axe  $y$  et situés en  $x = -a$  et  $x = +a$ , où la position  $x = 0$  correspond au centre de la puce et  $a = 1,05$  mm. Ces fils, que nous appelons « fils en U », sont représentés sur la figure 2.10. Supposons que le piège est situé à une distance  $|z_0| \ll a$  de la puce. Lorsque ces fils sont parcourus par un courant continu  $I$ , ils créent un champ magnétique :

$$\begin{aligned}\vec{B}(x, y = 0, z = z_0) &\simeq \vec{B}(x, y = 0, z = 0) = \frac{\mu_0 I}{2\pi(a-x)}\vec{e}_z - \frac{\mu_0 I}{2\pi(a+x)}\vec{e}_z \\ &= \frac{\mu_0 I x}{\pi(a^2 - x^2)}\vec{e}_z\end{aligned}\quad (2.12)$$

en faisant l'approximation de fils infinis. La norme de ce champ magnétique est nulle au centre, en  $x = 0$ , et augmente lorsqu'on s'en éloigne, ce qui permet de fermer le piège selon la direction  $x$ . En ajoutant ensuite un champ magnétique uniforme selon  $x$ ,  $\vec{B}_X$ , on ajuste la valeur du minimum du champ magnétique  $B_{\min}$  à la valeur désirée. Usuellement nous travaillons avec un minimum de champ magnétique de l'ordre du gauss, ce qui permet d'éviter les pertes Majorana.

Il reste à évaluer les fréquences d'oscillation transverses  $\omega_{\perp}/2\pi$  qui peuvent être réalisées. Le champ magnétique à proximité du minimum s'écrit au premier ordre :

$$\vec{B}_{\text{tot}} \simeq B_{\min}\vec{e}_x + b'_{\perp}(z - z_0)\vec{e}_y + b'_{\perp}y\vec{e}_z \quad (2.13)$$

ce qui permet de satisfaire les équations de Maxwell :  $\text{div}\vec{B} = 0$  et

$$\text{rot}\vec{B} = \left( \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x = (b'_{\perp} - b'_{\perp})\vec{e}_x = \vec{0}. \quad (2.14)$$

Le gradient  $b'_{\perp}$  vaut :

$$b'_{\perp} = \left. \frac{\partial B_y}{\partial z} \right|_{z_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi z_0^2} = \frac{2\pi B_Y^2}{\mu_0 I}. \quad (2.15)$$

La dépendance selon  $z$  de la norme du champ magnétique total au voisinage de  $z = z_0$  est donnée par :

$$B_{\text{tot}}(0, 0, z) \simeq \sqrt{B_{\min}^2 + (b'_{\perp}(z - z_0))^2} \simeq B_{\min} + \frac{1}{2} \frac{b'^2_{\perp}}{B_{\min}} (z - z_0)^2. \quad (2.16)$$

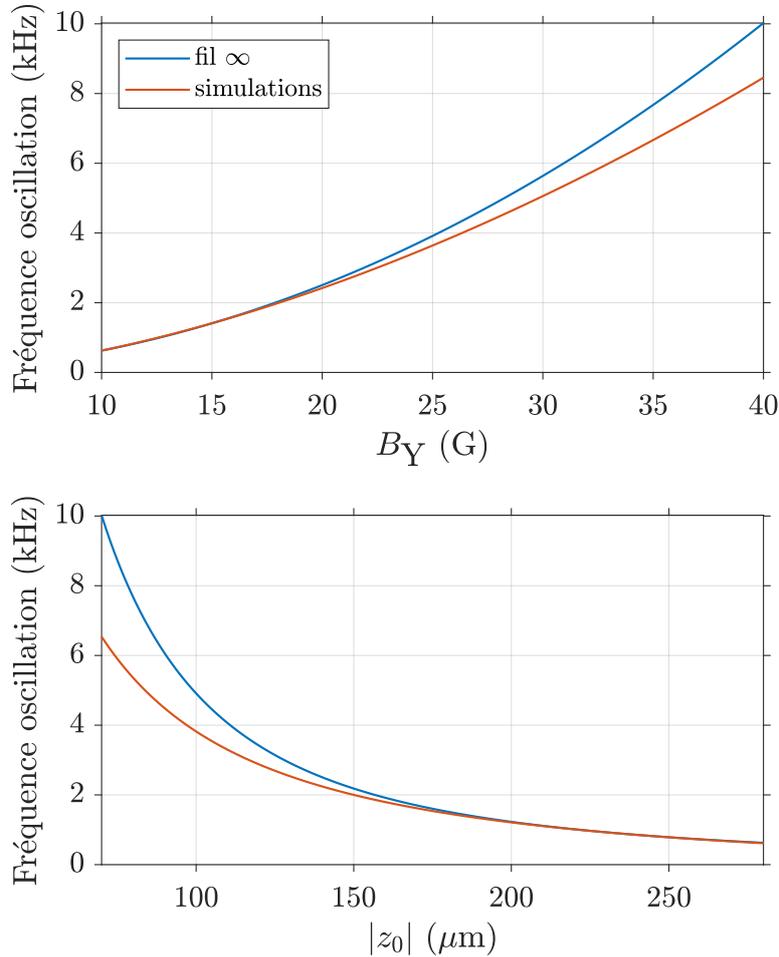
De même la dépendance selon  $y$  au voisinage de  $y = 0$  est donnée par :

$$B_{\text{tot}}(0, y, 0) \simeq \sqrt{B_{\min}^2 + (b'_{\perp}y)^2} \simeq B_{\min} + \frac{1}{2} \frac{b'^2_{\perp}}{B_{\min}} y^2. \quad (2.17)$$

On en déduit la pulsation d'oscillation transverse :

$$\omega_{\perp} = \omega_y = \omega_z = \sqrt{g_f m_f \mu_B} \frac{b'_{\perp}}{\sqrt{m B_{\min}}}. \quad (2.18)$$

Sur la figure 2.8, on a tracé la fréquence d'oscillation transverse en fonction du champ magnétique homogène  $B_Y$  et de la distance à la puce  $|z_0|$ , obtenue à partir de l'équation (2.18), pour un courant dans le fil de 1,4 A et un minimum de champ magnétique à 1 G. Nous avons aussi tracé cette fréquence d'oscillation obtenue par des simulations prenant en compte la taille réelle des fils de courant (voir annexe B). On a un bon accord entre les deux modèles à petits champs magnétique  $B_Y$  et grandes distances  $|z_0|$ . Nous travaillons usuellement à des fréquences d'oscillation comprises entre 2 et 7 kHz.

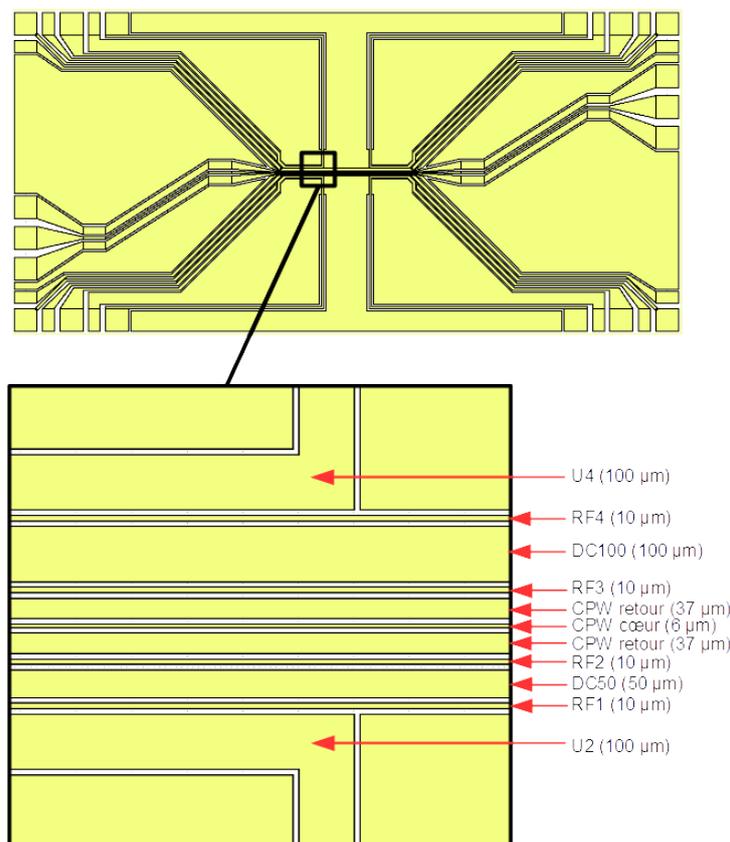


**Figure 2.8** – Fréquence d’oscillation transverse en fonction du champ magnétique uniforme  $B_Y$  (figure du haut) et de la distance au fil (figure du bas). Les courbes bleues correspondent à l’expression analytique de l’équation (2.18) tandis que les courbes orange ont été obtenues par des simulations prenant en compte la géométrie réelle des fils. Ces graphes ont été tracés pour un minimum de champ magnétique à 1G et un courant dans le fil de 1,4 A.

### 2.3.2 Description de la puce à atomes

La puce à atomes a été fabriquée à l’Université Technique de Vienne. Elle est composée de fils conducteurs en or de 2  $\mu\text{m}$  d’épaisseur, déposés sur un wafer en silicium par évaporation derrière un masque réalisé par photolithographie. Le procédé de fabrication est détaillé dans le chapitre 3 de la thèse de Joseph Seaward [64].

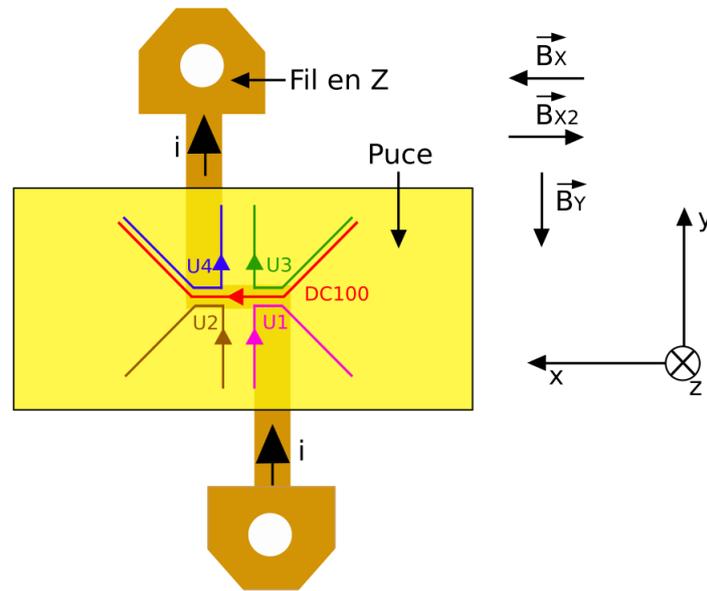
La puce est représentée sur la figure 2.9. Elle comprend deux fils principaux de 50 et 100  $\mu\text{m}$  de large, que nous notons respectivement DC50 et DC100, qui peuvent être utilisés pour le piège magnétique et sont responsables du fort gradient transverse. Actuellement, nous utilisons le fil de largeur 100  $\mu\text{m}$  avec un courant continu de 1,4 A. Quatre fils en forme de



**Figure 2.9** – Schéma de la puce à atomes. Les parties jaunes sont en or. L'image inférieure est une vue agrandie de la partie encadrée de l'image supérieure, sur laquelle les largeurs des différents fils sont indiquées. Les fils en U sont numérotés de U1 à U4, de même que les fils radiofréquences de RF1 à RF4. Les fils du guide micro-onde sont appelés CPW pour « Coplanar Waveguide ». Le fil central (cœur) est entouré de deux fils servant de ligne retour.

U – que nous appelons « fils en U » – de largeur  $100\ \mu\text{m}$  permettent de créer la composante du champ magnétique selon  $x$  du piège, grâce à un courant continu de  $0,8\ \text{A}$ . Les sens des courants utilisés pour former le piège sont représentés sur la figure 2.10. Quatre fils de  $10\ \mu\text{m}$  de large peuvent être utilisés pour faire passer une onde radiofréquence. Nous les appellerons « fils RF ». Enfin, la puce comprend un guide d'ondes coplanaire composé de trois fils : le conducteur central (cœur) de largeur  $6\ \mu\text{m}$  est entouré de deux fils de largeur  $37\ \mu\text{m}$  qui servent de ligne retour.

Afin d'amener le courant jusqu'aux fils de la puce nous utilisons deux « sous-puces ». Il s'agit de cartes de circuit imprimé (voir figure 2.11). Aux extrémités des sous-puces, les pistes sont percées afin de souder des fils électriques en cuivre, qui amènent le courant jusqu'à la puce pour les fils du piège et les fils RF, ainsi que des connecteurs SMA pour le guide d'ondes. Les connexions entre les pistes des sous-puces et celles de la puce sont assurées grâce à un câblage par pontage de microfils d'or circulaires de  $38\ \mu\text{m}$  de diamètre, ou bien rectangulaires de  $76\ \mu\text{m}$  sur  $13\ \mu\text{m}$ . Ils ont été installés au Laboratoire d'Études du Rayonnement et de la



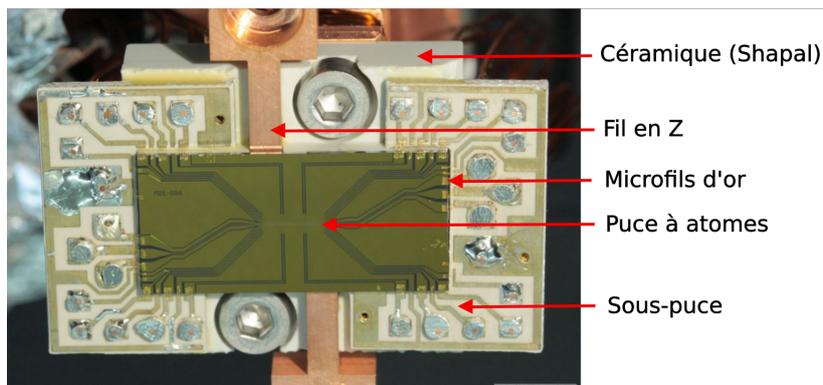
**Figure 2.10** – Les sens des courants pour les quatre fils en U, pour le fil DC100 ainsi que pour le fil en Z – situé derrière la puce – qui permettent de créer les pièges magnétiques sont indiqués sur le schéma. On a aussi représenté le sens des champs magnétiques des bobines X, X2 et Y. On notera que la puce est installée « tête en bas » sur l’expérience, afin que les atomes puissent tomber sans rencontrer d’obstacle lors des temps de vol.

Matière en Astrophysique et Atmosphères (LERMA), par Thibaut Vacelet. Le nombre de microfils d’or de diamètre  $38\mu\text{m}$  installés pour chaque connexion est donné entre crochets sur la figure 2.25. Pour les fils DC, les fils U ainsi que les fils du guide d’ondes, quatre microfils d’or rectangulaires supplémentaires ont été ajoutés lors du changement de puce, afin de diminuer la résistance au niveau des connexions et ainsi limiter le chauffage. Nous avons en effet observé que ce sont ces microfils d’or qui se vaporisent en premier en cas de chauffage trop important.

Les fils de la puce étant très fins ( $2\mu\text{m}$  d’épaisseur), ils sont assez résistifs (quelques ohms, un tableau des résistances est donné en 2.1) et le courant va entraîner un chauffage. Pour dissiper la chaleur, la puce et les sous-puces sont collées avec de la colle thermique sur une céramique Shapal<sup>TM</sup> Hi M-soft, qui est un bon conducteur thermique, avec une conductivité thermique de  $92\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Ce matériau est un isolant électrique et est facilement usinable. Ces deux dernières propriétés sont indispensables car nous utilisons un fil de cuivre en forme de Z juste derrière la puce, qui est encastré dans la céramique (voir photo de la figure 2.11). Ce « fil en Z » permet de créer un piège magnétique intermédiaire pour transférer les atomes dans le piège de la puce et sera décrit plus en détail au paragraphe 2.4.

### 2.3.3 Choix de l’alimentation de la puce et risques d’endommagement

Afin d’éviter un chauffage du nuage d’atomes causé par un bruit de courant, nous avons choisi de travailler avec des alimentations ultrastables en courant. Nous utilisons actuellement deux alimentations flottantes de la marque HighFinesse (modèle BCS3/12), l’une pour



**Figure 2.11** – Photo de l'assemblage comprenant la puce à atomes, les sous-puces, le fil en Z et la céramique Shapal.

alimenter le fil DC100 avec un courant de 1,4 A et l'autre pour alimenter les quatre fils en U en série avec un courant de 0,8 A.

Il convient d'être extrêmement précautionneux pour le choix de l'alimentation de la puce à atomes, afin de ne pas l'endommager. En effet, la puce étant à l'intérieur de l'enceinte à vide, changer de puce nécessite un temps conséquent. Il existe deux risques principaux d'endommagement de la puce, que nous avons malencontreusement expérimentés au cours de ma thèse :

- Les fils de la puce étant très proches les uns des autres, il peut se produire un claquage entre deux fils causé par une surtension.
- Un courant trop important dans les microfils d'or de la puce peut être à l'origine d'une élévation de température entraînant leur vaporisation.

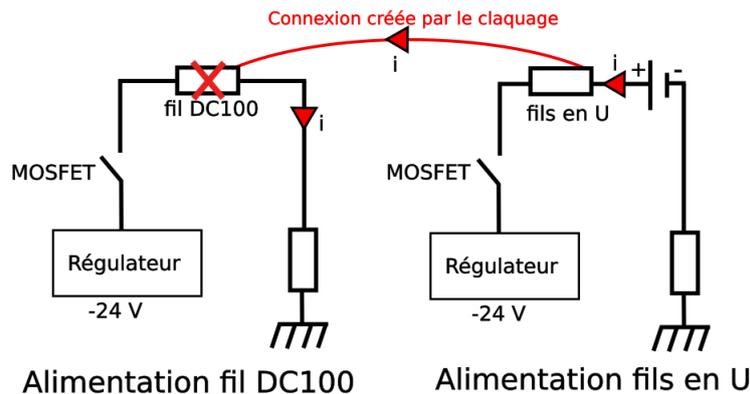
### Claquage électrique

Pour alimenter la puce nous avons dans un premier temps utilisé des alimentations avec régulateurs de courant, développées par l'atelier d'électronique. L'ajout de transistors à effet de champ à grille isolée (Mosfet), servant d'interrupteurs pour couper rapidement le courant dans la puce afin de prendre des images des atomes après temps de vol, a entraîné un claquage causé par une surtension d'une centaine de volts. Une connexion s'est créée entre l'un des fils en U et le fil DC100, permettant d'évacuer le courant des fils en U vers la terre directement reliée à DC100, ce que montre le schéma électrique de la figure 2.12. Les surtensions au niveau des éléments de la puce sont donc à proscrire. De plus, l'utilisation d'alimentations flottantes non référencées à la terre aurait sûrement permis d'éviter ce problème.

Le fil DC100 ainsi que plusieurs fils RF ont été rompus. Nous avons continué de travailler pendant un moment avec cette puce en utilisant le fil DC50 plutôt que DC100. Nous avons finalement changé la puce lors de la reconstruction de l'expérience (voir le paragraphe 2.7).

### Vaporisation des microfils d'or

Les fils de la puce sont très fins et ont une résistance de quelques ohms. Il faut donc utiliser des courants faibles ( $< 2$  A) et pendant des temps raisonnables ( $< 8$  s) pour ne pas entraîner un chauffage trop important qui conduirait à la vaporisation des microfils d'or. Lorsque nous avons changé la puce nous avons progressivement augmenté le temps durant lequel le courant



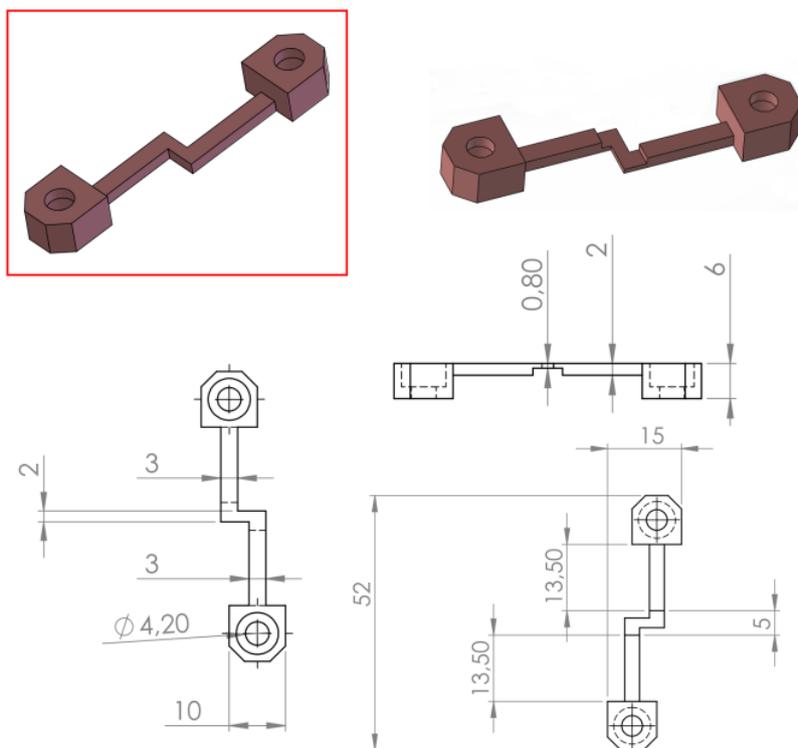
**Figure 2.12** – Schéma des circuits électriques alimentant le fil DC100 et les fils en U. L’ouverture rapide des interrupteurs (Mosfet) a causé une surtension entraînant un claquage électrique. Une connexion s’est créée entre le fil U4 et le fil DC100 (qui a été rompu), ce qui permet à un courant de circuler d’un circuit à l’autre, même lorsque les interrupteurs sont ouverts, comme indiqué sur le schéma.

circulait dans le fil DC50, pour avoir une idée de la limite à ne pas dépasser. En faisant des cycles avec 1,8 A dans DC50 pendant 8 s toutes les 30 s, nous avons observé sur la pompe ionique une augmentation de la pression – due à un dégazage – lorsque la résistance du fil avait augmenté de 30%. Cela correspond à une augmentation de la température de 80°C en moyenne. Afin de ne pas endommager la puce nous avons décidé de ne jamais dépasser les 20% d’augmentation de la résistance des fils.

Par ailleurs, nous avons testé une nouvelle alimentation sur batterie afin de réduire le bruit de courant (HighFinesse modèle BCS2A/20V) sur la « puce de test », un exemplaire identique à la puce utilisée dans l’expérience. Des pics de courant de 4 A et d’une durée de 10 ms, apparaissant lors de l’allumage et l’extinction de cette alimentation, ont entraîné la destruction des microfils d’or qui reliaient la sous-puce à la puce.

## 2.4 Fil en Z

Pour transférer les atomes du piège magnétique quadrupolaire au piège magnétique de la puce, nous utilisons un piège intermédiaire, créé par un fil de cuivre macroscopique en forme de Z que nous appellerons « fil en Z ». Ses dimensions sont données sur la figure 2.13. Ce fil est situé juste derrière la puce, il est encastré dans la pièce en céramique Shapal sur laquelle la puce est collée (voir assemblage figure 2.26). Le fil en Z crée un piège magnétique suffisamment profond quelques millimètres sous la puce pour y transférer les atomes piégés initialement dans le quadrupole magnétique. Il permet ensuite de comprimer le nuage d’atomes tout en le rapprochant de la puce. De plus, il met en forme le nuage d’atomes, avec un allongement du nuage selon l’axe  $x$ . On peut alors facilement transférer les atomes dans le piège de la puce lorsque les fréquences d’oscillation du piège Z et du piège de la puce sont proches. Le principe du piège magnétique créé par le fil en Z est le même que celui créé par la puce : le barreau central du Z joue le rôle du fil DC100, tandis que les barres latérales permettent de fermer le piège selon  $x$ . Nous alimentons ce fil avec un courant de 110 A grâce à une alimentation pilotable Delta Elektronika SM15-100. Les champs magnétiques uniformes  $\vec{B}_X$  et  $\vec{B}_Y$  créés



**Figure 2.13** – Modélisation Solidworks et cotes du fil de cuivre en forme de Z, utilisé pour créer un piège magnétique intermédiaire. La pièce encadrée en rouge correspond à la première version de ce fil. L'épaisseur au centre du fil en Z actuel a été réduite à 0,8 mm, ce qui nous a permis de régler les problèmes de refroidissement par évaporation que nous observions.

par les bobines de biais viennent compléter le piège magnétique. Pour ce piège, la description simple avec un fil fin et infini n'est pas appropriée car l'épaisseur et la longueur du fil en Z sont de l'ordre de la distance à laquelle les atomes sont piégés et les formules analytiques données au paragraphe précédent ne peuvent pas être utilisées. Afin de modéliser le piège magnétique créé par le fil en Z plus fidèlement, nous utilisons un code qui calcule les champs magnétiques créés par des fils de section rectangulaire et de dimensions données (voir annexe B pour la modélisation de la répartition du courant).

Afin d'obtenir un condensat de Bose-Einstein, une étape de pré-refroidissement par évaporation est nécessaire dans le piège en Z car la profondeur du piège créé par la puce est insuffisante à la température initiale des atomes. Nous observons en effet que sans étape de refroidissement par évaporation la très grande majorité des atomes est perdue lors du transfert vers le piège de la puce. Cette étape de pré-refroidissement est assez critique et la première version du fil en Z ne permettait pas un refroidissement efficace. Nous avons dû réduire l'épaisseur du barreau central du fil en Z et le changer, ce qui a aussi nécessité de changer la puce et de refaire le vide (voir le paragraphe 2.7).

## 2.5 Bobines de champ magnétique uniforme pour les pièges magnétiques

### 2.5.1 Conception des bobines

Pour former les pièges magnétiques, nous avons besoin de créer des champs magnétiques homogènes selon les directions  $x$  et  $y$ . Pour cela, nous avons construit des paires de bobines rectangulaires autour de l'enceinte de la puce, en configuration Helmholtz.

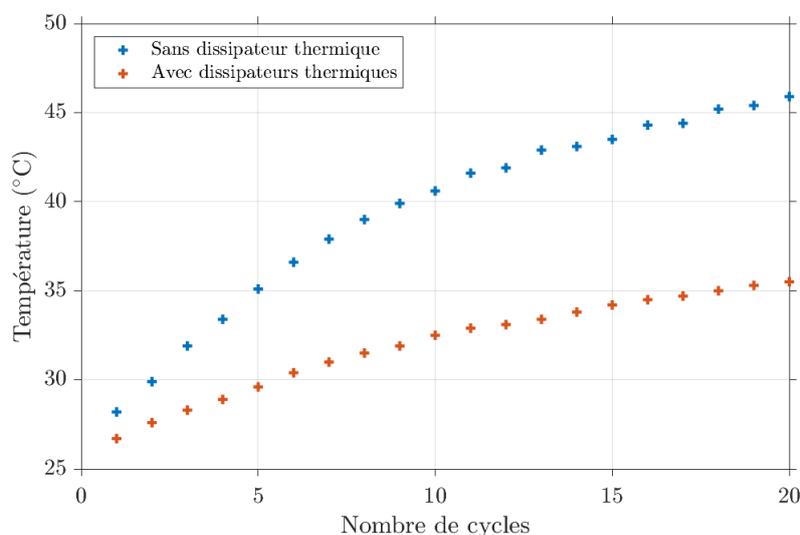
#### Bobines X

D'après nos simulations le champ magnétique créé par les barres transversales du fil en Z selon l'axe  $x$  s'élève jusqu'à une cinquantaine de gauss aux positions accessibles par les atomes. Nous avons donc besoin de créer un champ magnétique homogène  $B_X$  du même ordre de grandeur dans le sens opposé, afin de réduire le champ magnétique du fond du puits aux alentours de 1 G dans le piège magnétique intermédiaire. Les bobines qui créent ce champ homogène, que nous appellerons « bobines X », mesurent environ 28 par 24,5 cm et sont espacées de 18 cm. Nous avons utilisé du fil de cuivre de diamètre 1 mm que nous avons enroulé autour de cadres en aluminium. Nous avons fait 70 tours pour chaque bobine, ce qui permet d'atteindre un champ de 3,7 G pour 1 A de courant (voir annexe A pour la calibration entre champ magnétique et courant des bobines). La résistance totale de la paire de bobines vaut  $3,2 \Omega$ . Pour alimenter ces bobines nous utilisons une alimentation pilotable (modèle Delta Electronika SM52-30) qui peut atteindre jusqu'à 52 V et 30 A.

Actuellement, nous alimentons ces bobines avec un courant maximum de 12 A ce qui correspond à un champ magnétique de 44 G. La puissance dissipée est alors de  $P = Ri^2 = 461$  W et nous observons un chauffage des bobines de plusieurs dizaines de degrés, qui entraîne des déformations mécaniques modifiant légèrement le champ magnétique, malgré un contrôle en courant de l'alimentation. Pour limiter ce chauffage, nous avons accroché aux cadres des bobines des dissipateurs thermiques avec des ailettes. Une pâte thermique déposée entre le cadre et le dissipateur assure une bonne conduction thermique. Le graphe de la figure 2.14 compare le chauffage des bobines avec et sans dissipateur thermique. Bien que la température du cadre soit significativement réduite grâce aux dissipateurs thermiques, nous avons observé des pertes d'atomes dues à la modification du champ  $B_X$ , causée par le chauffage de ces bobines, lors du transfert des atomes du piège en Z vers le piège de la puce. Pour pouvoir augmenter la cadence de répétition de l'expérience sans causer de pertes d'atomes, un refroidissement par un circuit d'eau devrait être envisagé dans une version ultérieure, la difficulté étant qu'il est nécessaire de fabriquer les bobines directement sur l'expérience.

#### Bobines X2

Dans le piège magnétique de la puce, le champ magnétique selon  $x$  créé par les fils en U est de l'ordre de quelques centaines de milligauss, ce qui peut être insuffisant pour éviter des pertes par retournement de spin. Il faut donc cette fois-ci ajouter un champ magnétique homogène dans le même sens que celui créé par les fils en U pour augmenter le minimum de champ magnétique aux alentours du gauss. Nous avons d'abord essayé d'utiliser les bobines X elles-mêmes avec un commutateur électrique pour inverser le sens du courant. Cependant, nous avons dû trouver une autre solution car nous avons besoin d'un fond du puits de potentiel très stable pour les expériences de résonances de Feshbach micro-onde (voir chapitre 4). Nous avons observé que le chauffage des bobines X entraîne une déformation mécanique de ces

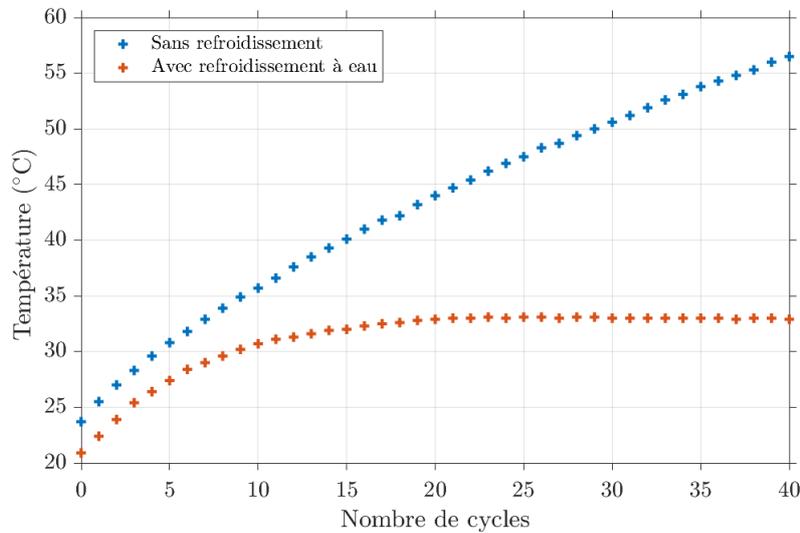


**Figure 2.14** – Comparaison de l’élévation de température des bobines X avec et sans dissipateurs thermiques. Un cycle correspond à alimenter les bobines avec 10 A pendant 10 s suivi de 35 s sans courant. Nous avons relevé le maximum de température atteint lors de chaque cycle. Après 20 cycles, nous observons une élévation de température de presque 20°C sans les dissipateurs thermiques, contre un peu moins de 10°C avec les dissipateurs thermiques, ce qui va dans le sens d’une nette réduction de la température.

bobines, ce qui cause une dérive du minimum de potentiel de l’ordre de 30 kHz (correspondant à 40 mG pour le champ magnétique). La solution la plus simple et rapide a été de construire de nouvelles bobines, que nous appellerons bobines X2, qui permettent de relever le fond du puits du piège magnétique final. Ces bobines mesurent 32 par 28 cm et sont espacées de 18 cm. Nous avons fait 20 tours, ce qui permet d’atteindre un champ magnétique de 0,99 G pour 1 A de courant. La résistance de la paire de bobines vaut 1,2  $\Omega$ . Pour alimenter ces bobines, nous utilisons une alimentation pilotable (Delta Electronika SM70-AR-24) qui peut atteindre jusqu’à 70 V et 12 A ou bien 35 V et 24 A. Nous utilisons usuellement ces bobines entre 0,4 A et 1 A, pendant une durée inférieure à 2 s, ce qui crée un chauffage négligeable. Grâce à ces bobines la stabilité du fond du puits de potentiel sur quelques heures est meilleure que le kilohertz.

### Bobines Y

Nous avons estimé que le champ magnétique des bobines selon  $y$ ,  $B_Y$ , devait atteindre de l’ordre de 100 G dans le piège Z, afin d’atteindre des taux de collision suffisamment grands pour permettre un refroidissement par évaporation efficace. Pour cela, nous avons construit des « bobines Y » de 22,5 par 17 cm et espacées de 14,5 cm. Nous avons aussi utilisé un fil de cuivre de diamètre 1 mm que nous avons enroulé autour des cadres en aluminium. Nous avons fait 100 tours pour chaque bobine, ce qui nous permet d’atteindre 6,2 G pour 1 A de courant. La résistance totale de la paire de bobines vaut 3,4  $\Omega$  et l’inductance est estimée à 1 mH. Pour alimenter ces bobines, nous utilisons une alimentation pilotable (Delta Elektronika SM70-22) qui peut atteindre jusqu’à 70 V et 22 A. Pour atteindre 100 G, nous

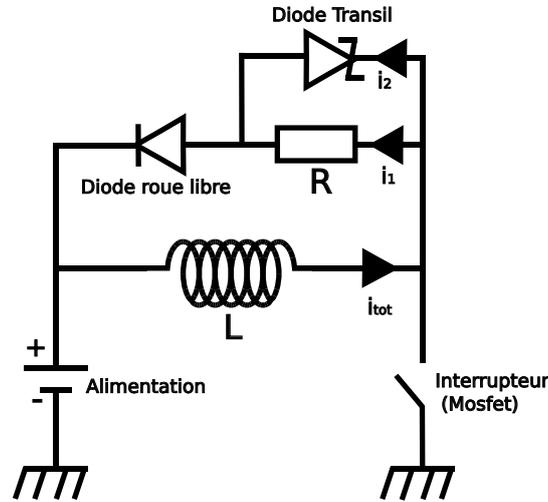


**Figure 2.15** — Comparaison de l'élévation de température des bobines Y avec et sans circulation d'eau. Un cycle correspond à alimenter les bobines avec 10 A pendant 5 s suivi de 15 s sans courant. Nous avons relevé le maximum de température atteint lors de chaque cycle. Avec la circulation d'eau le régime permanent est atteint après une dizaine de cycles et l'élévation de température est limité à une dizaine de degrés, tandis que sans eau la température continue d'augmenter après 40 cycles et la température atteint 57°C.

devons utiliser un courant de 16 A et un refroidissement par un circuit d'eau s'est révélé nécessaire. Pour cela, nous utilisons un tuyau de cuivre de 6 mm de diamètre que nous avons enroulé autour du cadre en aluminium et dans lequel nous faisons circuler de l'eau. Pour assurer un bon contact thermique entre ce tuyau et le fil de cuivre de la bobine, nous avons recouvert le tout de colle thermique. Un graphe comparant le chauffage des bobines avec et sans eau est représenté figure 2.15. Nous observons que la circulation d'eau réduit nettement la température des bobines.

## 2.5.2 Coupure des champs magnétiques

Pour prendre des images des atomes après temps de vol, nous devons couper rapidement les champs magnétiques, dans l'idéal en un temps inférieur à  $1/\omega_{\perp} \sim 50 \mu\text{s}$ . Pour cela, nous avons installé des interrupteurs avec diode de roue libre pour les bobines. Le circuit électrique est représenté sur la figure 2.16. Le principe est le suivant : un transistor à effet de champ à grille isolée (Mosfet) est utilisé comme interrupteur rapide. Cependant, une coupure très rapide du courant dans des bobines va entraîner de grosses surtensions ( $U = L\partial i/\partial t$ , où  $U$  est la tension,  $i$  est le courant et  $L$  est l'inductance de la bobine), qui peuvent endommager le circuit. Pour empêcher cela, on ajoute une diode de roue libre en parallèle de la bobine, dans laquelle le courant va pouvoir circuler après l'ouverture du circuit. Pour accélérer la dissipation de ce courant, on ajoute une résistance en série de la diode de roue libre. Enfin, afin que la tension aux bornes de la résistance ne dépasse pas la tension maximum supportée par le Mosfet, on ajoute en parallèle de la résistance une diode Transil, qui impose une tension maximale  $U_{\text{max}}$ . La coupure de courant se fait alors en deux temps : pendant la première partie où  $Ri_{\text{tot}}(t) > U_{\text{max}}$ , la tension aux bornes de la résistance est imposée par la diode Transil et



**Figure 2.16** — Schéma électrique du circuit permettant une coupure rapide du courant dans les bobines. R correspond à une résistance et L à l'inductance de la bobine.

vaut  $U_{\max}$ . On a donc :

$$L \frac{\partial i_{\text{tot}}}{\partial t} = -U_{\max}, \quad (2.19)$$

ce qui correspond à une diminution linéaire du courant avec le temps :

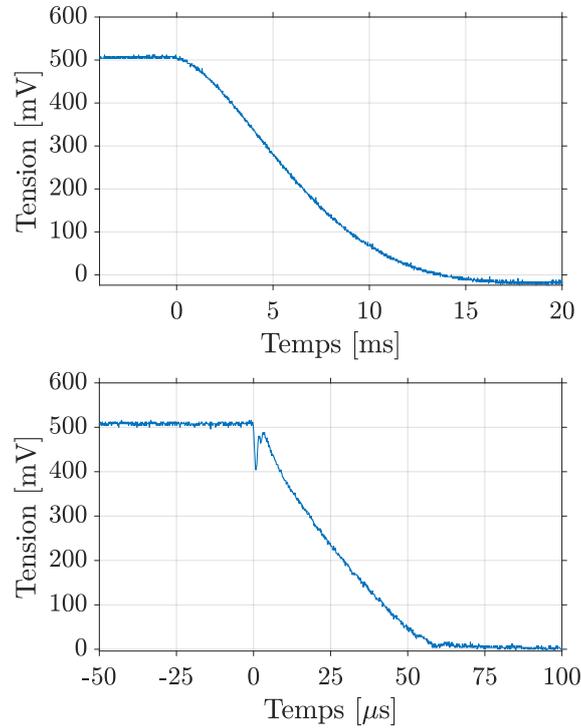
$$\Delta i = \frac{-U_{\max} \Delta t}{L}. \quad (2.20)$$

Une fois que  $Ri_{\text{tot}}(t) < U_{\max}$  la diode Transil n'est plus passante et tout le courant passe par la résistance. On a alors une décroissance exponentielle du courant avec un temps caractéristique  $\tau = L/R$ . Pour couper le courant le plus rapidement possible il faut donc choisir un Mosfet qui supporte de grandes tension (plusieurs centaines de volts), une diode Transil qui autorise une tension  $U_{\max}$  légèrement inférieure à celle du Mosfet et une résistance la plus grande possible. Nous avons conçu et construit le circuit servant d'interrupteur pour les bobines Y. Le Mosfet utilisé peut supporter une tension maximum de 600 V. Nous avons choisi d'utiliser deux diodes Transil de 220 V en série qui autorisent une tension  $U_{\max} = 440$  V et une résistance de 4,2 k $\Omega$ . Les temps de coupure pour un courant de 5 A avec et sans le circuit de coupure sont représentés sur la figure 2.17. On observe que sans ce circuit il faut environ 15 ms pour couper le courant alors qu'avec le circuit de coupure il suffit de 60  $\mu$ s.

Les circuits pour couper rapidement les bobines X et X2 ont été fabriqués par l'atelier d'électronique sur le même principe. Pour les bobines X on coupe un courant de 5 A en un temps de l'ordre de 25  $\mu$ s et pour les bobines X2 en 5  $\mu$ s.

## 2.6 Refroidissement par évaporation

La température du nuage d'atomes dans le piège quadrupolaire de l'enceinte puce est de l'ordre de la centaine de microkelvins. Pour obtenir un condensat de Bose-Einstein, il faut

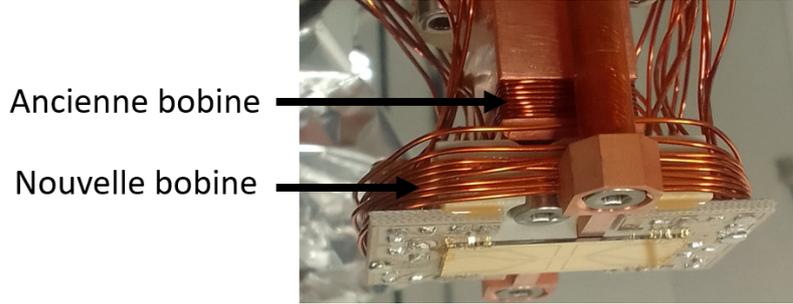


**Figure 2.17** — Mesures de coupures du courant dans les bobines Y à la pince ampère-métrique, avec un calibre de  $100 \text{ mV} \cdot \text{A}^{-1}$ . Sur le graphique du haut on coupe un courant de 5 A sans le circuit de coupure. On observe un retour du courant à zéro après environ 15 ms. Sur le graphique du bas on coupe un courant de 5 A avec le circuit de coupure. On observe un retour du courant à zéro en seulement 60  $\mu\text{s}$ .

diviser cette température par un facteur 100 à 1000. Pour cela, on utilise la technique de refroidissement par évaporation [112, 113] : en tronquant le potentiel dans lequel les atomes sont piégés, on laisse les atomes les plus énergétiques s'échapper du piège. Les atomes restant rethermalisent à une température plus basse et la densité dans l'espace des phases augmente.

Pour mettre en œuvre ce refroidissement par évaporation on utilise des ondes radiofréquences, de fréquence  $\nu_{\text{RF}}$ , qui couplent les atomes se trouvant à une position pour laquelle la norme du champ magnétique vaut  $B = h\nu_{\text{RF}}/|g_f m_f \mu_B|$  vers un état de spin non piégé magnétiquement<sup>2</sup>. Notons  $B_{\text{min}} = h\nu_0/|g_f m_f \mu_B|$  le minimum de champ magnétique et fixons la référence d'énergie à  $h\nu_0$ . Alors seuls les atomes ayant une énergie supérieure à  $U = h(\nu_{\text{RF}} - \nu_0)$  peuvent s'échapper du piège. Si nous laissons  $U$  fixé à une valeur donnée, comme le nuage d'atomes rethermalise à une température plus basse lorsque les atomes les plus énergétiques s'échappent, la probabilité que de nouveaux atomes aient une énergie suffisante pour s'échapper diminue. Le processus de refroidissement est alors de plus en plus lent. Afin d'accélérer ce processus on diminue  $U$ , donc  $\nu_{\text{RF}}$ , au cours du refroidissement. Un refroidissement efficace, avec un régime d'emballement, est obtenu pour une valeur  $\eta = U/(k_B T)$  comprise entre 5 et 7 [114]. Dans notre expérience, la température avant évaporation étant d'un peu plus de

2. Pour des atomes de sodium dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , on a  $|g_f m_f \mu_B| \simeq 700 \text{ kHz} \cdot \text{G}^{-1}$ , ce qui permettra de faire plus facilement des conversions champ magnétique/fréquence.



**Figure 2.18** – Photo indiquant les positions de l’ancienne bobine d’évaporation autour de la structure en cuivre et de la nouvelle bobine d’évaporation autour de la céramique Shapal.

100  $\mu\text{K}$ , il faut démarrer la rampe d’évaporation avec une fréquence de l’ordre de 20 MHz.

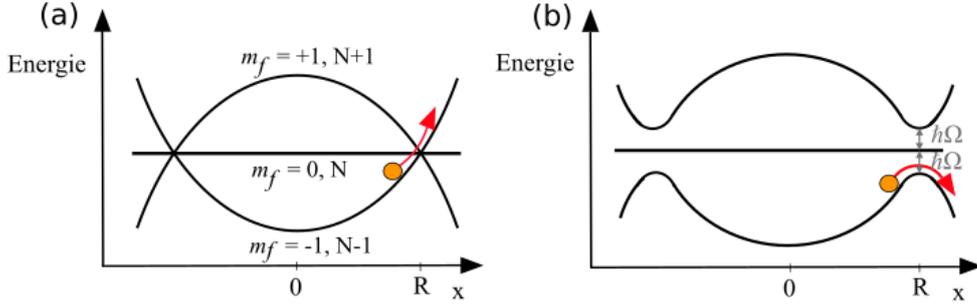
Les ondes radiofréquences sont générées par une source radiofréquence de la marque Tabor (modèle WW2571A). Nous utilisons le mode « arbitrary waveform » qui nous permet de créer des fonctions point par point, avec une fréquence d’échantillonnage de 250 MHz. Nous chargeons des fonctions sinusoïdales aux fréquences que nous utilisons pour la rampe d’évaporation, usuellement entre 20 MHz et 600 kHz. Nous utilisons ensuite le mode « arbitrary sequence » dans lequel nous explicitons l’ordre d’apparition des fonctions dans la séquence, ainsi que le nombre de répétitions de chaque fonction. L’intérêt de cette technique est qu’elle laisse une grande liberté sur la forme des rampes de fréquences. Cependant, cette liberté entraîne aussi une grande complexité au niveau du code pour obtenir les rampes désirées. De plus, nous nous sommes aperçus sur l’expérience que de simples rampes linéaires fonctionnaient très bien pour obtenir un condensat de Bose-Einstein. On pourrait à l’avenir utiliser des sources « Direct Digital Synthesis » fabriquées par l’atelier d’électronique du laboratoire pour simplifier la procédure.

L’onde radiofréquence passe ensuite par un amplificateur 2 W (Mini Circuits modèle ZHL1-2W-S+). Pour émettre cette onde radiofréquence au niveau des atomes, nous utilisons une bobine de 8 tours, installée dans l’enceinte à vide. Cette bobine a été modifiée lors de la reconstruction de l’expérience. En effet, la bobine d’évaporation initiale était installée autour de la structure en cuivre de la tour de support de la puce (figure 2.26), qui « écran-tait » l’onde radiofréquence. L’amplitude du champ magnétique oscillant était trop faible pour garantir un refroidissement efficace. Une nouvelle bobine a été installée autour de la céramique Shapal, ce qui a permis de multiplier par 8 cette amplitude.

Pour estimer la puissance nécessaire à ce que le refroidissement se passe correctement, on peut se placer du point de vue de l’atome habillé : « atome + photons radiofréquences », en considérant les trois états  $|m_f = -1, N - 1\rangle$ ,  $|m_f = 0, N\rangle$  et  $|m_f = 1, N + 1\rangle$ , où  $N$  représente le nombre de photons (voir figure 2.19). Sans couplage ces niveaux se croisent, mais en présence du couplage entre atomes et photons on a un croisement évité. Plus la puissance de l’onde radiofréquence est forte et plus on a un écart en énergie  $\hbar\Omega$  grand au niveau de l’ouverture entre les niveaux d’énergie. Pour que le refroidissement soit efficace il faut que  $\hbar\Omega$  soit suffisamment grand pour que les atomes suivent adiabatiquement le potentiel vers l’état antipliégeant et s’échappent du piège.

La probabilité de ce passage adiabatique vaut [115, 116] :

$$D = 1 - \exp\left(-\frac{\pi|V|^2}{\hbar g_f \mu_B b' v}\right) \quad (2.21)$$



**Figure 2.19** – Potentiels dans la représentation de l'atome habillé. (a) En l'absence de couplage et (b) avec un couplage  $\hbar\Omega$ . En présence du couplage on a un croisement évité. Pour des puissances suffisamment grandes les potentiels sont assez « écartés » pour qu'un atome suive adiabatiquement le potentiel vers l'état antipliégeant et s'échappe.

où  $b'$  est le gradient de champ magnétique,  $v$  est la vitesse des atomes et  $V = g_f\mu_B B_{\text{RF}}/2$  est le couplage entre les atomes et l'onde radiofréquence.  $B_{\text{RF}}$  est l'amplitude du champ oscillant de l'onde radiofréquence :  $B(t) = B_{\text{RF}} \cos(\omega_{\text{RF}}t)$ . Pour avoir un suivi adiabatique il faut que  $D$  soit proche de 1. On doit donc avoir :

$$\frac{g_f\mu_B B_{\text{RF}}^2}{(\hbar b'v)} \gg 1, \quad (2.22)$$

soit :

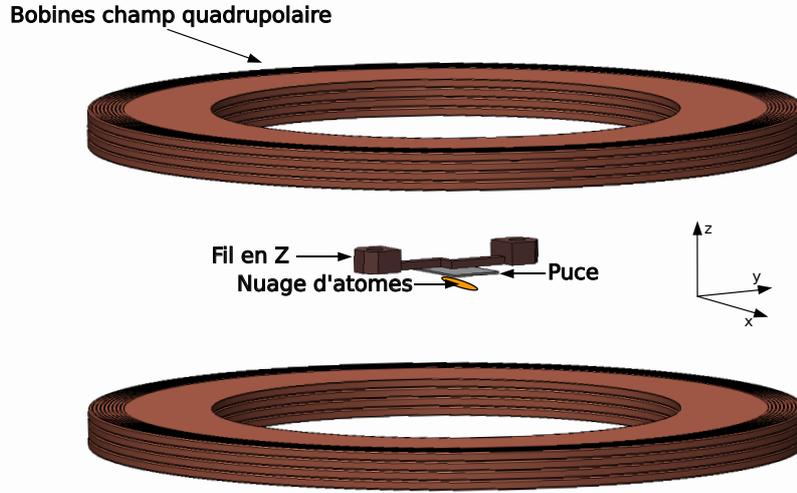
$$B_{\text{RF}} \gg \sqrt{\frac{\hbar b'v}{g_f\mu_B}}. \quad (2.23)$$

Pour une température initiale  $T = 100 \mu\text{K}$  on a une vitesse  $v \simeq \sqrt{k_B T/m} = 0,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . De plus, le gradient du champ magnétique transverse dans notre piège vaut  $b' \simeq 500 \text{ G} \cdot \text{cm}^{-1}$ . On trouve finalement qu'il faudrait avoir  $B_{\text{RF}} > 50 \text{ mG}$ .

Des mesures de  $B_{\text{RF}}$  créé par la bobine enroulée autour de la structure en cuivre ont été effectuées grâce à une antenne calibrée. Sur la plage de fréquence utilisée pour la rampe d'évaporation, l'amplitude  $B_{\text{RF}}$  était minimale à 20 MHz et valait 7 mG pour une puissance de l'onde à l'entrée de la bobine de 2 W. Après la modification de la position de la bobine autour de la céramique, on a mesuré  $B_{\text{RF}} = 55 \text{ mG}$  à 20 MHz, ce qui semble plus raisonnable pour s'approcher d'un passage adiabatique vers le potentiel antipliégeant.

## 2.7 Modification du fil Z et reconstruction de l'expérience

Une fois que tous les éléments décrits précédemment ont été installés sur l'expérience, nous avons pu transférer les atomes du piège magnétique quadrupolaire vers le piège de la puce, tout en refroidissant les atomes par évaporation. Les atomes sont initialement piégés environ 4 mm en dessous de la puce. Ils sont transférés du piège magnétique quadrupolaire au piège intermédiaire créé par le fil en Z, à une position verticale à peu près fixe. En optimisant les rampes de courant du piège quadrupolaire, du fil en Z et des bobines X et Y, nous sommes parvenus à transférer environ 70% des atomes dans ce piège intermédiaire. On



**Figure 2.20** – Configuration des différents éléments permettant de piéger les atomes : les bobines, le fil en Z et la puce. La puce est « tête en bas » et les atomes se trouvent en dessous afin de tomber sans rencontrer d'obstacle pendant les temps de vol. Le fil en Z est situé juste au-dessus de la puce.

rapproche ensuite les atomes de la puce, puis on effectue une étape de pré-refroidissement par évaporation avant de transférer les atomes dans le piège magnétique créé par la puce, car ce dernier est beaucoup moins profond que le piège intermédiaire. La configuration des différents pièges est représentée figure 2.20. Dans la première version de l'expérience, nous n'étions pas en mesure de refroidir correctement les atomes lors de cette étape de pré-refroidissement, à cause d'un taux de collision des atomes trop faible, ce qui a nécessité de modifier le fil en Z. Les difficultés rencontrées et les solutions apportées sont détaillées dans cette partie.

### 2.7.1 Difficultés lors du refroidissement par évaporation

L'une des hypothèses très importantes pour que le refroidissement par évaporation se passe correctement est que le nuage d'atome rethermalise au cours de l'évaporation. La thermalisation se produit grâce aux collisions entre atomes. On estime que trois collisions par atome en moyenne permettent de thermaliser [112]. Le taux de collision est donné par :

$$\gamma = \langle n \rangle \langle v \rangle \sigma \quad (2.24)$$

avec  $\langle n \rangle$  la densité moyenne d'atomes,  $\langle v \rangle$  la vitesse moyenne des atomes et  $\sigma$  la section efficace. La densité moyenne d'atomes peut se calculer de la façon suivante :

$$\langle n \rangle = \frac{N \int d\vec{r} \exp(-2g_f m_f \mu_B B(\vec{r}) / (k_B T))}{[\int d\vec{r} \exp(-g_f m_f \mu_B B(\vec{r}) / (k_B T))]^2}. \quad (2.25)$$

On a aussi  $\langle v \rangle = 4\sqrt{k_B T / (\pi m)}$  et  $\sigma = 8\pi a^2$ , avec  $a$  la longueur de diffusion. Si on modélise le piège de façon simplifiée en considérant un champ magnétique linéaire selon les directions

$y$  et  $z$  et harmonique selon  $x$ , sous la forme

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b''_x x^2 \\ b'_\perp y \\ b'_\perp z \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

on trouve un taux de collision :

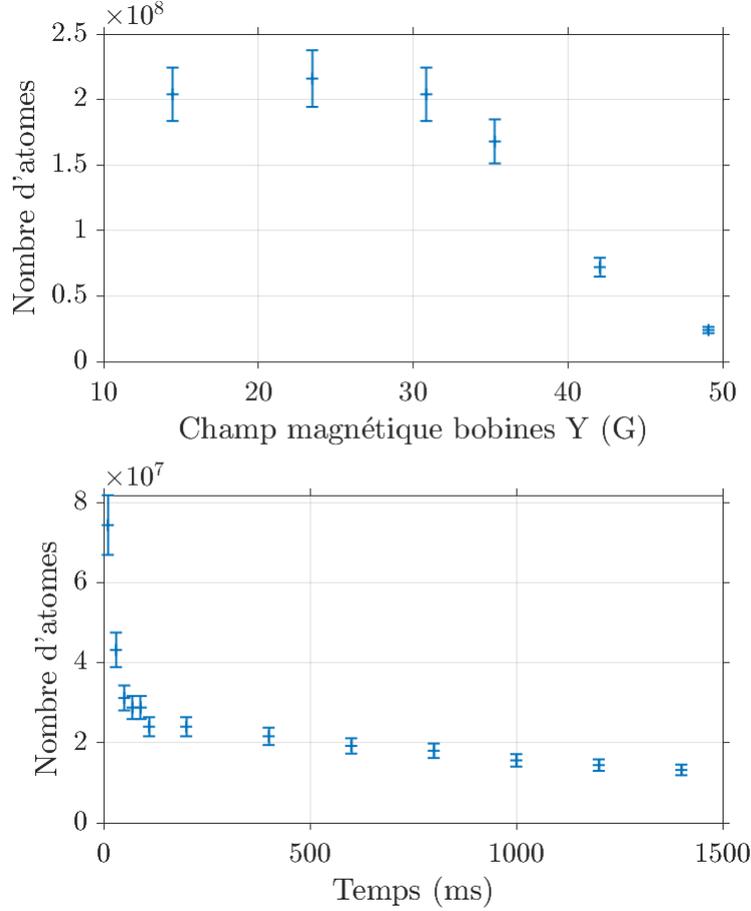
$$\gamma = \frac{4N}{3\sqrt{2}\pi} \frac{(g_f m_f \mu_B)^{5/2} b_\perp^2 \sqrt{b''_x} a^2}{\sqrt{m} (k_B T)^2}. \quad (2.27)$$

Le taux de collision augmente donc quadratiquement avec le gradient transverse. Pour estimer plus précisément le taux de collision on utilise un code simulant le champ magnétique à partir de la géométrie du fil en  $Z$  (voir annexe B).

Dans un système idéal, sans pertes inélastiques d'atomes, il suffirait de faire l'évaporation suffisamment lentement pour que l'hypothèse de thermalisation soit satisfaite. Cependant, les nuages d'atomes n'ont pas un temps de vie infini, notamment à cause des pertes par collisions avec des atomes du gaz résiduel de l'enceinte à vide. Le taux de collision entre donc en compétition avec le taux de pertes inélastiques : il faut que la thermalisation soit rapide devant le temps de vie du nuage d'atomes. Dans notre expérience nous observons qu'environ la moitié des atomes est perdue en 10 s.

Afin de refroidir efficacement les atomes par évaporation, on gagne à comprimer le nuage d'atomes, ce qui permet d'augmenter la densité d'atomes et donc le taux de collision. Initialement les atomes tout juste transférés dans le piège créé par le fil en  $Z$  se trouvent 6 mm sous ce dernier, ce qui correspond à environ 4 mm sous la surface de la puce. Le champ magnétique créé par les bobines  $Y$  vaut alors  $B_Y = 14$  G. Le nombre d'atomes est d'environ  $2.10^8$  et la température de  $80 \mu\text{K}$ . Grâce aux simulations de champ magnétique du piège en  $Z$ , nous pouvons évaluer le taux de collision à environ 0,2 collisions par seconde. En augmentant le champ  $B_Y$  à 31 G, nous rapprochons le nuage d'atomes à 3,9 mm sous le fil en  $Z$ , tout en comprimant le nuage d'atomes. Le nombre d'atomes est toujours d'environ  $2.10^8$  et la température a augmenté à  $150 \mu\text{K}$ . Le taux de collision est alors estimé à 0,5 par seconde. Si on continue à augmenter  $B_Y$  on comprime encore plus le nuage d'atomes en le rapprochant du fil en  $Z$  mais on commence à observer des pertes d'atomes de plus en plus importantes (voir figure 2.21). Ces pertes sont causées par la collision des atomes sur la puce, qui se situe entre le fil en  $Z$  et le nuage d'atomes. La barrière de potentiel magnétique créée par le fil en  $Z$  n'est en effet plus suffisante pour empêcher les atomes les plus énergétiques d'atteindre la surface de la puce, le potentiel du piège est tronqué et la puce va « évaporer les atomes » en imposant une température maximale.

En rapprochant les atomes de la puce, on réduit le volume du piège ce qui va dans le sens d'une augmentation du taux de collision  $\gamma$ , mais on réduit le nombre d'atomes ce qui va dans le sens d'une réduction de  $\gamma$ . La position pour laquelle on a le meilleur compromis en terme de nombre d'atomes et de volume du piège, afin de maximiser le taux de collision initial, se trouve environ 3,2 mm sous le fil en  $Z$ , pour un champ magnétique des bobines  $Y$  de 42 G. Il reste alors  $7,5.10^7$  atomes à une température de  $113 \mu\text{K}$ . Le taux de collision dans ces conditions est estimé à seulement  $1,7 \text{s}^{-1}$ . Nous avons tenté de faire du refroidissement par évaporation dans ce piège, les résultats sont présentés sur la figure 2.22. Le nombre d'atomes après une rampe de fréquence linéaire allant de 19 à 3 MHz durant 8 s est divisé par près de 30 par rapport à la situation sans rampe radiofréquence, tandis que la température n'a été divisée que par 4. Pour un refroidissement par évaporation qui fonctionne correctement on



**Figure 2.21** — Pertes des atomes par collision sur la surface de la puce. Graphique supérieur : nombre d'atomes en fonction du champ magnétique final des bobines Y, après avoir attendu 1 s dans le piège final. On observe que ce nombre d'atomes diminue au delà de 35 G. Cette diminution du nombre d'atomes est causée par les collisions des atomes sur la surface de la puce lorsqu'on les rapproche de cette dernière. Graphique inférieur : nombre d'atomes en fonction du temps passé dans le piège final, pour un champ magnétique des bobines Y de 49 G. On observe une dynamique de perte rapide sur une centaine de ms, causée par les collisions des atomes sur la surface de la puce, puis une stabilisation. Les fluctuations statistiques sur le nombre d'atomes dans l'expérience sont de l'ordre de 10% du nombre d'atomes.

peut espérer avoir  $T \propto N^\alpha$  avec  $\alpha > 1$ , ce qui est loin d'être notre cas. La densité dans l'espace des phases est donnée par  $D = n(\vec{0})\lambda_T^3$ , avec la densité d'atome au niveau du minimum de potentiel (en  $\vec{r}=0$ ) :

$$n(\vec{0}) = \frac{N \exp(-U(\vec{0})/k_B T)}{\int d\vec{r} \exp(-U(\vec{r})/k_B T)} \quad (2.28)$$

et la longueur d'onde thermique de de Broglie :

$$\lambda_{\text{dB}} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^2}{mk_B T}}. \quad (2.29)$$

L'énergie potentielle vaut  $U = g_f m_f \mu_B B$ , pour la calculer il faut donc connaître le paysage de champ magnétique, ce qu'on calcule numériquement avec des simulations du champ magnétique créé par le fil en Z. Pour obtenir un condensat de Bose-Einstein on doit avoir

$$n(\vec{0})\lambda_{\text{dB}}^3 > \zeta(3/2) \simeq 2,6. \quad (2.30)$$

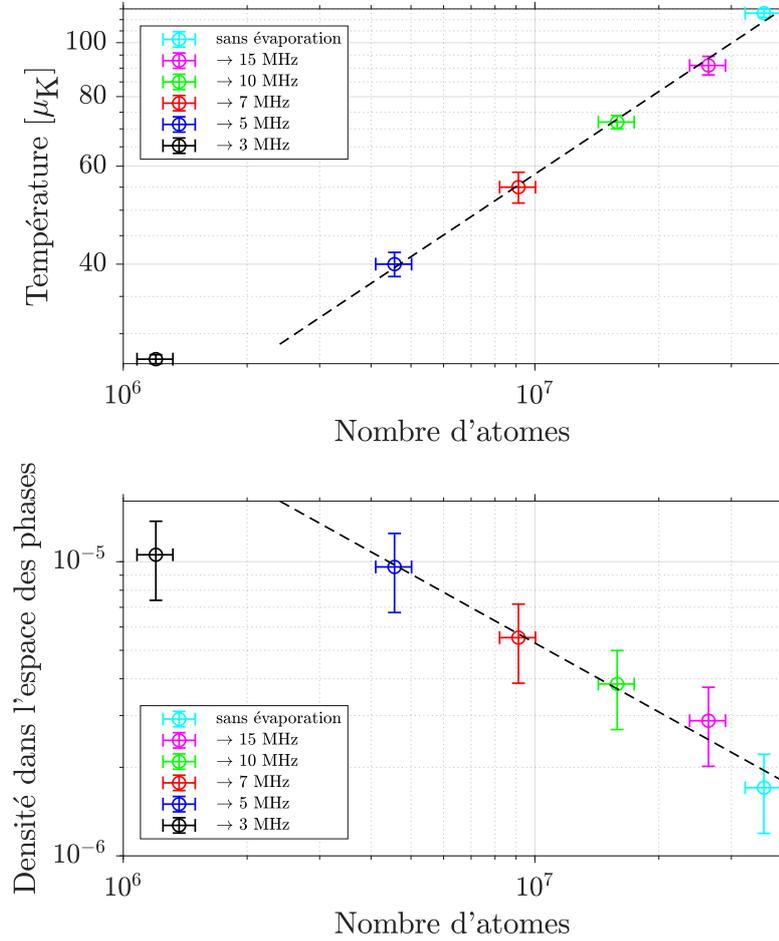
Nous voyons avec les données de la figure 2.22 que la densité dans l'espace des phases augmente très peu lors du refroidissement par évaporation et que nous sommes très loin des valeurs requises pour obtenir un condensat de Bose-Einstein.

Nous avons aussi tenté de faire du refroidissement par évaporation après avoir transféré les atomes dans le piège magnétique de la puce mais la situation était encore moins favorable. En effet, le nuage était très hors équilibre, de nombreux atomes étaient perdus lors du transfert et nous n'avons pas observé de diminution de la température du nuage d'atomes.

### 2.7.2 Conception d'un nouveau fil en Z

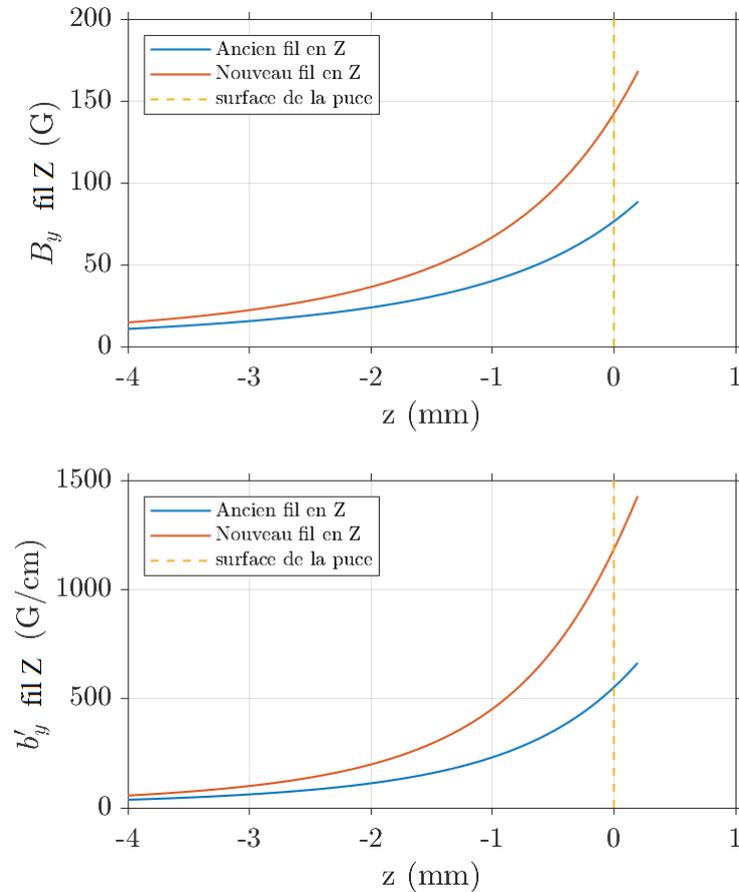
Pour résoudre ce problème, nous sommes arrivés à la conclusion qu'il fallait revoir la conception du fil en Z et le changer. L'objectif est d'augmenter la barrière de potentiel créée par le fil en Z au niveau de la surface de la puce à atomes, afin de retarder le plus possible le moment où il commence à y avoir des pertes d'atomes par collision sur la puce. Pour cela, il suffit de réduire la distance moyenne entre le fil en Z et la puce. Avant changement du fil en Z celui-ci faisait 2 mm d'épaisseur. De plus, il y avait un espace d'une épaisseur approximative de 500  $\mu\text{m}$  entre le fil de cuivre et le wafer en silicium de la puce. Nous avons décidé de réduire l'épaisseur au niveau du barreau central du fil en Z à 0,8 mm et de réduire l'espace entre fil en Z et puce : dans cette nouvelle version celui-ci fait un peu moins de 200  $\mu\text{m}$  (voir image du fil en Z avant et après modification à la figure 2.13). Le champ magnétique créé par le fil en Z selon l'axe  $y$ , ainsi que sa dérivée – en prenant comme référence de hauteur ( $z = 0$ ) la surface de la puce – avant et après modification du fil Z, sont représentés sur la figure 2.23. On observe que ce champ magnétique est multiplié par près de 2 au niveau de la surface de la puce, ce qui assure une barrière de potentiel plus favorable, qui va permettre d'approcher les atomes plus près de celle-ci avant d'avoir des pertes. De plus, le gradient est environ doublé à moins de 1 mm de la puce, ce qui assure d'avoir un volume du piège beaucoup plus petit pour une même distance à la surface de la puce, donc un meilleur taux de collision.

Réduire l'épaisseur du fil en Z augmente sa résistance. Nous utilisons des courants importants dans le fil en Z (110 A) et nous étions inquiets que cela entraîne un chauffage excessif, qui causerait par exemple une augmentation de pression dans l'enceinte par dégazage. Nous avons fait appel à Yann Charles, du Laboratoire des Sciences des Procédés et des Matériaux voisin, pour simuler avec un code à éléments finis l'élévation de température au niveau du nouveau fil en Z lorsqu'il est traversé par un courant de 110 A (voir figure 2.24). Dans cette simulation nous effectuons 10 cycles de 30 s, avec 110 A pendant les 15 premières secondes et 0 A pendant les 15 secondes suivantes, afin de simuler les cycles de répétition de l'expérience. Nous observons une élévation de température de 30°C sur 10 cycles. Si on extrapole une température limite en ajustant les maximaux locaux de température avec une fonction



**Figure 2.22** – Essais de refroidissement par évaporation dans le piège en Z pour un champ magnétique final des bobines Y de 42 G. Les rampes d'évaporation commencent à 19 MHz et ont une durée de 8 s. Graphique supérieur : température  $T$  en fonction du nombre d'atomes  $N$  en échelle logarithmique pour les différentes rampes de fréquence. Un ajustement sur les 5 premiers points donne  $T \propto N^{0,49}$ . Les fluctuations statistiques sur le nombre d'atomes sont de l'ordre de 10% du nombre d'atomes. La température est évaluée grâce à la taille du nuage d'atomes après un temps de vol, en supposant une expansion ballistique. Les incertitudes correspondent à l'écart-type entre les mesures de température selon les deux axes de l'image. Graphique inférieur : évaluation de la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes pour les différentes rampes de fréquence, en échelle logarithmique. L'ajustement sur les 5 premiers points donne une densité dans l'espace des phases proportionnelle à  $N^{-0,78}$ . Les incertitudes sur la densité dans l'espace des phases sont principalement dues aux incertitudes sur la modélisation du paysage magnétique et sont estimées aux alentours de 30%.

exponentielle, nous trouvons une température maximale de 350 K ce qui correspond à une élévation de température de 50°C.

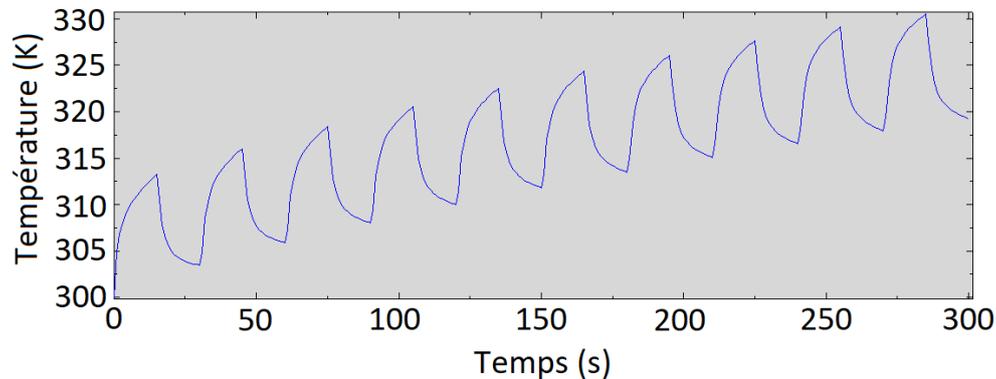


**Figure 2.23** – Image supérieure : Champ magnétique selon  $y$  créé par le fil en Z en fonction de la hauteur verticale  $z$ , en prenant comme référence de hauteur la surface de la puce en  $z = 0$ , avant et après modification du fil en Z. Image inférieure : Dérivée du champ magnétique selon  $y$  créé par le fil en Z en fonction de la hauteur verticale  $z$ .

Cette simulation est très pessimiste car elle considère que la chaleur ne s'évacue que par les barreaux de cuivre auxquels est connecté le fil en Z. En réalité le fil en Z est aussi collé sur la céramique Shapal (qui est un bon conducteur) à l'aide de colle thermique, ce qui devrait réduire significativement la température. Ces simulations rassurantes nous ont convaincu de l'épaisseur retenue pour le fil en Z. Une fois le nouveau fil en Z mis en place nous n'avons pas vu de problème de dégazage et l'augmentation moyenne de la résistance du fil en Z est suffisamment faible pour qu'on n'observe pas d'augmentation de la tension sur l'alimentation, à courant fixé.

### 2.7.3 Reconstruction de l'expérience

La puce étant collée à la céramique par dessus le fil en Z, le changement de ce dernier nécessitait de changer et reconstruire tout l'assemblage : la céramique Shapal, le fil en Z, la puce et les sous-puces. Le nouveau fil en Z a été usiné par électroérosion par l'entreprise



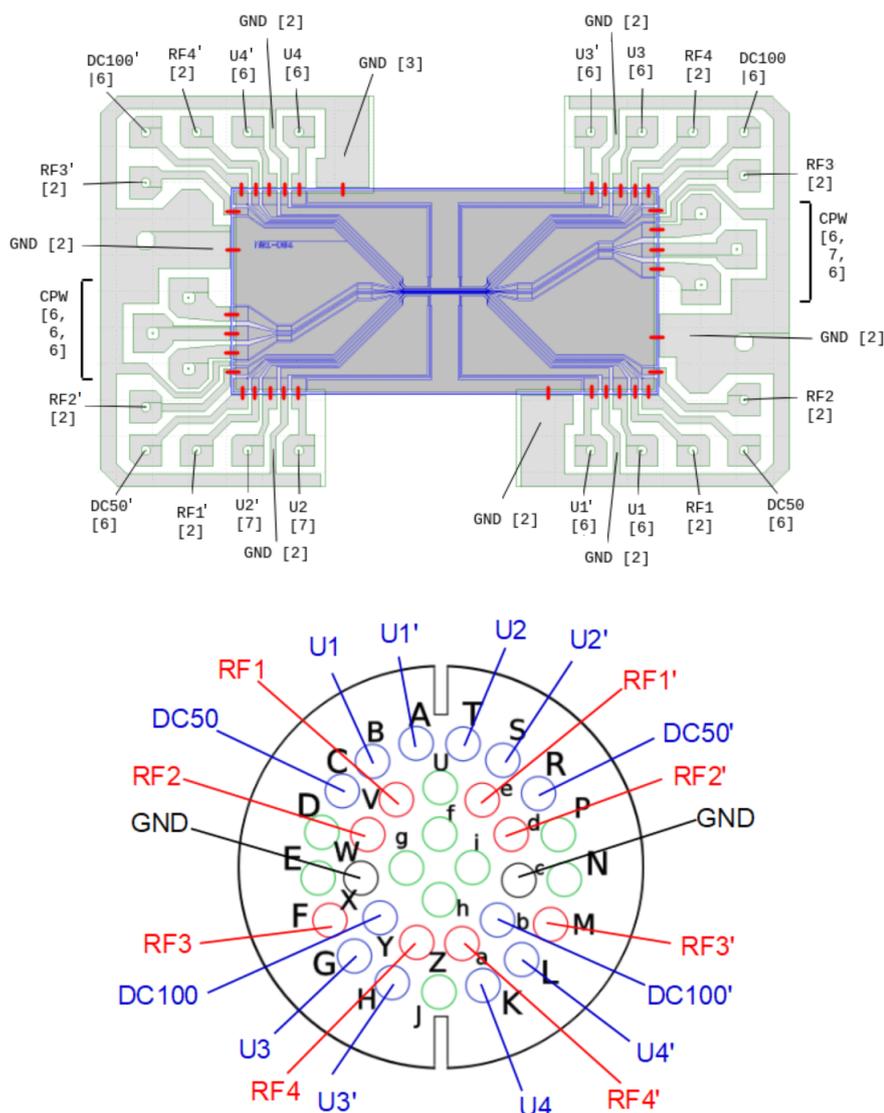
**Figure 2.24** – Simulations de l'évolution de la température au milieu du fil en Z (point le plus chaud) en fonction du temps pour 10 cycles de 30s, avec 110 A pendant les 15 premières secondes et 0 A pendant les 15 secondes suivantes. Nous observons une élévation de température de +30°C au maximum. ces simulations ont été effectuées par Yann Charles, de l'équipe « couplages Mécanique-Environnement-Matériaux » du LSPM.

Aerosion, les techniques usuelles d'usinage n'ayant pas donné satisfaction.

Nous avons soigneusement nettoyé tous les éléments allant dans le vide (excepté la puce) dans une cuve à ultrasons, avec un premier bain de 15 minutes dans un mélange d'eau distillée et de savon, un deuxième bain de 15 minutes dans de l'eau distillée et un dernier bain de 10 minutes dans de l'acétone. Nous avons simplement nettoyé la puce en l'aspergeant d'acétone. Thierry Billeton, de notre atelier d'optique, a poli la pièce en céramique afin de réduire son épaisseur pour que le fil en Z arrive à la même hauteur que la céramique une fois collé, réduisant ainsi l'espace entre fil Z et wafer de silicium. Nous avons ensuite soudé dans les encoches des sous-puces les fils de cuivre qui permettent d'amener le courant depuis un connecteur multipin (voir figure 2.25), ainsi que les connecteurs SMA pour la micro-onde.

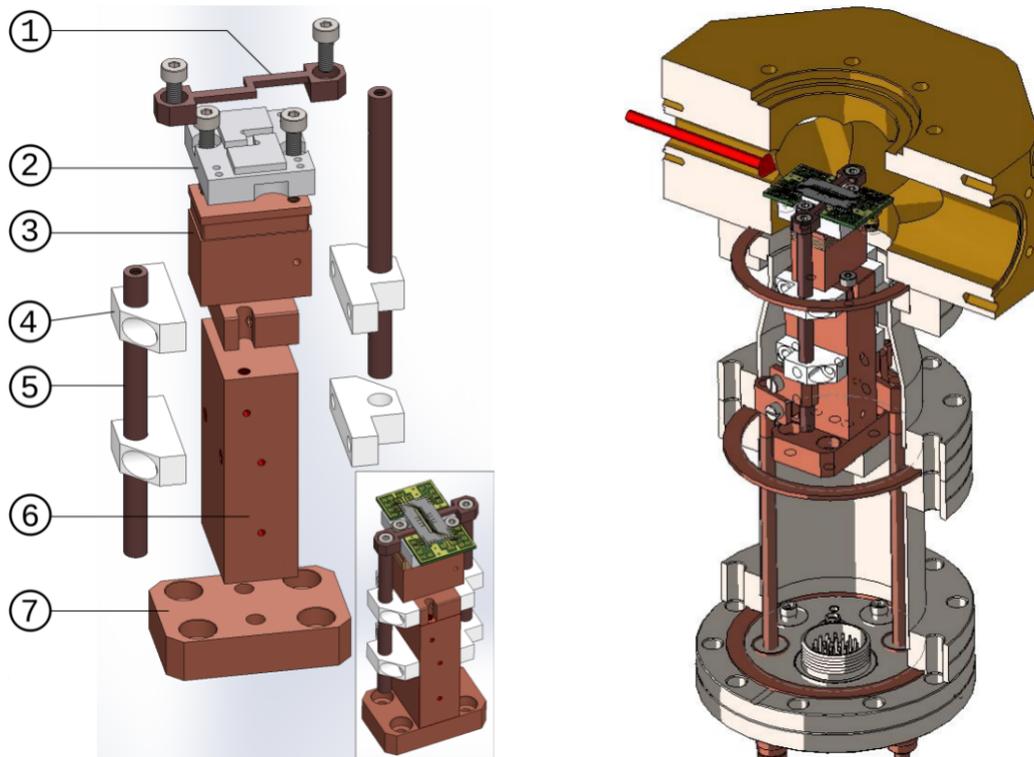
Nous avons collé les sous-puces sur la céramique et limé les soudures pour qu'elles ne dépassent pas au niveau de la puce, ce qui risquerait de couper les faisceaux lasers d'imagerie ou de repompeur. Enfin, nous avons collé la puce sur la céramique. Cette étape est délicate et assez « artisanale ». Nous avons d'abord déposé des petits points de colle régulièrement espacés sur la céramique à l'aide d'une aiguille. Nous avons ensuite étalé la colle à l'aide d'une lame de verre. Enfin, nous avons installé la puce en la centrant au mieux. Pour la coller nous avons appuyé dessus au niveau des plans de masse à l'aide de cotons-tiges enveloppés dans des morceaux de gants. Les microfils d'or reliant les pistes de la sous-puce à la puce ont été soudés au LERMA par Thibaut Vacelet. Nous en avons aussi profité pour changer la bobine d'évaporation qui se trouve maintenant autour de la céramique (voir la discussion du paragraphe 2.6).

La pièce en céramique a finalement été vissée sur la structure en cuivre servant de support (figure 2.26), les tiges amenant le courant au fil en Z ont aussi été vissées aux extrémités du Z et le connecteur multipin a été inséré dans sa prise. Nous avons installé la puce dans l'enceinte et vérifié l'ensemble des connexions en mesurant les résistances (voir tableau 2.1). Enfin, nous avons démarré le pompage avec un groupe composé d'une pompe primaire et d'une pompe turbomoléculaire. Nous nous sommes assurés avec un détecteur d'hélium que nous ne voyions pas de fuite et nous avons démarré l'étuvage, en utilisant des cordons chauffants alimentés par des variacs. Nous avons lentement monté la température pendant 2 jours pour ne pas créer



**Figure 2.25** – Schéma indiquant les connexions effectuées entre les pistes de cuivre des sous-puces (image du haut) et le connecteur multipin relié à l'extérieur de l'enceinte (image du bas). Les numéros entre crochets autour des sous-puces indiquent le nombre de microfils de diamètre  $38\ \mu\text{m}$  qui font le pont entre puce et sous puce pour chacune des pistes des sous-puces. Par précaution quatre microfils supplémentaires rectangulaires de  $76\ \mu\text{m}$  par  $13\ \mu\text{m}$  ont été installés sur la nouvelle puce pour les fils DC, les fils U et les fils du guide d'ondes.

des contraintes mécaniques trop brutales, qui pourraient entraîner la fissuration d'un hublot par exemple. Les joints entre l'enceinte et les hublots sont en indium, qui a une température de fusion basse ( $156^\circ\text{C}$  à pression ambiante). Nous avons donc décidé de ne pas chauffer à plus de  $100^\circ\text{C}$  et le temps d'étuvage pour atteindre l'ultravide est par conséquent assez long : nous avons pompé pendant un mois jusqu'à descendre à une pression d'environ  $2,10^{-8}$  mbar.



**Figure 2.26** – À gauche : vue éclatée de la tour de support de la puce (à l'envers par rapport à sa position dans l'enceinte). ① fil en Z (cuivre) ② céramique Shapal ③ partie supérieure du support (cuivre) ④ Guides des tiges (PEEK) ⑤ tiges (cuivre) ⑥ partie inférieure du support (cuivre) ⑦ Base (cuivre). À droite : vue assemblée et intégrée à l'enceinte. Crédit Thomas Badr.

Fil	Résistance
DC50	4,6 $\Omega$
DC100	3,8 $\Omega$
U1	3,5 $\Omega$
U2	3,6 $\Omega$
U3	3,5 $\Omega$
U4	3,6 $\Omega$
RF1	12,0 $\Omega$
RF2	11,8 $\Omega$
RF3	11,8 $\Omega$
RF4	12,0 $\Omega$
CPW (cœur)	21,6 $\Omega$
CPW (retour)	1,8 $\Omega$

**Table 2.1** – Mesure des résistances des fils de la puce.

Ensuite, nous avons activé la pompe getter SAES NEXTorr intégrée à la pompe ionique et

diminué progressivement la température. Une fois la température de l'enceinte revenue à la température ambiante, la pression mesurée dans l'enceinte puce par le capteur de la pompe ionique est passée en dessous de  $10^{-10}$  mbar.

## 2.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le montage expérimental de condensat de sodium sur puce à atomes. Nous nous sommes ensuite concentrés sur les développements techniques permettant le transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce ainsi que le refroidissement par évaporation. L'impossibilité d'effectuer un refroidissement par évaporation efficace dans le piège intermédiaire nous a poussé à revoir la conception du fil en Z et a nécessité des modifications importantes avec un changement du fil en Z, de la puce à atomes et de la bobine d'évaporation. Dans le chapitre suivant nous montrerons que ces modifications se sont montrées fructueuses et ont permis de finalement obtenir un condensat de Bose-Einstein.

# Chapitre 3

## Du condensat 3D au quasi-condensat 1D

Les modifications apportées sur le montage expérimental ont permis de produire des condensats de Bose-Einstein, ou bien des quasi-condensats lorsqu'on travaille du côté du régime unidimensionnel. Les premiers condensats ont été obtenus en janvier 2023, d'abord dans le piège magnétique créé par le fil en Z, puis dans le piège de la puce.

Dans ce chapitre nous détaillerons la séquence expérimentale de transfert des atomes vers le piège de la puce et de refroidissement par évaporation, qui ont permis d'obtenir un condensat de Bose-Einstein [67], au paragraphe 3.1. Nous présenterons les performances de l'expérience en termes de fréquences d'oscillation des pièges (3.2), de la rugosité du potentiel (3.3), du nombre d'atomes (3.4) et des températures atteintes (3.5). Une fois les systèmes caractérisés nous pourrions étudier le passage du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel (3.6).

### 3.1 Obtention du condensat de Bose-Einstein

#### 3.1.1 Optimisation de la séquence de transfert vers le piège magnétique de la puce et du refroidissement par évaporation

Après reconstruction de l'expérience, les premières étapes du refroidissement (ralentisseur Zeeman, piège magnéto-optique et mélasse) ont été réoptimisées et la température du four a été augmentée de 25°C, ce qui a permis d'obtenir de l'ordre de  $10^9$  atomes dans le piège quadrupolaire de l'enceinte puce, à une température de 130  $\mu$ K. Le nuage d'atomes dans le piège quadrupolaire se trouve environ 4 mm sous la puce à atomes.

Les grandes étapes du transfert des atomes vers le piège de la puce ainsi que du refroidissement par évaporation sont les suivantes :

- transfert des atomes du piège quadrupolaire au piège intermédiaire du fil en Z
- compression du nuage d'atomes
- première rampe de refroidissement par évaporation dans le piège du fil en Z
- transfert des atomes dans le piège magnétique de la puce
- deuxième phase de compression du nuage d'atomes
- deuxième rampe d'évaporation jusqu'à la production d'un condensat de Bose-Einstein.

Après avoir présenté les grandes étapes, nous allons donner les détails de la séquence expérimentale utilisée pour obtenir un condensat de Bose-Einstein dans le piège de la puce.

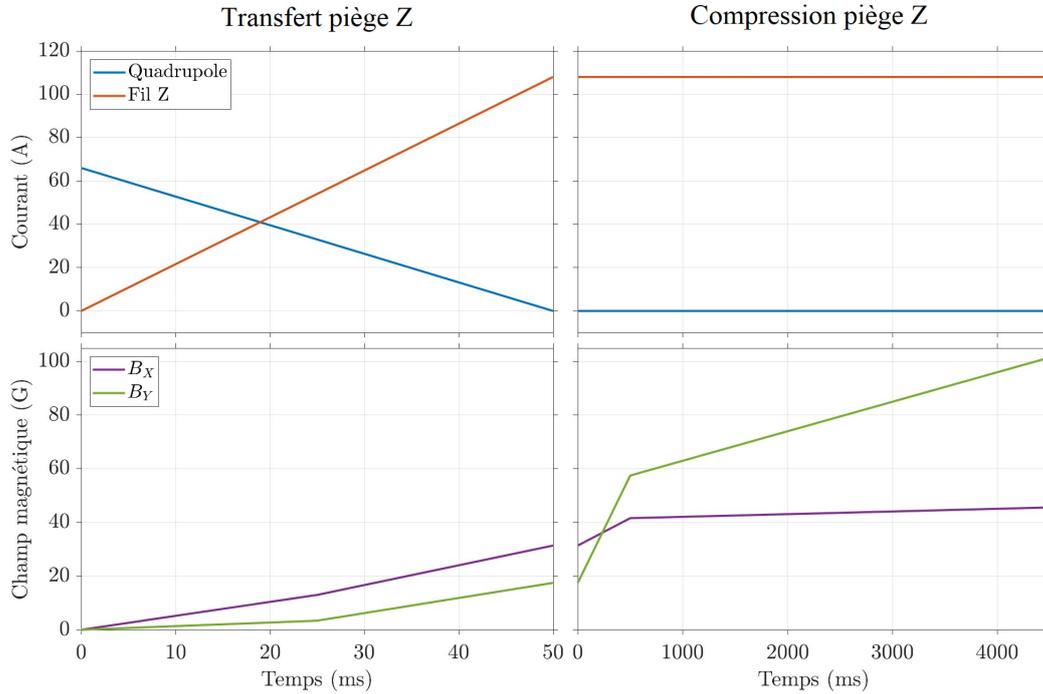
La figure 3.1 illustre les variations des différents paramètres au cours de la séquence pour le transfert vers le piège du fil en Z et la première phase de compression, afin d'aider à la compréhension des explications. Initialement les bobines du piège quadrupolaire sont parcourues par un courant de 66 A, produisant un gradient de champ dans les directions horizontales  $b' \simeq 60 \text{ G.cm}^{-1}$ . Le courant est initialement nul dans le fil en Z et les bobines X et Y.

**Transfert vers le piège en Z -** Pour transférer les atomes vers le piège en Z, le courant dans les bobines quadrupolaires est descendu linéairement en 50 ms jusqu'à 0 A, tandis que le courant dans le fil en Z est monté linéairement de 0 A à 108 A sur la même durée. Pendant ce temps, les courants dans les bobines X et Y sont augmentés linéairement par morceau. Dans les bobines X on fait une première rampe d'une durée de 25 ms qui permet d'atteindre un champ  $B_X = 13 \text{ G}$ , suivie d'une deuxième rampe de 25 ms jusqu'à  $B_X = 31,4 \text{ G}$ . Dans les bobines Y on fait une première rampe d'une durée de 25 ms permettant d'atteindre un champ  $B_Y = 3,4 \text{ G}$ , suivie d'une deuxième rampe jusqu'à  $B_Y = 17,5 \text{ G}$ . Les champs magnétiques intermédiaires et finaux des bobines X et Y ont été optimisés afin de maximiser le nombre d'atomes transférés dans le piège du fil en Z. Vers la fin du transfert, le zéro de champ magnétique du piège quadrupolaire « s'échappe » à l'infini, ce qui entraîne des pertes d'atomes. Nous parvenons à transférer environ 55% d'atomes du piège quadrupolaire au piège du fil en Z.

**Première phase de compression -** On rapproche ensuite le nuage d'atomes de la puce – ce qui a pour effet de le comprimer – en augmentant le champ magnétique des bobines Y. Pour cette étape on procède en deux temps. On effectue une première rampe de 500 ms où le champ magnétique est augmenté linéairement jusqu'à 57,5 G. Pendant ce temps le champ magnétique des bobines X est augmenté linéairement jusqu'à 41,6 G afin d'ajuster le champ magnétique du fond du puits aux alentours de 2 G. Lorsqu'on rapproche le nuage d'atomes de la puce à partir de cette position, on commence à perdre les atomes les plus chauds par collision sur la surface de la puce, ce qui contribue à un refroidissement par évaporation. On doit alors aller beaucoup plus lentement dans la compression. La deuxième partie de la compression se fait en une durée de 4 s jusqu'à une valeur finale du champ magnétique des bobines Y de 101 G et de celui des bobines X de 45,6 G, ce qui permet d'ajuster le champ magnétique du fond du puits vers 2 G. Les atomes se trouvent alors à une distance de 550  $\mu\text{m}$  de la puce. Le nombre d'atomes restant à ce stade est de l'ordre de  $10^8$  à une température de 115  $\mu\text{K}$  et nous atteignons un taux de collision de l'ordre de  $50 \text{ s}^{-1}$ , favorable pour démarrer le refroidissement par évaporation.

**Première rampe de refroidissement par évaporation -** L'évolution de la température en fonction du nombre d'atomes ainsi que de la densité dans l'espace des phases en fonction du nombre d'atomes à partir de cette étape sont données sur la figure 3.3. Nous effectuons une rampe d'évaporation linéaire d'une durée de 6 s allant de 20 MHz à 3 MHz, à l'issue de laquelle il reste de l'ordre de  $10^7$  atomes à une température de 8  $\mu\text{K}$ .

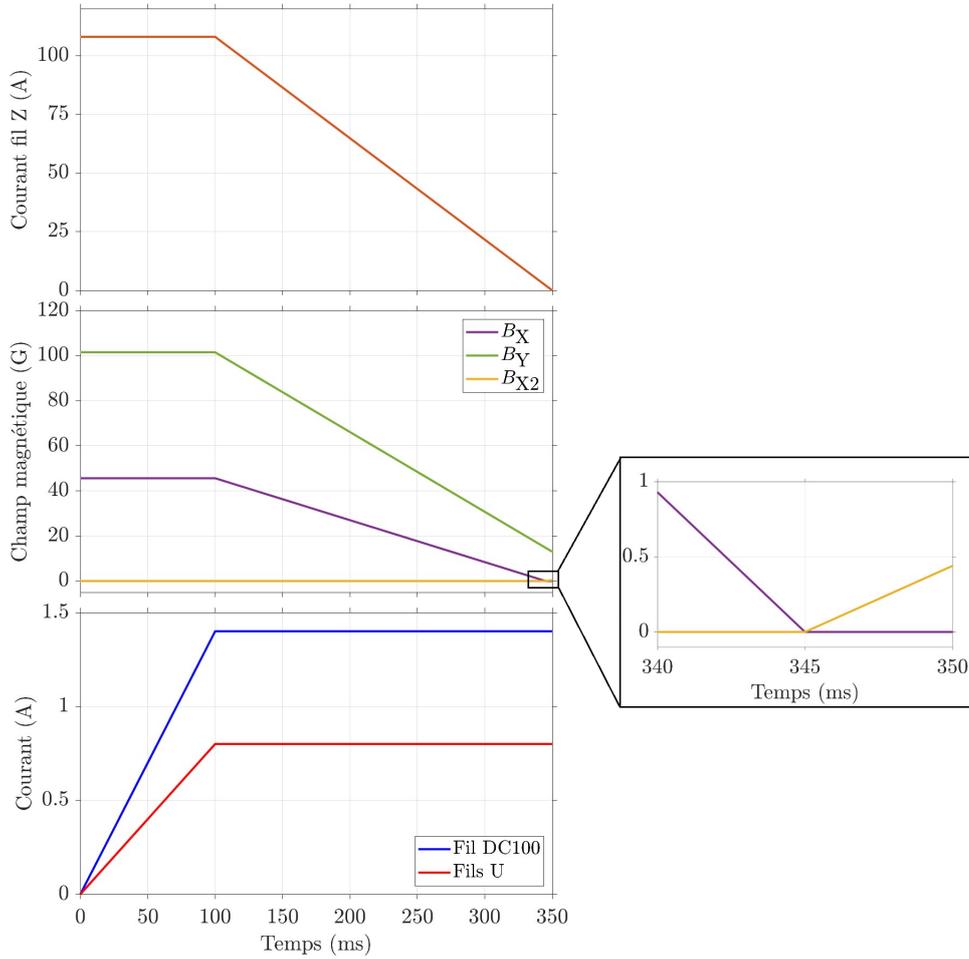
**Transfert vers le piège de la puce -** Nous effectuons alors le transfert des atomes vers le piège de la puce. Les variations des courants et champs magnétiques lors du transfert vers la puce sont illustrés sur la figure 3.2. On commence par monter en 100 ms les courants dans le fil DC100 et les fils en U, respectivement à 1,4 A et 0,8 A. On baisse ensuite linéairement le courant du fil en Z de 108 A à 0 A pendant un temps de 250 ms. Simultanément, le champ magnétique des bobines Y est baissé linéairement jusqu'à 13 G. Le champ magnétique des



**Figure 3.1** — À gauche : évolution des courants dans les bobines quadrupolaires et dans le fil en Z ainsi que des champs magnétiques des bobines X et Y pendant la phase de transfert du piège quadrupolaire au piège du fil en Z. À droite : évolution du courant dans le fil en Z ainsi que des champs magnétiques des bobines X et Y lors de la phase de compression dans le piège du fil en Z.

bobines X est diminué linéairement jusqu'à 0 G en 245 ms et le champ magnétique créé par les bobines X2 est augmenté linéairement pendant les 5 dernières millisecondes de 0 à 0,44 G. La fin du transfert est assez critique et le champ selon l'axe  $x$  a dû être soigneusement optimisé afin d'éviter que le minimum de champ magnétique ne passe trop près de zéro, ce qui entraînerait des pertes Majorana. En effet, le champ créé selon  $x$  par les barres transversales du fil en Z au niveau des atomes est très supérieur au gauss et nous utilisons les bobines X pour créer un champ magnétique selon  $x$  dans le sens opposé, afin de descendre le minimum du champ magnétique total aux alentours de 1 à 2 G. En revanche le champ selon  $x$  créé par les fils en U au niveau des atomes est de l'ordre de quelques centaines de milligauss et il est nécessaire d'ajouter un champ uniforme selon  $x$  dans le même sens, afin de monter le minimum de champ magnétique aux alentours de 1 G, ce que permet de faire la paire de bobines X2. Une fois cette optimisation effectuée, on parvient à transférer la quasi totalité des atomes du piège en Z au piège de la puce.

**Deuxième phase de compression et d'évaporation** - On comprime ensuite de nouveau le piège en montant le champ des bobines Y, puis on effectue une rampe d'évaporation finale qui permet d'obtenir un condensat de Bose-Einstein. Les paramètres de ces dernières étapes peuvent varier selon le piège final et le nombre d'atomes avec lesquels on souhaite travailler. Dans les données présentées sur la figure 3.3, on a monté le champ des bobines Y jusqu'à 23 G et on a effectué la rampe d'évaporation finale en 500 ms jusqu'à une fréquence finale de

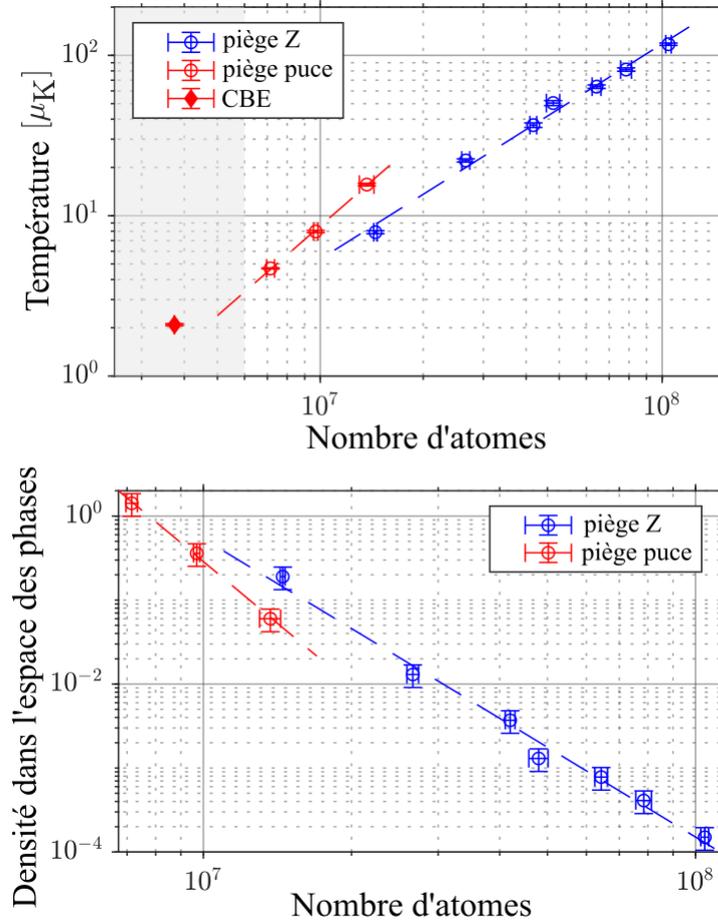


**Figure 3.2** – Évolution des courants dans le fil en Z (haut), des champs magnétiques des bobines X, Y et X2 (milieu) et du courant dans le fil DC100 et les fils en U (bas) pendant le transfert du piège en Z vers le piège magnétique de la puce.

1 MHz – le fond du puits de potentiel du piège se trouvant à 650 kHz.

### 3.1.2 Comparaison de la situation avant et après reconstruction de l'expérience

On peut comparer les chiffres avant et après reconstruction de l'expérience. Avant reconstruction de l'expérience, lorsqu'on rapprochait le nuage d'atomes de la puce, on observait des pertes à partir d'un champ d'environ 35 G dans les bobines Y, ce qui correspondait à un gradient transverse de  $190 \text{ G.cm}^{-1}$ . Actuellement, on observe des pertes à partir d'un champ  $B_Y \simeq 55 \text{ G}$  correspondant à un gradient transverse de  $350 \text{ G.cm}^{-1}$ . La réduction de l'épaisseur du fil en Z a donc permis que les pertes par collision sur la surface de la puce apparaissent à des champs  $B_Y$  beaucoup plus élevés, c'est-à-dire pour des nuages bien plus compressés. On peut aussi comparer les situations au moment du début du refroidissement par évaporation dans le piège du fil en Z. Avant reconstruction on commençait le refroidissement avec  $7,5 \cdot 10^7$  atomes à une température de  $113 \mu\text{K}$ . Le champ magnétique des bobines Y valait 42 G, ce qui correspond à un gradient transverse d'environ  $250 \text{ G.cm}^{-1}$ . Actuellement, le refroidissement



**Figure 3.3** — Graphique supérieur : évolution de la température en fonction du nombre d’atomes au cours du refroidissement par évaporation. La première rampe d’évaporation, qui se fait dans le piège en Z (points bleus), démarre à une fréquence de 20 MHz et se termine à une fréquence de 3 MHz et dure 6 s. La deuxième rampe d’évaporation se fait dans le piège de la puce (points rouges). Elle dure 500 ms et se termine à une fréquence de 1 MHz. Pour le dernier point le nuage est condensé. Dans le piège en Z, la variation de la température avec le nombre d’atomes se fait en  $T \propto N^{1,34}$ , tandis que dans la piège de la puce on a  $T \propto N^{1,86}$  ce qui montre un refroidissement plus efficace dans le piège de la puce. Les températures ont été évaluées en mesurant la taille du nuage thermique selon l’axe vertical après 15 ms de temps de vol. La mesure sur chaque point a été répétée quatre à cinq fois, ce qui permet d’en déduire des incertitudes statistiques sur  $T$  et  $N$ . Graphique inférieur : évolution de la densité dans l’espace des phases en fonction du nombre d’atomes au cours du refroidissement par évaporation. La densité dans l’espace des phases est calculée numériquement grâce aux simulations du champ magnétique de l’expérience (annexe B) et l’incertitude est évaluée à 30%.

commence avec  $10^8$  atomes à une température de  $115 \mu\text{K}$ , ce qui est comparable à la situation précédente. Cependant, le champ magnétique des bobines Y vaut maintenant 101 G et le

gradient transverse  $780 \text{ G.cm}^{-1}$ , on a donc un volume du piège bien plus petit, ce qui permet d'atteindre des taux de collision suffisants pour permettre un refroidissement efficace. On voit d'ailleurs en comparant les figures 2.22 et 3.3 que lors de l'évaporation, la température diminuait en  $N^{0,5}$  avant le changement du fil en Z. On perdait alors beaucoup d'atomes pour un refroidissement limité. On a maintenant  $T \propto N^{1,3}$  : la température diminue donc plus vite que le nombre d'atomes.

### 3.1.3 Condensat de Bose-Einstein

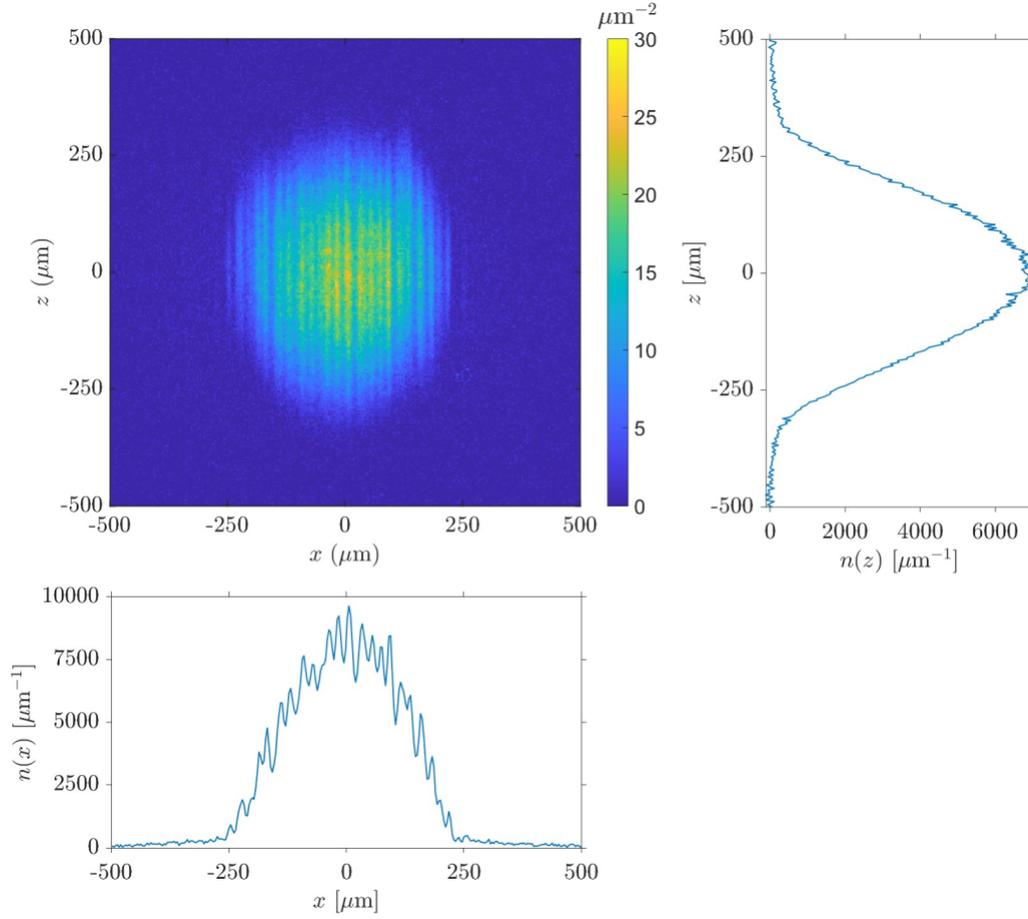
On présente sur la figure 3.4 une image du condensat de Bose-Einstein, obtenue après la procédure de refroidissement par évaporation décrite précédemment, pour une fréquence finale de la rampe d'évaporation de 750 kHz. Le fond du puits de potentiel se trouve à une fréquence de 650 kHz. Cette image est obtenue par la technique d'imagerie par absorption, décrite au paragraphe 2.2 du chapitre 2. Elle a été prise après un temps de vol  $t_v = 10 \text{ ms}$  et le nombre d'atomes total est de  $2,6 \cdot 10^6$ . On distingue des ailes thermiques sur les profils intégrés. En ajustant ces profils avec un modèle bimodal on trouve que la fraction condensée est d'environ 90%. Par ailleurs, on peut estimer la température en ajustant les ailes thermiques du profil intégré  $n(z)$  par une fonction gaussienne d'écart-type  $\sigma$ . La taille selon cet axe au moment de la coupure du piège est négligeable par rapport à la taille après temps de vol et on a donc  $\sigma^2 \simeq k_B T t_v^2 / m$ . On trouve une température  $T \simeq 0,9 \mu\text{K}$ .

Initialement le nuage d'atomes est très allongé dans la direction  $x$ , avec des fréquences d'oscillation transverses  $\nu_\perp = 3,2 \text{ kHz}$  très supérieures à la fréquence d'oscillation longitudinale qui vaut  $\nu_x = 18 \text{ Hz}$  (voir paragraphe suivant). Lorsqu'on coupe le piège, l'énergie d'interaction entraîne une expansion beaucoup plus rapide selon les directions transverses que selon la direction longitudinale [117], ce qui accentue l'inversion d'ellipticité, avec un nuage qui est plus long selon l'axe  $z$  que selon  $x$  après 10 ms de temps de vol.

Les modulations de densité qu'on observe selon la direction  $x$  sur le nuage et qu'on retrouve sur le profil de densité  $n(x)$  sont causées par les fluctuations de phase initiales pour le nuage dans le piège, comme expliqué dans le chapitre 1 au paragraphe 1.1.3. Ces modulations de densité après temps de vol, causées par les fluctuations de phase dans des pièges très allongés, ont été initialement observées dans [98] et étudiées plus en détails dans [99, 118]. Pour ces données nous sommes cependant toujours dans la limite du régime de Thomas-Fermi tridimensionnel car le nombre d'atomes dans la fraction condensée  $N \simeq 2,3 \cdot 10^6$  est assez élevé. Le potentiel chimique tridimensionnel évalué à l'aide de l'équation (1.35) vaut en effet  $\mu_{3D}^{\text{TF}} = h \times 30 \text{ kHz} \gg h \times \nu_\perp$ .

Sur la figure 3.5 on montre une image de condensat obtenu dans le même piège mais avec une fréquence d'évaporation finale inférieure, à 715 kHz, donc un nombre d'atomes plus petit et une température plus basse. Sur cette image on a  $1,8 \cdot 10^5$  atomes et on n'arrive plus à distinguer les ailes thermiques. Dans ces conditions on observe que les franges causées par les fluctuations de phase sont moins contrastées, car le nuage d'atomes est plus froid. Nous verrons en effet au paragraphe 3.5 que les fluctuations de phase peuvent être utilisées pour déterminer la température à travers la longueur de cohérence thermique [119].

Notons qu'il est aussi possible de faire des condensats de Bose-Einstein directement dans le piège en Z, sans transférer les atomes vers le piège magnétique de la puce, en effectuant une seule rampe d'évaporation qui se termine à une fréquence plus basse. Les premiers condensats sur l'expérience ont d'ailleurs été obtenus pour des atomes dans le piège en Z.

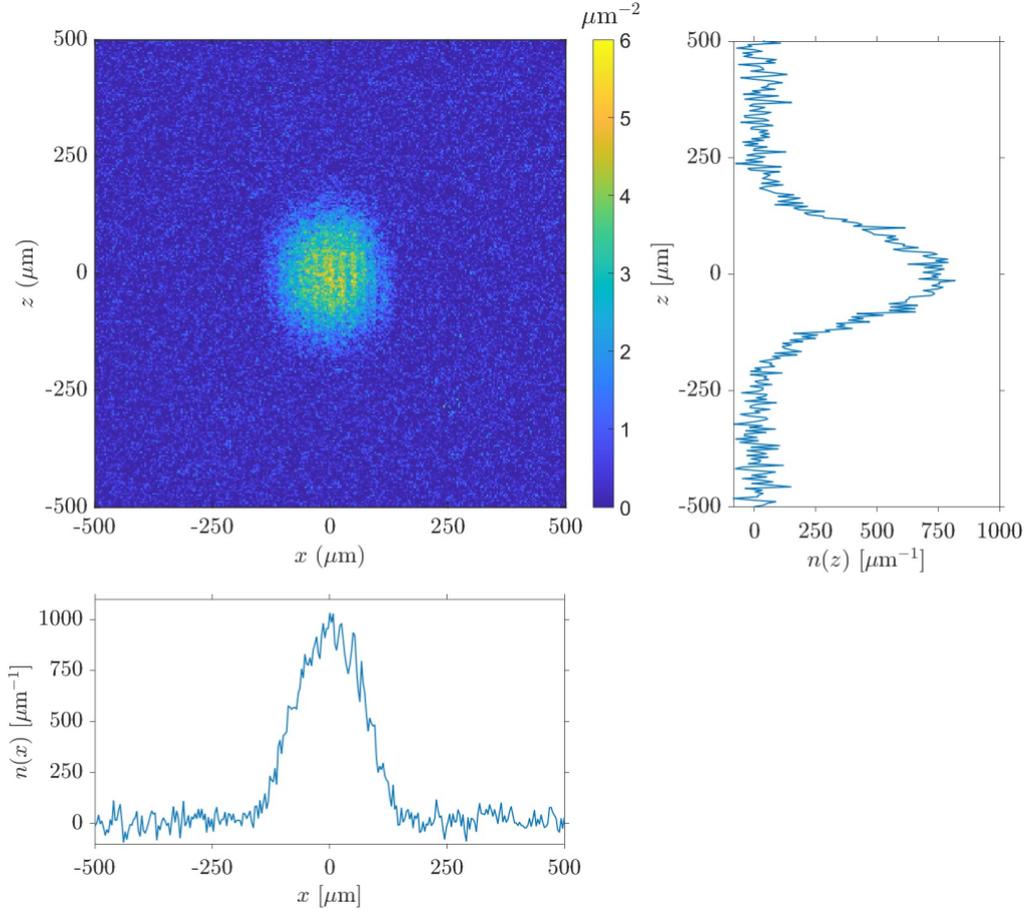


**Figure 3.4** – Condensat de Bose-Einstein, obtenu par imagerie par absorption, avec l’objectif de grandissement 1,8 après un temps de vol de 10 ms. Le nombre d’atomes est de  $2,6 \cdot 10^6$  atomes avec une fraction condensée de 90%. Les fréquences d’oscillation dans le piège sont  $\nu_{\perp} = 3,2$  kHz et  $\nu_x = 18$  Hz. On a aussi représenté les profils de densité  $n(x)$  et  $n(z)$  intégrés selon deux directions de l’espace.

## 3.2 Fréquences d’oscillation dans le piège de la puce

Pour accéder au régime unidimensionnel, il est nécessaire d’atteindre des fréquences d’oscillation transverses importantes (plusieurs kilohertz) pour avoir  $\hbar\omega_{\perp} > k_B T$  et  $\hbar\omega_{\perp} > \mu_{1D}$ . Une fois le condensat de Bose-Einstein obtenu nous avons donc effectué des mesures de fréquences d’oscillation transverses et longitudinales afin de caractériser le piège magnétique créé par la puce.

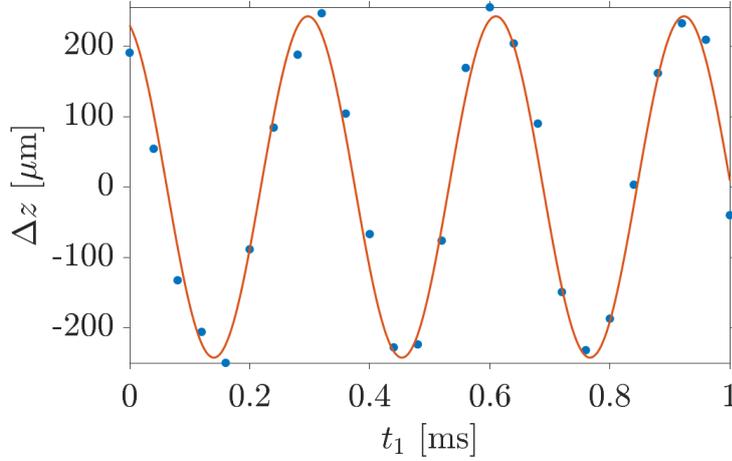
Pour mesurer la fréquence d’oscillation transverse du piège, on excite le mode dipolaire en effectuant une excitation percussionnelle : on modifie brusquement le courant dans le fil de piégeage DC100, ce qui crée des oscillations du centre de masse du condensat dans le piège. Après temps de vol et en supposant que le déplacement dans le piège est négligeable par rapport à celui durant le temps de vol, la position du centre de masse du condensat est décalée verticalement d’une distance  $\Delta z = v_z(t_1) \times t_v$  par rapport à la position verticale après



**Figure 3.5** — Condensat de Bose-Einstein, obtenu après un temps de vol de 10 ms, dans le même piège que pour la figure 3.4 mais avec une fréquence finale d'évaporation de 715 kHz. Le nombre d'atomes est de  $1,8 \cdot 10^5$ .

temps de vol sans excitation, avec  $v_z$  la vitesse verticale,  $t_1$  le temps auquel on coupe le piège et  $t_v$  la durée du temps de vol. Si l'excitation est suffisamment faible pour que les atomes restent dans la partie harmonique du potentiel, la fréquence d'oscillation transverse du piège est alors égale à la fréquence du déplacement vertical  $\Delta z$  en fonction du temps  $t_1$  où on coupe le piège. On a représenté sur la figure 3.6 un exemple de mesure de fréquence d'oscillation transverse, qui correspond au piège dans lequel se trouvaient les condensats pour les images du paragraphe précédent 3.4 et 3.5. Pour cet exemple on trouve une fréquence d'oscillation transverse  $\nu_\perp = (3,19 \pm 0,02)$  kHz. La fréquence d'oscillation transverse estimée avec la formule du modèle naïf (2.18) du paragraphe 2.3.1 dans ces conditions vaut  $\nu_\perp = 3,4$  kHz, ce qui est en assez bon accord avec la fréquence mesurée. L'amplitude de déplacement après temps de vol est de  $\Delta z_{\max} = 240 \mu\text{m}$ , ce qui correspond à une amplitude d'oscillation du condensat dans le piège de  $\delta z = \Delta z_{\max} / (\omega_\perp \times t_v) = 0,66 \mu\text{m} \ll \Delta z_{\max}$ . Le déplacement vertical dans le piège est donc bien négligeable par rapport à celui lors du temps de vol. Par ailleurs, la taille sur laquelle le piège est harmonique est de l'ordre de  $B_{\min} / b'_\perp \simeq 6 \mu\text{m}$ . L'hypothèse d'un déplacement des atomes dans la partie harmonique du piège est donc bien respectée.

Nous avons aussi effectué des mesures de la fréquence d'oscillation longitudinale. Les

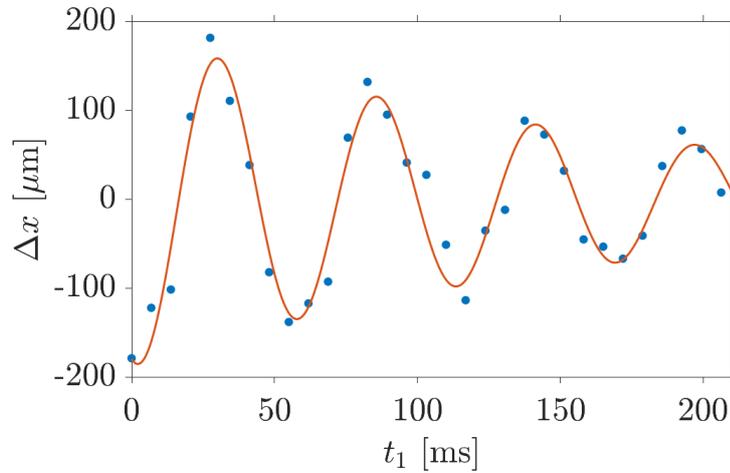


**Figure 3.6** — Mesure d’une fréquence d’oscillation transverse du piège de la puce avec un courant de 1,4 A dans le fil DC100, un champ magnétique  $B_Y = 23$  G et un minimum de champ magnétique à 0,93 G. On a créé une excitation dipolaire transverse en montant le courant du fil DC100 de 1,39 A à 1,4 A en 100  $\mu\text{s}$  et on a pris des images après 18 ms de temps de vol. On mesure une fréquence  $\nu_{\perp} = (3,19 \pm 0,02)$  kHz pour le déplacement du centre de masse après temps de vol, en ajustant une fonction sinusoïdale. L’amplitude de déplacement vertical après temps de vol vaut  $\Delta z_{\text{max}} = 240$   $\mu\text{m}$ .

quatre fils en U étant connectés en série sur la même alimentation, on ne peut pas les utiliser pour exciter le mode dipolaire selon la direction longitudinale. En effet, une modification du courant dans les fils en U entraîne un effet symétrique pour la norme du champ magnétique selon  $x$ . On peut moduler le courant dans les fils en U autour de leur valeur moyenne pour effectuer du chauffage paramétrique sur un gaz thermique froid, proche de la condensation. Cela entraîne un élargissement du nuage après temps de vol pour une modulation à une fréquence correspondant au double de la fréquence d’oscillation longitudinale. Cette méthode que nous avons utilisées dans un premier temps est cependant assez imprécise.

Nous pouvons en fait tirer partie du défaut d’alignement selon  $x$  entre le piège quadrupolaire et le piège de la puce pour exciter un mode dipolaire, ce qui permet de déterminer plus précisément la fréquence d’oscillation longitudinale. On montre un exemple d’excitation du mode dipolaire longitudinal sur la figure 3.7, dans le même piège que celui utilisé pour les figures 3.4, 3.5 et 3.6. Pour faire cette mesure on a initialement alimenté les bobines qui créent le champ magnétique quadrupolaire avec 0,25 A, correspondant à un gradient de champ  $b' \simeq 0,2$  G.cm $^{-1}$ , ce qui permet de déplacer le centre du nuage selon l’axe longitudinal  $x$ . On éteint ensuite brutalement le piège quadrupolaire. Le condensat oscille alors selon l’axe  $x$  dans le piège et on a mesuré le déplacement du centre de masse du condensat  $\Delta x$  après 10 ms de temps de vol en fonction du temps auquel on coupe le piège  $t_1$ . En ajustant une courbe sinusoïdale amortie on trouve une fréquence d’oscillation du déplacement du nuage de  $(18,0 \pm 0,3)$  Hz, correspondant à la fréquence d’oscillation longitudinale du piège.

Au cours de ma thèse nous avons typiquement travaillé avec des fréquences d’oscillation transverses allant de 1 kHz à 7 kHz et des fréquences d’oscillation longitudinales comprises entre 10 et 20 Hz. Pour les plus grandes fréquences d’oscillation transverses utilisées nous voyons une déformation du potentiel longitudinal, appelée rugosité, qui est discutée au para-



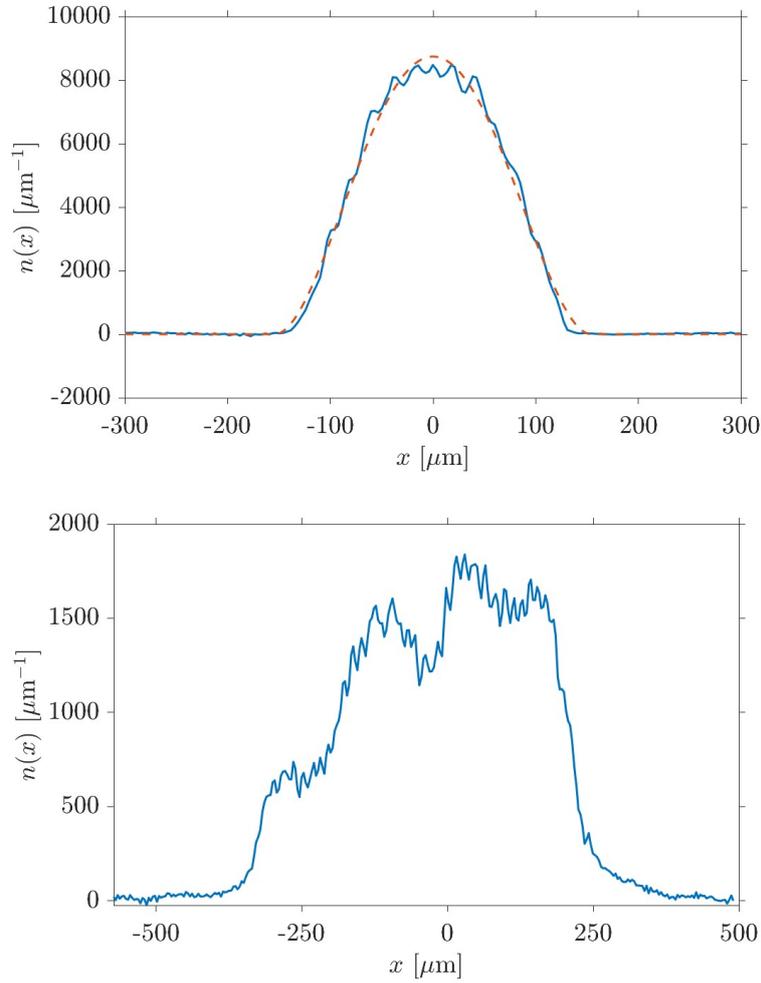
**Figure 3.7** – Mesure d’une fréquence d’oscillation longitudinale par excitation du mode dipolaire. Cette excitation est créée par la coupure brutale des bobines du quadrupole, initialement alimentées par un courant de 0,25 A. On trace le déplacement du centre du masse du condensat  $\Delta x$  après un temps de vol de 20 ms en fonction du temps auquel on coupe le piège  $t_1$ . On a ajusté le signal avec une fonction sinusoïdale amortie qui donne une fréquence d’oscillation  $\nu_x = (18,0 \pm 0,3)$  Hz.

graphe suivant.

### 3.3 Rugosité du potentiel

Pour travailler à des fréquences d’oscillation transverses élevées, il faut que les atomes soient piégés à des distances proches du fil DC100. En effet, on a  $\nu_{\perp} \propto 1/r^2$ , avec  $r$  la distance entre les atomes et le fil DC100, comme nous l’avons vu au paragraphe 2.3.1. Ainsi, pour un courant de 1,4 A dans le fil DC100 et un minimum de champ magnétique à 1 G on trouve une distance  $r = 222 \mu\text{m}$  pour une fréquence d’oscillation transverse  $\nu_{\perp} = 1$  kHz et  $r = 78 \mu\text{m}$  pour une fréquence d’oscillation transverse  $\nu_{\perp} = 8$  kHz. Cette proximité entre les atomes et le fil qui permet de les piéger peut entraîner une rugosité du potentiel magnétique, causée par les défauts du fil [120]. Le courant n’est en effet pas parfaitement orienté selon l’axe longitudinal  $x$ , ce qui crée un petit champ magnétique selon  $x$ . Le potentiel selon l’axe longitudinal est alors déformé par rapport au cas idéal harmonique. Plus nous travaillons près du fil DC100 qui piège les atomes, plus la rugosité est importante. Ainsi, sur la figure 3.8 on a représenté des profils longitudinaux d’un condensat, après un temps de vol de 5 ms, pour deux fréquences d’oscillation transverses différentes :  $\nu_{1\perp} = 1,1$  kHz et  $\nu_{2\perp} = 7,7$  kHz. Dans les deux cas on a fait la moyenne sur 15 images afin de limiter les modulations de densité, causées par les fluctuations de phase. Pour  $\nu_{1\perp} = 1,1$  kHz on observe un assez bon accord avec le profil attendu pour un potentiel harmonique, tandis que pour  $\nu_{2\perp} = 7,7$  kHz il y a une forte déformation du profil longitudinal, causée par la rugosité du potentiel. L’extension du gaz est aussi beaucoup plus importante, ce qui est attendu à cause des interactions entre atomes. La déformation peut être telle qu’on observe une fragmentation du nuage d’atomes, qui n’est plus connexe. On montre un exemple sur la figure 3.9.

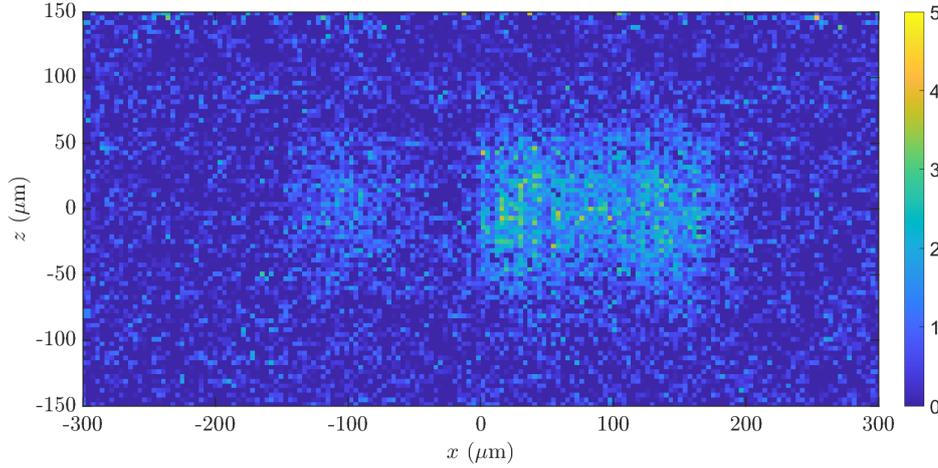
Des solutions pour supprimer la rugosité du potentiel en modulant le courant des fils



**Figure 3.8** – Profils longitudinaux de condensats de Bose-Einstein, après un temps de vol de 5 ms, moyennés sur 15 répétitions de l’expérience, pour un courant dans le fil DC100 de 1,4 A. Pour le graphique du haut le champ magnétique des bobines Y vaut  $B_Y = 13,5$  G et la fréquence transverse  $\nu_{1\perp} = 1,1$  kHz. En pointillés rouges on a ajusté une fonction  $f(x) \propto (1 - (x/R_x)^2)^2$  qui correspond au profil longitudinal attendu dans le cas d’un potentiel harmonique en faisant l’approximation de Thomas-Fermi. Pour le graphique du bas on a  $B_Y = 39$  G et  $\nu_{2\perp} = 7,7$  kHz. Le profil du nuage d’atomes est très déformé par rapport au profil attendu dans le cas d’un potentiel harmonique.

à quelques dizaines de kilohertz ont été mises en œuvre, comme dans l’article [121]. Pour réaliser cette suppression de la rugosité il est nécessaire de moduler à la fois le courant dans le fil qui piège les atomes et le champ magnétique uniforme transverse. Contrairement à l’expérience de [121], où le champ magnétique uniforme transverse est créé par des fils sur la puce, nous générons ce champ avec des bobines, qui ont une inductance trop grande pour pouvoir effectuer une modulation suffisamment rapide.

Nous prévoyons à terme de remplacer le confinement longitudinal harmonique par un potentiel de type boîte, en utilisant un potentiel optique créé par un laser désaccordé vers le bleu. L’utilisation d’une matrice de micro-miroirs devrait permettre de corriger en partie



**Figure 3.9** – Fragmentation du nuage d’atomes. Cette image a été prise après 5 ms de temps de vol. Le piège magnétique est le même que celui de l’image de droite de la figure 3.8, avec 1,4 A dans le fil DC100,  $B_Y = 39$  G et  $\nu_{2\perp} = 7,7$  kHz. Le nombre d’atomes a été divisé par 40 par rapport aux données de la figure précédente et vaut  $N = 1,8 \cdot 10^4$  ce qui permet d’observer la séparation du nuage d’atomes en deux parties disjointes.

la rugosité du potentiel longitudinal magnétique avec un potentiel optique à l’effet opposé, comme ce qui a été fait dans l’article [122].

### 3.4 Calibration du nombre d’atomes

Pour quantifier le nombre d’atomes grâce à l’imagerie par absorption, il est nécessaire de connaître la section efficace  $\sigma$ , qui caractérise l’interaction entre le faisceau d’imagerie et les atomes. On a en effet vu au paragraphe 2.2 du chapitre 2 que la densité d’atomes intégrée selon l’axe de l’imagerie  $y$  vaut :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n(x, y, z) dy = \frac{1}{\sigma} \ln \left[ \frac{I_0(x, z)}{I_{at}(x, z)} \right] \quad (3.1)$$

avec  $I_0(x, z)$  l’intensité du faisceau en l’absence d’interaction avec les atomes et  $I_{at}(x, z)$  l’intensité pour un faisceau à résonance avec les atomes. Nous utilisons initialement la section efficace à résonance  $\sigma_0 = 3\lambda_0^2/2\pi = 1,657 \cdot 10^{-9}$  cm<sup>2</sup>, avec  $\lambda_0 = 589$  nm la longueur d’onde de la transition. Cependant, nous nous sommes aperçus que les rayons de Thomas-Fermi longitudinaux mesurés sur les condensats n’étaient pas en accord avec les nombres d’atomes estimés.

Dans la limite de l’approximation de Thomas-Fermi pour un gaz dans le régime tridimensionnel, le profil longitudinal du condensat de Bose-Einstein in situ intégré selon les directions  $y$  et  $z$  est de la forme :

$$n(x) \propto \left[ 1 - \left( \frac{x}{R_x} \right)^2 \right]^2 \quad (3.2)$$

où  $R_x$  est le rayon de Thomas-Fermi, introduit au paragraphe 1.1.1 du chapitre 1. En utilisant

les équations (1.33) et (1.35) on trouve :

$$R_x = \frac{\bar{\omega}^{3/5}}{\omega_x} \left( \frac{\hbar}{m} \right)^{2/5} (15Na)^{1/5} \quad (3.3)$$

avec  $N$  le nombre d'atomes,  $a$  la longueur de diffusion et  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_y \omega_z)^{1/3}$  la moyenne géométrique des pulsations du piège. Après un temps de vol  $t_v$ , le nuage se dilate et le rayon de Thomas-Fermi est donné par

$$R_x(t_v) = \lambda_x(t_v) R_x(0). \quad (3.4)$$

Dans le cas où  $\nu_\perp \gg \nu_x$  on a [117] :  $\lambda_x(\tau) = 1 + \epsilon^2 [\tau \arctan \tau - \ln \sqrt{1 + \tau^2}] + O(\epsilon^4)$ , où on a posé  $\tau = 2\pi\nu_\perp t_v$  et  $\epsilon = \nu_x/\nu_\perp$ .

On déduit des équations (3.3) et (3.4) :

$$N = \frac{1}{15a\bar{\omega}^3} \left( \frac{m}{\hbar} \right)^2 \left( \frac{\omega_x R_x(t_v)}{\lambda_x(t_v)} \right)^5. \quad (3.5)$$

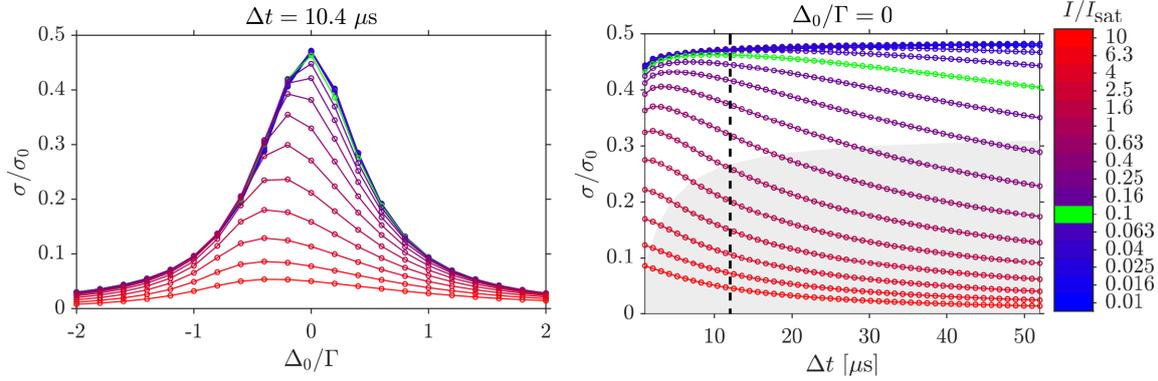
En mesurant les fréquences d'oscillation du piège ainsi que le rayon de Thomas-Fermi longitudinal après temps de vol, on peut donc estimer le nombre d'atomes  $N$ . Pour faire ce type de mesure nous avons pris soin de nous placer dans des pièges pour lesquels  $\nu_\perp \leq 3$  kHz, afin de limiter les problèmes de rugosité du potentiel, et un nombre d'atomes de l'ordre de  $10^6$  pour être dans la limite 3 dimensions. Cette méthode est assez imprécise car  $N \propto R_x^5$  : une petite erreur sur le rayon de Thomas-Fermi peut donner une erreur importante sur  $N$ , nous effectuons donc une quinzaine de répétitions pour faire cette mesure afin de limiter les incertitudes. Nous trouvons, après optimisation des paramètres de l'imagerie, que le nombre d'atomes estimé en mesurant le rayon de Thomas-Fermi est de l'ordre de 2,5 fois plus grand que celui qu'on trouve en considérant une section efficace égale à  $\sigma_0$ . Autrement dit, on trouve une section efficace effective  $\sigma \simeq 0,4 \sigma_0$ .

Afin de mieux comprendre cet écart ainsi que les performances de notre imagerie par absorption, Aurélien Perrin a résolu les équations de Bloch optiques, en prenant en compte les 24 niveaux électroniques mis en jeu pour la raie  $D_2$ . En effet, la structure du sodium est plus complexe qu'un simple système à deux niveaux, d'autant plus que les écarts d'énergie entre les niveaux hyperfins de l'état excité ne sont pas très grands devant la largeur naturelle de la raie  $\Gamma = 2\pi \times 9,80$  MHz. Nous prenons aussi en compte l'effet Doppler dû à l'absorption des photons, car le sodium est un atome assez léger et le décalage en fréquence causé par l'absorption d'un photon vaut  $\Delta_{\text{Dop}} \simeq 2\pi \times 50$  kHz, ce qui est non négligeable : après quelques centaines de diffusions des photons du faisceau d'imagerie, les atomes ne sont plus à résonance. Pour prendre en compte l'effet Doppler nous utilisons un désaccord dépendant du temps :

$$\Delta(t) = \Delta_0 - \Delta_{\text{Dop}} \int_0^t \Gamma \rho_{ee} dt \quad (3.6)$$

où  $\Delta_0$  est le désaccord du laser par rapport à la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 3$  et  $\rho_{ee} = \sum_{f'=0\dots 3} \sum_{m_{f'}=-f'}^{f'} \rho_{f',m_{f'};f',m_{f'}}$  correspond à la population totale des états excités.

Dans l'expérience les atomes sont initialement piégés dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ . Le piège magnétique est coupé et après un temps de vol de quelques millisecondes les atomes sont repompés dans l'état  $f = 2$  à l'aide d'un faisceau laser accordé sur la transition  $f = 1 \rightarrow f' = 2$ , d'une durée de l'ordre de la dizaine de microsecondes. Le faisceau repompeur est orienté selon l'axe  $x$  et polarisé circulairement (voir la configuration sur la figure 2.20 du



**Figure 3.10** – Figure de gauche : section efficace effective  $\sigma$  en unités de  $\sigma_0$ , obtenue en résolvant les équations de Bloch optiques, en fonction du désaccord  $\Delta_0$  (exprimé en unités de  $\Gamma$ ). Le temps pour l’impulsion laser du faisceau d’imagerie vaut  $10,4 \mu\text{s}$ . Figure de droite : même quantité, pour un désaccord  $\Delta_0/\Gamma = 0$ , en fonction de la durée de l’impulsion laser  $\Delta t$ . En pointillés noirs on a représenté le temps typiquement utilisé pour l’impulsion laser  $\Delta t = 12 \mu\text{s}$ . La zone grisée indique la région où le capteur de la caméra CCD est saturé. Dans les deux graphiques, les courbes correspondent à des intensités différentes (voir l’échelle d’intensités à droite).

chapitre 2). On illumine juste après le nuage d’atomes avec le faisceau d’imagerie accordé sur la transition  $f = 2 \rightarrow f' = 3$ , selon la direction  $y$  et polarisé linéairement. La durée de l’impulsion du faisceau d’imagerie utilisée est typiquement de  $12 \mu\text{s}$  et l’intensité est de l’ordre de  $0,1 I_{\text{sat}}$ . Aurélien a calculé la section efficace effective associée à cette séquence d’imagerie. Les résultats sont présentés sur la figure 3.10. On a tracé la section efficace effective  $\sigma$  en unités de  $\sigma_0$ , en fonction du désaccord pour différentes intensités et pour une durée d’impulsion du faisceau d’imagerie de  $10 \mu\text{s}$ . On a aussi représenté  $\sigma$  en fonction de la durée de l’impulsion laser, pour différentes intensités. On observe que la section efficace maximale donnée par les simulations est de l’ordre de  $\sigma \simeq 0,45 \sigma_0$  et que les paramètres utilisés sur l’expérience en termes de durée et d’intensité du laser d’imagerie sont proches des valeurs optimales. De plus on avait trouvé en mesurant les rayons de Thomas-Fermi  $\sigma \simeq 0,4 \sigma_0$ , ce qui est en relativement bon accord avec les simulations.

Ces simulations nous ont par ailleurs permis de nous apercevoir qu’il est possible de gagner un facteur deux sur la section efficace effective ( $\sigma = 0,9 \sigma_0$ ) en utilisant le faisceau repompeur et le faisceau d’imagerie selon le même axe, avec une même polarisation circulaire. Il faudra mettre en place cette amélioration sur l’expérience dans le futur.

### 3.5 Thermométrie

Dans le régime tridimensionnel et lorsque la fraction thermique n’est pas trop petite, nous déduisons la température de l’ajustement des ailes thermiques du nuage après un temps de vol. Cette méthode n’est plus adaptée à très faible température où les ailes thermiques disparaissent, ou dans le régime du quasi-condensat 1D. Il est cependant possible de déduire la température à partir des fluctuations de phase, grâce au calcul du spectre de puissance.

### 3.5.1 Spectre de puissance

On peut évaluer la température grâce aux modulations de densité sur le profil longitudinal après temps de vol, qui résultent des fluctuations de phase dans le piège. Comme nous l'avons vu au paragraphe 1.1.2 du chapitre 1, dans le régime du quasi-condensat la fonction de corrélation à une particule  $g^{(1)}(x)$  décroît exponentiellement selon  $g^{(1)}(x) = e^{-x/l_\phi}$ , avec la longueur de cohérence  $l_\phi$  reliée à la température par

$$l_\phi = \frac{n_{1D}\lambda_{dB}^2}{\pi} = \frac{2\hbar^2 n_{1D}}{mk_B T}. \quad (3.7)$$

Dans la limite unidimensionnelle, des résultats analytiques faisant le lien entre spectres de puissance des modulations de densité après temps de vol et fonctions de corrélations des systèmes initialement piégés ont été établis dans [119]. Le spectre de puissance des modulations de densité, après un temps de vol  $t_v$ , est donné par :

$$\langle |\tilde{\rho}(q)|^2 \rangle = \iint dx_1 dx_2 e^{iq(x_1 - x_2)} \langle \delta n_{1D}(x_1, t_v) \delta n_{1D}(x_2, t_v) \rangle \quad (3.8)$$

où  $\delta n_{1D}(x, t_v) = n_{1D}(x, t_v) - \langle n_{1D}(x, t_v) \rangle$ , avec  $n_{1D}(x, t_v)$  la densité du gaz intégrée selon  $y$  et  $z$  après un temps de vol  $t_v$  et  $\langle \rangle$  la moyenne sur un ensemble de réalisations dans des conditions identiques. Dans le cas d'un gaz homogène dans une boîte de taille  $L$ , on considère la grandeur intensive  $\langle |\rho(q)|^2 \rangle = \langle |\tilde{\rho}(q)|^2 \rangle / L$ , et on a alors [119, 123] :

$$\frac{\langle |\rho(q)|^2 \rangle}{n_{1D}^2} = \frac{1}{q(4 + q^2 l_\phi^2)} \left( 4ql_\phi - 4e^{-2\hbar q t_v / ml_\phi} [ql_\phi \cos(\hbar q^2 t_v / m) + 2 \sin(\hbar q^2 t_v / m)] \right). \quad (3.9)$$

On peut généraliser à un système inhomogène de densité locale  $n_{1D}(x)$  avec :

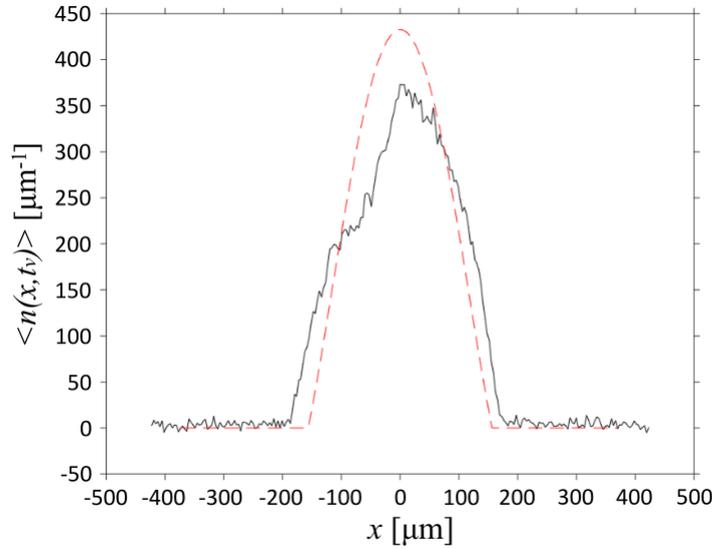
$$\langle |\tilde{\rho}(q)|^2 \rangle = \int dx \langle |\rho_{n_{1D}(x)}(q)|^2 \rangle. \quad (3.10)$$

Il est ainsi possible de trouver la température du gaz d'atomes, en calculant le spectre de puissance à partir des images du condensat après temps de vol et en ajustant la température dans le modèle pour faire correspondre les courbes expérimentales et théoriques.

### 3.5.2 Résultats expérimentaux

On peut calculer le spectre en puissance des modulations de densité sur des données expérimentales en prenant un grand nombre d'images du nuage d'atomes après temps de vol, obtenues dans les mêmes conditions, afin de pouvoir effectuer les valeurs moyennes.

Pour les résultats expérimentaux présentés dans ce paragraphe on s'est placé dans un piège de fréquence d'oscillation longitudinale  $\nu_x = 19,5$  Hz et de fréquences transverses  $\nu_\perp = 7,3$  kHz. On garde un couteau radiofréquence constant pendant 100 ms à la fin de la rampe d'évaporation, puis on coupe brusquement le champ magnétique du piège et on effectue un temps de vol de durée  $t_v = 10$  ms. On a fait à chaque fois 50 répétitions de l'expérience, pour trois fréquences différentes du couteau radiofréquence : 670 kHz, 660 kHz et 650 kHz. On a ainsi des jeux de données avec des températures et des nombres d'atomes différents. Pour traiter les données, on a exclu les images pour lesquelles le nombre d'atomes s'écartait de plus de 10% de la valeur moyenne, ce qui représente environ 20% des images. Pour la fréquence du couteau radiofréquence la plus basse, on a observé une réduction de moitié du nombre



**Figure 3.11** – Densité moyenne du nuage d’atomes  $\langle n_{1D}(x, t_v) \rangle$  selon l’axe longitudinal  $x$ , après un temps de vol  $t_v = 10$  ms et dans le cas d’un couteau radiofréquence final à 660 kHz. Pointillés rouges : densité moyenne attendue dans le cas d’un potentiel longitudinal harmonique, pour le nombre d’atomes et la fréquence d’oscillation longitudinale mesurés.

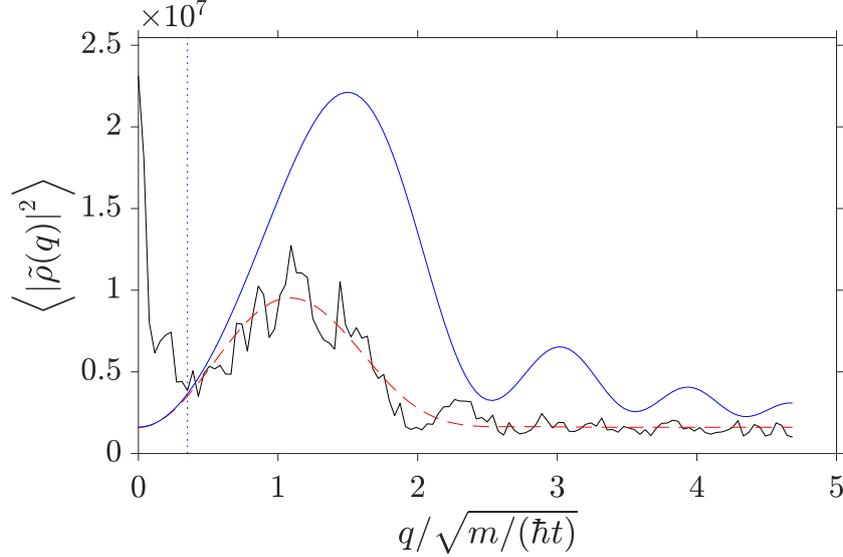
d’atomes vers le milieu de la prise de données, probablement causée par une petite variation du minimum de champ magnétique, et on a donc traité séparément les deux moitiés de données. On présente sur les figures qui suivent les résultats obtenus pour la fréquence intermédiaire de 660 kHz. Sur la figure 3.11, on a représenté la densité moyenne d’atomes  $\langle n_{1D}(x, t_v) \rangle$  après 10 ms de temps de vol. Le nombre d’atomes moyen est de  $8,2 \cdot 10^4$ . En pointillés rouges on a tracé le profil attendu pour un potentiel longitudinal harmonique. L’écart observé avec les données s’explique par la rugosité du potentiel.

Sur la figure 3.12 on a représenté le spectre de puissance obtenu à partir des données. En pointillés rouges on a fait un ajustement du modèle théorique en laissant en paramètre libre la température et en prenant en compte la résolution de l’imagerie. La largeur de la fonction d’étalement du point  $\sigma$  a été mesurée en prenant des images de mires de tailles connues et vaut  $\sigma \simeq 4,0 \mu\text{m}$ . Pour considérer la résolution de l’imagerie dans le spectre de puissance, on multiplie le spectre théorique par la fonction  $e^{-\sigma^2 q^2}$ . On trouve une température  $T \simeq 160$  nK. Dans le cas où le couteau radiofréquence était à 670 kHz on a trouvé, en effectuant le même traitement des données,  $T \simeq 470$  nK et dans le cas où le couteau était à 650 kHz on a trouvé  $T \simeq 100$  nK pour la première moitié des données et  $T \simeq 80$  nK pour la deuxième moitié.

### 3.6 Transition du régime tridimensionnel au régime unidimensionnel

Le passage entre le régime tridimensionnel et unidimensionnel est « mou » : il ne s’agit pas d’une transition brutale. Il existe donc une zone sur laquelle ni la description 1D ni la description 3D ne sont correctes. La transition entre les deux régimes a par exemple été étudiée dans l’article [102].

On rappelle que pour être strictement dans le régime unidimensionnel, on doit respecter les

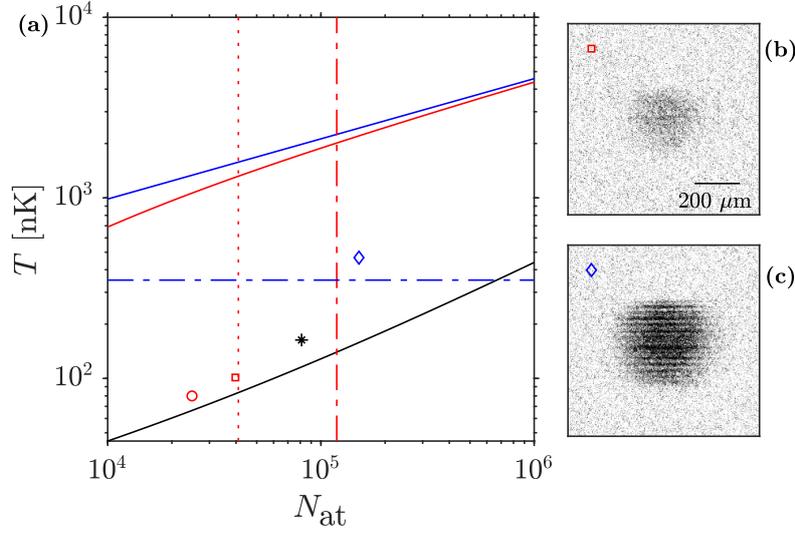


**Figure 3.12** — Ligne noire : spectre de puissance calculé sur les données expérimentales pour un couteau radiofréquence final de 660 kHz. Pointillés rouges : ajustement avec le modèle théorique en prenant en compte la résolution de l’imagerie et en commençant l’ajustement pour des nombres d’onde supérieurs à la limite en pointillés bleus. La partie exclue est due à la taille finie du système, qui peut légèrement varier d’un nuage à l’autre, ce qui engendre de grandes fluctuations à bas  $k$ . On trouve une température  $T \simeq 160$  nK. Ligne bleue : spectre de puissance correspondant au modèle théorique sans tenir compte de la résolution de l’imagerie.

critères de l’équation (1.37) afin que les atomes restent dans l’état fondamental de l’oscillateur harmonique transverse et que la dynamique transverse soit gelée. En réalité, dans la plupart des expériences de puce à atomes aucun de ces deux critères n’est parfaitement rempli [51] et on arrive plutôt à  $\mu_{1D} \sim \hbar\omega_{\perp}$  et  $k_B T \sim \hbar\omega_{\perp}$ .

Grâce aux mesures de fréquences d’oscillation du piège, de nombres d’atomes et de températures qui ont été effectuées précédemment, on peut discuter du caractère unidimensionnel des gaz d’atomes que l’on est capable de produire. Sur la figure 3.13, qui représente la température en fonction du nombre d’atomes, on a placé les points correspondant aux résultats expérimentaux du paragraphe précédent<sup>1</sup>. Pour représenter le critère d’unidimensionnalité sur la température, on a tracé en tirets bleus la température  $T_{\perp}$  pour laquelle on a  $\hbar\omega_{\perp} = k_B T$ . Pour les données correspondant au cercle rouge, avec la température et le nombre d’atomes le plus bas – donc le cas « le plus 1D » – on a mesuré une température quatre fois plus basse que  $T_{\perp}$ . Comme expliqué au paragraphe 1.1.3 du chapitre 1, on peut calculer le potentiel chimique avec l’équation (1.61), à partir des mesures du nombre d’atomes et des fréquences d’oscillation du piège. On a représenté sur la figure 3.13 en pointillés rouges le nombre d’atomes  $N_{\perp} \simeq 4 \cdot 10^4$  pour lequel on a  $\mu_{1D} = \hbar\omega_{\perp}$ , pour la géométrie du piège dans lequel on a pris les données. Pour être vraiment unidimensionnel, il faudrait travailler avec un nombre d’atomes très petit devant  $N_{\perp}$ , cependant nous sommes limités par le bruit de l’imagerie par absorption et pour avoir des images exploitables on doit travailler avec de l’ordre de  $10^4$  atomes au minimum. Il devrait être possible d’améliorer le taux de diffusion en modifiant la configuration de

1. On rappelle les fréquences d’oscillation du piège :  $\nu_x = 19,5$  Hz et  $\nu_{\perp} = 7,3$  kHz.



**Figure 3.13** – Température et nombre d’atomes mesurés dans le régime dégénéré pour différentes fréquences finales d’évaporation (cercle rouge, carré rouge, étoile noire et losange bleu) dans un piège de fréquence d’oscillation longitudinale  $\nu_x = 19,5$  Hz et de fréquences transverses  $\nu_\perp = 7,3$  kHz. La ligne bleue correspond à la température critique, calculée pour l’approximation semi-classique dans le régime 3D, en dessous de laquelle se forme un condensat de Bose-Einstein  $T_c = \hbar\bar{\omega}/k_B(N/\zeta(3))^{1/3}$  qui est valable pour  $k_B T_c \gg \hbar\bar{\omega}$  (avec  $\bar{\omega} = (\omega_x \omega_\perp^2)^{1/3}$ ) [81]. La ligne rouge représente le calcul exact de la température  $T_c$  dans la géométrie très allongée du piège. La ligne en tirets bleus correspond à la température  $T_\perp = \hbar\omega_\perp/k_B$ . La ligne en pointillés rouges indique le nombre d’atomes  $N_\perp$  pour lequel  $\mu_{1D} = \hbar\omega_\perp$  et la ligne en tirets rouges correspond à la limite  $\chi = \chi_f$  (voir texte). La ligne noire correspond à la limite où la longueur de cohérence thermique du gaz est égale au rayon longitudinal du système. Les deux images à droite sont des exemples du nuage d’atomes après un temps de vol de 10 ms obtenues par imagerie par absorption.

l’imagerie comme discuté au paragraphe 3.4. La mise en place d’une imagerie par fluorescence à l’avenir devrait aussi permettre de travailler avec moins d’atomes. Nous avons discuté dans le chapitre 1 au paragraphe 1.1.3 d’un autre critère pour établir une frontière entre les régimes 1D et 3D, introduit dans l’article [102] :  $\chi = \chi_f \simeq 3,73$ , avec  $\chi = Naa_\perp/a_x^2$ . On a tracé le nombre d’atomes correspondant à ce critère pour la géométrie du piège en tirets rouges. Les trois points avec le moins d’atomes sont à gauche de cette frontière, donc plutôt du côté unidimensionnel. Enfin, la ligne noire représente la limite pour laquelle la longueur de cohérence thermique  $l_\phi$  est égale au rayon longitudinal du gaz d’atomes  $L = a_x^2/a_\perp \sqrt{2(\mu_{1D}/\hbar\omega_\perp)}$ . Pour une longueur de cohérence thermique  $l_\phi > 2L$  on retrouverait la cohérence de phase sur la taille du système. Tous les points expérimentaux se trouvent au dessus de cette limite mais on peut remarquer que les points rouges sont plus proches de cette limite que le losange bleu, ce qui confirme l’observation qualitative selon laquelle on a moins de franges sur les nuages avec peu d’atomes que ceux avec beaucoup d’atomes.

On peut aussi calculer les paramètres  $t$  et  $\gamma$  – introduits aux équations (1.52) et (1.51) dans le chapitre 1 – associés aux données expérimentales. Ainsi, pour la situation correspondant au cercle rouge de la figure 3.13 on trouve  $t = 2\hbar^2 k_B T / (mg_{1D}^2) = 0,9 \cdot 10^3 \gg 1$  et  $\gamma =$

$mg_{1D}/(\hbar^2 n_{1D}) = 7.10^{-4} \ll 1$  pour la densité pic, avec  $g_{1D} = 2\hbar a \omega_{\perp}$  la constante de couplage 1D. En plaçant ce point sur la figure 1.1 du chapitre 1, on voit qu'on se trouve dans le régime du quasi-condensat, à la limite entre les deux sous-régimes de fluctuations thermiques et quantiques. Il faudrait diviser  $t$  par  $\sim 1000$  et gagner un facteur de l'ordre de  $\sim 1000$  sur  $\gamma$  pour atteindre le régime de forte interaction. Nous en sommes pour le moment très loin. Pour s'en approcher il faudrait à la fois diminuer grandement le nombre d'atomes, en travaillant avec de l'imagerie par fluorescence plutôt que par absorption pour pouvoir les détecter<sup>2</sup> car  $\gamma \propto 1/n_{1D}$ , mais aussi augmenter la longueur de diffusion  $a$  à l'aide d'une résonance de Feshbach, car  $\gamma \propto a$  et  $t \propto 1/a^2$ .

### 3.7 Conclusion

Ainsi, on a montré que les modifications apportées sur l'expérience, avec le changement du fil en Z, nous ont permis d'atteindre des conditions favorables à un refroidissement par évaporation efficace : on arrive maintenant à produire des condensats de Bose-Einstein. Nous nous sommes ensuite intéressés à la caractérisation des gaz d'atomes dégénérés réalisés sur notre expérience. On a notamment mesuré les fréquences d'oscillation, avec des fréquences transverses de plusieurs kilohertz tandis que la fréquence longitudinale est comprise entre 10 et 20 Hz seulement. Ces pièges magnétiques très anisotropes permettent d'atteindre le régime unidimensionnel. On a étudié les nombres d'atomes et les températures atteintes pour les gaz d'atomes sur l'expérience. On peut former des condensats de Bose-Einstein avec des nombres d'atomes relativement élevés, avec jusqu'à  $3.10^6$  atomes : on est alors dans le régime tridimensionnel. On peut aussi travailler à des nombres d'atomes et températures plus bas, avec de l'ordre de quelques  $10^4$  atomes à une centaine de nanokelvins, pour se rapprocher du régime 1D. On forme alors des quasi-condensats. L'un des objectifs de l'expérience serait d'étudier le régime de forte interaction. Pour cela, il faudrait être capable de diviser le paramètre  $t$  par un facteur  $10^3$  et de multiplier le paramètre  $\gamma$  par  $10^3$  par rapport à la situation actuelle. L'une des solutions pour se rapprocher du régime de forte interaction serait d'augmenter la longueur de diffusion  $a$ . Nous nous sommes demandés s'il était possible d'utiliser une résonance de Feshbach induite par micro-onde pour modifier la longueur de diffusion  $a$ , ce qui fait l'objet du chapitre suivant.

---

2. Sur le principe de ce qui a été fait dans l'article [124].



# Chapitre 4

## Résonances de Feshbach micro-onde

Nous avons vu au chapitre précédent que nous arrivons à produire des gaz d'atomes dégénérés (quasi) unidimensionnels, dans le régime du quasi-condensat. Afin de s'approcher du régime de forte interaction à une dimension, il semble nécessaire d'augmenter la longueur de diffusion  $a$ . Pour cela, il est possible d'utiliser des résonances de Feshbach, que nous avons introduites au paragraphe 1.2.2 du chapitre 1, car  $a$  diverge au voisinage de la résonance [55]. Ces résonances qui permettent de contrôler la longueur de diffusion constituent un outil très utile et largement utilisé dans la communauté des atomes ultrafroids [57, 125]. Elles sont usuellement induites à l'aide d'un champ magnétique statique, en couplant un état libre à deux atomes d'un canal ouvert à un état moléculaire lié d'un canal fermé, de moment magnétique différent. Dans notre expérience, nous utilisons un champ magnétique statique pour piéger les atomes, ce qui nécessite de travailler avec un minimum de champ magnétique faible, incompatible avec l'utilisation de résonances de Feshbach induites par un champ magnétique statique, de l'ordre de 1000 G pour le sodium [55]. En 2010 des travaux théoriques ont montré qu'il était possible d'utiliser un champ micro-onde pour créer des résonances de Feshbach [59]. L'une des difficultés majeure de la mise en œuvre expérimentale est d'atteindre des puissances micro-onde suffisamment importantes pour que les résonances soient d'une largeur raisonnable, afin d'être exploitables [126]. Pour atteindre ces champs micro-ondes importants, nous disposons d'un guide d'ondes coplanaire sur la puce à atomes.

Après avoir discuté des enjeux expérimentaux au paragraphe 4.1, nous présenterons le guide micro-onde coplanaire de la puce (4.2). Nous présenterons ensuite les performances de ce guide, en termes de puissances micro-onde atteintes (4.3). Nous étudierons les transitions vers les états moléculaires faiblement liés, autour desquelles se produisent les résonances de Feshbach micro-onde (4.4) et nous nous intéresserons aux pertes d'atomes (4.5) et aux déplacements lumineux induits par le champ micro-onde (4.6). Enfin, nous discuterons de la mise en évidence d'un effet sur la longueur de diffusion  $a$  (4.7). Dans ce chapitre on notera avec des minuscules ( $f, m_f, l, i\dots$ ) les nombres quantiques pour les atomes et avec des majuscules ( $F, M_F$ ) ceux associés aux molécules.

## 4.1 Enjeux expérimentaux

Nous avons introduit les résonances de Feshbach micro-onde au paragraphe 1.2.2 du chapitre 1, à partir des résultats théoriques de l'article [59] et de la thèse [62]. La difficulté à atteindre de fortes puissances pour le champ micro-onde, nécessaires pour atteindre des largeurs de résonances raisonnables, explique probablement que les travaux expérimentaux sur ce sujet sont assez récents.

On rappelle que pour le sodium, la largeur prédite pour la résonance qui couple les états  $|f = 1, m_f = 1\rangle$  et  $|f = 2, m_f = 2\rangle$  est de  $\Delta\omega/2\pi = 1,4$  kHz pour  $B_0 = 1$  G et qu'elle est proportionnelle à  $B_0^2$ , où  $B_0$  est défini par rapport au couplage de Rabi  $\Omega_R$  entre ces deux états avec :

$$\mu_B B_0 = \frac{\hbar\Omega_R}{2}. \quad (4.1)$$

On a donc une largeur de résonance de  $\Delta\omega/2\pi = 1,4$  kHz pour une fréquence de Rabi  $\Omega_R/2\pi = 2,8$  MHz. Notons pour la suite que la définition de  $B_0$  ne correspond pas à la définition usuelle de l'amplitude magnétique du champ oscillant. Si on considère un champ micro-onde polarisé  $\sigma^+$

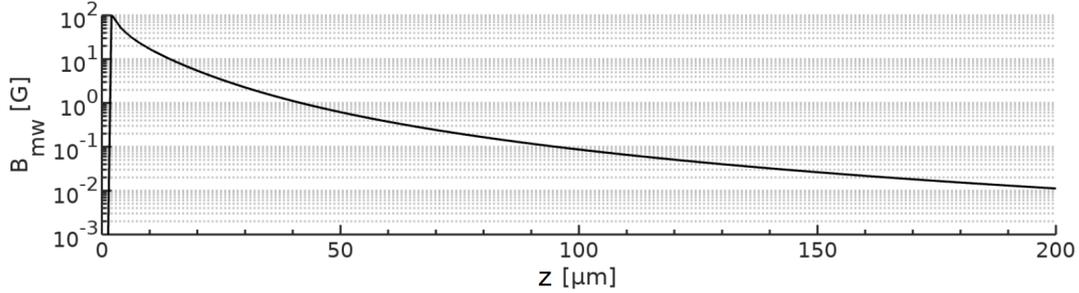
$$\mathbf{B}_{\text{mw}}(t) = \frac{1}{2}(B_+ \mathbf{e}_+ e^{-i\omega t} + \text{cc}) \quad (4.2)$$

on a pour la transition étudiée dans le cas du sodium (et du rubidium)  $B_0 = \sqrt{6}B_+/4 \simeq 0,61 B_+$  (voir la matrice de l'équation (4.13)).

Dans l'équipe condensats de Bose-Einstein du collège de France, des recherches ont été menées pour mettre en évidence les résonances de Feshbach micro-onde sur des atomes de rubidium. On peut consulter à ce sujet la thèse de Chloé Maury [127] et l'article [126]. Dans ces expériences, le champ micro-onde est rayonné par des antennes, ce qui permet d'atteindre des amplitudes  $B_{-/\pi/+} = 8/31/12$  mG pour les composantes  $\sigma^-/\pi/\sigma^+$  du champ micro-onde. Pour la résonance de Feshbach micro-onde étudiée par David Papoular, la largeur prédite vaut alors<sup>1</sup>  $\Delta\omega/2\pi = 3$  mHz. Les résonances vers les états moléculaires de l'état rovibrationnel le moins lié de la branche  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  ont été observées, grâce à des pertes d'atomes. Cependant, malgré une mesure précise de la longueur de diffusion  $a$  basée sur de l'interférométrie de Ramsey, aucune modification de  $a$  n'a été mise en évidence, car la largeur de la résonance est probablement trop petite.

Dans notre expérience, pour atteindre les fortes puissances micro-onde nécessaires à la mise en évidence des résonances de Feshbach, nous utilisons un guide d'ondes coplanaire plutôt qu'une antenne. Ce guide d'ondes se trouve directement sur la puce à atomes et permet de générer un mode de propagation guidé, qui est confiné à proximité des conducteurs. Il faut donc placer les atomes près du guide – c'est-à-dire à une distance de l'ordre de quelques dizaines de microns – pour atteindre des puissances micro-onde suffisantes. Par ailleurs, comme les atomes sont piégés magnétiquement dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  nous ne pouvons pas étudier la résonance pour la transition de  $|f = 1, m_f = 1\rangle$  vers  $|f = 2, m_f = 2\rangle$  comme dans [59]. Nous pouvons cependant travailler sur le cas symétrique de la transition de  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ , induit par une polarisation  $\sigma^-$ , qui doit donner la même largeur  $\Delta\omega$  pour la résonance.

1. Pour  $B_+ = 12$  mG on a  $B_0 = 7,3$  mG, or pour le rubidium la largeur de la résonance vaut  $\Delta\omega/2\pi = 60$  Hz pour  $B_0 = 1$  G.



**Figure 4.1** — Amplitude magnétique du champ micro-onde  $B_{\text{mw}}$  en fonction de la distance  $z$  au guide d’ondes, où  $z$  est à la verticale du milieu du conducteur central. La distribution de courant de la micro-onde est calculée par la méthode des éléments finis, avec une amplitude du courant total dans le conducteur central qui vaut 1 A. Cette figure est issue de la thèse de Joseph Seaward [64].

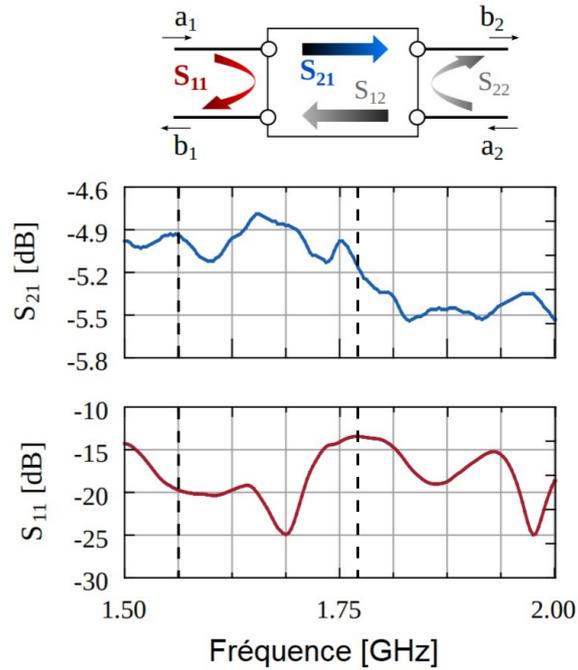
## 4.2 Guide micro-onde

Pour générer le champ micro-onde, nous utilisons un guide micro-onde coplanaire, composé de trois fils conducteurs : le cœur au centre, d’une largeur de  $6 \mu\text{m}$ , entouré de deux lignes de retour identiques d’une largeur de  $37 \mu\text{m}$ . Ces fils ont une épaisseur d’environ  $2 \mu\text{m}$  et sont séparés par une distance de  $10 \mu\text{m}$ .

La distribution de courant est antisymétrique par rapport au plan ( $yz$ ) passant par le milieu de la puce. Le champ magnétique oscillant produit par le guide d’ondes est donc orthogonal à l’axe  $x$ , selon lequel le champ magnétique statique au niveau du minimum de potentiel est orienté. En prenant ce champ statique comme axe de quantification on s’attend alors à avoir une polarisation de la micro-onde au niveau des atomes linéaire, avec des poids égaux dans les composantes  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ . La géométrie du guide d’ondes a été optimisée pour garantir une bonne transmission autour de  $\nu = 1,6 \text{ GHz}$ , en résolvant l’équation de propagation de la ligne de transmission. Les paramètres de la ligne de transmission (résistances, inductances, capacités) ont été calculés grâce à des modèles d’électrostatique et de magnétostatique. Pour estimer les amplitudes magnétiques du champ micro-onde en fonction de la distance au guide micro-onde, un calcul de la distribution de courant dans le guide d’ondes, s’appuyant sur la méthode des éléments finis, a été effectué par Romain Dubessy. On présente le résultat sur la figure 4.1, pour un courant de 1 A dans le conducteur central. À la verticale du fil central du guide d’ondes, le champ magnétique est donné par  $B(z, t) = B_{\text{mw}}(z) \cos(\omega t) \vec{e}_y$ . À  $40 \mu\text{m}$  du fil on s’attend à avoir  $B_{\text{mw}} \simeq 1 \text{ G}$  et à  $15 \mu\text{m}$  du fil on a  $B_{\text{mw}} \simeq 10 \text{ G}$ .

Nous avons effectué des mesures à l’analyseur de réseau pour déterminer les coefficients de transmission et de réflexion du guide d’ondes entre<sup>2</sup>  $1,5 \text{ GHz}$  et  $2 \text{ GHz}$ . Ces mesures sont présentées sur la figure 4.2. On observe que le coefficient de transmission  $S_{21}$  varie peu sur cette plage de  $500 \text{ MHz}$  : il est compris entre  $-5,5 \text{ dB}$  et  $-4,8 \text{ dB}$ . La puissance transmise est donc de l’ordre de  $30\%$  de la puissance incidente, en sachant que la mesure est faite entre les deux connecteurs SMA à l’extérieur de l’enceinte à vide (on ne mesure donc pas seulement les pertes dans le guide d’ondes car il y a aussi les câbles coaxiaux qui relient les connecteurs à

2. La fréquence de la transition atomique entre les niveaux hyperfins de l’état fondamental  $f = 1$  et  $f = 2$  du sodium vaut  $1,77 \text{ GHz}$  et celle de la transition vers l’état moléculaire le moins lié de la branche  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  est à  $1,56 \text{ GHz}$ .



**Figure 4.2** – Mesure des coefficients de répartition (appelés paramètres S pour « scattering ») à l’analyseur de réseau, sur une plage de fréquence comprise entre 1,5 et 2 GHz. Le paramètre  $S_{21}$  correspond au rapport entre l’amplitude du signal transmis  $b_2$  et celle du signal incident  $a_1$  (pour  $a_2 = 0$ ). Le paramètre  $S_{11}$  est le rapport entre l’amplitude du signal réfléchi  $b_1$  et celle du signal incident  $a_1$  (pour  $a_2 = 0$ ). En pointillés on a représenté les fréquences des transitions vers l’état moléculaire le moins lié de  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  à 1,56 GHz et vers l’état atomique  $f = 2$  à 1,77 GHz.

vide aux sous-puces et les connexions entre les sous-puces et la puce qui peuvent induire des pertes). Le coefficient de réflexion  $S_{11}$  est inférieur à -13 dBm : moins de 5% de la puissance est réfléchi.

Nous utilisons comme source micro-onde le modèle SMC100A de Rhode & Schwarz. Le signal micro-onde est envoyé dans un amplificateur 10 W avant de traverser le guide d’ondes et de finir dans un bouchon  $50 \Omega$ . Un atténuateur variable et un commutateur sont positionnés entre la source et l’amplificateur. Deux coupleurs, placés avant et après le guide micro-onde, permettent de prélever une petite partie de la puissance afin de les mesurer à l’aide de détecteurs (voir schéma détaillé sur la figure 4.3). À puissance maximale (puissance de saturation de l’amplificateur) on mesure  $P_1 = 9,3 \text{ W}$  sur le premier détecteur et  $P_2 = 1,2 \text{ W}$  sur le deuxième détecteur. On observe des pertes plus importantes que sur la mesure à l’analyseur de réseau mais il est difficile de conclure, car il y a des câbles coaxiaux et des connexions supplémentaires entre les deux coupleurs par rapport à la mesure à l’analyseur de réseau. En supposant qu’on a une adaptation d’impédance  $R \simeq 50 \Omega$  on peut estimer l’amplitude du courant  $I = \sqrt{2P/R}$  au niveau du premier coupleur à 610 mA et celui au niveau du deuxième coupleur à 220 mA, ce qui donne un ordre de grandeur du courant dans le guide d’ondes. On a aussi effectué des mesures de l’élévation de la résistance du conducteur central du guide, causée par le chauffage. En effet, le conducteur central est très fin ( $6 \mu\text{m} \times 2 \mu\text{m}$ )

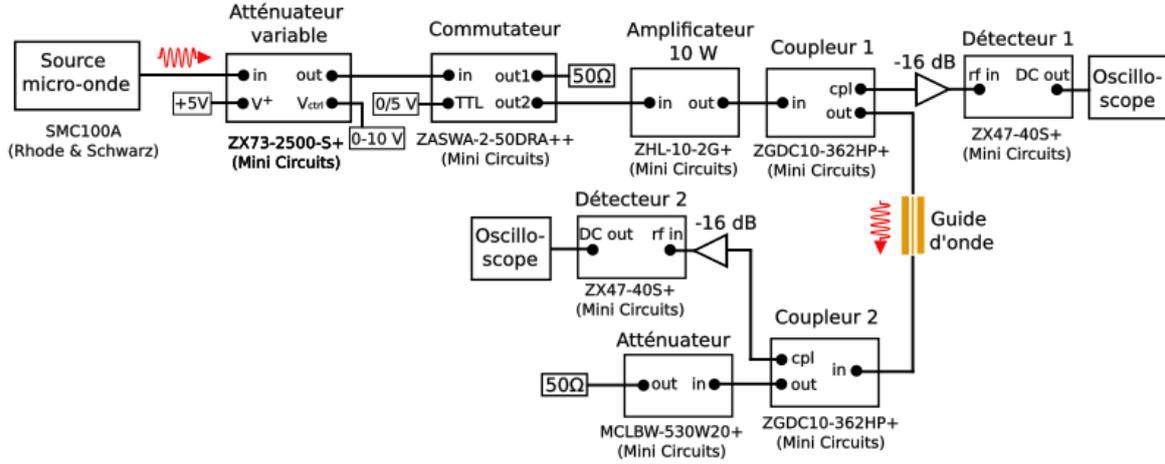


Figure 4.3 – Schéma détaillé de la chaîne micro-onde.

et sa résistance est donc assez grande ( $21,6 \Omega$ ). En envoyant la micro-onde à pleine puissance pendant 1 s toutes les 30 s, on a observé une élévation de la résistance qui se stabilise à +4% par rapport à la résistance initiale<sup>3</sup>, ce qui correspond à une élévation de température de seulement  $11^\circ\text{C}$  en moyenne. Nous ne sommes donc pas limités par le chauffage des fils et on pourrait utiliser un amplificateur plus puissant si besoin.

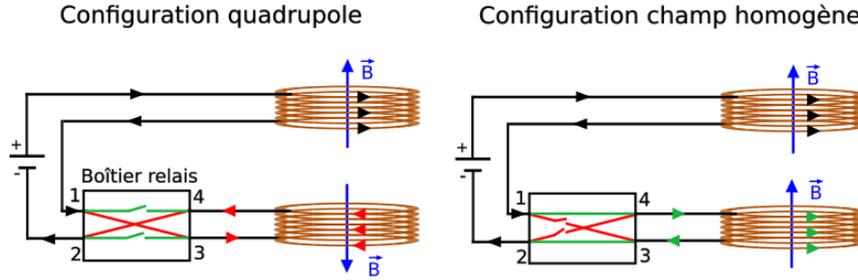
### 4.3 Calibration de l'amplitude micro-onde et optimisation de la position des atomes

Dans cette partie, nous expliquons comment il est possible de rapprocher le centre du piège magnétique du guide micro-onde, afin d'augmenter la puissance micro-onde au niveau des atomes. Nous effectuons ensuite des oscillations de Rabi entre les états  $f = 1$  et  $f = 2$ , qui permettent de mesurer la force du couplage de Rabi  $\Omega$ , proportionnelle à l'amplitude magnétique de la micro-onde [67].

#### 4.3.1 Rapprocher les atomes du guide d'ondes

Nous avons vu que pour atteindre des amplitudes micro-onde qui permettent d'obtenir des largeurs raisonnables pour la résonance de Feshbach – c'est-à-dire supérieures au kilohertz – il faut placer les atomes au maximum à quelques dizaines de microns du guide d'ondes. Pour déplacer le piège magnétique vers le guide d'ondes, nous utilisons un champ magnétique homogène supplémentaire selon la direction verticale  $z$ . En effet, le centre du guide d'ondes se trouve à une distance de  $130 \mu\text{m}$  du fil DC100 selon  $y$ . Les atomes sont initialement piégés sur une ligne parallèle au fil DC100 (selon  $x$ ), à une centaine de microns à la verticale de celui-ci, grâce à un champ magnétique homogène selon l'axe  $y$  (voir figure 2.7 pour le principe du piège). On peut faire tourner le centre du piège autour du fil DC100 en changeant l'orientation du champ homogène dans le plan  $(yz)$ . En utilisant deux champs homogènes orientés selon les axes  $y$  et  $z$  il est donc possible de contrôler à la fois l'angle qui repère la position du piège

3. Pour faire cette mesure on a ajouté deux « bias tee » avant et après le guide d'ondes et on mesure la résistance avec un ohmmètre entre les deux ports de courant continu.



**Figure 4.4** – Passage de la configuration anti-Helmholtz (champ quadrupolaire) à la configuration Helmholtz (champ homogène) à l’aide d’un boîtier comportant quatre relais électromécaniques qui servent d’interrupteurs. On commute les relais deux par deux afin d’inverser le sens du courant dans la bobine du bas.

par rapport au fil DC100, en ajustant le rapport entre les deux composantes  $y$  et  $z$  du champ homogène total, ainsi que la distance au fil DC100 en jouant sur l’amplitude du champ magnétique total dans le plan  $(yz)$ . On peut donc complètement contrôler la position du nuage d’atomes et le placer aussi près du guide d’ondes que l’on souhaite. Pour créer ce champ magnétique homogène selon  $z$  on utilise les bobines du piège quadrupolaire de l’enceinte puce, en passant d’une configuration anti-Helmholtz à une configuration Helmholtz. Pour cela, on utilise un boîtier avec quatre relais électromécaniques (modèle LEV100A4ANG), qui permet de changer l’orientation du courant dans la bobine inférieure (voir figure 4.4). On appellera désormais ce champ magnétique  $\vec{B}_z$ . Lorsqu’elles sont parcourues par un courant de 1 A ces bobines produisent un champ magnétique de 11,3 G (voir annexe A).

La coupure du courant de cette bobine se faisait initialement à l’aide d’un Mosfet supportant une tension maximale de 100 V et d’une diode de roue libre pour éviter les surtensions (voir annexe D de la thèse [63]). Le temps de coupure du courant était de l’ordre de 10 ms. Nous y avons ajouté une résistance de 4,9 k $\Omega$  et deux diodes transil 39 V en série sur le modèle du circuit de la figure 2.16, ce qui permet de couper un courant de 5 A en 100  $\mu$ s environ.

### 4.3.2 Théorie sur les oscillations de Rabi

Afin de mesurer les amplitudes magnétiques de l’onde micro-onde et d’optimiser la position des atomes, on a réalisé des oscillations de Rabi entre les deux niveaux hyperfins de l’état fondamental  $f = 1$  et  $f = 2$ . Il est en effet possible d’utiliser un champ micro-onde produit par un guide d’ondes coplanaire, dont la fréquence est égale à la différence d’énergie entre deux états des niveaux  $f = 1$  et  $f = 2$ , afin d’effectuer une manipulation cohérente entre ces états, comme dans l’article [128].

Le phénomène d’oscillations de Rabi apparaît dans un système à deux niveaux lorsqu’on couple deux états  $|f\rangle$  et  $|e\rangle$  à l’aide d’un champ (magnétique ou électrique) oscillant sinusoidalement au cours du temps, à une fréquence  $\omega/2\pi$ , qui crée un potentiel de la forme :

$$\hat{V}(t) = \frac{\hbar\Omega}{2} e^{-i\omega t} |e\rangle\langle f| + \text{h.c.} \quad (4.3)$$

Dans le cas d’un couplage magnétique on a  $\hat{V}(t) = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_{\text{osc}}$ , où  $\vec{\mu}$  est le moment magnétique et  $\vec{B}_{\text{osc}}$  correspond à la composante magnétique du champ oscillant. On a donc  $\Omega \propto B_{\text{osc}}$ . En

partant d'un état où toute la population est dans l'état  $|f\rangle$  et en appliquant le champ oscillant pendant une durée  $t$  on trouve que la population de chaque état oscille sinusoidalement en opposition de phase, avec :

$$P_e(t) = \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} t}{2} \right) \quad (4.4)$$

$$P_f(t) = 1 - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 + \delta^2} \sin^2 \left( \frac{\sqrt{\Omega^2 + \delta^2} t}{2} \right) \quad (4.5)$$

où  $\delta/2\pi$  est la différence entre la fréquence du champ et la fréquence de la transition entre les deux états. À résonance, la fréquence d'oscillations de Rabi vaut donc  $\Omega/2\pi$ .

La structure hyperfine de l'état fondamental des atomes de sodium est en réalité plus complexe qu'un simple système à deux niveaux. En effet, l'état  $f = 1$  se sépare en trois états de projection de spin  $m_f = -1, 0$  et  $1$  et l'état  $f = 2$  se sépare en cinq états avec  $m_f = -2, -1, 0, 1$  et  $2$ . Nous rappelons que nous travaillons avec un champ magnétique statique non nul de l'ordre du gauss, orienté selon l'axe  $x$ , qui lève la dégénérescence en énergie de ces niveaux par effet Zeeman. L'hamiltonien qui décrit l'atome de sodium dans son état fondamental en présence d'un champ magnétique statique  $\mathbf{B}_s$  et d'un champ micro-onde  $\mathbf{B}_{mw}$  peut s'écrire comme la somme de deux termes :

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_{hf} + \hat{H}_B(t) \quad (4.6)$$

avec

$$\hat{H}_{hf} = \frac{\hbar\omega_{hf}}{2} \frac{\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}}}{\hbar^2} \quad (4.7)$$

$$\hat{H}_B(t) = \frac{\mu_B}{\hbar} \left( g_j \hat{\mathbf{j}} + g_i \hat{\mathbf{i}} \right) \cdot (\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_{mw}(t)) \quad (4.8)$$

où  $\hat{\mathbf{i}}$  est l'opérateur de spin nucléaire,  $\hat{\mathbf{j}}$  est l'opérateur de spin électronique total,  $g_i$  le facteur de Landé nucléaire,  $g_j$  le facteur de Landé électronique,  $\omega_{hf} \simeq 2\pi \times 1771,6$  MHz la fréquence de la transition entre les deux niveaux hyperfins et  $\mu_B$  le magnéton de Bohr. Comme nous travaillons à des champs magnétiques tels que  $\mu_B B$  est très petit devant l'énergie séparant les niveaux hyperfins on a :

$$\hat{H}_B(t) \simeq \frac{\mu_B}{\hbar} g_f \hat{\mathbf{f}} \cdot (\mathbf{B}_s + \mathbf{B}_{mw}(t)) \quad (4.9)$$

avec  $\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$  et le facteur de Landé hyperfin :  $g_f = -1/2$  pour  $f = 1$  et  $g_f = +1/2$  pour  $f = 2$ . Nous considérons un champ statique orienté selon  $x$ , qui définit l'axe de quantification, conformément à l'expérience :  $\mathbf{B}_s = B_s \mathbf{e}_x$ .

L'expression la plus générale du champ micro-onde s'écrit :

$$\mathbf{B}_{mw}(t) = B_x \cos(\omega t + \phi_x) \mathbf{e}_x + B_y \cos(\omega t + \phi_y) \mathbf{e}_y + B_z \cos(\omega t + \phi_z) \mathbf{e}_z, \quad (4.10)$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\mathbf{B}_{mw}(t) = \frac{1}{2} \left[ \left( B_x e^{-i\phi_x} \mathbf{e}_x + B_y e^{-i\phi_y} \mathbf{e}_y + B_z e^{-i\phi_z} \mathbf{e}_z \right) e^{-i\omega t} + \text{c.c.} \right]. \quad (4.11)$$

Dans la base standard, définie par les vecteurs  $\mathbf{e}_\pi = \mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_+ = -(\mathbf{e}_y + i\mathbf{e}_z)/\sqrt{2}$  et  $\mathbf{e}_- = (\mathbf{e}_y - i\mathbf{e}_z)/\sqrt{2}$ , on a :

$$\mathbf{B}_{\text{mw}}(t) = \frac{1}{2} [(B_\pi \mathbf{e}_\pi + B_+ \mathbf{e}_+ + B_- \mathbf{e}_-) e^{-i\omega t} + \text{c.c.}] \quad (4.12)$$

où  $B_\pi = B_x e^{-i\phi_x}$ ,  $B_+ = (-B_y e^{-i\phi_y} + iB_z e^{-i\phi_z})/\sqrt{2}$  et  $B_- = (B_y e^{-i\phi_y} + iB_z e^{-i\phi_z})/\sqrt{2}$  correspondent aux composantes  $\pi$ ,  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  du champ micro-onde. On peut éliminer la variation rapide due à la structure hyperfine en introduisant l'opérateur unitaire  $\hat{U}_{\text{hf}}(t) = \exp(-i\omega t \hat{H}_{\text{hf}}/\hbar\omega_{\text{hf}})$ . En se plaçant dans le référentiel tournant et en négligeant les termes dépendant du temps (approximation du champ tournant) on obtient pour l'hamiltonien total :

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hat{U}_{\text{hf}}^\dagger \hat{H} \hat{U}_{\text{hf}} - i\hbar \hat{U}_{\text{hf}}^\dagger \frac{d\hat{U}_{\text{hf}}}{dt} \simeq \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -5\delta + 2\delta_s & 0 & 0 & \sqrt{6}\Omega_- & \sqrt{3}\Omega_\pi^* & \Omega_+^* & 0 & 0 \\ 0 & -5\delta & 0 & 0 & \sqrt{3}\Omega_-^* & 2\Omega_\pi^* & \sqrt{3}\Omega_+^* & 0 \\ 0 & 0 & -5\delta - 2\delta_s & 0 & 0 & \Omega_-^* & \sqrt{3}\Omega_\pi^* & \sqrt{6}\Omega_+^* \\ \sqrt{6}\Omega_- & 0 & 0 & 3\delta - 4\delta_s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3}\Omega_\pi & \sqrt{3}\Omega_- & 0 & 0 & 3\delta - 2\delta_s & 0 & 0 & 0 \\ \Omega_+ & 2\Omega_\pi & \Omega_- & 0 & 0 & 3\delta & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}\Omega_+ & \sqrt{3}\Omega_\pi & 0 & 0 & 0 & 3\delta + 2\delta_s & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6}\Omega_+ & 0 & 0 & 0 & 0 & 3\delta + 4\delta_s \end{pmatrix}. \quad (4.13)$$

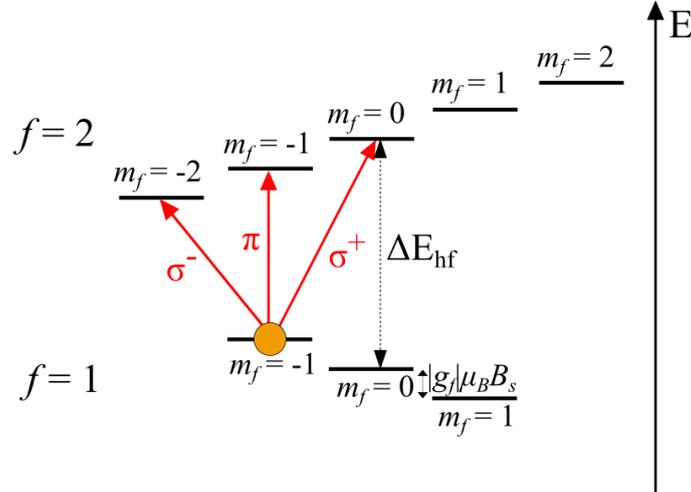
La matrice est exprimée dans la base  $\{|f=1, m_f=-1\rangle, |f=1, m_f=0\rangle, |f=1, m_f=1\rangle, |f=2, m_f=-2\rangle, \dots, |f=2, m_f=2\rangle\}$ . On a posé  $\delta = (\omega_{\text{hf}} - \omega)/4$ ,  $\delta_s = |g_f|\mu_B B_s/\hbar$  et  $\Omega_{\pi,+,-} = -|g_f|\mu_B B_{\pi,+,-}/\hbar$ .

Les termes hors diagonaux de  $\hat{H}_{\text{eff}}$  correspondent aux pulsations de Rabi des transitions entre les deux états hyperfins associés [68]. Dans notre expérience les atomes sont initialement piégés dans l'état  $|f=1, m_f=-1\rangle$  et on peut induire trois transitions vers les états  $|f=2, m_f=-2\rangle$  via la polarisation  $\sigma^-$ ,  $|f=2, m_f=-1\rangle$  via la polarisation  $\pi$  et  $|f=2, m_f=0\rangle$  via la polarisation  $\sigma^+$  (voir figure 4.5). Pour  $f=2$  on a  $g_f = +1/2$  : aucun de ces trois états n'est donc piégé magnétiquement. Les trois pulsations de Rabi associées à ces transitions sont :

$$\begin{cases} \Omega_{R-} = \sqrt{6}|\Omega_-| = \sqrt{6}|g_f\mu_B B_-|/\hbar \\ \Omega_{R\pi} = \sqrt{3}|\Omega_\pi| = \sqrt{3}|g_f\mu_B B_\pi|/\hbar \\ \Omega_{R+} = |\Omega_+| = |g_f\mu_B B_+|/\hbar \end{cases} \quad (4.14)$$

### 4.3.3 Résultats expérimentaux pour les oscillations de Rabi

Sur la figure 4.6, nous présentons le résultat de la spectroscopie micro-onde pour les trois transitions. On a effectué une impulsion micro-onde de 200  $\mu\text{s}$  à faible puissance (7 mW en sortie de l'amplificateur). On a ensuite attendu 20 ms pour que les atomes transférés dans  $|f=2, m_f=-2, -1, 0\rangle$  tombent car aucun de ces états n'est piégé magnétiquement, puis on a pris l'image des atomes restés dans  $|f=1, m_f=-1\rangle$ . On observe une diminution du nombre d'atomes pour trois fréquences différentes, correspondant aux trois transitions attendues. En effet sur ces données, le minimum de champ magnétique statique, où sont piégés les atomes, vaut  $B_{\text{min}} \simeq 1,0 \text{ G}$ , ce qui correspond à une fréquence  $\nu_{\text{min}} = |g_f|\mu_B B \simeq 700 \text{ kHz}$ . Sous l'effet

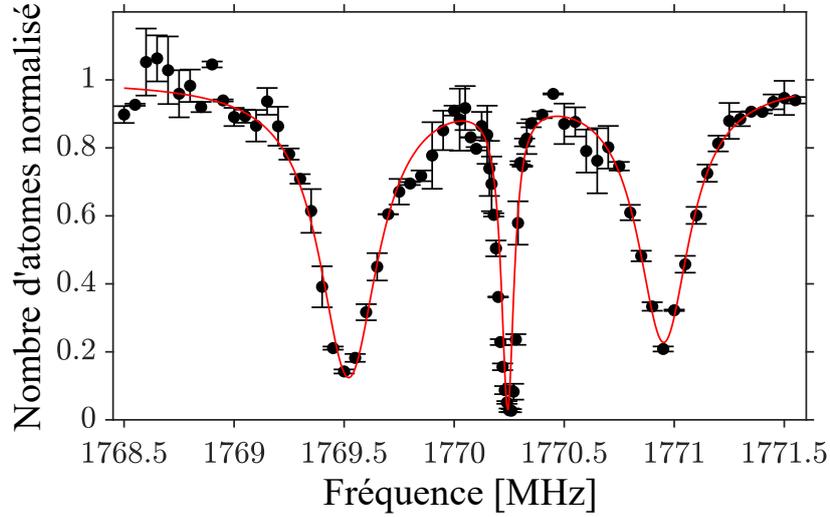


**Figure 4.5** – Niveaux d'énergie pour les deux états hyperfins  $f = 1$  et  $f = 2$  de l'état fondamental du sodium, en présence d'un champ magnétique statique de norme  $B_s$ . Les états  $|f = 1, m_f = 0\rangle$  et  $|f = 2, m_f = 0\rangle$ , insensibles au champ magnétique au premier ordre, sont séparés par l'énergie de la transition hyperfine  $\Delta E_{\text{hf}} = h \times 1771,626$  MHz. Les niveaux de  $m_f$  voisins sont séparés d'une énergie  $|g_f| \mu_B B_s$  sous l'effet Zeeman. On peut coupler l'état initial  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  aux trois états  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ ,  $|f = 2, m_f = -1\rangle$  et  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  d'après les règles de sélection.

Zeeman, la fréquence de la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  vaut  $\nu_- = \nu_{\text{hf}} - 3\nu_{\text{min}}$ , celle de la transition vers  $|f = 2, m_f = -1\rangle$  vaut  $\nu_\pi = \nu_{\text{hf}} - 2\nu_{\text{min}}$  et celle de la transition vers  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  vaut  $\nu_+ = \nu_{\text{hf}} - \nu_{\text{min}}$ , où  $\nu_{\text{hf}} = \Delta E_{\text{hf}}/h = 1771,626$  MHz est la fréquence de la transition hyperfine en l'absence de champ magnétique. La polarisation du champ micro-onde est principalement linéaire et orthogonal à  $x$ , mais un petit angle résiduel entre l'axe du champ magnétique statique et la normale à la polarisation suffit pour qu'on observe la transition  $\pi$ . Cette raie est cependant bien plus fine que les deux autres, ce qui témoigne d'un couplage moins fort. En effet on observe une largeur à mi hauteur de l'ordre de 70 kHz pour la transition associée à la polarisation  $\pi$ , contre environ 300 kHz pour celles associées à  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$ . L'élargissement Fourier causé par la durée finie de l'impulsion micro-onde vaut 5 kHz, ce qui est petit devant les largeurs des raies. Une autre source d'élargissement est l'inhomogénéité du champ magnétique. La fréquence de résonance varie de  $\alpha\mu$  entre le centre du nuage et sa surface extérieure, avec  $\alpha = 1$  pour la transition  $\sigma^+$ ,  $\alpha = 2$  pour la transition  $\pi$  et  $\alpha = 3$  pour la transition  $\sigma^-$ . Le potentiel chimique  $\mu$  est de l'ordre de 20 kHz et les largeurs qu'on trouve pour les transitions  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$  sont donc grandes devant  $\alpha\mu$ . L'élargissement pour ces raies est principalement dû au couplage Rabi.

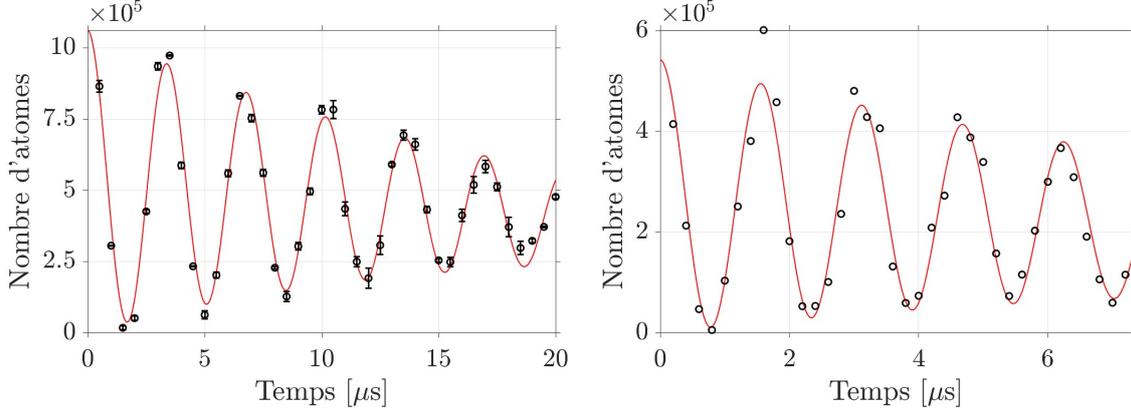
Une fois que les fréquences des transitions vers les états de  $f = 2$  ont été mesurées par spectroscopie, on se place à résonance d'une transition pour effectuer des oscillations de Rabi. Pour cela, on applique une impulsion micro-onde dont on fait varier la durée, puis on attend quelques millisecondes que les atomes qui ont été transférés dans  $f = 2$  s'échappent du piège et on prend une image des atomes qui sont restés dans  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ <sup>4</sup>. Pour

4. On peut de façon symétrique faire une mesure directement après avoir appliqué la micro-onde sans faisceau repompeur et en échangeant l'ordre des images pour mesurer le nombre d'atomes dans  $f = 2$



**Figure 4.6** – Spectroscopie micro-onde pour les transitions  $|f = 1, m_f = -1\rangle \rightarrow |f = 2, m_f = -2, -1, 0\rangle$ . La puissance de la micro-onde après l’amplificateur vaut 7 mW et la durée de l’impulsion micro-onde est de 200  $\mu\text{s}$ . La transition vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  se fait via la polarisation  $\sigma^-$  et se trouve à une fréquence d’environ 1769,50 MHz, celle vers  $|f = 2, m_f = -1\rangle$  se fait via la polarisation  $\pi$  et se trouve à une fréquence d’environ 1770,25 MHz et celle vers  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  se fait via la polarisation  $\sigma^+$  et se trouve à une fréquence d’environ 1770,95 MHz. Pour chaque point de fréquence on a répété deux fois l’expérience ce qui donne une idée des fluctuations statistiques (barres d’erreur). On a ajusté ces données par une fonction avec trois pics lorentziens.

voir des oscillations de Rabi, il faut travailler à des fréquences de Rabi suffisamment grandes pour que les atomes n’aient pas le temps d’être éjectés du piège au cours de l’impulsion. En effet, dans le cas le moins favorable de la transition vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ , le minimum du champ magnétique est antipiégeant pour les atomes, avec des fréquences deux fois plus grandes que les fréquences d’oscillation du piège. Il faut donc travailler à une fréquence de Rabi grande devant la fréquence d’oscillation transverse du piège, qui est de l’ordre de 4 kHz. Par ailleurs, le champ magnétique statique n’est pas homogène sur la taille du condensat. On a en effet une variation de l’énergie potentielle magnétique entre le centre du condensat et sa surface extérieure égale au potentiel chimique  $\mu_{3D} \simeq h \times 20 \text{ kHz}$ . Ainsi, dans le cas le moins favorable de la transition vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$ , la fréquence de la résonance varie de  $3\mu_{3D}/h$  entre le centre du nuage et sa surface extérieure, ce qui entraîne une perte de cohérence sur les oscillations de Rabi. Pour limiter cette perte de cohérence il faut travailler avec une fréquence de Rabi suffisamment grande devant  $\mu/h$ . En revanche, pour que l’approximation du système à deux niveaux soit correcte il faut que les fréquences de Rabi soient inférieures à l’écart en fréquence entre les transitions, pour ne pas coupler vers les autres niveaux. Nous avons en effet observé, en résolvant numériquement l’évolution des populations des états au cours du temps, qu’à grande puissance micro-onde la fréquence des oscillations est différente des fréquences de Rabi attendues, à cause de ce couplage vers les autres états. Pour un fond du puits de 1 G on a un écart de fréquence de 1,4 MHz entre les transitions associées aux polarisations  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$  (la composante  $\pi$  étant très petite devant les autres elle entraîne une



**Figure 4.7** – Figure de gauche : oscillations de Rabi à résonance de la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = 0\rangle$ , induite par la polarisation  $\sigma^+$ , pour un piège situé à une distance estimée à  $23\ \mu\text{m}$  du centre du guide d'ondes et une puissance en sortie de l'amplificateur de  $20\ \text{mW}$ . En effectuant un ajustement des données avec la fonction de l'équation (4.15) on trouve une fréquence d'oscillations de Rabi  $\Omega_{R+}/2\pi = 294(2)\ \text{kHz}$ . Figure de droite : oscillations de Rabi à résonance de la transition vers l'état  $|f = 1, m_f = -2\rangle$ , induite par la polarisation  $\sigma^-$ , obtenu dans le même piège et à la même puissance. On trouve  $\Omega_{R-}/2\pi = 642(1)\ \text{kHz}$ .

perturbation négligeable sur les mesures des fréquences de Rabi  $\Omega_{R-}$  et  $\Omega_{R+}$ ).

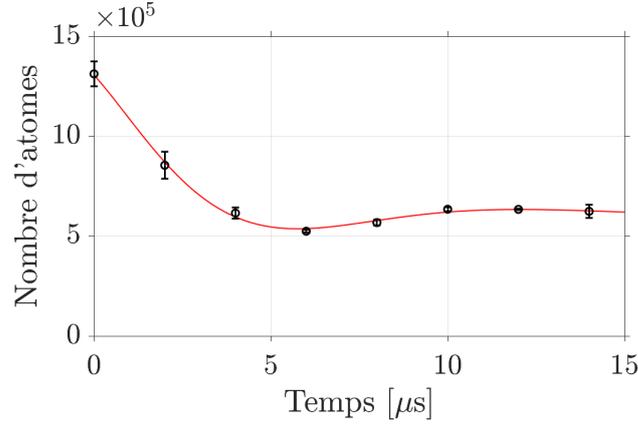
Sur la figure 4.7 on montre des exemples de mesure de fréquences de Rabi pour les transitions associées aux polarisations  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ , obtenues dans les mêmes conditions à faible puissance micro-onde. Pour ces données, on a rapproché les atomes à une distance  $d = 23\ \mu\text{m}$  du guide d'ondes grâce à un champ homogène selon  $z$  comme expliqué au paragraphe 4.3.1. On a ajusté les données avec une fonction :

$$f(\alpha, \beta, \Omega_R) = e^{-\alpha t} N_0 \left[ e^{-\beta t} \cos(\Omega_R t) + 1 \right] / 2 \quad (4.15)$$

qui permet de prendre en compte à la fois la décohérence et les pertes d'atomes. On trouve pour les fréquences de Rabi  $\Omega_{R+}/2\pi = 294(2)\ \text{kHz}$  qui correspond à une amplitude magnétique  $|B_+| = 420\ \text{mG}$  et  $\Omega_{R-}/2\pi = 642(1)\ \text{kHz}$  qui correspond à une amplitude magnétique  $|B_-| = 374\ \text{mG}$ . Notons qu'avec la configuration du guide d'ondes on s'attendait à avoir  $|B_+| = |B_-|$  or on a  $|B_+| \simeq 1,12 \times |B_-|$ . Il y a donc un léger écart par rapport à la polarisation attendue.

Nous avons aussi essayé de mesurer des fréquences de Rabi pour la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = -1\rangle$  induite par la polarisation  $\pi$ , afin de connaître l'amplitude relative du champ par rapport aux polarisations  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ . Cependant, la composante  $\pi$  est très faible par rapport aux deux autres composantes, ce qui rend la mesure compliquée. Sur les données présentées sur la figure 4.8 nous avons monté le minimum de champ magnétique du piège à  $6,7\ \text{G}$ , afin d'éloigner les fréquences de résonance des deux autres transitions, et nous avons monté la puissance micro-onde après amplificateur à  $200\ \text{mW}$ . On observe une « demi oscillation » très amortie (reproductible), avec une fréquence d'oscillation estimée à environ  $69\ \text{kHz}$ . Selon cette estimation la composantes  $|B_\pi|$  serait de l'ordre de 20 fois plus petite que  $|B_{+,-}|$ .

Pour rapprocher les atomes du guide d'ondes, afin d'atteindre des puissances micro-onde suffisantes pour observer des résonances de Feshbach, nous avons joué sur les champs ma-

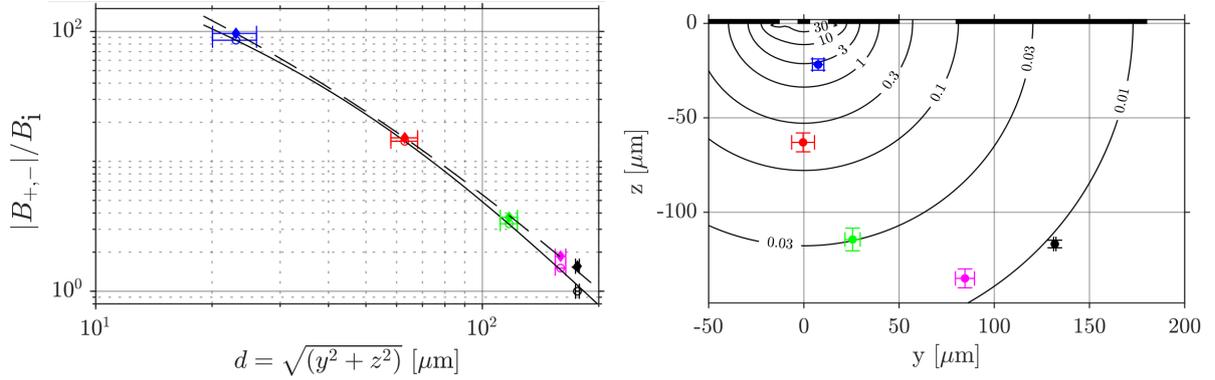


**Figure 4.8** – (Tentative de) mesure d’oscillations de Rabi pour la transition  $|f = 1, m_f = -1\rangle \rightarrow |f = 2, m_f = -1\rangle$  induite par la polarisation  $\pi$ . Le piège se trouve à une distance  $d \simeq 23 \mu\text{m}$  du guide d’ondes, avec un minimum de champ magnétique de 6,7 G et la puissance micro-onde après l’amplificateur vaut environ 200 mW. En ajustant les données avec la fonction de l’équation (4.15) on trouve  $\Omega_{R\pi} \simeq 2\pi \times 69 \text{ kHz}$ .

gnétiques homogènes selon les axes  $y$  et  $z$ . Sur la figure 4.9, nous présentons les amplitudes magnétiques du champ micro-onde  $|B_-|$  et  $|B_+|$  mesurés pour différentes positions du nuage d’atomes et normalisées par  $B_i = |B_-|$  pour la position initiale (en noir). Initialement les atomes sont piégés à la verticale du fil DC100, à une distance de  $132 \mu\text{m}$  de la puce et  $176 \mu\text{m}$  du milieu du guide d’ondes, grâce à un champ magnétique  $B_Y = 23 \text{ G}$  (point noir sur la figure). Pour atteindre la position finale, en bleu sur la figure, on a diminué linéairement le champ magnétique  $B_Y$  de 23 G à 5 G et on augmente linéairement le champ  $B_Z$  de 0 G à 23 G. On a pris des données pour des champs intermédiaires de ces rampes (en magenta, vert et rouge sur la figure).

Pour faire ce graphique, on a mesuré les fréquences de Rabi  $\Omega_{R-}/2\pi$  et  $\Omega_{R+}/2\pi$  en réduisant la puissance micro-onde à mesure que le nuage se rapproche du guide d’ondes, afin d’avoir des fréquences de Rabi suffisamment grandes pour observer des oscillations cohérentes mais inférieures à l’écart en fréquence entre les deux transitions pour ne pas créer de couplage vers l’autre niveau, ce qui fausserait la mesure. Pour mettre les données sur le même graphique, on les a représentées pour une amplitude magnétique de la micro-onde en sortie de l’amplificateur constante, en multipliant  $|B_{+,-}|$  par  $\sqrt{P_{\text{mw}}^0/P_{\text{mw}}}$ , où  $P_{\text{mw}}^0$  est la puissance micro-onde après l’amplificateur pour la position initiale. Dans le tableau 4.1, on donne les données brutes des mesures qui ont permis de tracer la figure 4.9.

D’après le modèle, l’amplitude magnétiques de la micro-onde est censée décroître en  $1/d$  à proximité du guide et en  $1/d^3$  à plus grande distance, avec  $d$  la distance des atomes au guide d’ondes. Nous avons représenté une interpolation entre ces deux lois sur la figure 4.9. Notons cependant que le modèle prévoyait un point d’inflexion à une distance  $d \simeq 20 \mu\text{m}$  et que l’interpolation sur les données expérimentales donne l’inflexion à une distance  $d \simeq 50 \mu\text{m}$ . Entre la position initiale et la position finale, on gagne un facteur presque 100 sur  $|B_-|$ , donc  $10^4$  sur la puissance micro-onde et sur la largeur prédite pour la résonance de Feshbach. À la position finale (point bleu) pour une puissance micro-onde après amplificateur de 18 dBm (63 mW) on a mesuré  $\Omega_{R-}/2\pi = 1,13 \text{ MHz}$ . À puissance maximale on a environ 40 dBm (10 W) après l’amplificateur, ce qui correspondrait donc à  $\Omega_{R-}/2\pi \simeq 14 \text{ MHz}$ , soit une largeur



**Figure 4.9** – Figure de gauche : amplitudes magnétiques de la micro-onde  $|B_-|$  (ronds) et  $|B_+|$  (losanges), normalisés par  $B_i = |B_-|$  pour la position initiale (en noir) et corrigées par l'amplitude de la micro-onde à l'entrée du guide d'ondes, en fonction de la distance au guide d'ondes :  $d = \sqrt{y^2 + z^2}$ . Les lignes et pointillés noirs correspondent à une interpolation entre une décroissance en  $1/d$  et  $1/d^3$ . Figure de droite : positions estimées des pièges correspondant aux données de la figure de gauche. Le guide micro-onde (centré en  $y = 0$ ) et le fil DC100 (centré en  $y = 130 \mu\text{m}$ ) sont représentés par les rectangles noirs. Ces positions ont été estimées grâce aux simulations des champs magnétiques de l'expérience (annexe B).

prédite  $\Delta\omega/2\pi \simeq 36 \text{ kHz}$  pour la résonance de Feshbach associée <sup>5</sup>.

Il est possible de rapprocher encore plus les atomes du guide d'ondes pour gagner encore en puissance. À une distance de  $10 \mu\text{m}$  on a mesuré  $\Omega_{R-}/2\pi = 1,0 \text{ MHz}$  pour une puissance en sortie d'amplificateur de  $2 \text{ mW}$ , ce qui correspond à  $\Omega_{R-}/2\pi = 50 \text{ MHz}$  à  $10 \text{ W}$  et une largeur de résonance de Feshbach de  $\Delta\omega/2\pi \simeq 450 \text{ kHz}$ . Ainsi, nous ne sommes a priori pas limités par la puissance micro-onde pour étudier ces résonances de Feshbach. En réalité nous avons observé qu'au delà d'une puissance d'environ  $6 \text{ W}$  après amplificateur pour des atomes initialement à une distance  $d = 23 \mu\text{m}$  du guide d'ondes ( $\Omega_{R-} \simeq 2\pi \times 11 \text{ MHz}$ ) on perd les atomes sur des centaines de mégahertz autour de la résonance atomique, y compris aux fréquences attendues pour les résonances moléculaires, à cause de la force dipolaire qui les attire vers le guide d'ondes (voir discussion au paragraphe 4.6.2). La plupart des mesures présentées dans la suite de ce manuscrit ont donc été effectuées à plus basse puissance et pour un centre du piège situé à une distance  $d = 23 \mu\text{m}$  du guide d'ondes. Pour des atomes à cette distance du guide d'ondes, on a la relation suivante entre la puissance  $P_{\text{mw}}$  à la sortie de l'amplificateur et l'amplitude totale du champ micro-onde  $B_{\text{mw}} = \sqrt{|B_\pi|^2 + |B_+|^2 + |B_-|^2}$  :  $P_{\text{mw}} \simeq 64 \text{ mW} \cdot \text{G}^{-2} \times B_{\text{mw}}^2$ .

Nous avons jusqu'à maintenant présenté des mesures d'oscillations de Rabi pour des fréquences inférieures à l'écart en fréquence entre les deux transitions  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ , afin que l'approximation du modèle à deux niveaux soit correcte. Nous montrons sur la figure 4.10 des oscillations de Rabi à « haute puissance » : on s'est placé dans les mêmes conditions que pour la figure de droite de 4.7, à résonance de la transition  $|f = 1, m_f = -1\rangle \rightarrow |f = 2, m_f = -2\rangle$  mais avec une puissance micro-onde 100 fois plus grande. Le couplage simultané vers la deuxième transition  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  entraîne un battement entre les deux résonances, avec

5. On rappelle que la largeur de la résonance vaut  $\Delta\omega/2\pi = 1,4 \text{ kHz}$  pour une fréquence de Rabi de  $\Omega_R/2\pi = 2,8 \text{ MHz}$  pour le sodium et que  $\Delta\omega \propto \Omega_R^2$ .

$d$ [ $\mu\text{m}$ ]	$P_{\text{mw}}$ [dBm]	$\Omega_{R-}/2\pi$ [kHz]	$ B_- $ [mG]	$\Omega_{R+}/2\pi$ [kHz]	$ B_+ $ [mG]
176	32	66	39	67	96
	36	106	61		
159	23	36	21	51	73
	32	99	57		
117	23	78	46	36	51
63	18	190	111	146	209
	23	335	195		
23	13	642	374	294	420
	18	1130	659		

**Table 4.1** – Données brutes des mesures de fréquence de Rabi pour les transitions induites par les polarisations  $\sigma^-$  et  $\sigma^+$ .  $d$  correspond à la distance entre le milieu du guide d’ondes et le centre du piège,  $P_{\text{mw}}$  correspond à la puissance de la micro-onde après l’amplificateur,  $\Omega_{R-}/2\pi$  est la fréquence de Rabi à résonance de la transition vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  induite par la polarisation  $\sigma^-$ ,  $|B_-|$  est l’amplitude magnétique de la micro-onde pour la polarisation  $\sigma^-$  déduite des mesures de fréquences de Rabi,  $\Omega_{R+}/2\pi$  est la fréquence de Rabi à résonance de la transition vers  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  induite par la polarisation  $\sigma^+$  et  $|B_+|$  est l’amplitude magnétique de la micro-onde pour la polarisation  $\sigma^+$ .

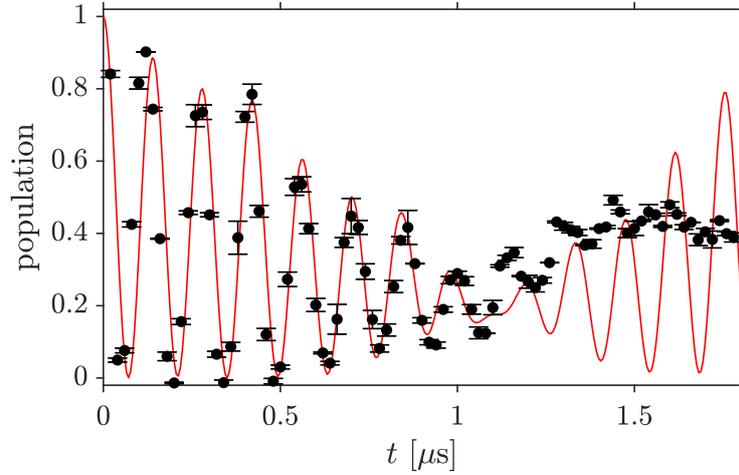
une amplitude minimum aux alentours de 1  $\mu\text{s}$  après l’allumage de la micro-onde. La courbe rouge correspond au calcul numérique de l’évolution de la population dans  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  sans prendre en compte la perte de cohérence. On peut voir qu’on a un assez bon accord avec les données expérimentales jusqu’au premier minimum d’amplitude. Après celui-ci on perd la cohérence et la population dans  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  tend vers la moitié de la population initiale pour les données expérimentales.

## 4.4 Transitions vers les états moléculaires

Nous nous intéressons dans cette partie aux transitions vers les états moléculaires induites par un champ micro-onde, à l’origine des résonances de Feshbach. Nous présenterons d’abord les courbes de spectroscopie micro-onde puis nous utiliserons le modèle simplifié pour l’hamiltonien utilisé dans [126] afin de mieux comprendre nos observations.

### 4.4.1 Spectroscopies micro-onde des transitions moléculaires

Dans leur étude des résonances de Feshbach induites par micro-onde, les auteurs de [59] considèrent une transition vers l’état moléculaire rovibrationnel le moins lié ( $n = -1$ ) de la multiplicité [ $f_1 = 1, f_2 = 2$ ], qui correspond au niveau vibrationnel  $v = 15$ . La structure hyperfine de cet état comprend en réalité 15 états différents, qu’on peut classer selon les valeurs du moment cinétique total  $F$  qui peut valoir 1, 2 ou 3 - avec  $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{f}}_1 + \hat{\mathbf{f}}_2$  l’opérateur de spin total - et de la projection de spin total  $M_F$ . Les 10 états de moment cinétique  $F = 1$  ou 3 correspondent à des états purement triplets et sont dégénérés à champ magnétique nul. L’état de spin des 5 états de moment cinétique total  $F = 2$  n’est pas bien défini. Des travaux de photo-association à deux photons du sodium [129, 130] nous donnent une estimation des fréquences micro-onde à utiliser pour exciter ces transitions depuis le canal ouvert [ $f_1 = 1, f_2 = 1$ ]. Ainsi, la fréquence attendue pour la transition vers les états de moment cinétique



**Figure 4.10** – Évolution de la population de l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  pour une fréquence de la micro-onde à résonance de la transition vers  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  ( $\sigma^-$ ), dans un piège situé à une distance  $d = 23\ \mu\text{m}$  du guide d'ondes et une puissance micro-onde après l'amplificateur de 2 W. La courbe en rouge correspond au calcul numérique de cette évolution de population à partir de l'hamiltonien  $\hat{H}_{\text{eff}}$  en prenant  $B_\pi = 0$ ,  $|B_-| = |B_+| = 3,8\ \text{G}$  et une polarisation linéaire ( $\phi_y = \phi_z$ ).

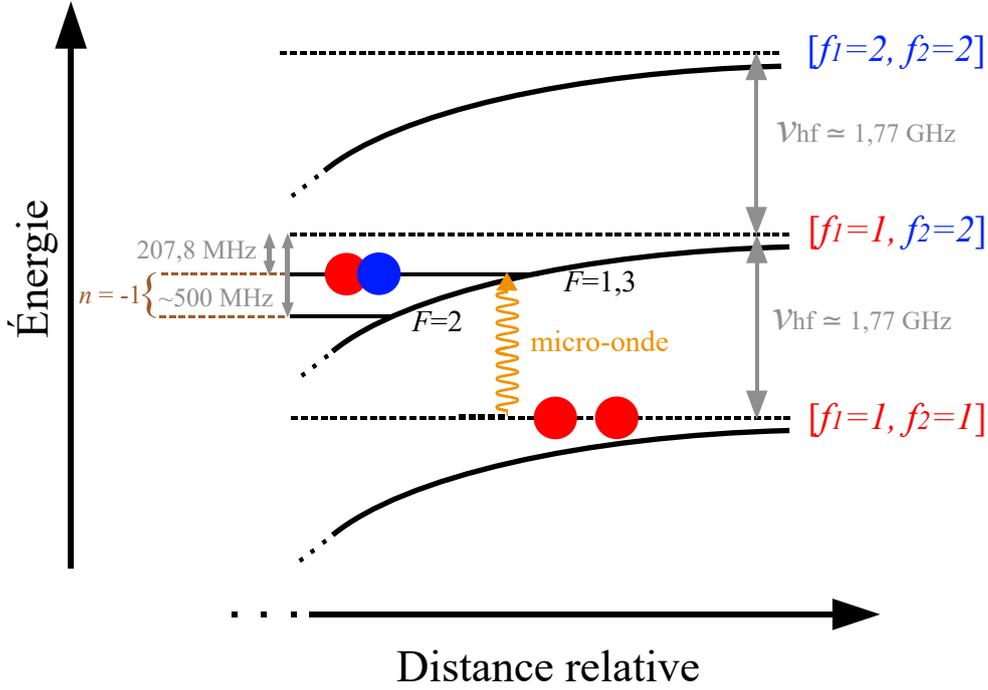
total  $F = 1, 3$  se trouve à 1568 MHz avec une incertitude de l'ordre de 10 MHz, ce qui correspond à une énergie de liaison d'environ  $-h \times 204\ \text{MHz}$ . La fréquence attendue pour la transition vers les états de moment cinétique total  $F = 2$  se trouve autour de 1300 MHz (voir schéma de la figure 4.11).

Sur la figure 4.12, on montre le résultat de la spectroscopie micro-onde vers les états moléculaires. On observe deux résonances : l'une très large centrée vers 1275 MHz, où environ la moitié des atomes est perdue, qui correspond aux états de moment cinétique total  $F = 2$ , et l'autre bien plus fine centrée sur 1562 MHz, avec la quasi totalité des atomes perdus à résonance, qui correspond aux états de moment cinétique  $F = 1, 3$ . On trouve un spectre très semblable aux courbes théorique et expérimentale présentées dans l'article [129]. La résonance autour de 1275 MHz vers un état de moment cinétique total  $F = 2$  est très large, de l'ordre de 100 MHz à mi-hauteur, car la durée de vie de la molécule est très petite : il s'agit d'un état de prédissociation [129]. Le comportement est assez différent de celui de l'atome de rubidium, observé dans [126], où les largeurs à mi-hauteur pour les pertes d'atomes lors des transitions vers les états avec  $F = 2$  étaient de l'ordre du kilohertz.

En réduisant fortement la puissance et en balayant plus finement la fréquence autour de la raie à 1562 MHz, on observe en réalité des transitions vers quatre états, comme on peut le voir sur la figure 4.13. Les raies sont de largeurs très différentes, ce qui indique un couplage plus ou moins fort. La dégénérescence de ces états est levée par le champ magnétique statique  $B_s = 0,9\ \text{G}$ .

#### 4.4.2 Comparaison avec un modèle simple pour l'hamiltonien

Nous ne nous attendions initialement pas à observer autant de transitions depuis l'état de départ avec deux atomes dans  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ . Nous pensions en effet qu'il y aurait seulement trois transitions, induites par les trois polarisations  $\sigma^-$ ,  $\pi$  et  $\sigma^+$ , vers les états à



**Figure 4.11** – Schéma de principe pour la transition induite par micro-onde depuis deux atomes libres dans l'état  $f = 1$  vers l'état rovibrationnel le moins lié du canal, avec un atome dans  $f = 1$  et un atome dans  $f = 2$ . Les estimations des énergies de liaison proviennent de la spectroscopie micro-onde. Schéma adapté de [126] pour le sodium.

deux atomes symétrisés :

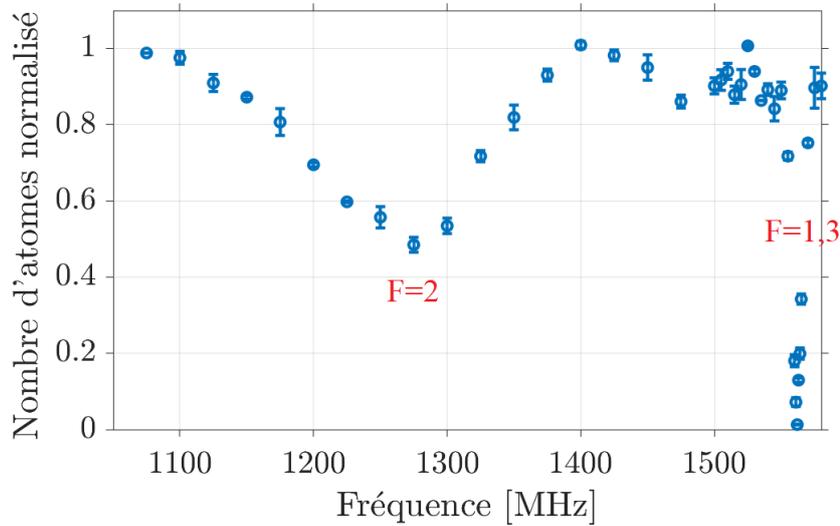
$$\begin{cases} \sigma^- \rightarrow |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -2, +\rangle \\ \pi \rightarrow |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -1, +\rangle \\ \sigma^+ \rightarrow |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = 0, +\rangle \end{cases} \quad (4.16)$$

où  $|f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1, m_{f_1}; f_2, m_{f_2}\rangle + |f_2, m_{f_2}; f_1, m_{f_1}\rangle)$ . Dans l'article [126], où l'ensemble des transitions vers les états du niveau rovibrationnel le moins lié de la branche  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  du rubidium ont été étudiées, seules trois transitions ont été observées depuis l'état de départ  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle$ . Pour mieux comprendre nos observations on aimerait calculer les énergies et les états propres du système en diagonalisant l'hamiltonien. Il est nécessaire de prendre en compte les deux termes suivants pour décrire l'interaction lors des collisions :

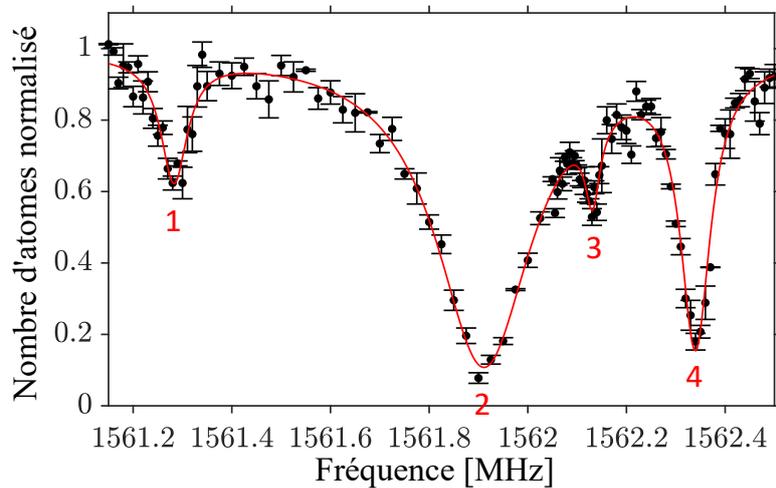
- Le terme d'interaction hyperfine, qui prédomine à grande distance :

$$V_{\text{hf}} = \frac{A_{\text{hf}}}{\hbar^2} (\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \hat{\mathbf{i}}_2) \quad (4.17)$$

avec  $A_{\text{hf}}$  la constante de dipole magnétique,  $\hat{\mathbf{s}}_i$  l'opérateur de spin électronique de l'atome  $i$  et  $\hat{\mathbf{i}}_i$  son opérateur de spin nucléaire.



**Figure 4.12** – Spectroscopie micro-onde des états moléculaires de l'état vibrationnel le moins lié du canal [ $f_1 = 1, f_2 = 2$ ]. La micro-onde est appliquée durant 250 ms avec une puissance en sortie de l'amplificateur de 2,5 W. Les atomes sont piégés à une distance  $d = 23 \mu\text{m}$  du guide d'ondes et le minimum du piège magnétique vaut 0,9 G. On détecte les atomes restés dans l'état initial  $|f = 1, m_f = -1\rangle$



**Figure 4.13** – Spectroscopie micro-onde des états moléculaires de l'état vibrationnel le moins lié du canal [ $f_1 = 1, f_2 = 2$ ] de moment cinétique total  $F = 1, 3$  en partant d'atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  à un champ magnétique statique  $B_s = 0,9 \text{ G}$ . La micro-onde est appliquée durant 30 ms avec une puissance en sortie de l'amplificateur de 6 mW. Les atomes se trouvent à une distance  $d = 15 \mu\text{m}$  du guide d'ondes. On observe quatre transitions différentes, numérotées en rouge.

• Le terme décrivant la différence entre les potentiels singulet et triplet, qui prédomine à courte distance :

$$V_{\text{st}}(r) = V_0(r) + V_1(r) \frac{\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2}{\hbar^2} \quad (4.18)$$

qu'on a introduit au paragraphe 1.2.1 du chapitre 1. Il n'existe malheureusement pas de base de l'espace de spin total permettant de diagonaliser simultanément ces deux termes d'interaction [103]. Pour résoudre le problème il faudrait faire des calculs de canaux couplés qui ne sont pas évidents.

Dans l'article [126], un modèle simplifié, qui revient à prendre une valeur moyenne indépendante de  $r$  pour  $V_1$ , permet de prendre en compte les deux canaux de collision associés aux potentiels singulet et triplet :

$$\hat{H}_{\text{st}} = U \frac{\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2}{\hbar^2} = \frac{U}{2} \left( \frac{\hat{\mathbf{S}}^2}{\hbar^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (4.19)$$

où  $U$  est un paramètre ajustable constant et  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2$ . Dans le cas du rubidium, ce modèle est en bon accord avec l'expérience pour le diagramme de l'énergie des états moléculaires en fonction du champ magnétique statique, en prenant  $U = h \times 2,875$  MHz [126]. Ce paramètre  $U$  est lié à l'écart en énergie entre les états de moment cinétique total  $F = 1, 3$  et ceux de moment cinétique total  $F = 2$  à champ magnétique nul. Dans le cas du rubidium, où  $U \ll \Delta E_{\text{hf}} = h \times 6,8$  GHz, cet écart en énergie vaut  $\sim 3U/8 = 1,1$  MHz, ce qui correspond au déplacement en énergie au premier ordre. Pour le sodium, grâce aux mesures de spectroscopie micro-onde, on a mesuré un écart en énergie bien plus grand entre les états de moment cinétique  $F = 1, 3$  et  $F = 2$ , de l'ordre de 290 MHz. On s'attend donc à trouver un paramètre  $U$  bien plus grand que celui du rubidium. Cela est probablement dû au fait que les longueurs de diffusion associée aux potentiels triplet et singulet sont plus éloignées l'une de l'autre dans le cas du sodium que pour le rubidium [131, 132].

Nous avons testé ce modèle pour le comparer aux données expérimentales dans le cas des atomes de sodium. L'état de chaque atome d'un dimère de sodium peut s'écrire dans la base de dimension 8 :  $\{|f, m_f\rangle\}$ , avec  $f = 1$  ou 2 et  $m_f$  un entier compris entre  $-f$  et  $f$ . On peut donc construire une base à deux atomes de dimension 64 avec :

— les 8 états déjà symétriques :

$$|f, m_f; f, m_f\rangle \quad (4.20)$$

— les 28 états symétrisés (avec  $f_1 \neq f_2$  ou  $m_{f_1} \neq m_{f_2}$ ) :

$$|f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1, m_{f_1}; f_2, m_{f_2}\rangle + |f_2, m_{f_2}; f_1, m_{f_1}\rangle) \quad (4.21)$$

— les 28 états antisymétrisés (avec  $f_1 \neq f_2$  ou  $m_{f_1} \neq m_{f_2}$ ) :

$$|f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, -\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|f_1, m_{f_1}; f_2, m_{f_2}\rangle - |f_2, m_{f_2}; f_1, m_{f_1}\rangle). \quad (4.22)$$

En réalité il faut considérer seulement les états symétriques par échange de particules en raison des règles de symétrisation pour des bosons indiscernables. On se restreint donc à la base des 36 états  $\{|f, m_f; f, m_f\rangle, |f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle\}$ . On considère les termes suivants pour l'hamiltonien dans cette base :

— l'interaction hyperfine pour les deux atomes :

$$\hat{H}_{\text{hf}} = \frac{A_{\text{hf}}}{\hbar^2} (\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{i}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2 \cdot \hat{\mathbf{i}}_2) \quad (4.23)$$

— le couplage avec le champ magnétique statique  $\mathbf{B}_s$  pour les deux atomes :

$$\hat{H}_B = \frac{\mu_B}{\hbar} \left[ g_s(\hat{\mathbf{s}}_1 + \hat{\mathbf{s}}_2) + g_i(\hat{\mathbf{i}}_1 + \hat{\mathbf{i}}_2) \right] \cdot \mathbf{B}_s \quad (4.24)$$

— le terme du modèle simplifié permettant de prendre en compte la différence entre potentiels singulet et triplet :

$$\hat{H}_{st} = U \frac{\hat{\mathbf{s}}_1 \cdot \hat{\mathbf{s}}_2}{\hbar^2} = \frac{U}{2} \left( \frac{\hat{\mathbf{S}}^2}{\hbar^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (4.25)$$

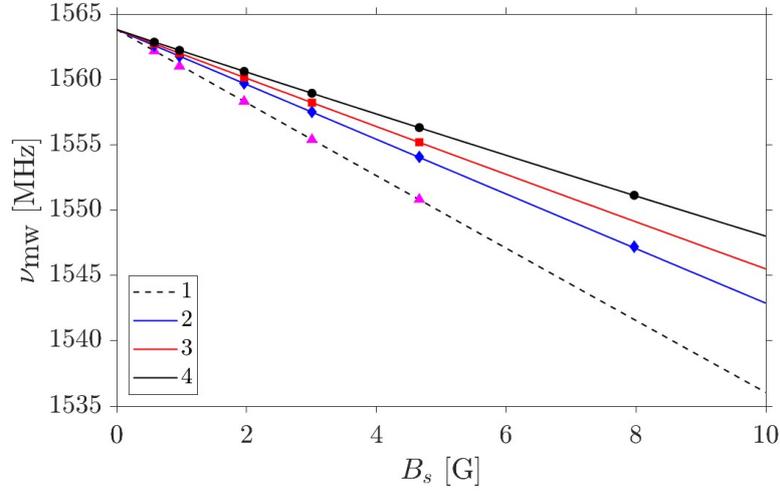
On peut alors diagonaliser l'hamiltonien total :  $\hat{H}_{tot} = \hat{H}_{hf} + \hat{H}_B + \hat{H}_{st}$ , en fonction de la valeur du champ magnétique statique  $B_s$ .

Pour comparer le modèle avec les données expérimentales, on a mesuré les fréquences des quatre transitions vers les états de moment cinétique total  $F = 1, 3$ , pour plusieurs valeurs du champ magnétique statique  $B_s$ . On peut voir sur la figure 4.14 qu'on observe un bon accord entre les données expérimentales et le modèle. Les mesures de  $B_s$  ont été faites par spectroscopie radiofréquence du minimum de potentiel et l'incertitude est de l'ordre de 5 kHz, ce qui correspond à 7 mG. Pour les mesures des fréquences des transitions vers les états moléculaires, on a travaillé à faible puissance micro-onde -20 mW après amplificateur, soit  $\Omega_{R-}/2\pi = 642 \text{ kHz}$  - afin que les déplacements lumineux créés par la micro-onde soient négligeables (voir la discussion au paragraphe 4.6.1). L'incertitude sur les fréquences de transition est de l'ordre de 10 à 20 kHz. Pour le modèle on a calculé les fréquences de ces transitions<sup>6</sup> en fonction du champ magnétique, à partir de la diagonalisation de  $\hat{H}_{tot}$ . La valeur de  $U$  est imposée par l'écart entre les raies  $F = 1, 3$  et  $F = 2$ . On a fixé  $U = h \times 719 \text{ MHz}$ , ce qui donne une fréquence de transition vers les états de moment cinétique  $F = 2$  qui vaut 1275 MHz à 0,9 G. Si on essaie de déduire  $U$  uniquement à partir des mesures des fréquences de transition pour  $F = 1, 3$  on a une très grande incertitude car pour des champs magnétiques statiques  $B_s \leq 10 \text{ G}$  on reste dans le régime linéaire, avec des déplacements en fréquence  $\Delta\nu \ll U/h$ . L'ajustement entre les données pour  $F = 1, 3$  et le modèle donne en effet  $U = 640 \pm 200 \text{ MHz}$ .

Ces mesures donnent par ailleurs une très bonne précision sur la valeur de la fréquence de la transition  $\nu_{res}$  vers l'état rovibrationnel le moins lié de moment cinétique total  $F = 1, 3$ , à champ magnétique nul. À notre connaissance la mesure de cette fréquence avait été obtenue par des méthodes de transitions à deux photons optiques et était estimée à  $\nu_{res} = 1568 \pm 10 \text{ MHz}$ . Notre mesure, réalisée en induisant la transition vers les états moléculaires à l'aide du champ micro-onde, donne  $\nu_{res} = 1563,81(2) \text{ MHz}$ . Elle permet donc de réduire significativement l'incertitude sur cette grandeur. On trouve ainsi une énergie de liaison du dimère :  $|E_T| = \Delta E_{hf} - h \times \nu_{res}(B_s = 0) = h \times 207,82(2) \text{ MHz}$ .

Sur la figure 4.15 on a tracé le diagramme en énergie de tous les niveaux pour l'état rovibrationnel le moins lié qu'on trouve en utilisant le modèle simplifié, ainsi que les points expérimentaux pour les quatre transitions. La pente est négative pour les quatre états de moment cinétique total  $F = 1, 3$  vers lesquels on a observé des transitions, ce qui signifie qu'aucun de ces états moléculaires ne peut être piégé dans un minimum de champ magnétique. Ainsi, pour l'état 1 on trouve une pente  $\alpha_1 = -\mu_B/h \simeq -1,4 \text{ MHz.G}^{-1}$ , pour l'état 2 on trouve une pente  $\alpha_2 = -\mu_B/2h$ , pour l'état 3 on trouve une pente  $\alpha_3 = -\mu_B/3h$  et pour l'état 4 on trouve une pente  $\alpha_4 = -\mu_B/6h$ .

6. Pour passer des énergies des états moléculaires aux fréquences de transition il faut soustraire deux fois l'énergie Zeeman des atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ .

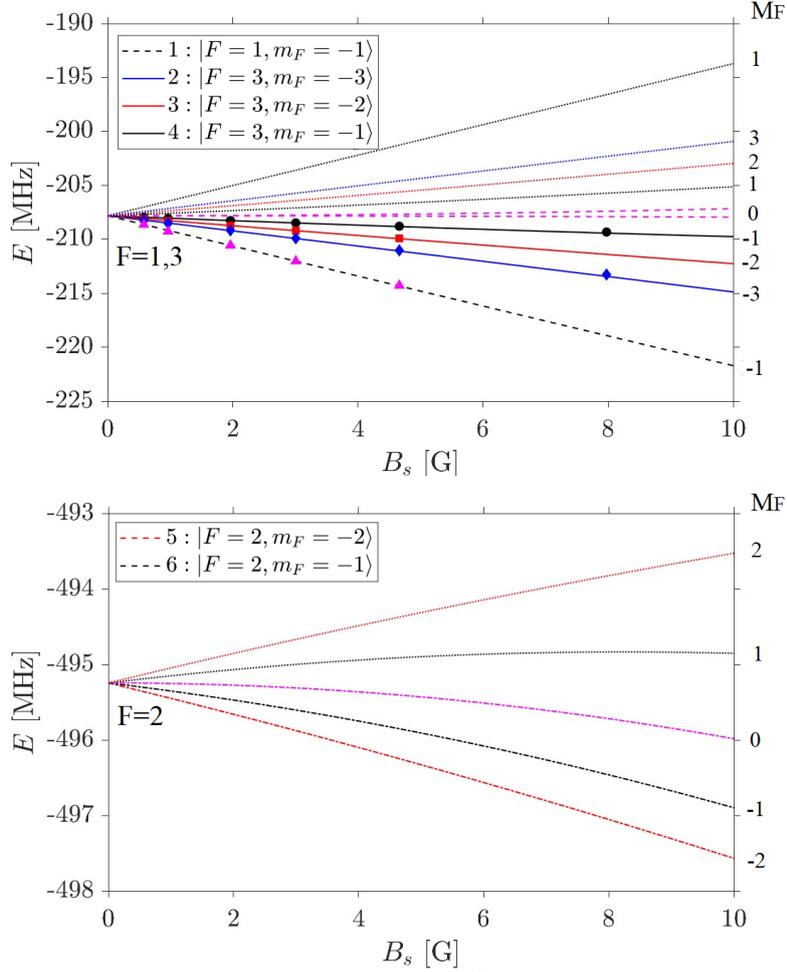


**Figure 4.14** – Fréquences des quatre transitions vers les états de moment cinétique total  $F = 1, 3$  de l'état rovibrationnel le moins lié, accessibles depuis des atomes initialement dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , pour différentes valeurs du minimum de champ magnétique  $B_s$ . Les courbes correspondent aux fréquences de ces transitions obtenues en utilisant le modèle simplifié décrit précédemment, avec  $U = h \times 719$  MHz afin d'être en accord avec la fréquence de transition mesurée par spectroscopie pour les états de moment cinétique  $F = 2$ . On a numéroté ces quatre états comme sur le spectre de la figure 4.13.

Si on décompose les états propres de l'hamiltonien dans la base des états  $\{|f, m_f; f, m_f\rangle, |f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle\}$  on remarque qu'elle tend à être la base des états propres dans la limite où  $U \ll \mu_B B_s$ . Ainsi, pour les atomes de rubidium, dès quelques gauss de champ magnétique les trois états accessibles depuis l'état initial  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle$  correspondent à :

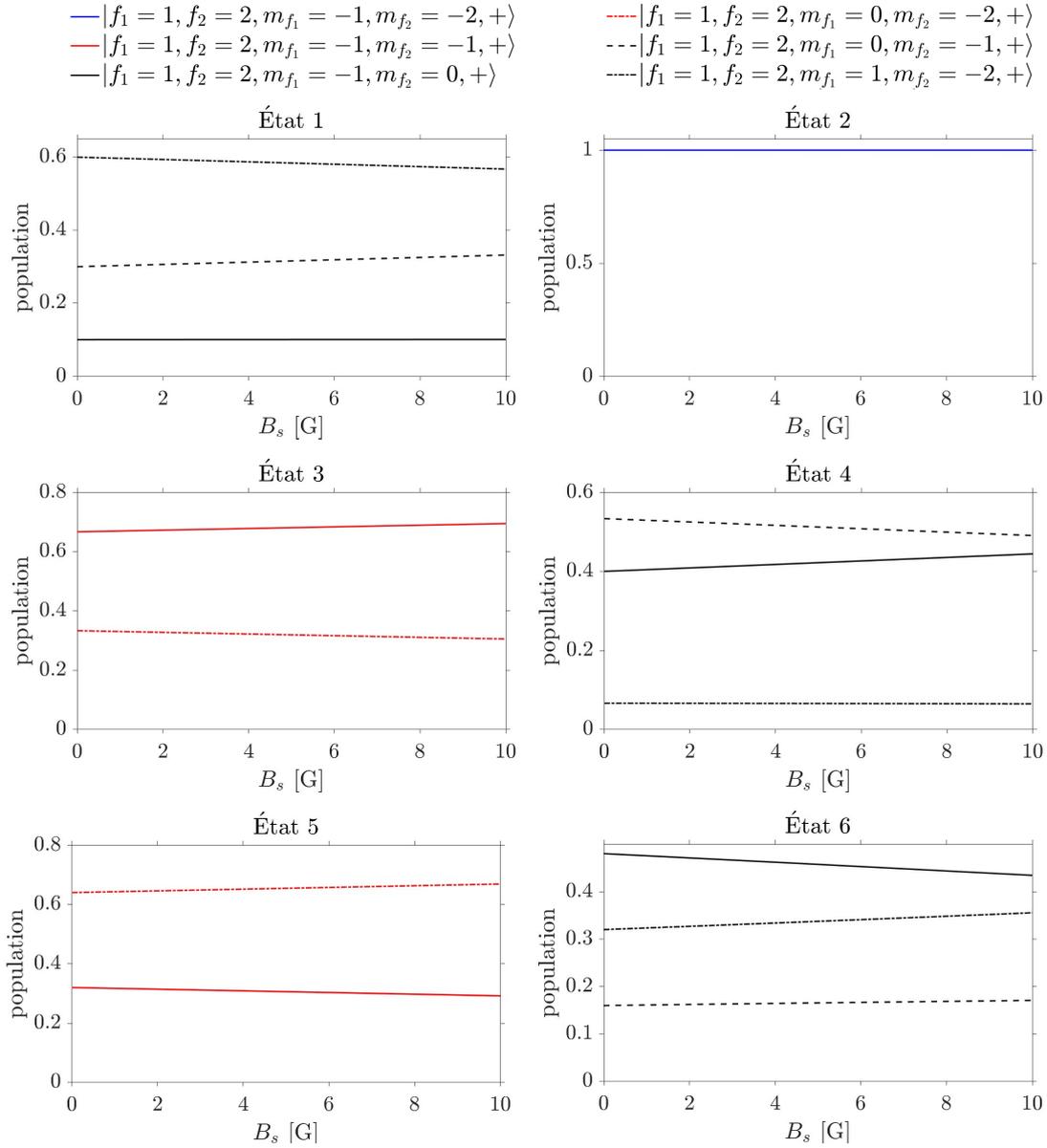
$$\left\{ \begin{array}{l} |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -2, +\rangle \\ |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -1, +\rangle \\ |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = 0, +\rangle \end{array} \right. \quad (4.26)$$

conformément à ce que nous nous attendions initialement à trouver. En revanche dans le cas du sodium on a  $U \gg \mu_B B_s$  et les états propres sont des superpositions des états  $\{|f, m_f; f, m_f\rangle, |f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle\}$ , de même projection de spin total  $M_F$  (voir figure 4.16). On trouve ainsi six états propres avec une composante non nulle  $|f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} \in \llbracket -2; 0 \rrbracket, +\rangle$  pour la décomposition dans la base des états symétriques à deux atomes : quatre états de moment cinétique total  $F = 1, 3$  qui correspondent aux quatre transitions observées par spectroscopie micro-onde qu'on a numéroté de 1 à 4 et deux états de moment cinétique total  $F = 2$  notés états 5 et 6, que nous n'arrivons pas à distinguer l'un de l'autre sur les mesures de spectroscopie à cause de la grande largeur de la résonance. Il est possible de voir les choses plus simplement en raisonnant directement sur la projection de spin total  $M_F$  : dans l'état initial celle ci vaut  $M_F = -2$  et d'après les règles de sélection il est donc possible de le coupler aux six états pour lesquels  $M_F$  vaut -3, -2 ou -1 en utilisant un photon micro-onde. Dans la limite d'un champ magnétique faible on peut écrire les états que nous



**Figure 4.15** – Diagrammes des énergies des niveaux moléculaires de l'état rovibrationnel le moins lié pour le canal  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  de moment cinétique total  $F = 1, 3$  (graphique du haut) et  $F = 2$  (graphique du bas) en fonction du champ magnétique statique  $B_s$ . Les courbes sont obtenues en diagonalisant  $\hat{H}_{\text{tot}}$  avec avec  $U = h \times 719$  MHz. La référence en énergie correspond à l'énergie de dissociation. Les états numérotés en légende correspondent aux états accessibles depuis  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle$ .

avons sondés par spectroscopie dans la base  $|f_1 = 1, f_2 = 2, F, M_F\rangle$ . L'état numéroté 1 correspond ainsi à  $|f_1 = 1, f_2 = 2, F = 1, M_F = -1\rangle$ , l'état 2 à  $|f_1 = 1, f_2 = 2, F = 3, M_F = -3\rangle$ , l'état 3 à  $|f_1 = 1, f_2 = 2, F = 3, M_F = -2\rangle$  et l'état 4 à  $|f_1 = 1, f_2 = 2, F = 3, M_F = -1\rangle$ . Notons que l'état 2, de projection de spin  $M_F = -3$ , est un état maximalelement polarisé et peut s'écrire comme  $|f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -2, +\rangle = |f_1 = 1, f_2 = 2, F = 3, M_{f_2} = -3\rangle$  pour n'importe quel champ magnétique. La transition depuis l'état initial  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle$  vers cet état est induite par la polarisation  $\sigma^-$ . Il s'agit du cas symétrique à celui étudié dans l'article [59] sur les résonances de Feshbach micro-onde. La largeur pour la résonance de Feshbach pour la résonance vers l'état 2 est donc a priori identique à celle calculée dans cet article et il s'agit de la transition que nous souhaitons utiliser afin de modifier la longueur de diffusion.



**Figure 4.16** – Décomposition des états accessibles par transition micro-onde depuis  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle$  dans la base  $\{|f, m_f; f, m_f\rangle, |f_1, f_2, m_{f_1}, m_{f_2}, +\rangle$ . Les numérotations des états correspondent à celles de la figure 4.15. L'état de projection de spin total  $M_F = -3$  est en bleu, ceux de projection total  $M_F = -2$  en rouge et ceux de projection total  $M_F = -1$  en noir.

## 4.5 Pertes d'atomes au voisinage des résonances moléculaires

Les auteurs de l'article [59] s'attendaient à avoir un taux de pertes limité pour les résonances de Feshbach micro-onde – de l'ordre de celui des résonances de Feshbach magnétiques – et bien inférieur à celui des résonances de Feshbach optiques, pour lesquelles la durée de vie est limitée à quelques dizaines de millisecondes. Ils prévoyaient en outre l'absence de

création de molécules lors des collisions, car l'état lié serait seulement virtuellement peuplé. Nos observations expérimentales semblent en contradiction avec ces prédictions. Nous voyons en effet des pertes d'atomes très rapides au voisinage des résonances moléculaires. Ainsi, sur la figure 4.17 nous présentons l'évolution du nombre d'atomes lorsqu'on applique un champ micro-onde à résonance de la transition vers l'état 2 :  $|f = 1, m_f = -1; f = 1, m_f = -1\rangle \rightarrow |f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = -1, m_{f_2} = -2, +\rangle$ . On peut voir que la moitié des atomes est perdue pour un temps<sup>7</sup> compris entre 20 et 30  $\mu\text{s}$ . Sur le graphique du bas, on a représenté ces données en échelle semi-logarithmique. On peut voir que l'évolution du nombre d'atomes ne correspond pas à une exponentielle décroissante, comme ce serait le cas pour des pertes à un corps. Nous pensons qu'il s'agit de pertes à deux corps, causées par la formation de molécules par photoassociation, comme ce qui a été observé dans l'article [126].

Nous n'observons pas de couplage cohérent entre les états atomiques et moléculaires, qui entraînerait des oscillations de Rabi, car le taux de pertes des molécules est probablement trop grand. Dans le cas de pertes à deux corps l'évolution de la densité atomique à trois dimensions,  $n_{3\text{D}}$ , est alors donnée par l'équation :

$$\frac{\partial n_{3\text{D}}}{\partial t} = -K_2 n_{3\text{D}}^2 \quad (4.27)$$

avec  $K_2$  un coefficient indépendant du temps [133]. Les solutions pour la densité sont donc de la forme :

$$n_{3\text{D}}(t) = \frac{1}{K_2 t + 1/n_{3\text{D}}(0)}. \quad (4.28)$$

Dans notre expérience le piège est harmonique, avec des fréquences d'oscillations  $\nu_x \simeq 10\text{ Hz}$  et  $\nu_\perp \simeq 4,4\text{ kHz}$  pour les données de la figure 4.17. Les pertes entraînent donc une redistribution de la densité d'atomes car le nuage n'est plus à l'équilibre. Ainsi, la solution de l'équation (4.28) n'est pas exacte, mais les atomes vont peu se déplacer pendant les premières dizaines de microsecondes durant lesquelles on applique la micro-onde, sur lesquelles on observe déjà des pertes très importantes. Pour estimer la valeur de  $K_2$  on utilisera cette équation. La densité initiale est donnée par la distribution de Thomas-Fermi 3D à l'équilibre :

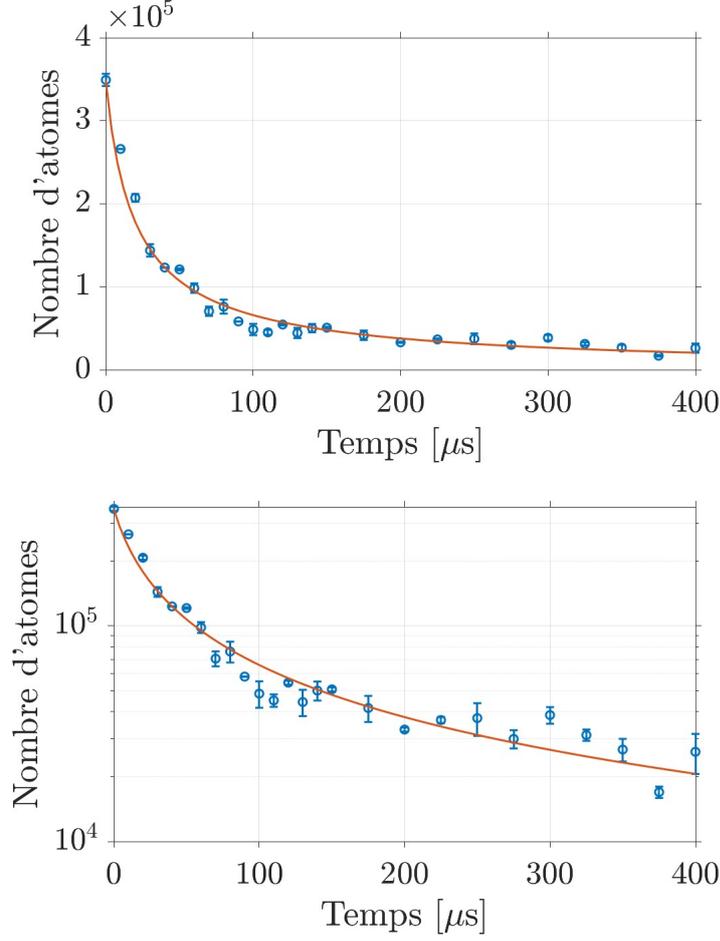
$$n_{3\text{D}}(x, y, z, t = 0) = \frac{\mu_{3\text{D}}^{\text{TF}}}{g_{3\text{D}}} \left[ 1 - \left( \frac{x^2}{R_x^2} + \frac{y^2}{R_y^2} + \frac{z^2}{R_z^2} \right) \right] \quad (4.29)$$

à l'intérieur de l'ellipsoïde de rayons  $R_x$ ,  $R_y$  et  $R_z$ . Le potentiel chimique et les rayons sont déduits du nombre d'atomes initial et des fréquences d'oscillation, à partir des équations (1.35) et (1.33) du chapitre 1. En intégrant sur l'espace l'équation (4.28) on en déduit l'évolution du nombre d'atomes au cours du temps :

$$N(t) = 4\pi R_x R_y R_z \int_0^1 \frac{r^2}{K_2 t + \frac{g_{3\text{D}}}{\mu_{3\text{D}}^{\text{TF}}(1-r^2)}} dr. \quad (4.30)$$

Sur les graphiques de la figure 4.17 on a tracé cette évolution du nombre d'atomes en prenant un coefficient  $K_2 = 1.10^{-10} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , ce qui donne un relativement bon accord entre les données et le modèle. La limite de Langevin donne le coefficient de taux maximal  $K_2^{\text{max}}$  pour

7. Nous avons vérifié que sur cette échelle de temps les pertes sont négligeables lorsque la micro-onde est allumée à la même puissance mais désaccordée par rapport à la transition moléculaire de quelques centaines de kilohertz.



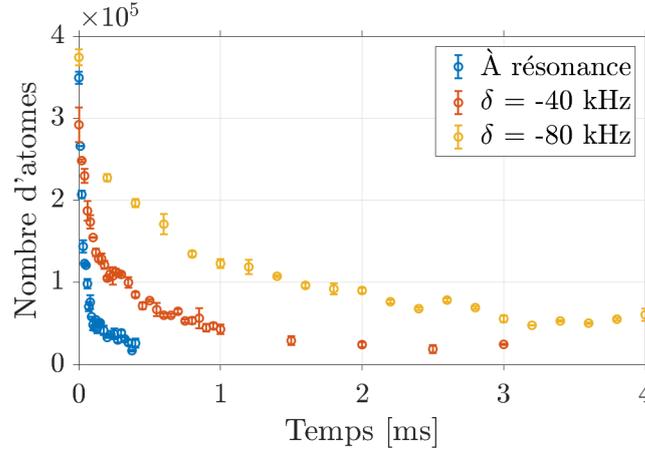
**Figure 4.17** – Évolution du nombre d’atomes en fonction du temps pour une fréquence micro-onde à résonance de la transition vers l’état 2 (1561,94 MHz), avec une puissance micro-onde après amplificateur de 1,7 W et une fréquence de Rabi  $\Omega_{R-}/2\pi = 6,0$  MHz, en haut en échelle linéaire et en bas en échelle semi-logarithmique. La courbe orange correspond à un modèle de pertes à deux corps pour un coefficient  $K_2 = 10^{-10} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ .

une probabilité de réaction à courte distance égale à 1 [134]. Pour des collisions de deux atomes identiques en onde s, cette limite est donnée par [134] :

$$K_2^{\text{max}} = 8 \frac{h}{m} \bar{a} \quad (4.31)$$

où  $\bar{a} = 4\pi a_6 / \Gamma(1/4)^2 \simeq 0,956 a_6$ , avec  $\Gamma$  la fonction gamma d’Euler et  $a_6 = (mC_6/\hbar^2)^{1/4}/2$ . Pour les atomes de sodium on trouve  $K_2^{\text{max}} \simeq 3,2 \cdot 10^{-10} \text{ cm}^3 \cdot \text{s}^{-1} > K_2$ . Les pertes que nous observons restent donc compatibles avec la formation de dimères par photoassociation.

Nous nous sommes aussi intéressés à la dynamique de pertes légèrement hors résonance. En effet, pour les résonances de Feshbach la longueur de diffusion est modifiée significativement sur une largeur de l’ordre de  $\Delta\omega$ , avec  $a(\omega_{\text{res}} - \Delta\omega) = 0$  et  $a(\omega_{\text{res}} + \Delta\omega) = 2a_{\text{bg}}$ . Sur la figure 4.18, on montre la dynamique de pertes pour la transition vers l’état 2 pour des désaccords  $\delta = (\omega - \omega_{\text{res}}) = -2\pi \times 40 \text{ kHz}$  et  $\delta = -2\pi \times 80 \text{ kHz}$ . Pour  $\delta = -2\pi \times 40 \text{ kHz}$  la moitié des



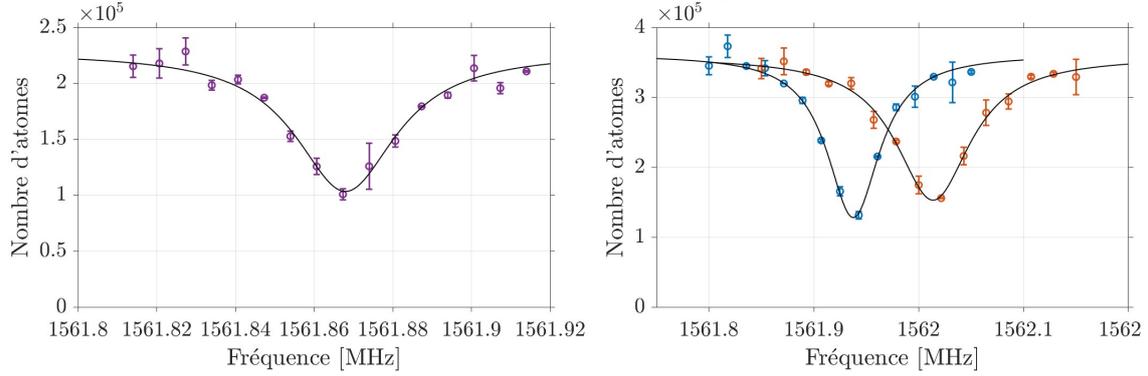
**Figure 4.18** — Évolution du nombre d'atomes en fonction du temps pour différents désaccords par rapport à la transition vers l'état 2, pour une puissance micro-onde après amplificateur de 1,7 W.

atomes est perdue en un temps de l'ordre de 100  $\mu\text{s}$  et pour  $\delta = -2\pi \times 80 \text{ kHz}$  la moitié des atomes est perdue en un temps de l'ordre de 500  $\mu\text{s}$ . Nous avons vérifié que le comportement est symétrique pour des désaccords positifs. Pour ces mesures, la fréquence de Rabi vaut  $\Omega_{R-}/2\pi = 6,0 \text{ MHz}$ , ce qui correspond à une largeur attendue pour la résonance de Feshbach de  $\Delta\omega/2\pi \simeq 6 \text{ kHz}$  seulement.

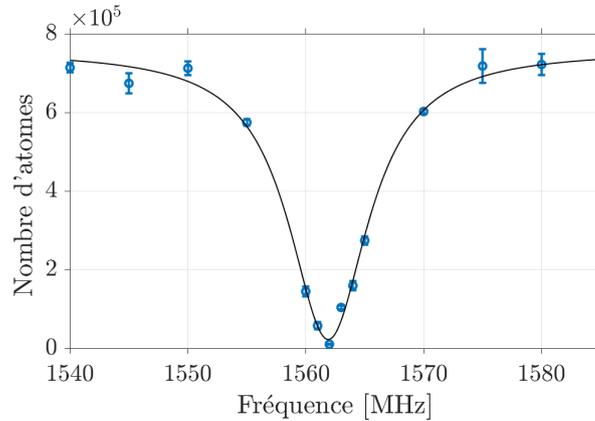
Ainsi, les pertes que nous observons au voisinage de cette résonance induite par micro-onde semblent limiter son intérêt comme outil de contrôle de la longueur de diffusion. Les taux de pertes qu'on mesure ne paraissent en effet pas compatibles avec l'étude de systèmes proches de l'équilibre.

Nous avons par ailleurs étudié les largeurs en fréquence sur lesquelles on observe des pertes pour la transition vers l'état 2, avec différentes durées et puissances de l'impulsion micro-onde. Sur la figure 4.19, on présente les largeurs obtenues pour des durées de l'impulsion micro-onde « courtes » — on a ajusté le temps pour avoir environ 50% de pertes au centre — et des puissances de 69 mW, 1,7 W et 3,5 W correspondant à des fréquences de Rabi  $\Omega_{R-}/2\pi$  respectives de 1,2 MHz, 6,0 MHz et 8,5 MHz. En ajustant une fonction lorentzienne on trouve des largeurs à mi-hauteur  $\Gamma/2\pi$  qui valent respectivement 32 kHz, 61 kHz et 87 kHz. On a donc un élargissement de la résonance avec la puissance. Ces largeurs sur lesquelles on observe des pertes sont grandes devant les largeurs de résonances de Feshbach attendues à ces fréquences de Rabi : 0,3 kHz, 6 kHz et 13 kHz. Notons que l'inhomogénéité du champ magnétique est une source d'élargissement en fréquence pour les pertes. En effet, entre le centre du condensat et la surface extérieure, on a une différence d'énergie potentielle magnétique  $g_f\mu_B\Delta B = \mu_{3D} \simeq \hbar \times 20 \text{ kHz}$ , où  $\mu_{3D}$  est le potentiel chimique. La fréquence de la résonance pour la transition vers l'état 2 est décalée de  $\delta = -3g_f\mu_B\Delta B/\hbar = -3\mu_{3D}/\hbar \simeq 2\pi \times 60 \text{ kHz}$  sur les bords du condensat par rapport au centre, ce qui explique probablement que même à très basse puissance micro-onde on trouve une largeur  $\Gamma/2\pi$  de l'ordre de 30 kHz. Par ailleurs, on peut voir sur ces courbes que la fréquence de résonance croît avec la puissance de la micro-onde. Ce point sera discuté dans la paragraphe suivant (4.6.1).

Lorsqu'on applique la micro-onde pendant des temps « longs » (centaines de ms) on observe un élargissement des pertes très important. Ainsi, sur la figure 4.20 on a envoyé une



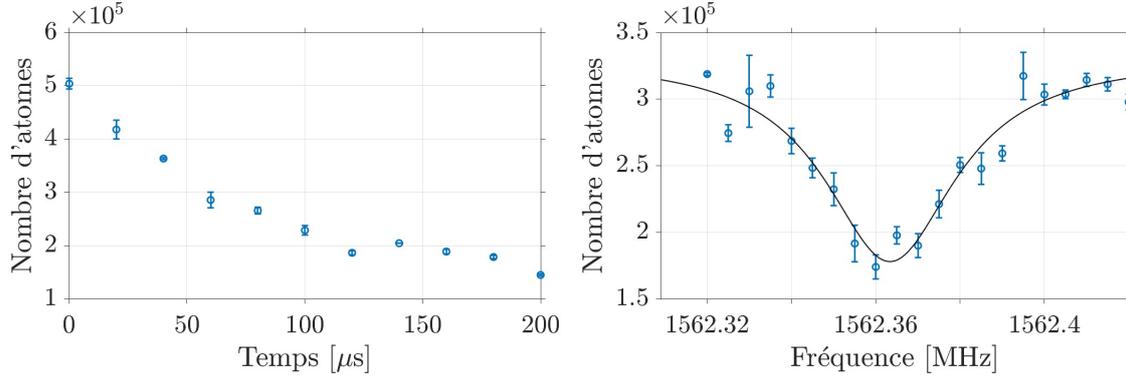
**Figure 4.19** – Largeurs en fréquence de la résonance vers l'état 2 pour différentes puissances micro-onde. Sur le graphique de gauche on a appliqué la micro-onde pendant une durée de  $220 \mu\text{s}$  avec une puissance après amplificateur de  $69 \text{ mW}$ , qui correspond à une fréquence de Rabi  $\Omega_{R-}/2\pi = 1,2 \text{ MHz}$ . En ajustant une fonction lorentzienne pour décrire les pertes, on trouve une largeur à mi-hauteur  $\Gamma/2\pi = 32 \text{ kHz}$ . Sur le graphique de droite on a appliqué la micro-onde pendant une durée de  $21 \mu\text{s}$  pour deux puissances en sortie de l'amplificateur :  $1,7 \text{ W}$  pour les données en bleu et  $3,5 \text{ W}$  pour les données en orange. Pour les données en bleu la fréquence de Rabi vaut  $\Omega_{R-}/2\pi = 6,0 \text{ MHz}$  et la largeur à mi-hauteur  $\Gamma/2\pi = 61 \text{ kHz}$ . Pour les données en orange la fréquence de Rabi vaut  $\Omega_{R-}/2\pi = 8,5 \text{ MHz}$  et la largeur à mi-hauteur  $\Gamma/2\pi = 87 \text{ kHz}$ .



**Figure 4.20** – Pertes d'atomes autour des résonances moléculaires de moment cinétique total  $F = 1,3$  pour une puissance de  $2,5 \text{ W}$  après amplificateur et une durée de  $250 \text{ ms}$ . La largeur à mi-hauteur est de l'ordre de  $8 \text{ MHz}$ .

onde micro-onde pendant  $250 \text{ ms}$  à une puissance après amplificateur de  $2,5 \text{ W}$  et on observe des pertes sur une dizaine de mégahertz, avec une largeur à mi-hauteur de  $8 \text{ MHz}$ . Pour ces paramètres on ne peut plus distinguer les différentes transitions vers les états de moment cinétique total  $F = 1,3$ .

Nous avons aussi étudié les pertes aux voisinages des trois autres résonances vers des états de moment cinétique total  $F = 1,3$ . Dans le cas de la résonance vers l'état 4, induite par



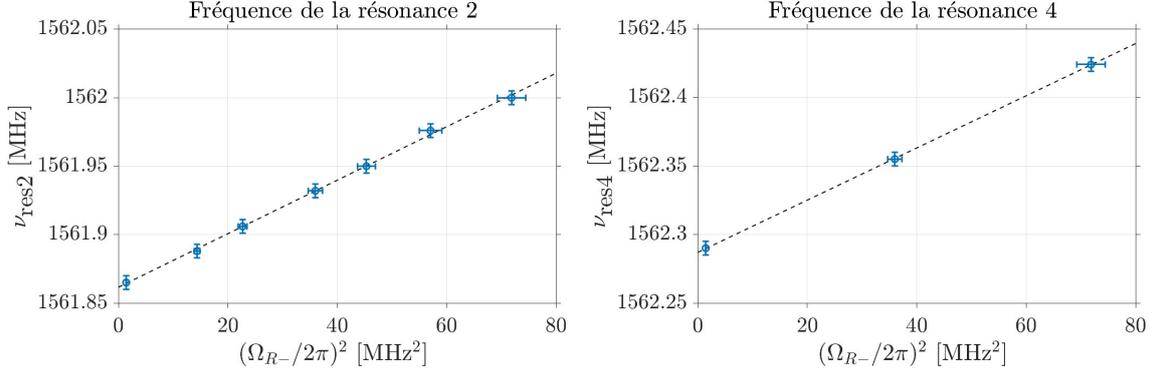
**Figure 4.21** — Figure de gauche : évolution du nombre d’atomes en fonction du temps pour une fréquence micro-onde à résonance de la transition vers l’état 4 (1562,358 MHz) avec une puissance micro-onde après amplificateur de 1,7 W et un couplage Rabi  $\Omega_{R+} = 2\pi \times 2,4$  MHz. Figure de droite : largeur en fréquence de la résonance vers l’état 4 pour une durée de la micro-onde de 100  $\mu\text{s}$  et une puissance de 1,7 W après amplificateur. En ajustant une fonction lorentzienne on trouve une largeur à mi-hauteur :  $\Gamma/2\pi \simeq 38$  kHz.

la polarisation  $\sigma^+$ , on observe des ordres de grandeurs similaires à ceux de l’état 2 pour les pertes. En effet, on peut voir sur la figure 4.21 que la moitié des atomes est perdue en un temps d’environ 100  $\mu\text{s}$  à résonance, soit un facteur 5 sur le temps par rapport à la transition vers l’état 2 dans les mêmes conditions. La largeur à mi-hauteur est un peu plus petite que pour la résonance 2, elle vaut  $\Gamma/2\pi \simeq 38$  kHz, pour la même puissance micro-onde que la courbe bleue de la figure 4.19, pour laquelle on avait trouvé  $\Gamma/2\pi \simeq 61$  kHz. En revanche le comportement est différent pour les transitions vers les états 1 et 3, avec des pertes beaucoup plus lentes, probablement parce que le couplage vers ces états est bien plus faible, ce qui voudrait dire que les largeurs pour les résonances de Feshbach associées seraient trop petites pour pouvoir les exploiter. En effet, le couplage vers l’état 3 se fait via la polarisation  $\pi$ , or nous avons vu que la composante du champ  $|B_\pi|$  est de l’ordre de 20 fois plus petite que  $|B_-|$  et  $|B_+|$ . Pour l’état 1, la transition se fait via la polarisation  $\sigma^+$ , mais sa décomposition dans la base des états à deux atomes est composée à seulement 10% d’un état avec  $f_1 = 1$  et  $m_{f_1} = -1$ . On arrive à observer des pertes de façon sélective pour ces deux transitions sur la spectroscopie micro-onde uniquement à basse puissance (inférieure à  $\sim 100$  mW après amplificateur) et pour des durées de l’ordre de centaines de ms. En effet, à haute puissance ( $\sim >1$  W) pour des temps « courts » (1-10 ms) on n’observe pas de pertes supplémentaires aux fréquences de résonance pour ces deux transitions. À haute puissance et pour des temps longs, l’élargissement de la raie 2 est si important qu’elle vient recouvrir les fréquences de résonance pour les transitions 1 et 3.

## 4.6 Déplacement des niveaux avec la puissance micro-onde

### 4.6.1 Déplacement des fréquences de résonance moléculaires

Lorsqu’on atteint des puissances micro-onde assez grandes au niveau des atomes, on mesure un déplacement des fréquences de résonance, qui augmente avec la puissance (voir figure 4.19). Cela est causé par le déplacement lumineux des niveaux d’énergie atomiques



**Figure 4.22** – Fréquences de résonance pour les transitions vers les états 2 (graphique de gauche) et 4 (graphique de droite) en fonction du carré de la fréquence de Rabi  $\Omega_{R-}/2\pi$ . Pour la configuration du champ micro-onde dans l'expérience on a  $\Omega_{R+} \simeq 1,12 \times \Omega_{R-}/\sqrt{6}$  et  $\Omega_{R\pi} \ll \Omega_{R-,+}$ . On a ajusté les données avec une fonction affine et on trouve un coefficient directeur  $\beta_2 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ MHz}^{-1}$  pour la résonance 2 et  $\beta_4 = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ MHz}^{-1}$  pour la résonance 4.

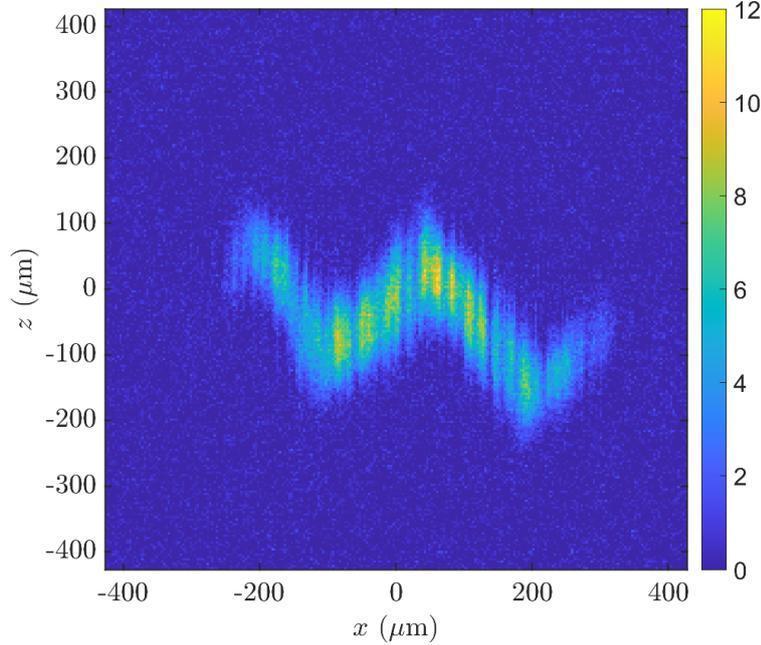
et moléculaires. Ce déplacement en fréquence est discuté dans l'article [59]. Dans la configuration décrite dans cet article, avec des atomes de sodium initialement dans l'état  $|f = 1, m_f = +1\rangle$  et une polarisation de la micro-onde purement  $\sigma^+$  qui couple vers l'état  $|f_1 = 1, f_2 = 2, m_{f_1} = 1, m_{f_2} = 2, +\rangle$ , la fréquence de résonance vaut  $\nu_{\text{res}} = \nu_{\text{res}}^0 + \alpha B_0^2$ , avec  $\alpha = 6,8 \text{ kHz} \cdot \text{G}^{-2}$ . On a donc un déplacement en fréquence linéaire avec la puissance de la micro-onde. On rappelle que  $B_0$  est défini par rapport au couplage de Rabi  $\Omega_R$  entre les états  $|f = 1, m_f = 1\rangle$  et  $|f = 2, m_f = 2\rangle$  :  $\mu_B B_0 = \hbar \Omega_R / 2$ . On a donc  $\nu_{\text{res}} = \nu_{\text{res}}^0 + \beta (\Omega_R / 2\pi)^2$  avec  $\beta = 0,86 \cdot 10^{-3} \text{ MHz}^{-1}$ . Sur la figure 4.22, on a tracé l'évolution des fréquences de résonance associées aux transitions vers les états 2 et 4 en fonction de la fréquence de Rabi  $\Omega_{R-}$  entre les niveaux  $|f_1 = 1, m_{f_1} = -1\rangle$  et  $|f_1 = 1, m_{f_1} = -2\rangle$ . On trouve bien un comportement linéaire avec la puissance du champ micro-onde, avec :

$$\nu_{\text{res}2,4} = \nu_{\text{res}2,4}^0 + \beta_{2,4} \left( \frac{\Omega_{R-}}{2\pi} \right)^2 \quad (4.32)$$

avec  $\beta_2 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ MHz}^{-1}$  et  $\beta_4 = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ MHz}^{-1}$ . On trouve donc quasiment le même déplacement pour ces deux résonances et environ un facteur 2 par rapport à la situation décrite dans l'article [59]. Notre configuration est différente car nous n'avons pas une polarisation circulaire pure mais quasiment une polarisation  $\sigma^- + \sigma^+$  (avec  $|B_+| = 1, 12 \times |B_-|$ ).

#### 4.6.2 Excitation du condensat et pertes d'atomes

Par ailleurs, nous voyons que le déplacement lumineux pour l'état atomique  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ , dû à la transition hyperfine atomique, entraîne une excitation du condensat selon la direction transverse et des pertes d'atomes lorsqu'on atteint des puissances micro-onde importantes au niveau des atomes, comme on peut le voir sur la figure 4.23. En effet, la puissance de la micro-onde n'est pas homogène, elle décroît très vite avec la distance au guide d'ondes et présente donc un fort gradient. La fréquence utilisée pour la transition moléculaire est décalée vers le rouge par rapport à la transition atomique, ce qui crée une force dipolaire qui



**Figure 4.23** – Excitations transverses du condensat causée par la force dipolaire de la micro-onde. On a appliqué la micro-onde pendant  $100 \mu\text{s}$  à une puissance de  $1,7 \text{ W}$  après l’amplificateur et une fréquence de  $1580 \text{ MHz}$  (désaccordée d’une vingtaine de mégahertz par rapport aux transitions moléculaires). On a attendu  $5 \text{ ms}$  dans le piège avant de faire un temps de vol de  $10 \text{ ms}$  et de prendre l’image. La fréquence d’oscillation transverse n’est pas uniforme dans le piège rapproché du guide d’ondes : on mesure une fréquence qui augmente le long du nuage de  $4,2 \text{ kHz}$  à  $4,6 \text{ kHz}$ . La force dipolaire crée une excitation transverse du nuage et les atomes oscillent à des fréquences légèrement différentes dans le piège durant les  $5 \text{ ms}$  qui suivent, ce qui est à l’origine de cette forme de « zigzag » sur l’image après un temps de vol.

attire les atomes vers le guide d’ondes, qui dérive d’une énergie potentielle :

$$U_{\text{dip}} \propto \frac{\Omega^2}{\omega_{\text{mw}} - \omega_{\text{at}}} \quad (4.33)$$

où  $\omega_{\text{mw}}/2\pi$  est la fréquence de la micro-onde et  $\hbar\omega_{\text{at}} = \Delta E_{\text{hf}}$ . Nous observons aussi une déformation du nuage d’atomes selon la direction longitudinale, ce qui veut dire que la puissance micro-onde n’est pas homogène le long du nuage (voir figure 4.24).

Ces excitations compliquent la mise en évidence d’un effet des résonances de Feshbach micro-onde sur la longueur de diffusion  $a$ . Pour éviter de créer ces excitations on peut augmenter lentement la puissance micro-onde grâce à l’atténuateur variable, à une fréquence légèrement désaccordé ( $\delta/2\pi \sim \text{MHz}$ ) par rapport aux résonances moléculaires pour éviter les pertes, afin que la force dipolaire entraîne un déplacement adiabatique du nuage d’atomes. On fait ensuite une rampe de fréquence rapide ( $\sim 10 \mu\text{s}$ ) vers les résonances moléculaires. Durant cette rampe de fréquence rapide la force dipolaire est quasiment inchangée car  $|\delta| \ll |\omega_{\text{mw}} - \omega_{\text{at}}| \simeq 2\pi \times 200 \text{ MHz}$ , et nous ne voyons pas d’excitation. Cependant, même

en utilisant ce protocole, au delà d'une certaine puissance micro-onde<sup>8</sup>, tous les atomes sont perdus. Nous pensons qu'ils rentrent en collision avec la puce à atomes.

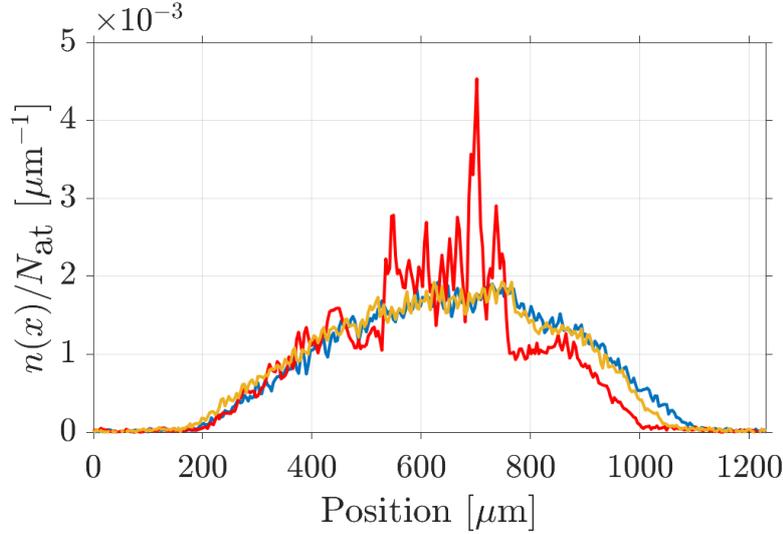
Une solution pour éviter les excitations mais aussi le déplacement et la déformation du piège est de compenser la force dipolaire qui s'exerce sur le nuage d'atomes en utilisant un deuxième signal micro-onde couplé dans le guide d'ondes, de même puissance et désaccordée vers le bleu par rapport à la transition atomique telle que :  $\omega_{mw2} - \omega_{at} = -(\omega_{mw} - \omega_{at})$ , afin d'avoir :  $U_{dip} + U_{dip2} = 0$ . Notons qu'on peut aussi utiliser un désaccord un peu différent et jouer sur le niveau de puissance pour compenser l'effet de la force dipolaire. En pratique, pour faire cela, on utilise une deuxième source micro-onde et on mélange les deux ondes grâce à un combineur radiofréquence (Mini Circuits modèle ZX10-2-252-S+), avant d'envoyer le signal dans le guide d'ondes. Sur la figure 4.24, on montre les profils longitudinaux du condensat après temps de vol sans micro-onde (courbe bleue), avec une micro-onde à une fréquence de 1570 MHz et une puissance après amplificateur de 2,5 W (courbe rouge) et en ajoutant une onde désaccordée vers le bleu pour compenser la force dipolaire (courbe jaune). Pour la courbe rouge, on s'est placé à une fréquence micro-onde désaccordée de quelques mégahertz par rapport aux transitions moléculaires, pour ne pas créer de pertes. On peut voir que le profil longitudinal est déformé lorsqu'on applique uniquement la micro-onde à 1570 MHz à cause d'une inhomogénéité de puissance le long du nuage d'atomes. Le décalage des atomes vers la gauche est causé par les pertes le long du guide d'ondes : il y a un peu plus de puissance à l'entrée du guide qu'en sortie. Nous avons en effet observé un décalage du nuage d'atomes vers l'autre côté, lorsqu'on inverse le sens dans lequel l'onde se propage en échangeant les câbles. L'accumulation des atomes vers le centre est probablement causée par des défauts du guide d'ondes. On peut voir que la courbe jaune, pour laquelle on a compensé la force dipolaire grâce à la deuxième onde, est quasiment superposée à la courbe bleue obtenue sans micro-onde. Pour ajuster plus finement la puissance de la deuxième onde afin de compenser au mieux la force dipolaire, il est en réalité plus sensible de chercher à supprimer les excitations transverses, plutôt que de regarder le profil longitudinal.

Grâce à cette technique de compensation de la force dipolaire, nous pouvons maintenant atteindre des puissances micro-onde plus importantes au niveau des atomes, donc des largeurs pour les résonances de Feshbach plus grandes, sans créer de déplacement du nuage d'atomes ni de pertes, ce qui paraît plus favorable pour mettre en évidence un effet sur la longueur de diffusion. En effet, nous avons vu que les inhomogénéités du champ magnétique statique sur la taille du condensat entraînent une variation de la fréquence de résonance vers l'état 2 qui vaut  $3\mu_{3D}/h$  entre le centre du nuage et les bords. Pour avoir une modification de la longueur de diffusion relativement homogène sur la taille du nuage, il faut donc atteindre ces ordres de grandeur pour la largeur de la résonance de Feshbach micro-onde.

## 4.7 Effet des résonances sur la longueur de diffusion ?

L'intérêt d'utiliser une résonance de Feshbach est de pouvoir contrôler les interactions entre les atomes en modifiant la longueur de diffusion  $a$ . Nous avons vu que les taux de pertes d'atomes mesurés autour des résonances moléculaires semblent limiter l'utilité des résonances de Feshbach micro-onde comme outil de contrôle de la longueur de diffusion. Nous aimerions cependant observer expérimentalement un effet des résonances sur cette longueur de diffusion. La difficulté pour mettre en évidence un tel effet réside dans la rapidité des pertes d'atomes :

8. Environ 6 W après amplificateur pour un piège initialement situé à une distance  $d = 23\mu\text{m}$  du guide d'ondes.



**Figure 4.24** – Profils de la densité longitudinale du condensat après 5 ms de temps de vol, normalisés par le nombre d’atomes et moyennés sur cinq répétitions de l’expérience. Pour la courbe bleue on n’a pas appliqué de champ micro-onde. Pour la courbe rouge on a envoyé un signal micro-onde pendant une durée de 15 ms à une puissance de 2,5 W après amplificateur et une fréquence de 1570 MHz. Pour la courbe jaune, on a envoyé un signal micro-onde à 1570 MHz pendant la même durée et à la même puissance que pour la courbe rouge, mais avec une deuxième fréquence à 1950 MHz, en ajustant la puissance afin de compenser le déplacement lumineux.

il faut donc penser à une expérience pendant laquelle la micro-onde est allumée pendant des temps très courts, de l’ordre de la dizaine de microsecondes.

Une idée simple pourrait être d’allumer la micro-onde au moment où on coupe le piège pour modifier brutalement la longueur de diffusion de  $a_{bg}$  à  $a'$  et mesurer le rayon de Thomas-Fermi du nuage d’atomes après temps de vol selon la direction transverse. Une augmentation de ce rayon de Thomas-Fermi dans le cas où  $a' > a_{bg}$  devrait être mesurable, même en allumant la micro-onde seulement pendant des temps de l’ordre de  $\omega_{\perp}^{-1} \simeq 40 \mu\text{s}$  pour limiter les pertes d’atomes (avec  $\omega_{\perp}/2\pi = \nu_{\perp} \simeq 4 \text{ kHz}$ ). Cependant, ce type de mesure ne semble pas réaliste sur notre expérience. En effet, il faudrait pouvoir couper le champ magnétique qui piège les atomes en un temps très petit devant  $\omega_{\perp}^{-1}$ , pour garder une longueur de diffusion  $a'$  constante pendant le temps de vol, car la fréquence de résonance dépend du champ magnétique statique. Actuellement, les champs magnétiques du piège sont coupés en un temps de l’ordre de la centaine de microsecondes.

Une autre idée pour mesurer une modification de la longueur de diffusion serait d’envoyer une impulsion micro-onde courte – c’est-à-dire de l’ordre d’une fraction de  $\nu_{\perp}^{-1} \simeq 250 \mu\text{s}$  – en gardant les atomes piégés, afin d’exciter le mode monopole transverse (dans la limite d’un gaz 3D). En effet, on a pour le rayon de Thomas-Fermi transverse :  $R_{\perp} \propto (Na)^{1/5}$ , avec  $N$  le nombre d’atomes et  $a$  la longueur de diffusion. Si on diminue la longueur de diffusion on s’attend à avoir une excitation du mode monopole qui commence par une contraction du condensat, tandis que si on augmente cette longueur de diffusion on s’attend à avoir une excitation qui démarre par une expansion du condensat. Il faut cependant pour cela que l’effet de la longueur de diffusion prédomine vis à vis des pertes d’atomes qui affectent le terme

$N$  dans l'expression de  $R_{\perp}$ . On peut ensuite observer cette excitation après temps de vol en mesurant l'évolution de la taille transverse du condensat en fonction du temps d'attente avant la coupure du piège. On s'attendrait à observer un déphasage de  $\pi$  entre les cas où on a diminué la longueur de diffusion et ceux où on l'a augmentée. Des mesures de l'excitation du monopole transverse ont récemment été effectuées sur l'expérience et un déphasage a été observé. Nous ne sommes cependant pour le moment pas capables de déterminer si ces observations peuvent être attribuées à une modification de la longueur de diffusion ou bien si elles s'expliquent simplement par les pertes d'atomes. Le déphasage pourrait en effet s'expliquer par des pertes inhomogènes sur la taille transverse du nuage, causées par l'inhomogénéité du champ magnétique statique et de la puissance micro-onde.

## 4.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude expérimentale des résonances de Feshbach induites par micro-onde. Nous avons vu que l'utilisation d'un guide micro-onde incorporé à une puce à atomes nous permet d'atteindre des amplitudes de champ micro-onde importantes au niveau des atomes pour les polarisations circulaires, de l'ordre de la dizaine de gauss. Ces niveaux d'amplitude micro-onde permettent en théorie d'atteindre des largeurs de plusieurs dizaines de kilohertz pour les résonances de Feshbach micro-onde dans le cas du sodium. Nous avons observé des résonances vers des niveaux moléculaires de l'état rovibrationnel le moins lié pour le canal  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$ , induites par un champ micro-onde. Nous avons notamment pu situer plus précisément l'énergie des niveaux de moment cinétique total  $F = 1, 3$  que ce que permettaient les travaux de photoassociation à deux photons. Les taux de pertes importants que nous mesurons au voisinage des résonances moléculaires à haute puissance micro-onde, avec la moitié des atomes perdus en quelques dizaines de microsecondes à résonance, semblent en contradiction avec ce qui était attendu par les auteurs de l'article [59] et paraissent limiter l'intérêt de ces résonances comme outil de contrôle de la longueur de diffusion. Il reste encore du travail pour mieux comprendre le mécanisme de ces pertes. Nous aimerions malgré tout mettre en évidence un effet de la modification de la longueur de diffusion au voisinage de ces résonances, comme attendu théoriquement, et des travaux dans ce sens sont en cours.

# Chapitre 5

## Dynamique hors équilibre d'un gaz de Bose unidimensionnel dans une boîte

En parallèle des travaux expérimentaux menés durant ma thèse, j'ai effectué des simulations numériques qui pourraient permettre de préparer une future expérience. Dans ce chapitre, nous nous intéressons à un gaz de Bose dégénéré unidimensionnel, piégé dans une boîte et conduit hors équilibre par un potentiel extérieur oscillant. Nous modélisons ce système à l'aide de l'équation de Gross-Pitaevskii dépendant du temps.

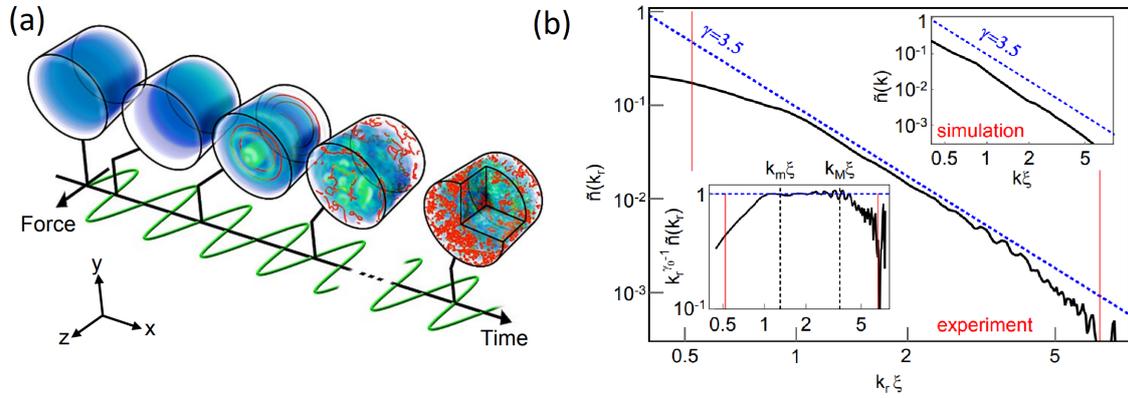
Nous présenterons l'expérience du groupe de Zoran Hadzibabic dont nous nous sommes initialement inspirés, avec comme objectif d'étendre cette étude au cas d'un gaz unidimensionnel au paragraphe 5.1. Nous introduirons ensuite les outils théoriques utilisés (5.2), ainsi que la méthode de résolution de l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle (5.3). Nous détaillerons les observations numériques que permettent ces simulations, notamment pour les profils de densité et les énergies du système (5.4) ainsi que pour les distributions en impulsion (5.5). Nous verrons que la transformée de diffusion inverse, qui permet de compter le nombre de solitons et de mesurer leurs vitesses, est une méthode très utile pour analyser ce système hors équilibre (5.6) et notamment sa distribution en impulsion (5.7). Enfin, nous discuterons des enjeux d'une mise en œuvre expérimentale (5.8).

### 5.1 Introduction

#### 5.1.1 L'expérience du laboratoire Cavendish

Sur une idée d'Anna Minguzzi nous nous sommes initialement inspirés des expériences menées dans le groupe de Zoran Hadzibabic à Cambridge, dans le cas tridimensionnel. Dans l'article [69], les auteurs étudient expérimentalement le régime de turbulences dans un condensat de Bose-Einstein de rubidium piégé dans une boîte optique cylindrique. Les résultats expérimentaux sont comparés à des simulations numériques résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii.

L'énergie est injectée à grande échelle grâce à un potentiel linéaire oscillant à la fréquence de résonance du mode axial le plus bas, puis se propage aux échelles plus petites et est finalement dissipée par la coupure en impulsion imposée par la profondeur finie du piège. Un régime stationnaire s'installe pour la distribution en impulsion avec une loi de puissance en



**Figure 5.1** – Figure tirée de l'article [69]. (a) Simulations de l'équation de Gross-Pitaevskii de l'excitation du condensat de rubidium, piégé dans une boîte cylindrique, par un potentiel linéaire oscillant au cours du temps. (b) Distribution en impulsion du gaz turbulent. Une loi de puissance stationnaire  $n(k) \propto k^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \simeq 3,5$  est observée à la fois dans l'expérience et les simulations de l'équation de Gross-Pitaevskii (en insert). Celle-ci est la signature d'une cascade turbulente.

$n(k) \propto k^{-3,5}$ , comme on peut le voir sur la figure 5.1. Ici,  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde, il est relié à l'impulsion par la loi  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck réduite. Cette loi de puissance a été trouvée à la fois par les simulations de l'équation de Gross-Pitaevskii et les données expérimentales. Elle traduit l'émergence d'une cascade turbulente. On peut expliquer cette loi de puissance stationnaire en utilisant la théorie de turbulence d'onde faible<sup>1</sup> qu'on introduira au paragraphe 5.2.2. En effet, cette théorie prévoit un spectre de Kolmogorov-Zakharov avec une loi de puissance en  $k^{-3}$  pour l'équation de Gross-Pitaevskii à trois dimensions [70]. L'écart entre la valeur de la puissance pour l'expérience et la théorie s'explique par le fait que la solution en  $k^{-3}$  n'est pas exacte et nécessite une correction logarithmique qui réconcilie théorie et expérience [135].

### 5.1.2 Motivations

La dimension du système joue un rôle clé dans l'étude des régimes turbulents et nous nous attendons donc à trouver un comportement différent pour la même expérience menée sur un gaz de Bose unidimensionnel. Pour étudier ce système, nous faisons des simulations numériques résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension, avec un potentiel extérieur linéaire oscillant au cours du temps pour exciter le système, et comme conditions aux limites des murs infinis. L'une des motivations de ces simulations numériques est de poser les bases pour une étude expérimentale ultérieure. En effet, nous disposons d'une expérience qui produit des gaz de Bose dégénérés unidimensionnels de sodium. Actuellement, les atomes sont piégés dans un potentiel harmonique dans la direction longitudinale. Il est cependant prévu de le remplacer prochainement par un potentiel de type boîte, en utilisant un laser à 532 nm désaccordé vers le bleu de la raie  $D_2$  du sodium et une matrice de micro-miroirs. Ce dispositif permettrait de créer un potentiel optique répulsif arbitraire comme dans l'article [122]. Pour

1. Voir le livre de Sergey Nazarenko [71] pour approfondir.

faire cette expérience il suffirait alors d'utiliser des bobines en configuration anti-Helmholtz pour créer un gradient de champ magnétique selon l'axe  $x$ , qui permettrait de conduire le système hors d'équilibre. On pourrait produire un potentiel linéaire oscillant comme dans [69] en variant sinusoidalement le courant dans ces bobines.

## 5.2 Cadre théorique

Dans cette partie nous résumerons d'abord notre approche du problème, puis nous expliciterons les différents concepts théoriques introduits.

### 5.2.1 Cheminement

N'étant pas spécialistes de l'étude des régimes turbulents, nous avons eu une première approche assez naïve, avant de mieux comprendre dans quel cadre théorique nous devons nous placer.

Nous modélisons le système avec l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle répulsive, qui décrit le gaz de Bose unidimensionnel, avec un potentiel extérieur linéaire oscillant au cours du temps pour conduire le système hors équilibre. Nous avons vu dans le chapitre 1 au paragraphe 1.1.2 qu'un gaz de Bose 1D à l'équilibre dans le régime de quasi-condensat peut être décrit par l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle (1.46). La forme dépendant du temps en présence d'un potentiel extérieur  $U$  est donnée par :

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + gN|\psi|^2\psi + U\psi, \quad (5.1)$$

où on a remplacé  $g_{1D}$  par  $g$  et  $\psi_{1D}$  par  $\psi$  afin d'alléger les notations. Après avoir résolu numériquement cette équation, nous avons commencé par étudier l'évolution temporelle du profil de densité. Nous observons notamment l'apparition de solitons gris. Nous avons ensuite étudié la distribution en impulsion et avons trouvé deux lois de puissance stationnaires dans le cas unidimensionnel :  $n(k) \propto k^{-2}$  et  $n(k) \propto k^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \in [7, 9]$ . Dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii à trois dimensions, la loi de puissance  $n(k) \propto k^{-3}$  pour la distribution en impulsion est la signature d'une cascade turbulente et correspond donc à un spectre de Kolmogorov-Zakharov [70]. Elle est prédite par la théorie de turbulence d'onde faible. Nous avons dans un premier temps essayé d'interpréter les lois de puissance pour le système unidimensionnel à l'aide de cette théorie. Cependant, elle n'est pas adaptée à l'équation de Gross-Pitaevskii dans le cas unidimensionnel (voir la discussion au paragraphe 5.2.2).

L'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension est intégrable au sens de la transformation de diffusion inverse, dans le cas où il n'y a pas de potentiel extérieur et pour un système de taille infinie ou avec des conditions aux limites périodiques. En 2009, Zakharov ouvre un nouveau chapitre dans le domaine des turbulences d'onde en introduisant les turbulences dans les systèmes intégrables [75]. Une description de notre système utilisant les méthodes de transformation de diffusion inverse, qui permet notamment d'étudier les solitons, semble plus indiquée pour le système qui nous intéresse et c'est ce vers quoi nous nous sommes tournés. La loi en  $n(k) \propto k^{-2}$  a d'ailleurs déjà été observée dans [136] et s'explique par la distribution en impulsion d'un soliton à petits nombres d'onde. La méthode de transformation de diffusion inverse nous permet d'obtenir le spectre de Lax, à partir duquel nous pouvons compter les solitons dans le système et connaître leurs vitesses de propagation, de façon plus fiable qu'en étudiant le profil de densité. Nous pouvons relier ces informations à l'énergie du système et à sa distribution en impulsion.

### 5.2.2 Turbulence d'onde faible

La turbulence d'onde s'intéresse aux systèmes de mécanique statistique hors équilibre d'ondes non-linéaires aléatoires [71]. Dans cette théorie, les turbulences sont associées aux ondes et pas aux tourbillons. Le système est décrit par des flux d'énergie (ou éventuellement de particules) à travers les échelles spatiales.

Le cas d'ondes faiblement non-linéaires – c'est-à-dire d'ondes d'amplitudes suffisamment faibles pour qu'on puisse les traiter comme des ondes linéaires indépendantes sur des temps courts – et dispersives est le plus étudié, car il est bien décrit mathématiquement. On peut appliquer les théories de la turbulence d'onde faible à une large classe de problèmes physiques, dont les équations de Gross-Pitaevskii à deux et trois dimensions, pour lesquels on trouve des spectres avec des lois de puissance stationnaires en  $n(k) \propto k^{-\gamma}$  [70]. Ces spectres sont appelés spectres de Kolmogorov-Zakharov<sup>2</sup> et témoignent de l'émergence de cascades en énergie (ou en particules).

Pour trouver les spectres de Kolmogorov-Zakharov il faut trouver la condition de résonance à  $N$  ondes à partir de la relation de dispersion, c'est-à-dire le plus petit  $N$  pour lequel on a une solution non triviale des équations :

$$\begin{cases} \omega(\vec{k}_1) \pm \omega(\vec{k}_2) \pm \dots \pm \omega(\vec{k}_N) = 0 \\ \vec{k}_1 \pm \vec{k}_2 \pm \dots \pm \vec{k}_N = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

Il faut ensuite trouver une équation cinétique pour la densité dans l'espace des  $k$ , de la forme :

$$\frac{\partial n(k)}{\partial t} = f(k, n(k)) \quad (5.3)$$

puis chercher des solutions stationnaires à cette équation sous la forme  $n(k) = Ak^\nu$ . Pour l'équation de Gross-Pitaevskii à trois dimensions, on trouve une condition de résonance à 4 ondes et une solution stationnaire  $n(k) = Ak^{-3}$ , qui correspond à une cascade en énergie des grandes échelles spatiales (petits  $k$ ) vers les petites échelles spatiales (grands  $k$ ). Cette loi de puissance a été observée dans l'expérience de Cambridge [69]. En revanche, pour l'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension il n'existe pas de solution non triviale pour les conditions de résonances à  $N$  ondes [71]. On ne peut donc pas appliquer cette théorie au système que nous étudions et les éventuelles lois de puissance qu'on observe dans la distribution en impulsion ne correspondent pas à des cascades d'énergie. Pour analyser nos observations nous nous sommes donc tournés vers le domaine des turbulences intégrables.

### 5.2.3 Turbulences intégrables

Vladimir Zakharov introduit en 2009 les turbulences dans les systèmes intégrables dans [75] comme étant un nouveau chapitre de la théorie des turbulences d'onde. Le domaine des turbulences intégrables s'intéresse aux équations intégrables par transformée de diffusion inverse, telles que l'équation de Korteweg-De Vries, l'équation de Sine-Gordon, ou bien l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle<sup>3</sup> à laquelle on s'intéresse, en l'absence de potentiel extérieur. Ces équations possèdent une infinité de constantes du mouvement et ont en commun la propagation de solitons. Le champ de recherche des turbulences intégrables est très actif

2. Ils sont analogues au spectre de Kolmogorov pour les turbulences en hydrodynamique :  $E(k) \propto k^{-5/3}$  avec  $E$  la densité d'énergie.

3. Plus communément appelée équation de Schrödinger non-linéaire dans la communauté de la physique du non-linéaire.

dans la communauté de la physique du non-linéaire, notamment en optique non-linéaire qui travaille avec l'équation de Gross-Pitaevskii 1D attractive ( $g < 0$ ) [76]. Le cas attractif permet en effet de décrire certains phénomènes intéressants tels que les « vagues scélérates » [137]. Le cas des turbulences pour des systèmes décrits par l'équation de Gross-Pitaevskii répulsive ( $g > 0$ ), à laquelle nous nous intéressons, a été beaucoup moins étudié [138].

### 5.2.4 Solitons

Les solitons sont des solutions d'équations non-linéaires, telles que l'équation de Korteweg-De Vries ou de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, qui correspondent à des ondes solitaires qui se propagent à vitesse constante sans déformation. Dans le cas de l'équation de Gross-Pitaevskii répulsive, les solitons se manifestent par une déplétion locale de la densité de probabilité [139] : on les appelle solitons noirs lorsque la densité tombe à zéro au centre du soliton ou gris lorsqu'elle n'est pas nulle au minimum. Si on considère un état avec un soliton qui se raccorde à une densité homogène  $n_0$  en dehors du soliton, on a [136] :

$$\psi(x, t) = \sqrt{n_0} \left[ \Gamma^{-1} \tanh \left( \frac{x - x_s(t)}{\sqrt{2}\Gamma\xi} \right) + i\nu \right] \quad (5.4)$$

avec  $\xi = \hbar/\sqrt{2\mu m}$  la longueur de relaxation à l'équilibre,  $\nu = v/c$  la vitesse du soliton normalisée par la vitesse du son  $c = \sqrt{gn_0/m}$ ,  $x_s(t) = x_0 + vt$  la position du soliton et  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - \nu^2}$ . Le paramètre  $\nu$ , qui peut varier entre 0 et 1, permet de caractériser le « niveau de gris » du soliton : pour  $\nu = 0$  on a un soliton noir avec une densité nulle à la position  $x_s = x_0$ , tandis que pour  $\nu = 1$  le soliton disparaît et la densité est homogène.

### 5.2.5 Équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle adimensionnée

Soit une longueur  $L$ , on peut adimensionner l'équation de Gross-Pitaevskii (5.1) qui devient :

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{g}N |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} + \tilde{U} \tilde{\psi}. \quad (5.5)$$

où les grandeurs physiques ont été adimensionnées de la sorte :

$$\begin{cases} \tilde{x} = \frac{x}{L} \\ \tilde{t} = \frac{\hbar t}{mL^2} \\ \tilde{\psi} = \psi \sqrt{L} \end{cases} \quad (5.6)$$

On a alors :  $\tilde{g} = gmL/\hbar^2$  et  $\tilde{U} = UmL^2/\hbar^2$ . La condition de normalisation  $\int_0^L d\tilde{x} |\tilde{\psi}(\tilde{x})|^2 = 1$  est préservée. On peut introduire également des grandeurs physiques utiles adimensionnées : le potentiel chimique  $\mu \simeq gN/L$  devient  $\tilde{\mu} = \mu mL^2/\hbar^2 \simeq \tilde{g}N$ , la longueur de relaxation  $\xi = \sqrt{\hbar^2/(2\mu m)}$  devient  $\tilde{\xi} = 1/\sqrt{2\tilde{\mu}} \simeq 1/\sqrt{2\tilde{g}N}$  et la vitesse du son  $c_0 \simeq \sqrt{\mu/m}$  devient  $\tilde{c}_0 \simeq \sqrt{\tilde{\mu}} \simeq \sqrt{\tilde{g}N}$ .

### 5.2.6 Transformée de diffusion inverse

La transformée de diffusion inverse est une méthode mathématique qui peut être appliquée aux systèmes intégrables, c'est-à-dire à des systèmes possédant une infinité de constantes

du mouvement. Le livre de Ablowitz et Segur [77] en introduit le formalisme général. Elle constitue une sorte de généralisation de la transformée de Fourier appliquée aux équations aux dérivées partielles non-linéaires. Elle permet de résoudre certaines d'entre elles, dont l'équation de Gross-Pitaevskii sans potentiel extérieur :

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{g} N |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi}. \quad (5.7)$$

L'une des définitions de l'intégrabilité de cette équation est qu'il existe deux matrices  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{A}$ , appelées paire de Lax, telles que :

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{t}} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{g} N |\tilde{\psi}|^2 \tilde{\psi} \Leftrightarrow i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{t}} = [\mathcal{A}, \mathcal{L}]. \quad (5.8)$$

Pour l'équation de Gross-Pitaevskii, la matrice de Lax vaut :

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} & -\sqrt{\tilde{g} N} \tilde{\psi} \\ \sqrt{\tilde{g} N} \tilde{\psi}^* & -\frac{\partial}{\partial \tilde{x}} \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Elle est hermitienne donc diagonalisable : il existe une base de vecteurs propres  $u$  tels que  $\mathcal{L}u = \zeta u$ . Les valeurs propres  $\zeta$ , appelées spectre de Lax, sont indépendantes du temps : ce sont des constantes du mouvement.

En effet, si on dérive l'équation  $\mathcal{L}u = \zeta u$  par rapport au temps on obtient :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{t}} u + \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{t}} u + \zeta \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}}. \quad (5.10)$$

Or

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{t}} = -i\mathcal{A}\mathcal{L} + i\mathcal{L}\mathcal{A}, \quad (5.11)$$

d'où

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tilde{t}} u = -i\mathcal{A}\mathcal{L}u + i\mathcal{L}\mathcal{A}u = -i\mathcal{A}\zeta u + i\mathcal{L}\mathcal{A}u = i(\mathcal{L} - \zeta)\mathcal{A}u. \quad (5.12)$$

On peut alors réécrire l'équation (5.10) sous la forme :

$$i(\mathcal{L} - \zeta)\mathcal{A}u + \mathcal{L} \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{t}} u + \zeta \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} \quad (5.13)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{t}} u = i(\mathcal{L} - \zeta)\mathcal{A}u + (\mathcal{L} - \zeta) \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} = (\mathcal{L} - \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + i\mathcal{A}u \right). \quad (5.14)$$

En multipliant à gauche par  $u^\dagger$  on trouve finalement :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{t}} u^\dagger u = u^\dagger (\mathcal{L} - \zeta) \left( \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}} + i\mathcal{A}u \right) = 0 \quad (5.15)$$

car  $u^\dagger \mathcal{L} = u^\dagger \zeta$ . On en déduit que  $\partial \zeta / \partial \tilde{t} = 0$  car  $u$  est non nul. Par ailleurs, comme  $\partial \zeta / \partial \tilde{t} = 0$  on déduit de 5.14 que  $\partial u / \partial \tilde{t} = -i\mathcal{A}u$ . La matrice  $\mathcal{A}$  gouverne donc l'évolution des  $u$ .

Dans la limite thermodynamique, où on considère un système de taille infini, le spectre de Lax est composé de deux branches continues, séparées par un espace égal à la vitesse du son, dans lequel on trouve des valeurs propres discrètes. Ces valeurs propres  $\zeta$  sont les solutions associées aux solitons présents dans le système et valent  $\zeta = -\tilde{v}/2$ , où  $\tilde{v} = vmL/\hbar$  est la vitesse adimensionnée du soliton correspondant.

### 5.3 Méthode

Dans les simulations qui résolvent l'équation de Gross-Pitaevskii 1D adimensionnée, nous nous plaçons dans un potentiel initial de type « boîte » de taille  $L$  avec des murs infinis en  $x = 0$  et  $x = L$ , que nous prenons en compte en imposant les conditions aux limites  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ . Nous conduisons le système hors d'équilibre en utilisant un potentiel extérieur supplémentaire.

Nous avons principalement travaillé avec un potentiel linéaire oscillant sinusoïdalement au cours du temps :

$$U(x, t) = \frac{U_0}{L} \left( x - \frac{L}{2} \right) \sin(\omega t). \quad (5.16)$$

Pour la pulsation, on choisit de se placer à  $\omega = 2\pi c_0/(2L)$ , avec  $c_0$  la vitesse du son pour le système à l'équilibre. Une période  $T$  est alors égale au temps nécessaire pour faire un aller-retour dans la boîte à la vitesse du son, ce qui correspond à la fréquence du mode propre le plus bas – dans la limite où la longueur de relaxation  $\xi$  est très inférieure à la taille de la boîte  $L$  – et permet d'exciter le système à grande échelle. Pour l'amplitude  $U_0$ , la bonne échelle en énergie est le potentiel chimique  $\mu$ .

Nous avons fait des simulations en testant différentes valeurs de l'amplitude d'excitation du potentiel adimensionné  $\tilde{U}_0 = U_0 m L^2 / \hbar^2$ , qu'il est pertinent de comparer au potentiel chimique à l'équilibre  $\tilde{\mu}$ . Par ailleurs, nous avons pris  $\tilde{g}N = 2a\omega_{\perp} N m L / \hbar$  fixé à  $10^4$  pour la plupart des simulations, car il s'agit de l'ordre de grandeur qui serait réalisable sur notre expérience d'atomes froids. En effet, en prenant une fréquence d'oscillation transverse  $\omega_{\perp}/2\pi = 2$  kHz, un nombre d'atomes  $N = 5000$  et une longueur de boîte  $L = 100$   $\mu\text{m}$ , qui correspondent à des valeurs typiquement réalisables, nous trouvons  $\tilde{g}N = 1,3 \cdot 10^4$ . Dans la suite du manuscrit nous continuerons d'utiliser les variables adimensionnées mais nous abandonnerons les  $\sim$  pour plus de lisibilité.

Pour les simulations, nous utilisons le logiciel de calcul numérique Octave, avec un code développé par Romain Dubessy. On initialise la fonction d'onde avec la méthode du temps imaginaire en prenant un potentiel extérieur nul, ce qui nous permet de converger vers la solution de l'équation à l'équilibre. Pour cela, on définit un temps  $d\tau = -idt$  où  $i$  est l'unité imaginaire et  $dt$  un pas temporel qui est choisi suffisamment petit pour assurer la convergence de l'intégration numérique. On choisit comme fonction de départ  $\psi_0$  une fonction constante et correctement normalisée :  $\int_0^L dx |\psi_0(x)|^2 = 1$ . On applique ensuite la méthode du « splitting » pour calculer l'évolution en temps imaginaire pendant l'intervalle  $d\tau$  :

$$\begin{cases} \psi \leftarrow \exp\left(-i\frac{d\tau}{2}gN|\psi|^2\right)\psi \\ \psi \leftarrow \text{DST}^{-1}\left[\exp\left(-i\frac{d\tau}{2}k^2\right)\text{DST}[\psi]\right] \\ \psi \leftarrow \exp\left(-i\frac{d\tau}{2}gN|\psi|^2\right)\psi \end{cases} \quad (5.17)$$

où DST est la transformée en sinus discrète et  $\text{DST}^{-1}$  est la transformée inverse. On utilise la transformée de sinus discrète plutôt que la transformée de Fourier car nous n'avons pas choisi des conditions aux limites périodiques mais des murs infinis qui imposent  $\psi(0) = \psi(L) = 0$ , plus réalistes pour l'expérience. La transformée en sinus discrète d'une fonction  $x(j)$  pour  $j \in \llbracket 1; N_p \rrbracket$  est donnée par

$$y(k) = \sum_{j=1}^{N_p} x(j) \sin\left(\frac{\pi k j}{N_p + 1}\right) \quad (5.18)$$

et la transformée inverse est donnée par :

$$x(j) = \frac{2}{N_p + 1} \sum_{k=1}^{N_p} y(k) \sin \left( \frac{\pi k j}{N_p + 1} \right). \quad (5.19)$$

Dans l'espace réciproque,  $\partial^2/\partial x^2$  devient simplement  $-k^2$ , avec  $k = \pi n/L$ , où  $n$  est la liste d'entiers compris entre 1 et le nombre de pas de la grille spatiale  $N_p$ . De plus, dans l'espace réel on effectue un schéma d'intégration découpé en deux étapes, avant et après la transformée en sinus discrète, afin d'assurer la convergence. À la fin de chaque boucle on calcule  $A = \int_0^L dx |\psi(x)|^2$  et on renormalise la fonction  $\psi$  :  $\psi \leftarrow \psi/\sqrt{A}$ . On calcule aussi la quantité  $\mu = -\ln(A)/|2d\tau|$ , qui converge vers le potentiel chimique. Lorsque l'écart relatif entre l'ancienne et la nouvelle valeur de  $\mu$  devient inférieur à une « valeur de tolérance »  $\delta$ , on divise  $\delta$  par 10 et  $d\tau$  par 2 et on applique de nouveau la procédure précédente. On s'arrête lorsque  $\delta$  devient inférieure à une valeur  $\delta_{\min}$  définie initialement. Nous avons choisi comme paramètres initiaux  $\mu_0 = 0$ ,  $\delta_0 = 10^{-3}$ ,  $d\tau_0 = -10^{-4} \times i$ , ainsi que  $\delta_{\min} = 10^{-13}$ . Un exemple de profil de densité  $|\psi|^2$  de la fonction  $\psi$  obtenu par cette procédure est représenté en bleu sur la figure 5.4.

Une fois la fonction  $\psi$  correctement initialisée, on calcule son évolution au cours du temps en résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii avec comme potentiel extérieur  $U(x, t)$ . La résolution se fait dans l'espace des  $k$ , en utilisant une transformée en sinus discrète. Soit  $y = \text{DST}[\psi]$ , on veut résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -i \left( \frac{1}{2} k^2 y - \mu y + \text{DST} [(gN|\psi|^2 + U) \psi] \right). \quad (5.20)$$

Dans cette équation, nous nous sommes placés dans le référentiel tournant à la fréquence  $\mu/\hbar$ , ce qui explique l'apparition du terme  $-\mu y$ , afin de faciliter la résolution numérique. Pour résoudre l'équation on utilise la fonction `ode45` d'Octave. Cette fonction résout les équations de la forme  $y' = f(t, y)$ , lorsqu'on lui donne en argument la fonction  $f$ , la plage de temps  $t$  et le vecteur de condition initiale  $y_0$ , avec un algorithme d'ordre 4 en temps à pas adaptatif. Il suffit donc en principe de lui donner comme fonction le terme de droite de l'équation (5.20) et comme condition initiale la transformée en sinus discrète de la fonction  $\psi$  précédemment initialisée. En réalité, la méthode de résolution est un peu plus compliquée car il faut éviter les problèmes de repliement de spectre. Pour cela, on limite la grille des  $k$  à une valeur de coupure  $k_c = 2k_{\max}/3$ . Soit  $P$  la projection sur cet espace de  $k$  restreint, on utilise alors la fonction :

$$f(t, y) = -iP \left( \frac{1}{2} k^2 y - \mu y + \text{DST} [\rho \psi] \right) \quad (5.21)$$

avec

$$\rho = \text{DST}^{-1} [P \{ \text{DST} (gN|\psi|^2 + U) \}]. \quad (5.22)$$

Nous travaillons avec une grille spatiale avec  $N_p = 1024$  points répartis uniformément entre  $x_1 = 1/(N_p + 1)$  et  $x_{N_p} = N_p/(N_p + 1)$  (les points 0 et  $L$  sont exclus). Nous avons ainsi un espace entre deux points  $\Delta x = 1/(N_p + 1) = 9,8 \cdot 10^{-4}$  petit devant  $\xi = 1/\sqrt{2gN} = 7 \cdot 10^{-3}$  pour les grandeurs adimensionnées.

## 5.4 Observations sur le profil de densité et l'énergie

### 5.4.1 Profils de densité

Nous nous sommes d'abord intéressés au profil de la densité au cours du temps lors de l'excitation par le potentiel extérieur  $U$ . Sur la figure 5.2, on a représenté les cartes de la densité  $n(x, t) = |\psi(x, t)|^2$  au cours du temps, pour deux amplitudes d'excitation du potentiel :  $U_0 = 0,1 \mu$  et  $U_0 = \mu$ . On représente la distance en unités de la taille de la boîte  $L$  et le temps en unités de la période  $T$  du potentiel  $U$ . On rappelle qu'on a choisi comme condition de normalisation pour la densité :  $\int_0^L |\psi(x, t)|^2 dx = 1$ .

Sur ces cartes, on peut voir une oscillation de la densité le long de la boîte, avec des alternances de zones claires – qui correspondent à une densité supérieure à la densité moyenne – et de zones sombres – qui correspondent à une densité inférieure à la densité moyenne. On a représenté la position du centre de masse au cours du temps  $\int_0^L x |\psi(x, t)|^2 dx$  sur la figure 5.3 pour les deux amplitudes  $U_0 = 0,1 \mu$  et  $U_0 = \mu$ . On observe une oscillation du centre de masse qui témoigne d'une injection d'énergie à grande échelle. Au départ, l'amplitude d'oscillation du centre de masse est d'autant plus marquée que celle du potentiel est grande, mais celle-ci s'amortit après quelques périodes. On peut aussi s'intéresser à la densité de courant moyenne :

$$\langle J \rangle = \frac{1}{i} \int_0^L \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) dx \quad (5.23)$$

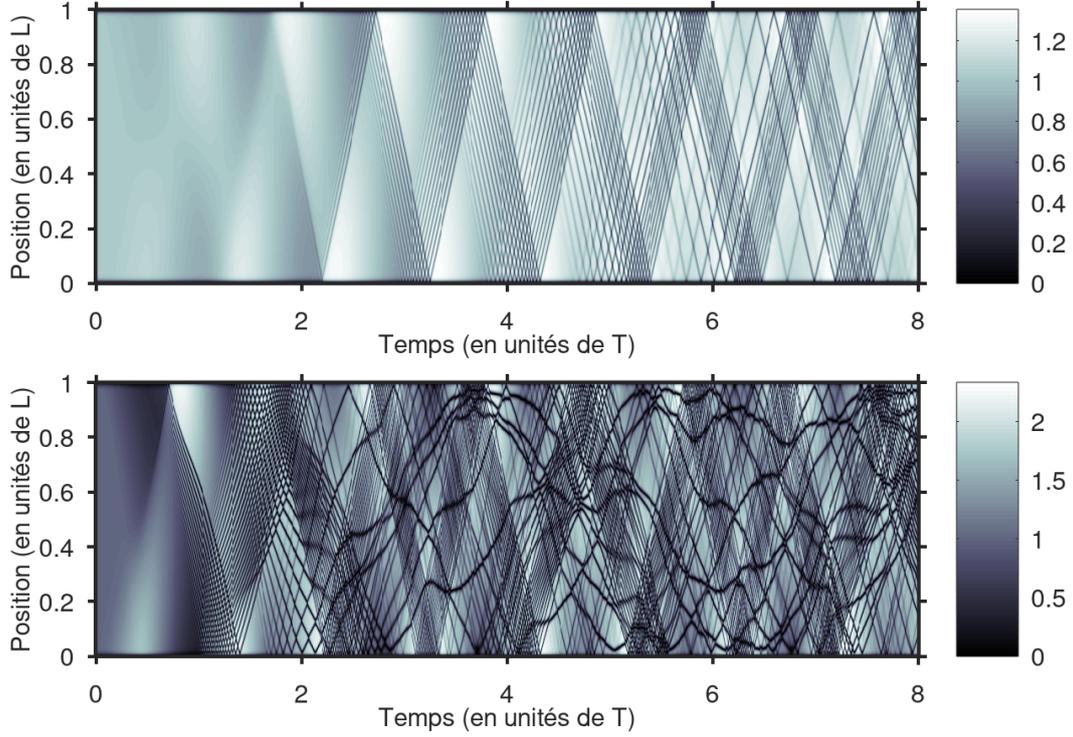
qu'on a tracé en regard du centre du masse sur la figure 5.3. On peut voir que la densité de courant moyenne précède légèrement le mouvement du centre de masse.

On observe aussi sur les cartes (figure 5.2) l'apparition de trains de solitons gris, qui correspondent à des déplétions locales de la densité. Pour de faibles amplitudes du potentiel  $U_0 \ll \mu$ , les solitons sont peu profonds et se propagent à des vitesses proches de la vitesse du son et en ligne droite. On peut vérifier que, sur des trains de solitons qui ont des trajectoires quasiment parallèles, les solitons les plus à droite – donc ceux qui se déplacent plus lentement – sont plus contrastés que les solitons les plus à gauche. Les solitons se réfléchissent sur les bords de la boîte.

Pour des amplitudes plus élevées  $U_0 \geq \mu$ , on observe l'apparition de solitons plus nombreux, plus fins, avec un contraste de la densité plus important (voir figure 5.4). Le système est moins ordonné car les vitesses des solitons sont plus diverses : on voit nettement qu'on a des pentes différentes pour les trajectoires. Certains solitons très « sombres » et lents font même demi-tour au milieu de la boîte. On peut également remarquer sur les pentes des trajectoires que certains solitons clairs se déplacent à une vitesse plus rapide que la vitesse du son à l'équilibre. On observe ainsi une pente maximale qui correspond à une vitesse d'environ  $1,4 c_0$  pour les solitons les plus clairs (voir figure 5.5). Cela signifie que dans ces systèmes très hors équilibre, la vitesse du son effective est plus grande que la vitesse du son à l'équilibre  $c_0$ . On peut aussi remarquer sur la figure 5.4 que la longueur de relaxation  $\xi$  diminue pour les systèmes hors équilibre. En effet, cette taille est définie par la distance sur laquelle on passe d'une densité maximale à une densité nulle. En regardant sur les bords de la boîte, on observe que cette taille est plus grande pour la courbe bleue, qui correspond au système à l'équilibre, que pour les courbes rouge et verte.

### 5.4.2 Énergie

Nous nous sommes ensuite intéressés à l'évolution de l'énergie du système au cours du temps, notamment pour vérifier que nous injectons bien de l'énergie avec le potentiel  $U$ . Les



**Figure 5.2** – Carte du profil de densité au cours du temps pour 8 périodes d'oscillation du potentiel. Une période est donnée par  $T = 2L/\sqrt{gN} \simeq 2L/c$ , soit le temps pour faire un aller-retour dans la boîte à la vitesse du son. Ici  $gN = 10^4$ ,  $U_0 = 0,1 \mu$  pour la première image et  $U_0 = \mu$  pour la seconde image. Plus la couleur est sombre, plus la densité est faible.

trois énergies du système sont l'énergie potentielle, l'énergie cinétique et l'énergie d'interaction, qu'on donne sous une forme adimensionnée. L'énergie potentielle par atome vaut :

$$E_p(t) = \int_0^L |\psi(x,t)|^2 U(x,t) dx. \quad (5.24)$$

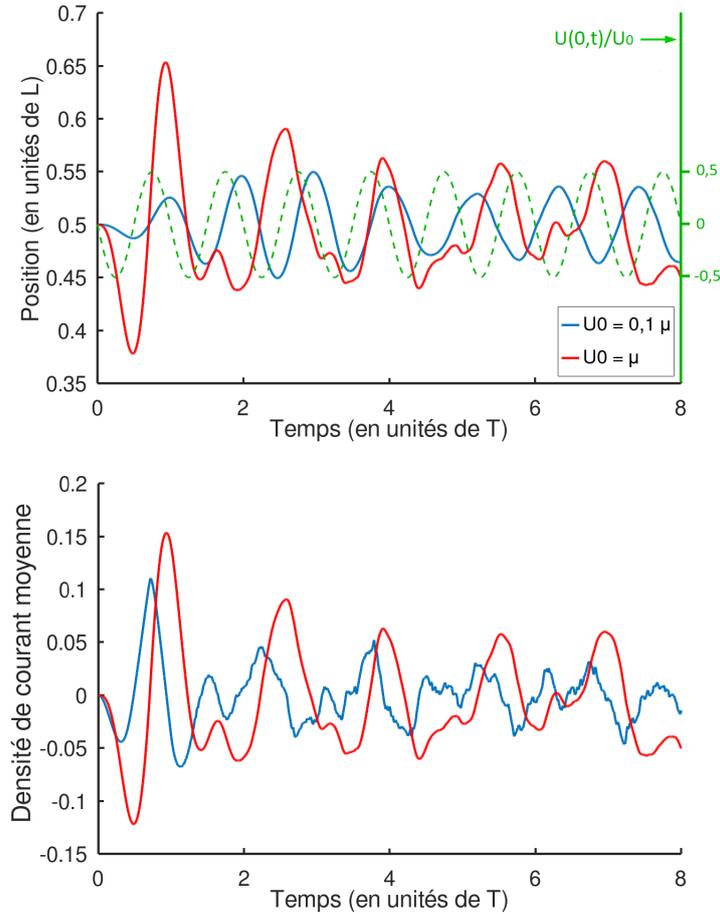
L'énergie cinétique par atome vaut :

$$E_c(t) = \int_0^L \frac{1}{2} \left| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \right|^2 dx = \frac{1}{N_k} \sum_k \frac{k^2}{2} |\psi(k,t)|^2 \quad (5.25)$$

où  $N_k$  vaut  $\sum_k |\psi(k)|^2$ . Enfin, l'énergie d'interaction par atome vaut :

$$E_{\text{int}}(t) = \int_0^L \frac{gN}{2} |\psi(x,t)|^4 dx. \quad (5.26)$$

L'énergie totale ainsi que les énergies d'interaction, cinétique et potentielle, pour  $U_0 = \mu$  et  $gN = 10^4$ , durant un temps de 32 périodes  $T$  sont représentées sur la figure 5.6. L'énergie totale est dominée par les énergies cinétique et d'interaction. On observe une première phase d'augmentation durant laquelle l'énergie totale est doublée, suivie de quatre oscillations à une

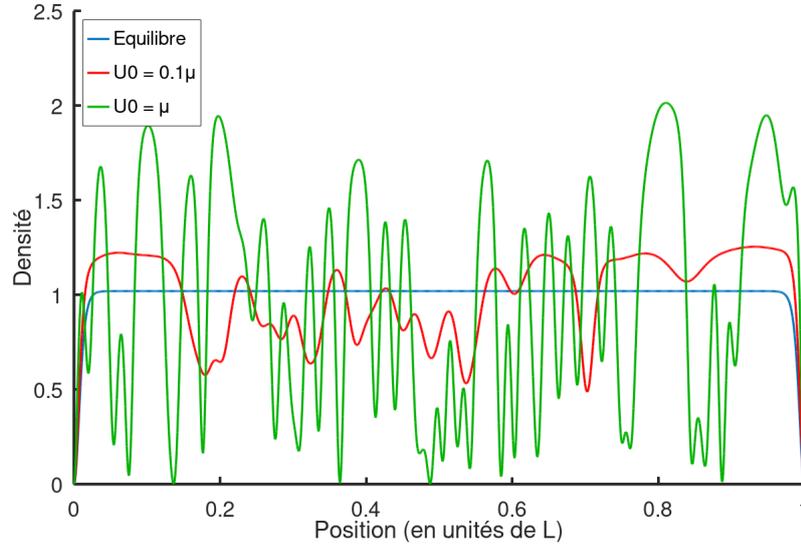


**Figure 5.3** – Graphique du haut : oscillation du centre de masse au cours du temps pendant  $8T$ , en bleu pour une amplitude d'excitation du potentiel  $U_0 = 0,1\mu$  et en rouge pour une amplitude d'excitation du potentiel  $U_0 = \mu$ . La courbe en pointillés verts correspond à la fonction  $U(x = 0, t)/U_0$  et permet de suivre la période du potentiel d'excitation. Graphique du bas : la courbe rouge correspond aux oscillations du centre de masse pour  $U_0 = \mu$  recentrée en zéro, qu'on compare au courant moyen, tracé en bleu.

période d'environ  $3T$ . L'énergie totale évolue ensuite peu avec le temps, bien qu'on continue à exciter le système à l'aide du potentiel  $U$  et qu'on n'ait pas de terme de dissipation dans les simulations. Notons que cette énergie est très petite devant l'énergie de coupure  $k_c^2/2 = 226\mu$ .

L'énergie cinétique initiale est quasiment nulle et augmente rapidement sur les deux premières périodes lorsqu'on met les atomes en mouvement, oscille puis se stabilise. On observe un comportement similaire pour l'énergie d'interaction, avec une première phase d'augmentation, suivie de quatre oscillations de l'énergie d'interaction, en phase avec l'énergie cinétique, puis une faible évolution de cette énergie au cours du temps. Enfin, l'énergie potentielle oscille en restant proche de zéro. En calculant la transformée de Fourier pour l'énergie potentielle, on trouve une fréquence qui correspond au double de la fréquence du potentiel, et ce indépendamment de l'amplitude d'excitation  $U_0$ .

En traçant l'énergie totale moyennée sur le temps des simulations en fonction de l'amplitude du potentiel  $U_0$  (figure de gauche de 5.7), nous observons que l'énergie moyenne



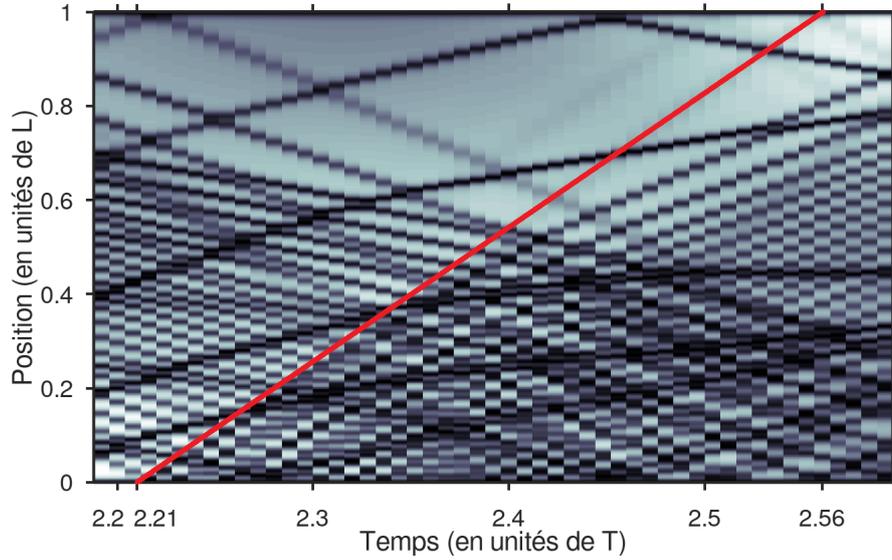
**Figure 5.4** — Profils de densité. La courbe bleue correspond à la distribution initiale, à l'équilibre, elle est plate au centre et descend à zéro aux bords de la boîte. La courbe rouge correspond au profil de densité, à un temps  $t = 8T$ , pour une amplitude d'excitation du potentiel  $U_0 = 0,1\mu$  et celle en vert correspond au profil de densité, à un temps  $t = 8T$ , pour une amplitude d'excitation du potentiel  $U_0 = \mu$ . On note que pour une amplitude d'excitation  $U_0$  plus grande on génère plus de solitons et que ceux-ci sont caractérisés par une déplétion de la densité plus importante en moyenne.

augmente avec  $U_0$ , ce qui semble raisonnable : plus on crée une excitation importante, plus on injecte de l'énergie dans le système. On observe une rupture de pente de la croissance de l'énergie aux alentours de  $U_0 = \mu$ , avec une augmentation plus rapide pour les petites valeurs de  $U_0$  et plus lente pour les grandes valeurs de  $U_0$ . L'énergie est donc injectée moins efficacement. On observe aussi que la fréquence des oscillations de l'énergie totale augmente lorsque  $U_0$  augmente, comme on peut le voir sur la figure de droite de 5.7. Pour  $U_0 \leq 0,5\mu$ , on observe des oscillations en énergie sur toute la durée des simulations ( $32T$ ), alors qu'à partir de  $U_0 = 0,7\mu$ , on observe un brouillage des oscillations en énergie après quelques périodes, qui intervient d'autant plus rapidement que  $U_0$  est grand.

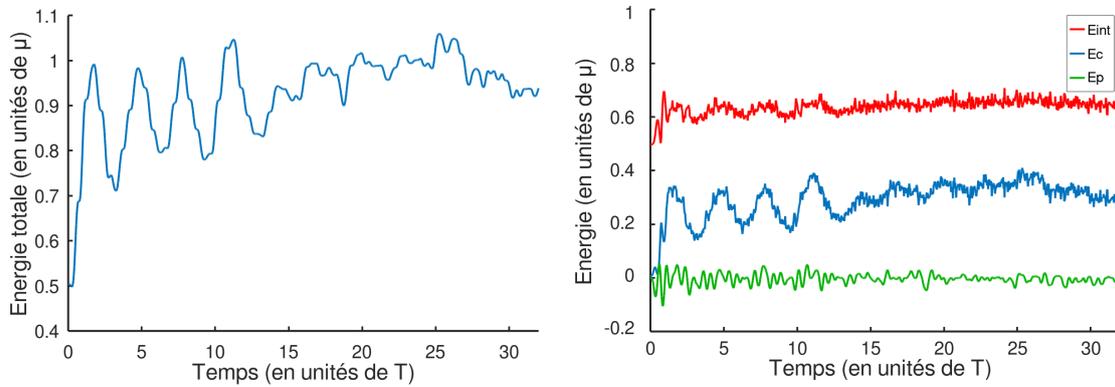
Enfin, on peut remarquer sur la figure 5.8 que les minima d'énergie correspondent à des zones « floues » sur les cartes de densité, ce qui est d'autant plus visible pour les petites amplitudes de  $U_0$ . Dans ces zones les solitons ont l'air d'être plus « clairs » – c'est-à-dire avec une densité plus homogène et une déplétion de densité moins importante – ce qui est cohérent avec la diminution de l'énergie d'interaction et de l'énergie cinétique. En effet, le calcul des énergies cinétiques et d'interaction pour un système avec un soliton de niveau de gris  $\nu$ , à partir de la fonction d'onde d'un soliton donnée à l'équation (5.4), donne :

$$E_c \simeq E_{\text{int}} - E_{\text{int}0} \simeq \frac{2}{3} \sqrt{gN} (1 - \nu^2)^{3/2} \quad (5.27)$$

dans la limite où  $\xi \ll L$ , avec  $E_{\text{int}0}$  l'énergie d'interaction d'un système de densité homogène.



**Figure 5.5** — Zoom sur la carte du profil de densité pour  $U_0 = \mu$ . On a tracé en rouge une ligne parallèle à un soliton très clair qui se déplace rapidement. On trouve que celui-ci parcourt la distance de la boîte en un temps d'environ  $0,35 T$ . Un soliton qui se déplacerait à la vitesse du son à l'équilibre parcourrait la distance de la boîte en  $0,5 T$ . Le soliton va donc à une vitesse de l'ordre de  $1,4 c_0$ .

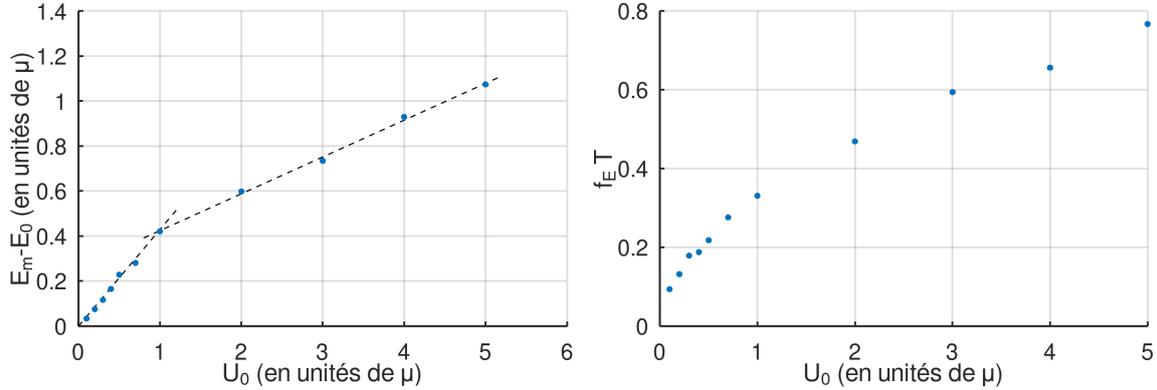


**Figure 5.6** — Évolution temporelle de l'énergie totale (graphique de gauche) et des énergies d'interaction, cinétique et potentielle (graphique de droite) sur 32 périodes d'oscillation du potentiel. L'amplitude d'excitation du potentiel vaut  $U_0 = \mu$  et  $gN = 10^4$ .

## 5.5 Observations sur la distribution en impulsion

### 5.5.1 Remarques générales

Nous nous sommes ensuite intéressés à la distribution en impulsion  $n(k) = |\text{DST}(\psi(x))|^2$ . Nous cherchons initialement s'il y avait des lois de puissance stationnaires de la forme  $n(k) \propto k^{-\gamma}$ , qui correspondent à des spectres de Kolmogorov-Zakharov [70] et sont la signature de



**Figure 5.7** — Graphique de gauche : énergie moyennée sur le temps  $E_m$  à laquelle on a soustrait l'énergie initiale  $E_0$  du système à l'équilibre, en fonction de l'amplitude du potentiel  $U_0$ . On a fait la moyenne sur le temps de la simulation, soit  $32T$ . On observe une croissance linéaire de l'énergie jusqu'à  $U_0 \simeq \mu$  avec une pente 0,43. Il y a ensuite une rupture de pente, avec de nouveau un comportement linéaire de pente 0,16 (courbes en pointillés noirs). Graphique de droite : fréquence d'oscillation de l'énergie totale  $f_E$  en fonction de l'amplitude du potentiel  $U_0$ . On a mesuré cette fréquence en effectuant une transformée de Fourier de l'énergie totale en fonction du temps.

cascades turbulentes comme dans [69]. Cependant, pour l'équation de Gross-Pitaevskii à une dimension, il n'est pas possible d'interpréter les résultats à l'aide de la théorie de la turbulence d'onde faible [71]. L'étude de cette distribution en impulsion n'en reste pas moins intéressante.

Nous avons principalement fait des simulations en régime forcé avec le potentiel linéaire oscillant  $U$  pour différentes valeurs d'amplitude  $U_0$ . Pour tous les graphiques présentés dans ce manuscrit, on a normalisé  $n(k)$  en le divisant par  $N_k = \sum_k n(k) = (N_p + 1)^2/2$ . La première chose qu'on peut faire est de comparer les distributions en impulsion initiale et finale, ce qu'on a tracé sur la figure 5.9. Pour la distribution en impulsion initiale, seuls les modes impairs sont peuplés. Cela est dû à la symétrie de la boîte, qui impose  $\psi(x) = \psi(L - x)$  à l'équilibre. On observe à petits  $k$  une loi de puissance en  $k^{-2}$  et la décroissance de la queue de la distribution à grands  $k$  est exponentielle. En effet, le profil de densité dans une boîte avec des murs infinis correspond à celui d'un unique soliton noir, positionné à moitié sur chaque bord de la boîte. Or pour un système avec un seul soliton on a :

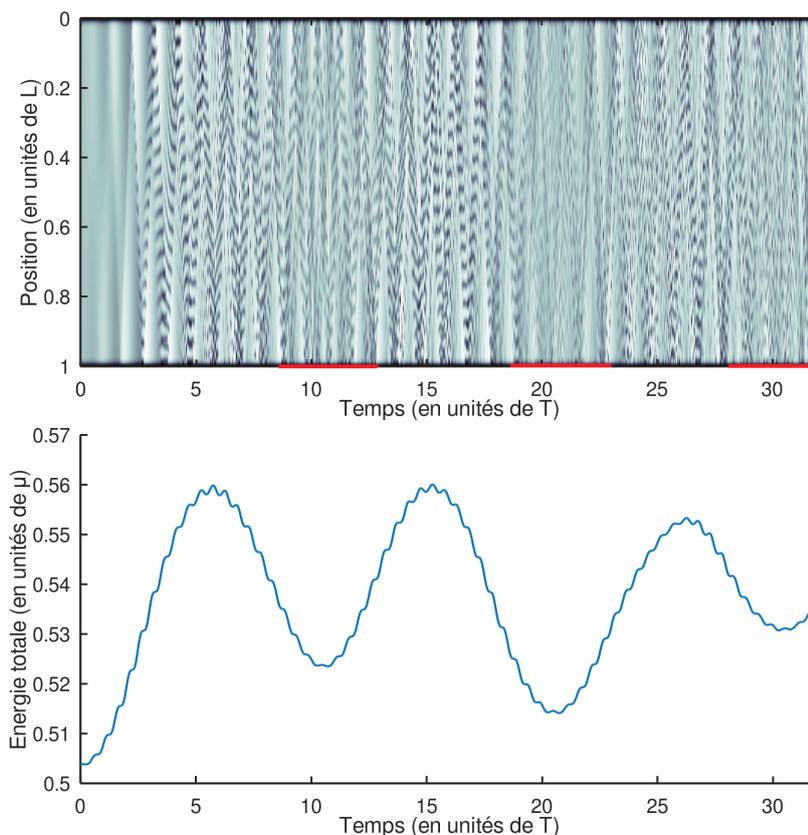
$$\psi(k) \propto \frac{1}{\sinh(k\sqrt{2}\xi\pi\Gamma/2)} \quad (5.28)$$

avec  $\Gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ , où  $v$  est la vitesse du soliton et  $c$  la vitesse du son<sup>4</sup>. La distribution en impulsion d'un soliton est donc de la forme :

$$n(k) \propto \frac{1}{\sinh^2(k\sqrt{2}\xi\pi\Gamma/2)}. \quad (5.29)$$

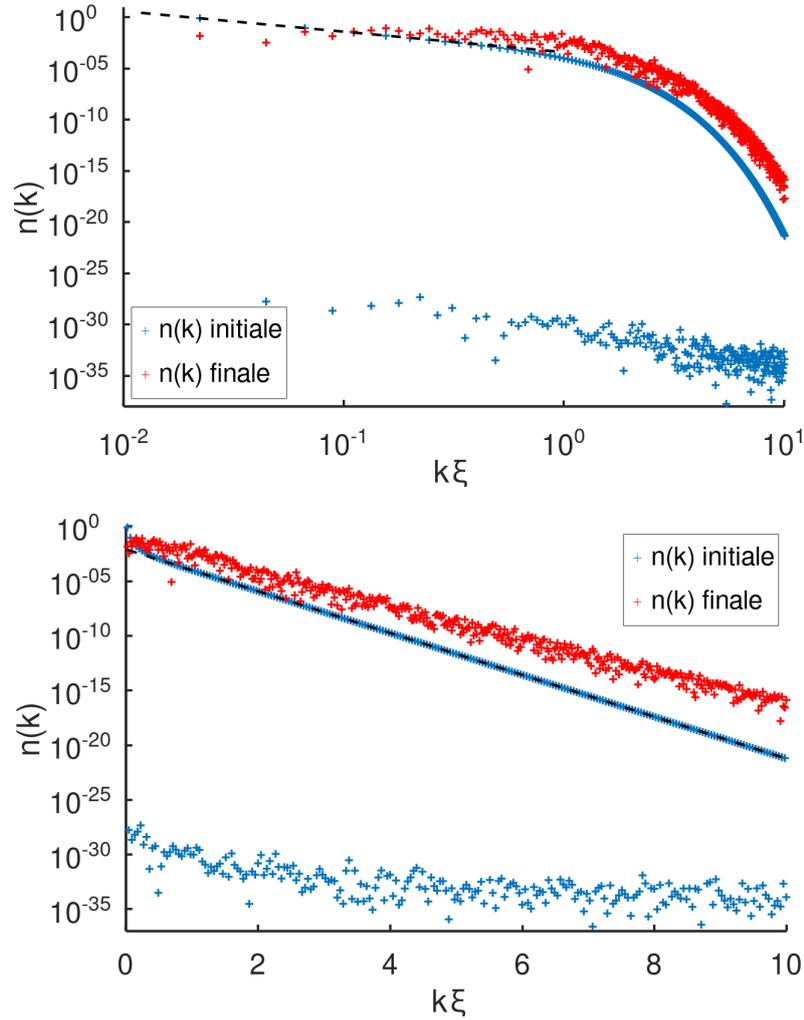
À petits  $k$ , elle est proportionnelle à  $k^{-2}$ , et pour des grands  $k$ , elle est proportionnelle à  $\exp(-\pi\sqrt{2}\xi\Gamma k)$ . On trouve que la pente de  $\ln(n(k, t = 0))$  pour les grands  $k$  vaut  $-4,4\xi \simeq -\pi\sqrt{2}\xi$ , ce qui est cohérent (voir figure 5.9).

4. Pour un soliton noir  $v = 0$  et  $\Gamma = 1$ .



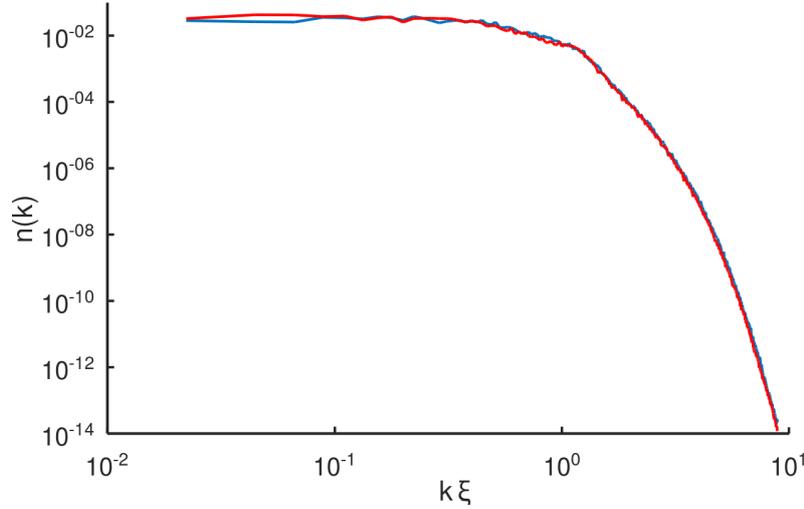
**Figure 5.8** – Graphique supérieur : carte du profil de densité au cours du temps, pour  $U_0 = 0,1\mu$ , sur un temps correspondant à  $32T$ . Graphique inférieur : énergie totale correspondante au cours du temps. On observe que les minima d'énergie correspondent à des zones « floues » sur la carte de la densité, où les solitons paraissent moins nets. Ces zones sont indiquées avec les lignes rouges sur l'axe des abscisses.

Pour la distribution en impulsion finale, on observe que les modes pairs et impairs sont également peuplés, car la mise en mouvement du système « casse » la symétrie initiale de la densité dans la boîte. De plus, les plus petits modes sont moins peuplés qu'initialement tandis que les grands modes sont plus peuplés, ce qui suggère qu'on a transféré de l'énergie vers les grands  $k$ , c'est-à-dire les petites échelles spatiales. À grands  $k$  la distribution semble également exponentielle, avec un exposant plus petit (voir la discussion du paragraphe 5.5.3). Il est difficile d'exploiter la forme de la courbe à petits  $k$  car celle-ci est assez « bruitée ». Les équipes qui travaillent sur les distributions en impulsion dans le domaine des turbulences effectuent généralement des moyennes sur un ensemble de réalisations avec des conditions aléatoires, comme par exemple dans [136]. Dans nos simulations, l'évolution du système est déterministe. Afin de « lisser » les courbes pour les rendre plus exploitables, on effectue dans la suite des moyennes temporelles pour les distributions en impulsion  $n(k)$  sur les derniers pas de temps des simulations, en faisant une hypothèse ergodique. Nous avons vérifié qu'après quelques périodes d'oscillation du potentiel  $U$ , la distribution en impulsion évolue très peu : on tend vers un état presque stationnaire. Ainsi, sur la figure 5.10 on voit par exemple que les deux tracés des distributions en impulsion, moyennées chacune sur trois périodes du potentiel,



**Figure 5.9** – Distribution en impulsion  $n(k) = |\text{DST}(\psi(x))|^2$  initiale et finale (à  $t = 32T$ ), pour les paramètres  $gN = 10^4$  et  $U_0 = \mu$ . Le nombre d'onde  $k$  est donné en unités de  $\xi^{-1}$ . Le graphique supérieur est une représentation en échelle loglog. On observe pour la distribution en impulsion initiale une loi de puissance en  $k^{-2}$  à petits  $k$  (pointillés noirs). Le graphique inférieur est une représentation en échelle semi-logarithmique selon l'axe vertical. On observe que la queue de la distribution en impulsion initiale décroît exponentiellement. L'ajustement tracé en pointillés noirs donne  $n(k, t = 0) \propto \exp(-4,4\xi k) \simeq \exp(-\pi\sqrt{2}\xi k)$ .

sont quasiment confondus alors que la courbe bleue est tracée environ au double du temps de la courbe rouge. Cette « quasi stationnarité » pour la distribution en impulsion est cohérente avec le fait que l'énergie cinétique du système évolue peu après quelques périodes d'oscillation du potentiel  $U$ .



**Figure 5.10** — Distribution en impulsion en échelle loglog moyennée sur 94 pas de temps. En rouge on a moyenné sur les périodes 14, 15 et 16 du potentiel d’excitation et en bleu on a moyenné sur les périodes 30, 31 et 32. Les paramètres utilisés dans cette simulation sont  $gN = 10^4$  et  $U_0 = \mu$ . On observe que ces deux courbes se superposent très bien, ce qui montre que la distribution en impulsion évolue peu.

### 5.5.2 Lois de puissance

Nous avons observé dans les simulations deux lois de puissance stationnaires pour la distribution en impulsion  $n(k)$ . La première en  $n(k) \propto k^{-2}$  apparaît à faible amplitudes d’excitation du potentiel ( $U_0 \leq \mu$ ) pour des nombres d’onde inférieurs à  $\xi^{-1}$ . La seconde, en  $n(k) \propto k^{-\gamma}$  avec  $\gamma \simeq 8$ , apparaît pour des amplitudes d’excitation  $U_0$  plus grandes que  $0,2\mu$  et pour des nombres d’onde supérieurs à  $\xi^{-1}$ .

#### 1. Loi de puissance en $n(k) \propto k^{-2}$

On observe une loi de puissance stationnaire  $n(k) \propto k^{-2}$  pour des amplitudes d’excitation du potentiel  $U_0$  inférieures à  $\mu$ . On peut voir cette loi de puissance en traçant la distribution en impulsion en échelle loglog. On a alors une pente linéaire avec un coefficient directeur  $-2$ , comme on peut le voir sur la figure 5.11. Cette loi de puissance est d’autant plus flagrante lorsqu’on trace  $k^2 n(k)$  en échelle loglog, avec une distribution plate (voir graphique de droite de la figure 5.11). La plage des  $k$  sur laquelle on trouve cette loi de puissance dépend de l’amplitude d’excitation : plus celle-ci est grande, plus elle démarre à des nombres d’onde élevés, on observe alors un plateau qui la précède. Elle semble aussi bornée supérieurement par  $\sim \xi^{-1}$ .

Cette loi de puissance en  $k^{-2}$  a été étudiée dans l’article [136], pour des ensembles de solitons dans des gaz de Bose 1D. Dans une première partie de l’article, les auteurs établissent une expression analytique approchée de <sup>5</sup>  $n(k, t) = \langle |\psi(k, t)|^2 \rangle_{\text{ens}}$  dans une boîte avec

5. Il s’agit presque de la quantité que nous avons observée, à la différence que nous faisons une moyenne temporelle.

conditions aux limites périodiques, sous la forme stationnaire :

$$n(k) \simeq \left[ \frac{4n_s n \operatorname{Re} \alpha}{4n_s^2 + (\operatorname{Re} \alpha)^2 + (k - 2n_s \operatorname{Im} \alpha)^2} \right] \frac{(\pi \Gamma k \xi)^2 / 2}{\sinh^2 (\pi \Gamma k \xi / \sqrt{2})} \quad (5.30)$$

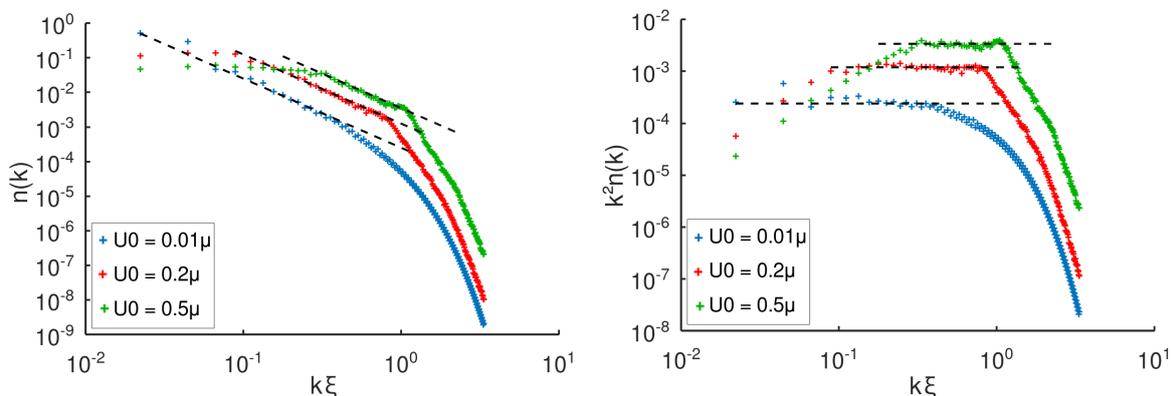
avec  $n$  la densité du système à l'équilibre,  $n_s$  la densité de solitons,  $\alpha$  la moyenne sur les solitons des  $\alpha_j = (1 - \exp(2i \arccos \nu_j))/2$  et  $\Gamma$  un paramètre laissé libre ici. Il y a un bon accord entre cette expression analytique et la distribution obtenue numériquement en moyennant 5000 configurations de 20 solitons, avec la position et la vitesse des solitons tirées aléatoirement en prenant  $\Gamma = 1,05$ . Les auteurs présentent également des simulations numériques de l'équation de Gross-Pitaevskii 1D d'un gaz dans un potentiel harmonique pour lequel ils changent brutalement  $g$  et observent  $n(k, t)$  sur une moyenne de 1000 réalisations, en comparant là encore avec une expression analytique. Dans les deux cas, ils observent une loi de puissance en  $k^{-2}$  lorsque les solitons sont suffisamment dilués, c'est-à-dire lorsque la distance moyenne entre solitons voisins est grande devant leur taille. La plage de nombres d'onde sur laquelle la loi en  $k^{-2}$  est observée est délimitée par deux échelles : inférieurement par la densité de solitons  $n_s$ , et supérieurement par l'inverse de la longueur de relaxation  $\xi^{-1}$ . En effet,  $\xi$  étant de l'ordre de la taille d'un soliton et  $n_s^{-1}$  étant la distance moyenne entre deux solitons voisins, on a en moyenne un seul soliton dans la fenêtre spatiale associée  $[\xi, n_s^{-1}]$ . Or la distribution en impulsion d'un soliton est en  $k^{-2}$  à bas  $k$ . Un argument d'auto-similarité permet donc de comprendre l'émergence de la loi de puissance  $n(k) \propto k^{-2}$ .

Ces observations sont qualitativement cohérentes avec ce qu'on observe : plus on augmente l'amplitude d'excitation, plus le nombre de solitons qu'on crée est grand et plus la loi en  $k^{-2}$  commence à des nombres d'onde élevés. On observe que la zone s'étend plus loin vers les grands  $k$  à mesure que  $U_0$  augmente et qu'elle est bornée supérieurement par  $\simeq \xi^{-1}$ . Pour des amplitudes supérieures à  $\sim \mu$ , on n'observe plus cette loi en  $k^{-2}$  parce que la densité de solitons devient trop grande et  $n_s \sim \xi^{-1}$ . On reviendra plus quantitativement sur ces observations au paragraphe 5.7.1, en étudiant en particulier la limite inférieure de la zone pour laquelle  $n(k) \propto k^{-2}$ .

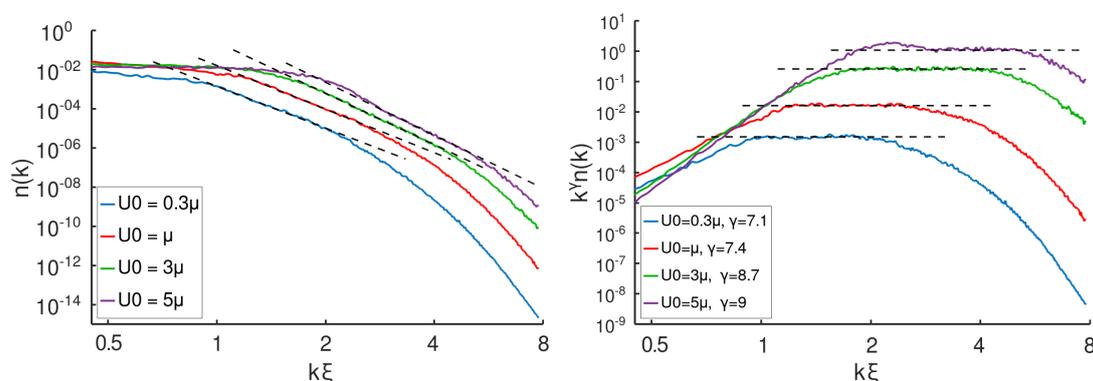
## 2. Deuxième loi de puissance

Nous observons une deuxième loi de puissance, avec une puissance plus élevée :  $n(k) \propto k^{-\gamma}$ , où  $\gamma \in [7, 9]$ . Celle-ci apparaît pour des amplitudes  $U_0$  supérieures à  $0,2\mu$  et pour des nombres d'onde supérieurs à  $\xi^{-1}$ . On note qu'il existe donc une plage d'amplitude entre  $U_0 \simeq 0,2\mu$  et  $U_0 \simeq \mu$  pour laquelle on observe simultanément les deux lois de puissance, avec la deuxième loi de puissance qui démarre quand celle en  $k^{-2}$  se termine. On a tracé  $n(k)$  en échelle loglog sur la figure 5.12, où on a aussi représenté  $k^\gamma n(k)$  afin de rendre plus visible la loi de puissance. Le coefficient  $\gamma$  augmente avec  $U_0$ . De plus, plus l'amplitude  $U_0$  est grande et plus la loi de puissance est observée sur des plages de  $k$  élevées. Au-delà d'une amplitude  $U_0 \simeq 5\mu$ , il y a un point d'inflexion juste avant le début de la loi de puissance, avec un effet « goulot d'étranglement ». On peut voir plus facilement ce phénomène avec la « bosse » qui précède la partie plate de la courbe  $k^\gamma n(k)$  dans le cas  $U_0 = 5\mu$ .

Nous n'avons pour le moment pas d'explication à cette loi de puissance. On peut noter qu'on trouve une puissance  $\gamma$  plus élevée que celles qui apparaissent usuellement dans les spectres de Kolmogorov-Zakharov. Notons que des lois de puissance avec des coefficients élevés, de l'ordre de 6 à 7, ont été observées dans les systèmes de polaritons-excitons pour le régime solitonique [140, 141]. Cette loi de puissance n'apparaît pas dans la distribution en impulsion d'un unique soliton, contrairement à la loi en  $n(k) \propto k^{-2}$ .



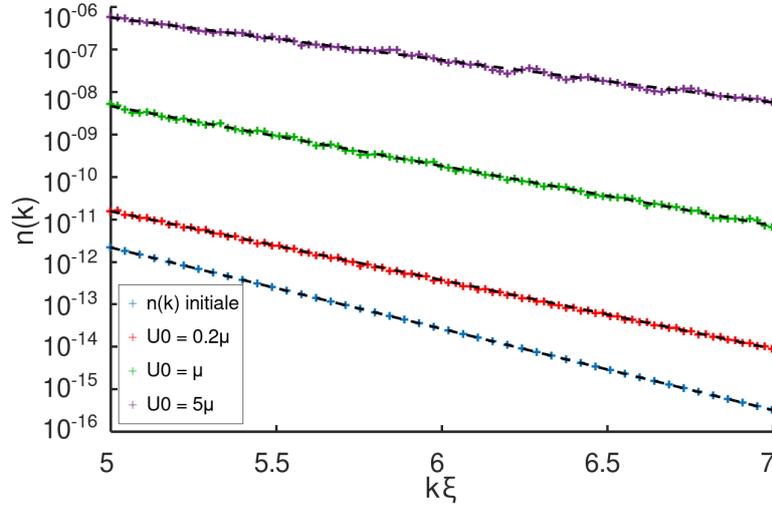
**Figure 5.11** — Graphique de gauche : distribution en impulsion  $n(k)$  en échelle loglog avec une amplitude du potentiel  $U_0 = 0,01\mu$  (en bleu),  $U_0 = 0,2\mu$  (en rouge) et  $U_0 = 0,5\mu$  (en vert). On observe une pente avec un coefficient  $-2$  sur une portion de ces courbes (tirets noirs) qui montre une loi de puissance stationnaire en  $n(k) \propto k^{-2}$ . Graphique de droite :  $k^2 n(k)$  pour les mêmes paramètres d'amplitude du potentiel. La distribution est plate sur une portion de ces courbes (tirets noirs). Ces courbes ont été obtenues pour  $gN = 10^4$  et en moyennant sur les six dernières périodes de l'évolution, de  $t = 26T$  à  $t = 32T$ .



**Figure 5.12** — Graphique de gauche : distribution en impulsion en échelle loglog avec une amplitude du potentiel  $U_0 = 0,3\mu$ ,  $U_0 = \mu$ ,  $U_0 = 3\mu$  et  $U_0 = 5\mu$ . On observe pour des  $k$  supérieures à  $\xi^{-1}$  des portions linéaires dont les pentes ont des coefficients  $-7,1$  (bleu),  $-7,4$  (rouge),  $-8,7$  (vert) et  $-9$  (violet), qui correspondent à des lois de puissances stationnaires. Graphique de droite :  $k^\gamma n(k)$  en échelle loglog pour les mêmes paramètres d'amplitude du potentiel  $U_0$ . La distribution est plate sur une portion de ces courbes. Ces courbes ont été obtenues pour  $gN = 10^4$  et en moyennant sur les six dernières périodes de l'évolution.

### 5.5.3 Queue de la distribution en impulsion

On peut ajuster la distribution en impulsion à grands  $k$  par des lois exponentielles décroissantes (voir figure 5.13). On a déjà discuté de la loi exponentielle pour la queue de la distribution initiale au paragraphe 5.5.1. Celle-ci est bien décrite par la distribution en impul-



**Figure 5.13** – Distribution en impulsion à grands  $k$  en échelle semi-logarithmique, pour la distribution initiale (en bleu) et après excitation par le potentiel  $U$ , pour  $U_0 = 0,2\mu$  (en rouge),  $U_0 = \mu$  (en vert) et  $U_0 = 5\mu$  (en violet). On observe une décroissance exponentielle. En pointillés noirs on a ajusté les courbes avec une fonction de la forme  $\alpha \exp(-\pi\sqrt{2}\beta\xi k)$ . On trouve  $\beta = 1$  pour la courbe bleue,  $\beta = 0,84$  pour la courbe rouge,  $\beta = 0,73$  pour la courbe verte et  $\beta = 0,52$  pour la courbe violette. On a fait la moyenne temporelle sur les 6 dernières périodes de l'évolution.

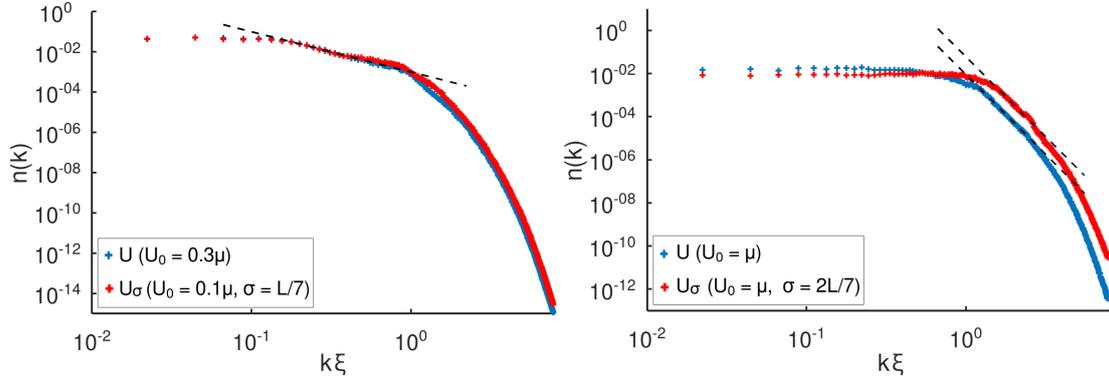
sion d'un unique soliton noir, avec  $n(k) \propto \exp(-\pi\sqrt{2}\xi k)$ . Lorsqu'on perturbe le système avec le potentiel  $U$ , on observe qu'on peut ajuster les queues de distribution en impulsion avec des lois de la forme  $\alpha \exp(-\pi\sqrt{2}\beta\xi k)$ . On trouve des coefficients  $\beta$  inférieurs à 1, qui diminuent lorsque  $U_0$  augmente. Tout se passe donc comme si la longueur de relaxation était réduite, ce qui est compatible avec les profils de densité de la figure 5.4. Nous verrons au paragraphe 5.7.3 qu'il est en effet possible d'interpréter le coefficient  $\beta\xi$  comme une longueur de relaxation effective  $\xi_{\text{eff}} < \xi$  dans les systèmes hors équilibre, obtenue de manière indépendante grâce au spectre de Lax.

#### 5.5.4 Robustesse de la distribution en impulsion

Afin de tester la robustesse de nos observations, nous avons aussi fait des simulations avec un protocole d'excitation différent. Au lieu d'appliquer un potentiel linéaire oscillant, nous avons utilisé un potentiel gaussien répulsif se déplaçant d'un bout à l'autre de la boîte :

$$U_\sigma(x, t) = U_0 \exp\left(-\frac{[x - L \sin^2(\frac{\omega t}{2})]^2}{2\sigma^2}\right). \quad (5.31)$$

On pourrait envisager de réaliser ce potentiel expérimentalement en utilisant un laser désaccordé vers le bleu. On se place à une pulsation  $\omega = \pi c_0/L$  afin qu'une période du potentiel corresponde à un aller-retour à la vitesse du son dans la boîte. On peut contrôler indépendamment deux paramètres de ce potentiel : sa hauteur  $U_0$ , qu'on exprimera en fonction du potentiel chimique  $\mu$ , et l'écart-type  $\sigma$ , qu'on exprimera comme une fraction de la taille  $L$  de



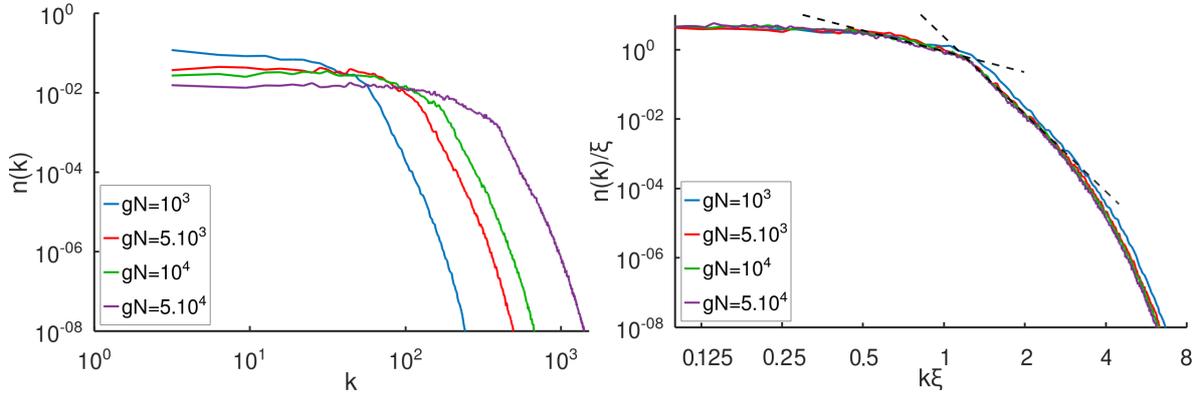
**Figure 5.14** – Comparaison des distributions en impulsion pour le potentiel linéaire  $U$  et le potentiel gaussien  $U_\sigma$  (moyenné sur les six dernières périodes, avec  $gN = 10^4$ ). Graphique de gauche : on observe des distributions en impulsion très proches pour le potentiel linéaire  $U$  avec l'amplitude  $U_0 = 0,3\mu$  (en bleu) et le potentiel gaussien  $U_\sigma$  avec une hauteur  $U_0 = 0,1\mu$  et un écart type  $\sigma = L/7$  (en rouge). On retrouve la loi de puissance en  $n(k) \propto k^{-2}$  avec le potentiel  $U_\sigma$  (pointillés noirs). Graphique de droite : on observe là aussi un comportement similaire pour le potentiel  $U$  avec  $U_0 = \mu$  (en bleu) et  $U_\sigma$  avec  $U_0 = \mu$  et  $\sigma = 2L/7$  (en rouge). On retrouve aussi pour le potentiel  $U_\sigma$  la deuxième loi de puissance en  $n(k) \propto k^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \simeq 8$  (pointillés noirs).

la boîte. En excitant le système avec ce potentiel, on observe qualitativement un comportement très similaire à celui obtenu avec le potentiel linéaire oscillant  $U$  : mise en mouvement à grande échelle avec des oscillations du centre de masse, apparition de trains de solitons, saturation de l'énergie totale avec des oscillations en phase des énergies cinétique et d'interaction. On observe aussi une distribution en impulsion très proche pour ces deux potentiels et on retrouve les deux lois de puissance décrites précédemment (voir figure 5.14). On note que l'excitation du système avec le potentiel  $U_\sigma$  est d'autant plus forte que  $U_0$  est grand et  $\sigma$  est petit.

Par ailleurs, nous avons aussi fait varier la valeur de  $gN$  pour vérifier si le comportement de la distribution en impulsion était le même. En faisant varier  $gN$ , on modifie la longueur de relaxation  $\xi = 1/\sqrt{2gN}$ , ce qu'on voit au niveau des profils de densité, avec des solitons beaucoup plus larges et moins nombreux à petits  $gN$  et beaucoup plus fins et nombreux à grands  $gN$ . Cependant, en termes de distribution en impulsion, on trouve des profils extrêmement similaires, qui se superposent lorsqu'on trace  $n(k)/\xi$  en fonction de  $k\xi$  (voir figure 5.15). Les simulations semblent donc indiquer l'émergence d'une forme d'universalité pour la distribution en impulsion.

## 5.6 Analyse des solitons du système à l'aide de la transformée de diffusion inverse

Dans cette partie nous analysons les observations de la partie précédente plus quantitativement, à l'aide de la transformée de diffusion inverse. Cette méthode nous donne accès aux informations suivantes : le nombre de solitons présents dans le système, leurs vitesses et la vitesse du son hors équilibre. Elle a été adaptée pour l'équation de Gross-Pitaevskii



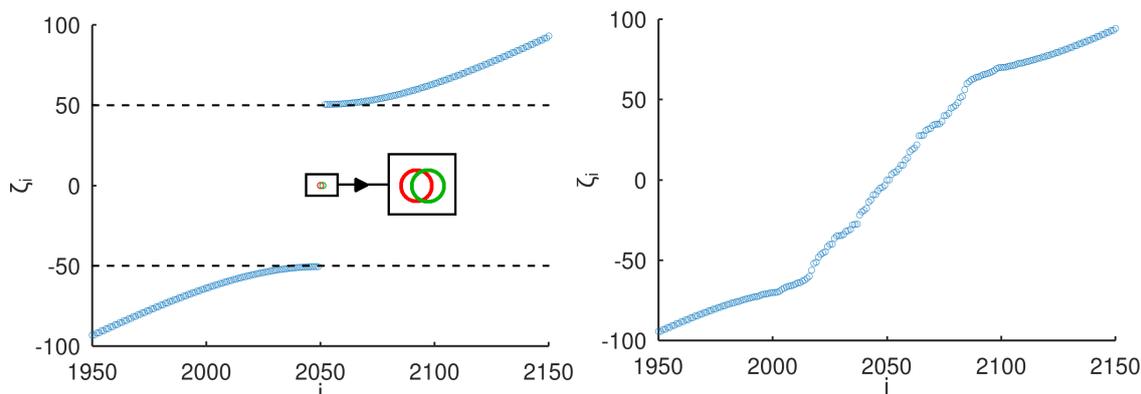
**Figure 5.15** – Distribution en impulsion moyennée sur les six dernières périodes du potentiel  $U$ , avec une amplitude  $U_0 = \mu$ , pour différentes valeurs de  $gN$  ( $gN = 10^3$  en bleu,  $gN = 5.10^3$  en rouge,  $gN = 10^4$  en vert et  $gN = 5.10^4$  en violet). Sur le graphique de droite, on voit que les courbes se superposent lorsqu'on trace  $n(k)/\xi$  en fonction de  $k\xi$ . On a représenté en pointillés noirs des fonctions proportionnelles à  $k^{-2}$  et  $k^{-7,4}$ .

unidimensionnelle répulsive qui nous intéresse par Romain Dubessy [142].

### 5.6.1 Spectre de Lax pour une boîte

Nous avons introduit le spectre de Lax, déduit de la transformée de diffusion inverse, au paragraphe 5.2.6. Cette méthode ne s'applique que pour des systèmes intégrables, dont fait partie l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle, pour un système de taille infinie ou bien avec des conditions aux limites périodiques, et dans le cas où le potentiel extérieur est nul. Ce ne sont donc pas exactement les conditions dans lesquelles nous travaillons, cependant on peut facilement s'y ramener. En effet, nous travaillons dans une boîte avec des murs infinis mais il est possible de le transformer en un système avec des conditions aux limites périodiques en doublant la taille de la boîte et en antisymétrisant  $\psi$ . On trouvera alors un spectre de Lax avec un nombre de solitons doublé. Le soliton « jumeau » de celui effectivement présent initialement se déplace à la même vitesse mais dans le sens opposé. On ne pourra donc pas avoir accès à l'information sur le signe de la vitesse pour le cas de la boîte. Par ailleurs, le potentiel extérieur oscillant  $U$  avec lequel nous travaillons est nul toutes les demi-périodes et nous pouvons donc calculer le spectre de Lax à ces instants.

Une autre difficulté se pose. Pour le cas d'un système de taille infinie, il est facile d'identifier les solitons car le spectre de Lax se compose de deux branches continues, séparées par un espace égal à la vitesse du son, où se trouvent des valeurs propres  $\zeta$  discrètes associées aux solitons. Ces valeurs propres valent  $\zeta = -v/2$ , où  $v$  est la vitesse du soliton associé à  $\zeta$ . Cependant, dans une boîte, toutes les valeurs propres sont discrètes. De plus, avec la façon dont nous excitons le système, on crée des solitons très « clairs » qui se déplacent quasiment à la vitesse du son et qui finissent par se confondre avec des phonons [143]. Il est alors difficile d'identifier les solutions qui correspondent aux solitons (voir figure 5.16). Ce problème ne se pose pas pour l'équation de Gross-Pitaevskii attractive car les valeurs propres correspondant aux solitons sont imaginaires tandis que le reste du spectre est réel [144].



**Figure 5.16** – Centre du spectre de Lax de la fonction  $\psi$  antisymétrisée, afin de se ramener à des conditions aux limites périodiques. Les  $\zeta_i$  sont les valeurs propres de la matrice  $\mathcal{L}$  qu'on a triées par ordre croissant. Graphique de gauche : spectre pour la fonction  $\psi_0$  initiale à l'équilibre, avec  $gN = 10^4$ . On observe deux branches bien séparées, pour lesquelles  $|\zeta_i| > c_0/2 = 50$ , avec  $c_0 = \sqrt{gN}$  la vitesse du son pour le système à l'équilibre. Au centre, on peut voir deux valeurs propres (cercles vert et rouge, voir agrandissement) à une valeur  $\zeta_i = 0$ , qui correspondent à deux solitons noirs de vitesse nulle. En effet, avec les conditions aux limites de murs infinis, la densité tombe à zéro sur les deux bords de la boîte, ce qui donne un soliton noir dans le profil de densité. Après antisymétrisation de  $\psi_0$ , on double le nombre de solitons, ce qui explique qu'on trouve deux solitons. Pour ce type de spectre, il est très facile d'identifier les solitons car les deux branches « continues » sont bien séparées. Graphique de droite : même chose mais après 32 périodes d'excitation avec le potentiel linéaire oscillant  $U$ , où on a pris une amplitude  $U_0 = \mu$ . Dans ce spectre, il y a des solitons qui se propagent quasiment à la vitesse du son et il n'y a plus de séparation claire entre les solutions qui correspondent aux solitons et les autres.

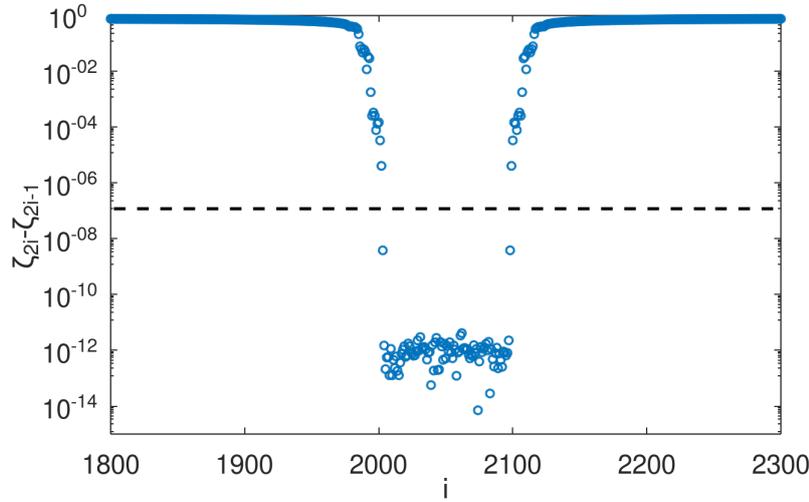
### 5.6.2 Identification des solitons

Afin d'identifier les solitons dans le spectre de Lax, nous avons développé la stratégie suivante : on double une deuxième fois la boîte en antisymétrisant à nouveau la fonction  $\psi$ , avant de calculer le spectre de Lax. Pour cette nouvelle fonction, on a alors doublé le nombre de solitons, et pour chaque soliton initialement présent, on a maintenant deux solitons qui se déplacent à une même vitesse et ont donc la même valeur propre  $\zeta$ . Pour identifier les solitons, il suffit donc de compter les valeurs propres dégénérées du spectre de Lax.

En pratique, on procède de la sorte dans le code : soit  $\psi_l = [\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_p}]$  la liste des valeurs discrètes de  $\psi(x)$  sur la grille des  $x$  pour  $x \in ]0, L[$ , on définit une nouvelle fonction deux fois « antisymétrisée » :

$$\psi'_l = [0, -\text{flip}(\psi_l), 0, \psi_l, 0, -\text{flip}(\psi_l), 0, \psi_l] \quad (5.32)$$

où la fonction flip retourne la liste :  $\text{flip}([\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{N_p}]) = [\psi_{N_p}, \psi_{N_p-1}, \dots, \psi_1]$  et les 0 permettent d'imposer les conditions aux limites. La diagonalisation de la matrice de Lax se fait dans l'espace réciproque, dans lequel  $\partial/\partial x = ik$ . On calcule donc la transformée de Fourier



**Figure 5.17** – Différence entre deux valeurs propres successives du spectre de Lax  $\zeta_{2i} - \zeta_{2i-1}$ , en échelle semi-logarithmique, pour la fonction doublement antisymétrisée  $\psi'$ , à  $t = 32T$  et pour une amplitude  $U_0 = \mu$ . On observe au centre un plateau vers  $10^{-12}$  où les valeurs propres successives sont dégénérées et correspondent a priori à des solitons, et sur les bords un plateau autour de 1 où les valeurs propres successives ne sont pas dégénérées et ne correspondent donc pas à des solitons.

de  $\psi'_l$  et on définit la liste des  $k$  associée :

$$k_l = \frac{2\pi}{4L} [-2N_p - 2, -2N_p - 1, -2N_p, \dots, 2N_p, 2N_p + 1]. \quad (5.33)$$

Finalement, on diagonalise la matrice de Lax dans l'espace des  $k$  :

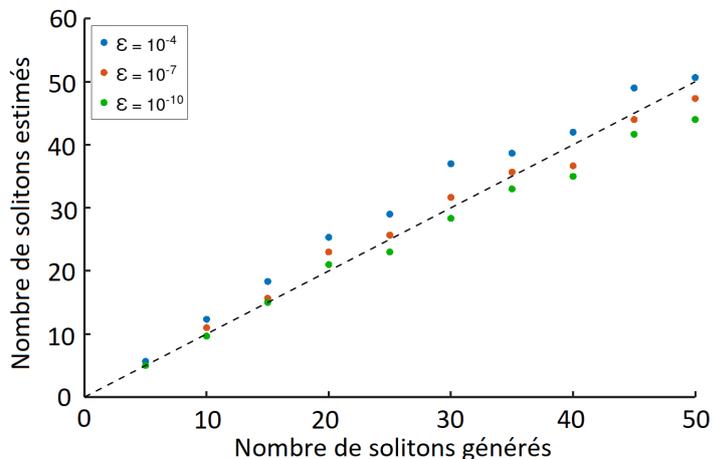
$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} ik_l & -\sqrt{gN} \text{TF}(\psi'_l) \\ \sqrt{gN} \text{TF}(\psi'_l)^* & -ik_l \end{pmatrix}. \quad (5.34)$$

On obtient ainsi le tableau des valeurs propres  $[\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{8N_p+8}]$  de la matrice  $\mathcal{L}$ , qu'on trie par ordre croissant. Lorsque deux valeurs propres successives  $\zeta_{2i-1}$  et  $\zeta_{2i}$  sont égales c'est qu'elles sont associées à un soliton.

Il y a cependant une difficulté liée au calcul numérique : les valeurs propres successives qu'on trouve ne sont jamais parfaitement égales. À partir de quel écart entre deux valeurs propres considère-t-on qu'on a une dégénérescence ? Sur la figure 5.17, on a tracé la différence entre deux valeurs propres successives de la matrice de Lax  $\mathcal{L}$  en échelle semi-logarithmique. On observe un plateau autour de  $10^{-12}$ , où l'écart entre les valeurs propres est limité par les erreurs numériques, et un plateau autour de 1, où on peut affirmer qu'il n'y a pas de dégénérescence. On trouve quelques valeurs propres entre les deux pour lesquelles il n'est pas évident de dire si elles sont associées ou non à un soliton.

Afin de vérifier s'il est possible de compter le nombre de solitons avec la méthode précédente et savoir quel critère sur la dégénérescence retenir, nous avons fait un étalonnage avec un nombre de solitons connu. On part de la solution  $\psi_0$  à l'équilibre dans la boîte, qu'on multiplie par  $n$  fonctions du type :

$$\phi(x) = \Gamma^{-1} \tanh\left(\frac{x - x_0}{\sqrt{2}\Gamma\xi}\right) + i\nu \quad (5.35)$$



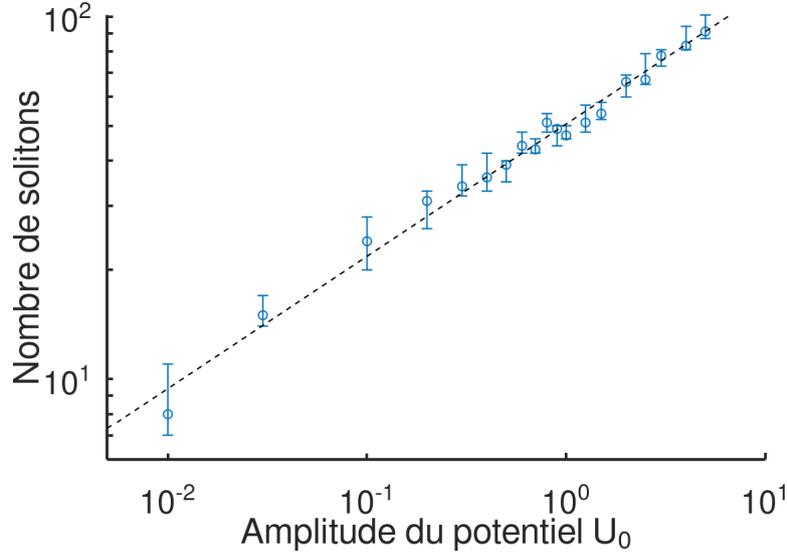
**Figure 5.18** — Étalonnage du nombre de solitons en utilisant le critère de dégénérescence des valeurs propres. On a généré une solution à  $n$  solitons (entre 5 et 50) avec une vitesse et une positions aléatoires, en répétant 3 fois pour chaque valeur de  $n$ . On a tracé le nombre de solitons estimés en fonction du nombre de solitons générés, en prenant comme critère  $\epsilon = 10^{-4}$  (en bleu),  $\epsilon = 10^{-7}$  (en rouge) et  $\epsilon = 10^{-10}$  (en vert). On a représenté en pointillés noirs la fonction identité.

avec  $\Gamma = 1/\sqrt{1-\nu^2}$ ,  $\xi$  la longueur de relaxation à l'équilibre,  $x_0$  la position du soliton qu'on tire aléatoirement entre 0 et 1 et  $\nu$  le rapport entre vitesse du soliton et vitesse du son  $c_0$ , qu'on tire aléatoirement entre 0 et 1. Cela permet de créer une solution approchée à  $n$  solitons.

Nous avons généré des solutions à  $n$  solitons pour  $n$  entre 5 et 50 par pas de 5 solitons. Pour chaque nombre de solitons  $n$ , nous avons répété l'opération 3 fois. Notons  $\epsilon$  l'écart maximal entre deux valeurs propres successives pour lesquelles on considère qu'il y a une dégénérescence et qu'il s'agit donc d'un soliton. Sur la figure 5.18, on a tracé le nombre de solitons qu'on a trouvé en moyenne sur les 3 répétitions, pour différentes valeurs de  $\epsilon$ , en fonction du nombre de solitons qu'on avait initialement générés. On observe tout d'abord que cette méthode donne une assez bonne estimation du nombre de solitons, même pour des valeurs de  $\epsilon$  très différentes. Pour  $\epsilon = 10^{-4}$  on a tendance à surestimer le nombre de solitons et pour  $\epsilon = 10^{-10}$  on a tendance à le sous-estimer. En sommant le carré de la différence entre nombre de solitons générés et estimés, pour les puissance de 10 allant de  $10^{-10}$  à  $10^{-3}$  on observe que le meilleur accord est obtenu pour  $\epsilon = 10^{-7}$ . On retiendra donc ce critère pour estimer le nombre de solitons dans la suite.

### 5.6.3 Nombre de solitons

Grâce à la méthode décrite précédemment on peut évaluer le nombre de solitons dans les systèmes hors équilibre excités par le potentiel  $U$ . On exclura dans la suite le soliton noir qui est dû aux bords de la boîte. Sur la figure 5.19, on a tracé le nombre de solitons après 32 périodes d'excitation par le potentiel  $U$  en fonction de l'amplitude  $U_0$ . Le point central correspond au nombre de solitons pour  $\epsilon = 10^{-7}$ , tandis que les barres d'erreur correspondent au nombre de solitons évalués pour  $\epsilon = 10^{-10}$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ . Cette courbe permet de confirmer l'observation qualitative qu'on avait faite à partir des profils de densité, selon



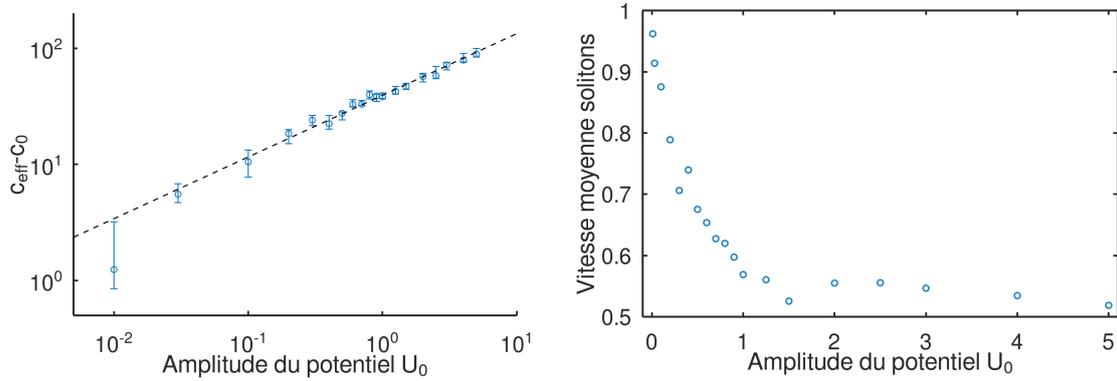
**Figure 5.19** – Nombre de solitons après 32 périodes d’oscillation du potentiel  $U$  en fonction de l’amplitude du potentiel  $U_0$ , en échelle loglog. On observe que le nombre de solitons est environ proportionnel à  $U_0^{0,37}$  (pointillés noirs). On a pris comme critère de dégénérescence pour compter les solitons  $\epsilon = 10^{-7}$ . Les barres d’erreur correspondent au nombre de solitons trouvés pour  $\epsilon = 10^{-10}$  (nombre de solitons sous-estimé) et  $\epsilon = 10^{-4}$  (nombre de solitons surestimé).

laquelle le nombre de solitons croît avec  $U_0$ . On observe que le nombre de solitons augmente proportionnellement à  $U_0^{0,37}$  : augmenter l’amplitude du potentiel est donc de moins en moins efficace pour générer de nouveaux solitons.

#### 5.6.4 Vitesse du son et vitesse des solitons

Nous avons observé au paragraphe 5.4.1 en analysant les trajectoires des solitons que, dans les systèmes hors équilibre, certains solitons se déplacent à une vitesse supérieure à la vitesse du son à l’équilibre  $c_0$ , ce qui signifie que la vitesse du son dans ces systèmes est supérieure à  $c_0$ . L’analyse du spectre de Lax permet de mesurer précisément la vitesse du son dans les systèmes hors équilibre, car celle-ci est définie comme l’écart entre les deux branches continues du spectre. Nous pouvons donc estimer cette vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$  en calculant l’écart entre la plus petite valeur propre positive du spectre de Lax qui n’est pas un soliton et la plus grande valeur propre négative qui n’est pas un soliton. Sur la figure de gauche de 5.20, on a tracé la vitesse du son effective en fonction de l’amplitude du potentiel  $U_0$ . Lorsque l’amplitude  $U_0$  est très faible la vitesse du son  $c_{\text{eff}}$  tend vers la vitesse du son à l’équilibre  $c_0 = 100$ . La différence entre vitesse du son et vitesse du son à l’équilibre  $c_{\text{eff}} - c_0$  est environ proportionnelle à  $U_0^{0,53}$ . On trouve tout comme pour le nombre de solitons en fonction de  $U_0$  une loi de puissance, mais avec un coefficient plus grand.

Par ailleurs, on rappelle qu’une valeur propre du spectre de Lax correspondant à un soliton est égale à  $-v/2$ , ce qui permet d’analyser les vitesses des solitons. Sur la figure de droite de 5.20, on a tracé la vitesse moyenne des solitons normalisée par la vitesse du son  $c_{\text{eff}}$ , en fonction de  $U_0$ . À faible amplitude, on voit que cette vitesse normalisée tend vers 1. Tous

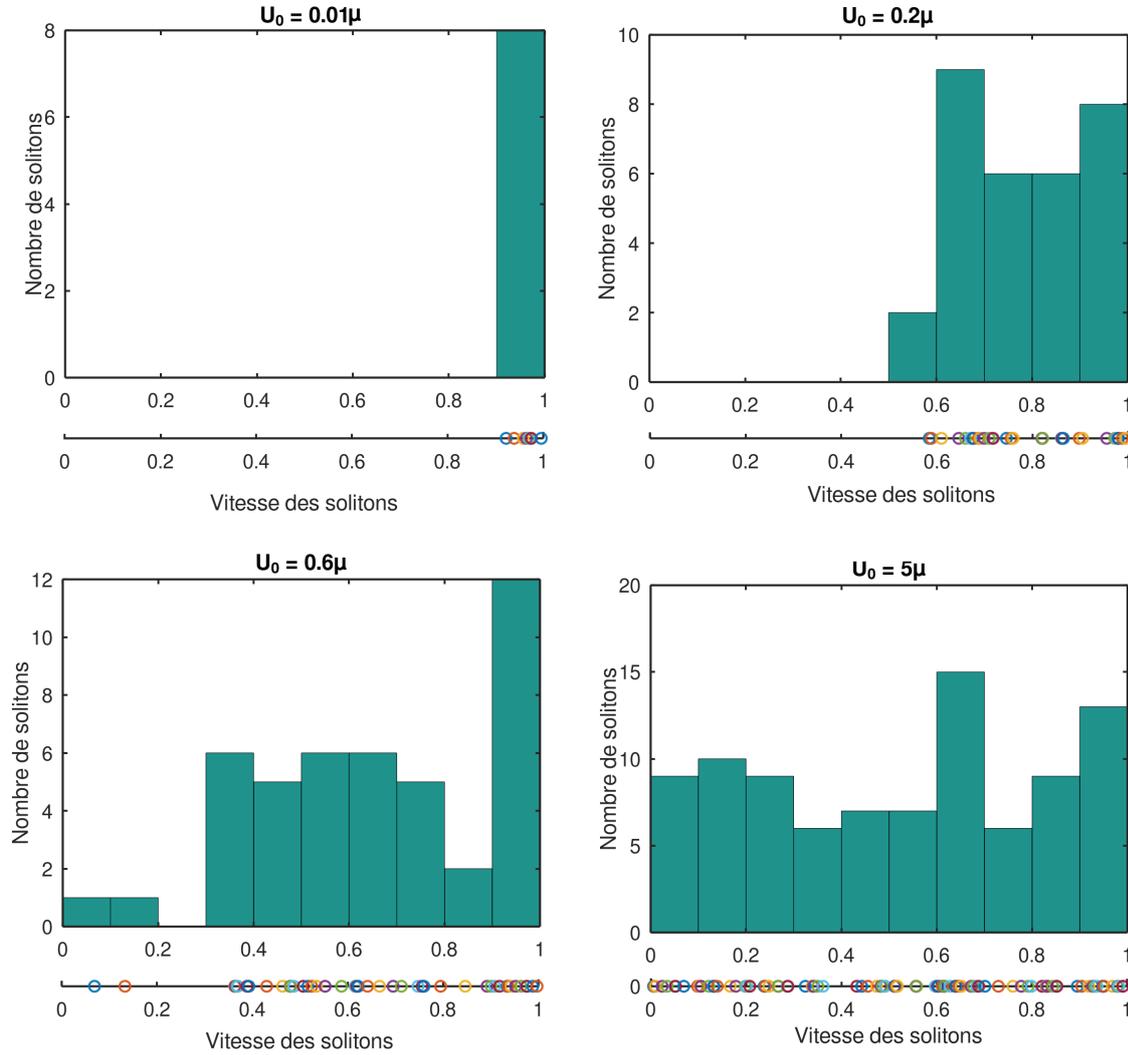


**Figure 5.20** — Graphique de gauche : Différence entre la vitesse du son effective  $c_{\text{eff}}$  et la vitesse du son à l'équilibre  $c_0 = 100$ , en fonction de l'amplitude d'excitation du potentiel, à  $t = 32T$ . On observe qu'une loi de puissance avec un coefficient 0,53 décrit bien le comportement de  $c_{\text{eff}} - c_0$  (pointillés noirs), excepté pour le premier point. On a pris comme critère pour identifier les solitons  $\epsilon = 10^{-7}$  et pour les barres d'erreur inférieures et supérieures  $\epsilon = 10^{-10}$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ . Graphique de droite : vitesse moyenne des solitons, normalisée par la vitesse du son  $c_{\text{eff}}$  en fonction de l'amplitude du potentiel  $U_0$ , à  $t = 32T$ . Quand  $U_0$  tend vers 0 la vitesse moyenne des solitons tend vers  $c_{\text{eff}}$ , tandis que pour des grandes valeurs de  $U_0$  la vitesse moyenne tend vers  $c_{\text{eff}}/2$ .

les solitons ont donc une vitesse proche de la vitesse du son et sont des solitons « clairs », avec une faible déplétion de la densité, ce qui est cohérent avec le profil de densité pour  $U_0 = 0,1\mu$  qu'on avait tracé au paragraphe 5.4.1. À grande amplitude  $U_0$ , c'est-à-dire pour des systèmes très hors équilibre, la vitesse moyenne des solitons tend vers 0,5, ce qui suggère une distribution uniforme des vitesses des solitons entre 0 et la vitesse du son. Cela signifie aussi qu'on a des solitons avec tous les « niveaux de gris ». C'est là encore cohérent avec la carte du profil de densité en fonction du temps pour  $U_0 = \mu$ , pour lequel on avait remarqué que les vitesses et les niveaux de gris des solitons étaient très divers. Sur la figure 5.21, on s'est intéressés à la distribution de vitesse des solitons pour différentes valeurs  $U_0$ . On peut voir qu'à faible amplitude, tous les solitons ont bien une vitesse proche de celle du son, tandis qu'à grande amplitude on tend vers une distribution de vitesse uniforme.

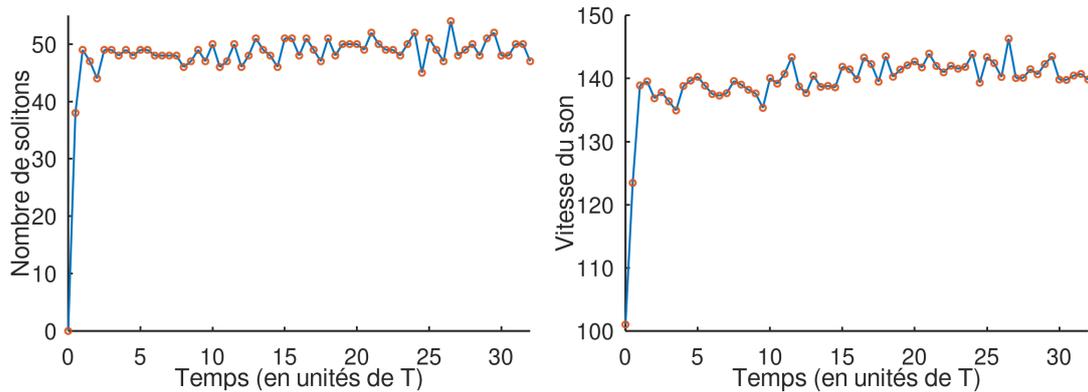
### 5.6.5 Évolution du nombre de solitons et de leurs vitesses au cours du temps.

Le potentiel  $U$  étant nul toutes les demi-périodes, on peut calculer le spectre de Lax à ces instants. Cela nous permet d'évaluer l'évolution temporelle du nombre de solitons et de leurs vitesses. Sur la figure 5.22, on a tracé le nombre de solitons et la vitesse du son en fonction du temps, pour une amplitude du potentiel  $U_0 = \mu$ . On remarque qu'après une période d'oscillation du potentiel  $U$ , ces deux grandeurs sont assez stables au cours du temps. On a ainsi 20% de différence entre les valeurs maximale et minimale du nombre de solitons et 8% d'écart entre les valeurs maximale et minimale de la vitesse du son à partir de  $t = T$ . Cela n'est pas très surprenant car l'énergie du système atteinte après une période d'excitation par le potentiel  $U$  oscille autour d'une valeur moyenne. On note qu'on n'observe cependant pas de corrélation entre les oscillations de l'énergie du système autour de sa valeur moyenne et le nombre de solitons.



**Figure 5.21** – Histogrammes de la distribution de vitesses des solitons normalisée par  $c_{\text{eff}}$  pour différentes valeurs de  $U_0$ , à  $t = 32T$ . En dessous de chaque histogramme, on a représenté les vitesses normalisées de tous les solitons présents dans le système. Pour une faible amplitude  $U_0$ , on a peu de solitons et ils sont tous à une vitesse proche de la vitesse du son, tandis que pour un grand  $U_0$ , on a de nombreux solitons dont la vitesse se répartit de façon assez homogène entre 0 et  $c_{\text{eff}}$ .

Nous nous sommes aussi intéressés à l'évolution de la vitesse moyenne des solitons au cours du temps, normalisée par la vitesse du son. On observe sur la figure 5.23 une très forte corrélation entre la vitesse moyenne des solitons et l'énergie du système. En effet, on voit que la vitesse moyenne des solitons est minimale lorsque l'énergie est maximale, et on retrouve les quatre oscillations suivies d'un brouillage qu'on avait observées sur l'évolution de l'énergie du système. Ainsi, l'évolution temporelle de l'énergie après une période d'excitation par le potentiel  $U$  n'est pas liée au nombre de solitons, mais à la distribution de vitesse de ceux-ci. Pour un soliton, une vitesse faible correspond à une déplétion de la densité importante avec



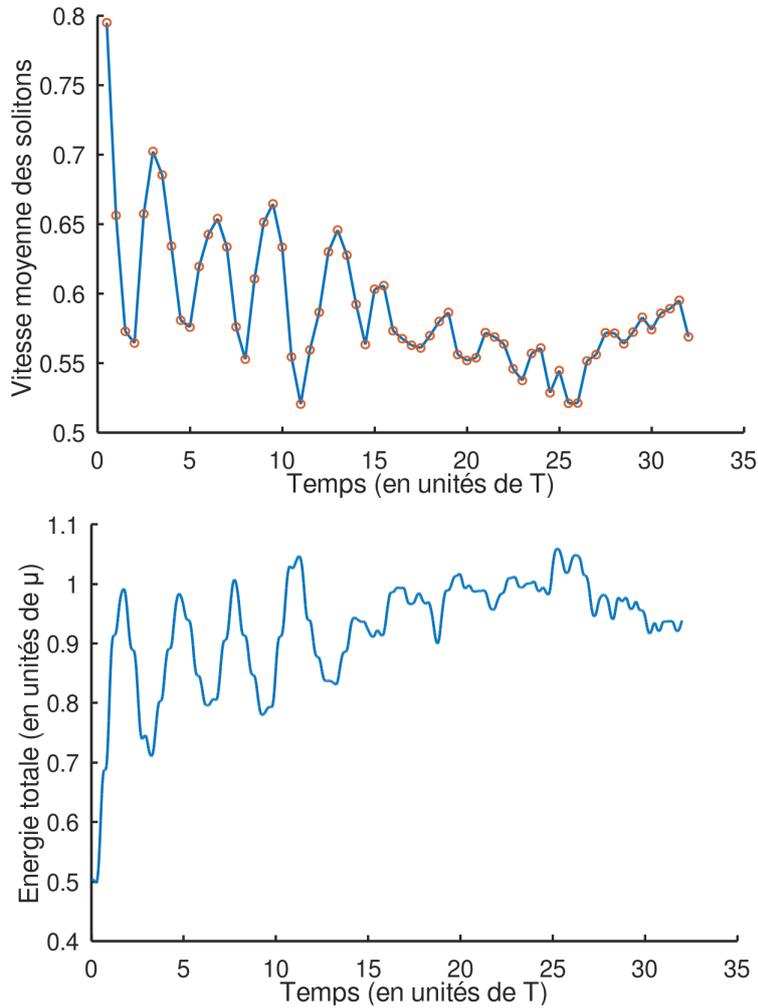
**Figure 5.22** – Graphique de gauche : évolution du nombre de solitons au cours de l’excitation par le potentiel  $U$ , pour une amplitude  $U_0 = \mu$ , en prenant comme critère  $\epsilon = 10^{-7}$ . Graphique de droite : évolution de la vitesse du son au cours de l’excitation par le potentiel  $U$ , pour une amplitude  $U_0 = \mu$ , en prenant comme critère  $\epsilon = 10^{-7}$ .

un soliton « foncé », tandis qu’une vitesse proche de celle du son correspond à une petite déplétion de la densité : le soliton est « clair ». Il est donc logique que les énergies cinétique et d’interaction du système augmentent lorsque la vitesse moyenne des solitons diminue. Par ailleurs, on note que l’évolution de la vitesse moyenne des solitons est cohérente avec celle des profils de densité. On avait en effet noté au paragraphe 5.4.2 que sur les profils de densité, les solitons semblaient plus foncés dans les zones d’énergie maximale – ce qui correspond à des vitesses plus faibles – et plus clairs dans les zones d’énergie minimale – ce qui correspond à des vitesses plus grandes.

## 5.7 Analyse de la distribution en impulsion

### 5.7.1 Début de la loi en $k^{-2}$

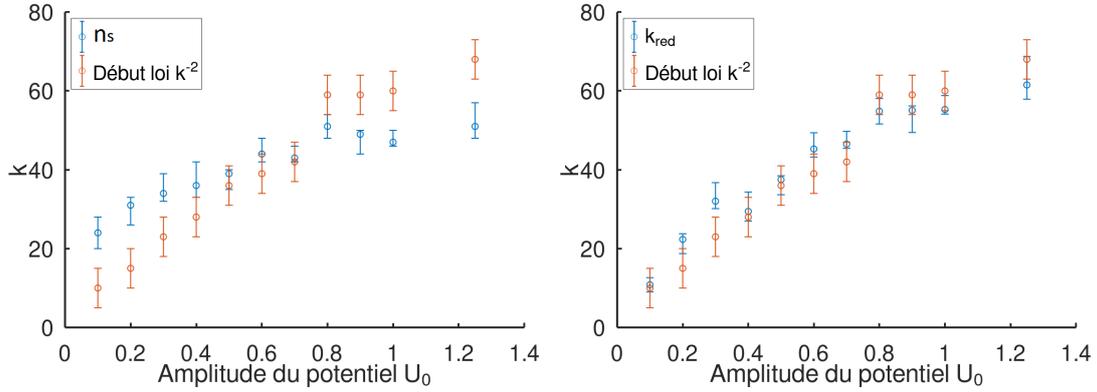
Dans l’article [136], les auteurs observent que la plage de  $k$  sur laquelle se trouve la loi de puissance en  $k^{-2}$  débute pour  $k$  de l’ordre de la densité de solitons  $n_s$ . Plus précisément, leurs calculs analytiques donnent comme échelle pour le début de la loi en  $k^{-2}$  la densité de solitons réduite :  $k_{\text{red}} = 2(1 - \nu^2)n_s$ , où  $\nu$  est égal à la vitesse des solitons normalisée par la vitesse du son et  $n_s$  est la densité de solitons. Grâce au spectre de Lax, on peut maintenant calculer la densité de solitons, qui est égale au nombre de solitons car la boîte adimensionnée a une taille  $L = 1$ , et nous pouvons aussi calculer la valeur moyenne  $\langle \nu^2 \rangle$ , ce qui nous permet d’évaluer  $k_{\text{red}}$ . Sur les graphiques de la figure 5.24, on a tracé  $n_s$ ,  $k_{\text{red}}$  et le début de la loi de puissance en  $k^{-2}$  en fonction de l’amplitude du potentiel  $U_0$ . On a évalué le début de la loi en  $k^{-2}$  en regardant la valeur de  $k$  au croisement de la tangente horizontale et de la tangente en  $k^{-2}$ , sur les graphes en échelle loglog de  $n(k)$ . Cette méthode n’est pas extrêmement précise et l’erreur sur la valeur de  $k$  est de l’ordre de  $\pm 5$ . On observe que le début de la loi en  $k^{-2}$  est bien du même ordre de grandeur que  $n_s$ , même si la pente est légèrement différente. Lorsqu’on compare à  $k_{\text{red}}$ , les deux courbes se suivent remarquablement bien. On retrouve donc dans nos simulations le résultat de [136].



**Figure 5.23** – Graphique supérieur : évolution de la vitesse moyenne des solitons normalisée par la vitesse du son, au cours de l’excitation par le potentiel  $U$ , pour une amplitude  $U_0 = \mu$ . Graphique inférieur : évolution de l’énergie totale normalisée par le potentiel chimique  $\mu$ , au cours de l’excitation par le potentiel  $U$ , pour une amplitude  $U_0 = \mu$ . On observe une forte corrélation entre la vitesse moyenne des solitons et l’énergie : quand la vitesse diminue, l’énergie augmente, et inversement.

### 5.7.2 Début de la deuxième loi de puissance

On a vu que plus le système est excité, plus la vitesse du son  $c_{\text{eff}}$  est grande. On peut alors définir une longueur de relaxation associée  $\xi_{\text{eff}} = 1/(\sqrt{2}c_{\text{eff}})$ , plus petite que celle à l’équilibre. On avait d’ailleurs remarqué en analysant le profil de densité que la longueur de relaxation devait diminuer pour les systèmes hors équilibre (paragraphe 5.4.1). Il semble qu’il est possible de faire un lien entre  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$  et le début de la loi de puissance en  $k^{-\gamma}$ , avec  $\gamma \simeq 8$ . En effet, sur la figure 5.25, on observe que les courbes représentant  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$  et le début de cette loi de puissance suivent la même tendance. Notons que pour des petites amplitudes pour  $U_0$ , la loi de puissance commence pour des  $k$  inférieurs à  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$  et que les deux courbes se rejoignent à grands  $U_0$ . Par ailleurs, on rappelle que le début de cette loi de puissance correspond à la



**Figure 5.24** — Sur le graphique de gauche, on a représenté la densité de solitons  $n_s$  à  $t = 32T$  ainsi que le début de la loi de puissance en  $k^{-2}$ , en fonction de l'amplitude  $U_0$ . Pour estimer la densité de solitons, on utilise le critère  $\epsilon = 10^{-7}$  et pour les barres d'erreur, on prend  $\epsilon = 10^{-10}$  et  $\epsilon = 10^{-4}$ . Les incertitudes sur le début de la loi en  $k^{-2}$  sont de l'ordre de  $\pm 5$ . Graphique de droite : même chose mais en prenant la densité de solitons réduite  $k_{\text{red}} = 2(1 - \nu^2)n_s$  à la place de  $n_s$ . On observe un meilleur accord entre les deux jeux de données en utilisant  $k_{\text{red}}$ .

fin de la loi de puissance en  $k^{-2}$  lorsqu'elles coexistent.

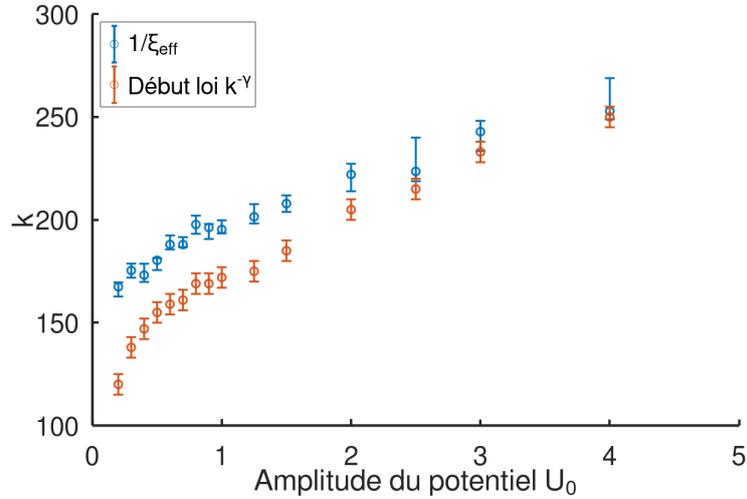
Nous ne comprenons pour le moment pas le phénomène à l'origine de cette loi de puissance. On peut noter qu'elle n'apparaît pas lorsqu'on fait une moyenne d'ensemble des distributions en impulsion pour des fonctions d'onde approchées à  $n$  solitons :

$$\psi(x) = \psi_0 \prod_{j=1}^n \Gamma^{-1} \tanh\left(\frac{x - x_{0j}}{\sqrt{2}\Gamma\xi}\right) + i\nu_j \quad (5.36)$$

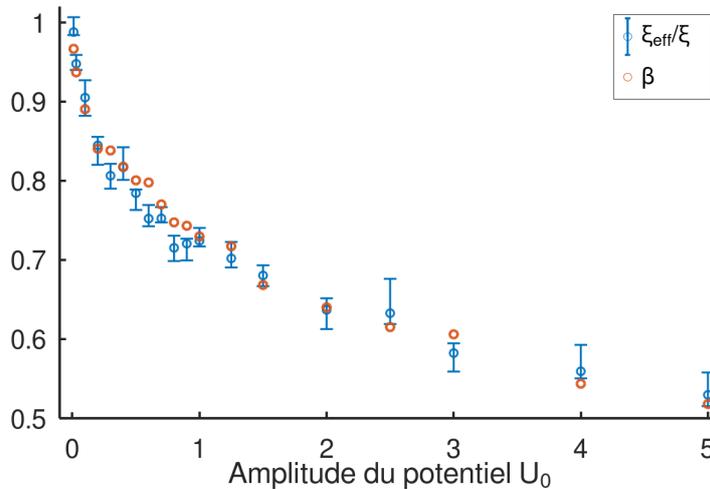
où on tire aléatoirement les positions  $x_{0j}$  et les niveaux de gris  $\nu_j$ .

### 5.7.3 Queue de la distribution en impulsion

On peut aussi faire le lien entre la queue de la distribution en impulsion  $n(k)$  et la longueur de relaxation effective  $\xi_{\text{eff}}$ , obtenue indépendamment à partir du spectre de Lax. En effet, on avait observé au paragraphe 5.5.3 que la queue de la distribution en impulsion décroissait exponentiellement avec  $k$  et pouvait se mettre sous la forme  $\alpha \exp(-\pi\sqrt{2}\beta\xi k)$ , avec  $\beta < 1$ . On rappelle que la distribution en impulsion d'un soliton noir à grands  $k$  est proportionnelle à  $\exp(-\pi\sqrt{2}\xi k)$ . Sur la figure 5.26, on a comparé le paramètre  $\beta$  au rapport entre la longueur de relaxation hors équilibre et celle à l'équilibre  $\xi_{\text{eff}}/\xi$ , pour différentes amplitudes du potentiel  $U_0$ . On observe que les deux courbes sont quasiment confondues, c'est-à-dire que  $\xi_{\text{eff}} = \beta\xi$ . Cela signifie que la queue de la distribution en impulsion pour des systèmes hors équilibre a priori complexes peut tout simplement s'écrire comme la distribution en impulsion d'un soliton noir de longueur de relaxation  $\xi_{\text{eff}}$ . Il paraît logique que ce soient les solitons noirs qui apportent la plus grande contribution dans la distribution en impulsion à grands  $k$ , car ce sont ceux pour lesquels  $\Gamma$  est le plus petit ( $\Gamma = 1$ ) donc pour lesquels le terme exponentiel décroît le moins vite.



**Figure 5.25** – Comparaison entre le début de la deuxième loi de puissance en  $k^{-8}$  avec  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$ , en fonction de la valeur de l'amplitude  $U_0$ . On observe que les deux courbes suivent approximativement la même tendance, bien que  $\xi_{\text{eff}}^{-1}$  soit supérieur aux valeurs de  $k$  correspondant au début de la loi de puissance.



**Figure 5.26** – Comparaison entre le rapport  $\xi_{\text{eff}}/\xi$  et le coefficient  $\beta$  pour différentes valeurs de l'amplitude du potentiel  $U_0$ . Le paramètre  $\beta$  a été obtenu en ajustant la distribution en impulsion pour  $k \in [5/\xi, 7\xi]$  avec la fonction  $\exp(-\pi\sqrt{2}\beta\xi k)$ . On observe un très bon accord entre les deux courbes.

## 5.8 Discussion pour la mise en œuvre expérimentale

Nous avons jusqu'ici montré des résultats de simulations numériques. Nous discutons dans ce paragraphe de la possibilité d'une réalisation expérimentale. Actuellement, nous pouvons produire des gaz de Bose unidimensionnels dans le régime du quasi-condensat dans un piège harmonique. Afin de réaliser un potentiel de type boîte, nous prévoyons d'utiliser un laser à

532 nm pour créer un potentiel dipolaire répulsif, qui nous permettrait à la fois de réaliser les bords de la boîte et de corriger la rugosité du potentiel magnétique à l'aide d'une matrice de micro-miroirs, comme ce qui a été fait dans [122]. Pour calculer les ordres de grandeurs des paramètres expérimentaux, nous considérons une boîte de taille  $L = 100 \mu\text{m}$ , une fréquence d'oscillation transverse  $\nu_{\perp} = 2 \text{ kHz}$  et un nombre d'atomes  $N = 5000$ , qui sont des valeurs réalistes sur l'expérience. On a alors un potentiel chimique  $\mu \simeq gN/L = h \times 550 \text{ Hz}$ , une longueur de relaxation  $\xi = \hbar/\sqrt{2\mu m} = 0,6 \mu\text{m}$  et une vitesse du son  $c \simeq \sqrt{\mu/m} = 3.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}$ .

Pour créer le potentiel d'excitation  $U(x, t)$  de l'équation (5.16), on peut utiliser un gradient de champ magnétique à l'aide de deux paires de bobines en configuration anti-Helmholtz selon l'axe  $x$ , décentrées de part et d'autre du nuage d'atomes, qu'on alimente successivement. Pour avoir une amplitude  $U_0 \simeq \mu$ , il faut produire un gradient de champ magnétique de l'ordre de  $\mu/(g_f m_f \mu_B L) \simeq 0,1 \text{ G.cm}^{-1}$ , ce qui est facilement réalisable. La période d'oscillation du potentiel, qui correspond au temps pour faire un aller-retour dans la boîte, est donnée par  $T = 2L/c = 65 \text{ ms}$ . Nous avons vu qu'après quelques périodes d'oscillation du potentiel, le système évolue peu. On pourrait donc faire l'expérience sur des temps inférieurs à la seconde, pour lesquels les pertes d'atomes causées par les collisions avec le gaz résiduel sont limitées. Il peut cependant y avoir des pertes causées par la hauteur finie des bords de la boîte, qu'il faudrait prendre en compte dans les simulations numériques pour être plus réaliste. Par ailleurs, dans l'expérience, nous travaillons à température non nulle et l'excitation du système pourrait induire un chauffage supplémentaire. Il faudrait donc aussi prendre en compte les effets de température finie dans les simulations.

Il est en théorie possible de déterminer la distribution en impulsion du système piégé en mesurant le profil de densité longitudinal après un très long temps de vol. En effet, lorsqu'on coupe brutalement le piège l'expansion transverse du nuage conduit à une suppression rapide de l'énergie d'interaction. L'expansion longitudinale est alors le reflet de la distribution en impulsion initiale. Cependant, pour mesurer ainsi la distribution en impulsion, il faudrait attendre des temps suffisamment longs pour que la taille longitudinale du nuage après temps de vol soit très grande devant sa taille initiale. Cela pose de nombreuses difficultés, avec un nuage trop peu dense et qui sortirait du champ de vue de l'imagerie. Pour mesurer la distribution en impulsion, on peut plutôt utiliser la technique de « focusing », comme ce qui a été fait dans l'article [145]. Cette technique consiste à appliquer un potentiel harmonique longitudinal pendant un temps suffisamment court pour que les atomes n'aient pas le temps de bouger, mais qu'ils acquièrent une impulsion supplémentaire  $\delta p = -Ax$ , avec  $x$  la distance au centre du nuage d'atomes. Après un temps d'expansion libre  $\tau = m/A$ , on peut mesurer la densité longitudinale  $f(x)$ , qui est liée à la distribution en impulsion initiale par la relation  $n(p) = mf(p\tau/m)/\tau$ . On peut réaliser ce potentiel harmonique longitudinal en utilisant les fils en U de la puce à atomes. Il faudrait probablement répéter l'expérience dans des conditions identiques un grand nombre de fois pour réduire le bruit sur cette mesure, car elle nécessite de travailler avec un petit nombre d'atomes pour être dans le régime unidimensionnel.

Il serait aussi très intéressant de mesurer les profils de densité in situ, notamment pour observer l'apparition de solitons dans le système. Cependant, cela nécessiterait d'avoir une imagerie dont la résolution est inférieure à la longueur de relaxation, qui vaut typiquement  $\xi \simeq 0,6 \mu\text{m}$ . Pour l'imagerie, on utilise la raie  $D_2$  du sodium à 589 nm. Nous ne pouvons donc pas atteindre la résolution nécessaire à une telle mesure car nous sommes limités par la diffraction.

## 5.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié des systèmes hors équilibre décrits par l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle répulsive dans une boîte. Pour amener le système hors d'équilibre, nous utilisons un potentiel linéaire oscillant qui pourrait facilement être mis en œuvre dans une expérience.

Le cas tridimensionnel pouvait être traité avec la théorie de la turbulence d'onde faible, qui prévoyait l'apparition d'une cascade turbulente avec une loi de puissance stationnaire pour la distribution en impulsion. Contrairement au cas tridimensionnel, il n'existe pas de condition de résonance à  $N$  ondes dans le cas unidimensionnel et il faut donc adopter une autre approche pour décrire le système. L'équation de Gross-Pitaevskii 1D étant intégrable, on peut appliquer les méthodes de transformée de diffusion inverse, utilisées dans le domaine des turbulences intégrables. Le calcul du spectre de Lax permet ainsi de connaître le nombre de solitons, leurs vitesses ainsi que la vitesse du son  $c_{\text{eff}}$ , plus précisément et « automatiquement » que ce que nous aurions pu faire en analysant les profils de densité. Cela nous a permis d'analyser plus quantitativement certaines des observations sur le profil de densité, les énergies et la distribution en impulsion. Ainsi, nous avons observé sur les profils de densité l'apparition de solitons gris, qui paraissaient d'autant plus nombreux et « foncés » que l'amplitude d'excitation du potentiel était grande, avec une vitesse de certains solitons qui dépassait significativement  $c_0$  dans les systèmes très excités. Le spectre de Lax nous a permis de confirmer ces observations : le nombre de solitons augmente en  $\sim U_0^{0,37}$  et la vitesse  $c_{\text{eff}} - c_0$  en  $\sim U_0^{0,53}$ . On passe d'une distribution où les solitons avaient tous une vitesse proche de la vitesse du son à une distribution homogène de vitesse entre 0 et  $c_{\text{eff}}$  en augmentant l'amplitude d'excitation  $U_0$ .

Pour l'évolution de l'énergie, on observe une première phase d'augmentation rapide suivie d'une stabilisation avec des oscillations autour d'une valeur moyenne. Même si nous n'avons pour le moment pas d'explication physique pour comprendre ce comportement, nous pouvons souligner qu'il est très fortement corrélé à l'évolution de la vitesse moyenne des solitons : lorsque l'énergie augmente, la vitesse moyenne des solitons diminue.

Pour la distribution en impulsion, nous avons observé l'apparition de deux lois de puissance, ainsi qu'une décroissance exponentielle à grands  $k$ . La première loi de puissance en  $n(k) \propto k^{-2}$  s'explique par la distribution en impulsion des solitons à petits  $k$ . Nous avons pu déduire du spectre de Lax la densité en solitons  $n_s$  et confirmer que cette loi de puissance démarre pour  $k \simeq k_{\text{red}} = 2(1 - \langle \nu^2 \rangle) n_s$ . La deuxième loi de puissance en  $k^{-\gamma}$  avec  $\gamma \simeq 8$  n'est pas encore bien comprise mais on observe un lien entre la longueur de relaxation  $\xi_{\text{eff}}$  déduite de  $c_{\text{eff}}$  grâce au spectre de Lax et le début de cette loi de puissance. Enfin, le calcul de  $\xi_{\text{eff}}$  nous a permis de montrer que la distribution en impulsion à grands  $k$  des systèmes hors équilibre est proportionnelle à la distribution en impulsion d'un soliton noir, avec une longueur de relaxation  $\xi_{\text{eff}}$ .

Finalement, une mesure expérimentale de la distribution en impulsion pour ces systèmes hors équilibre semble réalisable. Pour pouvoir comparer les résultats des simulations numériques à une réalisation expérimentale, il faudrait cependant prendre en compte les pertes d'atomes ainsi que les effets thermiques dans les simulations.

# Conclusion

Au cours de cette thèse nous avons poursuivi le développement du montage expérimental de gaz de Bose de sodium sur puce à atomes, après les travaux réalisés durant les thèses de Dany Ben Ali [63] et de Joseph Seaward [64], jusqu'à l'obtention de condensats de Bose-Einstein. Nous nous sommes ensuite intéressés à l'étude expérimentale de résonances de Feshbach micro-onde. En parallèle de ce travail expérimental, nous avons mené des travaux de simulations numériques sur des gaz de Bose 1D hors équilibre, piégés dans une boîte.

## Réalisations expérimentales

Peu avant le début de ma thèse, la puce à atomes avait été installée dans son enceinte et le vide venait d'être atteint. Nous avons alors mis en place l'imagerie par absorption autour de l'enceinte puce et transporté les atomes jusqu'au piège magnétique quadrupolaire de cette enceinte pour la première fois.

Nous nous sommes ensuite concentrés sur le transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce à atomes et le refroidissement par évaporation. Après avoir résolu des problèmes de conception sur le montage, qui ont nécessité le changement du fil en Z et de la puce, nous avons atteint le seuil de condensation dans le piège de la puce, avec un nombre d'atomes élevé, qui peut aller jusqu'à  $3 \cdot 10^6$  atomes pour le condensat de Bose-Einstein.

Nous avons ensuite caractérisé les gaz dégénérés produits en termes de nombre d'atomes, de fréquences d'oscillation et de température. Grâce aux grandes fréquences d'oscillation transverses du piège magnétique de la puce, nous pouvons travailler à une dimension dans le régime de quasi-condensat.

Afin d'atteindre le régime de forte interaction, il paraissait intéressant d'augmenter la longueur de diffusion à l'aide d'une résonance de Feshbach micro-onde, étudiée théoriquement [59] mais peu explorée expérimentalement. Pour utiliser ces résonances il est nécessaire de travailler avec de fortes puissances micro-onde, afin que la longueur de diffusion varie sensiblement sur des largeurs suffisamment grandes. Pour cela, nous avons utilisé un guide d'ondes coplanaire intégré à la puce à atomes et avons approché les atomes à quelques dizaines de microns de ce guide d'ondes. Les mesures de fréquences d'oscillation de Rabi entre les niveaux hyperfins de l'état fondamental montrent que nous pouvons atteindre plusieurs gauss d'amplitude magnétique pour le champ oscillant, ce qui correspond à une largeur prédite de quelques dizaines de kilohertz pour la résonance de Feshbach. Nous avons ensuite effectué la spectroscopie des états moléculaires les moins liés ( $n = -1$ ) du canal [ $f_1 = 1, f_2 = 2$ ]

accessibles depuis l'état initial  $|f = 1, m_f = -1\rangle$ . Cette spectroscopie à un photon micro-onde permet de réduire les incertitudes sur l'énergie de liaison des états moléculaires de moment cinétique total  $F = 1, 3$  par rapport aux mesures de spectroscopie à deux photons optiques. Ce travail de spectroscopie micro-onde se poursuit actuellement et des transitions vers d'autres états moléculaires des branches  $[f_1 = 1, f_2 = 1]$  et  $[f_1 = 2, f_2 = 2]$  viennent d'être observées sur l'expérience. Ces mesures précises des fréquences de transitions vers les états moléculaires permettent de caractériser davantage le potentiel moléculaire et d'affiner le modèle que nous utilisons, notamment pour mieux décrire les déplacements lumineux que nous observons. Elles pourraient en outre permettre d'obtenir une valeur plus précise pour la longueur de diffusion [131].

Nous nous sommes ensuite concentrés sur la résonance que nous souhaitions utiliser pour contrôler la longueur de diffusion. La rapidité des pertes que nous avons observées à haute puissance micro-onde, avec des temps de vie de l'ordre de quelques dizaines de microsecondes, semble limiter l'utilisation de ces résonances de Feshbach comme outil de contrôle des interactions. La dynamique très rapide des pertes complique la mise en évidence d'un effet sur la longueur de diffusion au voisinage de la résonance. Une étude plus approfondie de l'excitation du monopole au voisinage de la résonance est nécessaire pour déterminer si elle peut être attribuée à une modification de la longueur de diffusion ou si elle est seulement l'effet des pertes. Il reste encore à approfondir l'étude du mécanisme des pertes, pour vérifier qu'il s'agit bien de pertes à deux corps dues à la photoassociation. On pourrait dans ce cas utiliser les transitions moléculaires induites par le champ micro-onde pour créer des pertes à deux corps importantes, afin de forcer une fermionisation dynamique du système [146–148].

## Simulations numériques

Face aux difficultés sur le montage expérimental que nous avons rencontrées durant ma thèse, nous avons initié un projet de simulations numériques dans le but de transposer au cas unidimensionnel les travaux réalisés dans l'article [69], qui portent sur l'étude des turbulences dans un condensat de Bose-Einstein tridimensionnel. Dans cet article, les auteurs observent l'émergence d'une cascade en énergie, décrite par la théorie de turbulence d'onde faible. Contrairement aux systèmes turbulents à trois ou deux dimensions qui vérifient l'équation de Gross-Pitaevskii, les systèmes à une dimension ne sont pas bien décrits par cette théorie et se placent dans le cadre des turbulences intégrables.

Dans ces simulations, on résout l'équation de Gross-Pitaevskii unidimensionnelle en présence d'un potentiel linéaire oscillant au cours du temps pour amener le système hors d'équilibre. Nous nous sommes intéressés aux profils de densité, aux énergies ainsi qu'à la distribution en impulsion pour différentes amplitudes du potentiel d'excitation. Pour la distribution en impulsion, nous avons observé deux lois de puissance : la première pour des nombres d'onde inférieurs à la longueur de relaxation en  $n(k) \propto k^{-2}$ , qu'on peut expliquer par la distribution en impulsion des solitons, et la deuxième pour des nombres d'onde supérieurs à la longueur de relaxation en  $n(k) \propto k^{-\gamma}$  avec  $\gamma \simeq 8$ , pour laquelle nous n'avons pour le moment pas d'explication. En faisant varier le coefficient  $gN$  nous avons aussi observé une forme d'universalité de la distribution en impulsion.

Pour étudier les solitons du système, nous avons utilisé les méthodes de transformée de diffusion inverse, en calculant les spectres de Lax. Cela permet d'estimer le nombre de solitons, leurs vitesses et la vitesse effective du son dans le système. Nous avons pu analyser plus quantitativement certaines observations que nous avons faites sur les profils de densité,

avec une augmentation du nombre de solitons avec l'amplitude de l'excitation ou la répartition de leurs vitesses, ainsi qu'une augmentation de la vitesse du son effective pour les grandes amplitudes d'excitation. On peut aussi faire le lien entre les oscillations en énergie du système et l'oscillation de la vitesse moyenne des solitons au cours du temps. Sur la distribution en impulsion, nous avons pu relier le début de la loi de puissance en  $k^{-2}$  à la densité de solitons et le début de la deuxième loi de puissance à l'inverse de la longueur de relaxation effective, estimée à partir du spectre de Lax. Finalement, la distribution en impulsion à grands nombres d'onde correspond à celle d'un soliton noir pour un système avec une longueur de relaxation effective calculée indépendamment grâce au spectre de Lax.

Pour comparer ces simulations numériques à une potentielle future expérience, il faudrait certainement prendre en compte l'effet de la température, ce qu'on pourrait faire en générant des fluctuations de phase correspondant à une température donnée pour le profil initial [149]. Il faudrait aussi considérer les pertes d'atomes causées par une hauteur finie d'énergie  $E_{\max}$  des bords de la boîte. Pour cela, on pourrait filtrer la fonction d'onde à chaque pas de temps, en ne gardant que les modes d'énergie inférieure à  $E_{\max}$ . Une autre solution serait d'introduire dans l'équation d'évolution un terme imaginaire en  $-i\gamma(E > E_{\max})y$ , afin d'amortir les modes de haute énergie, avec  $\gamma$  un paramètre lié à la probabilité qu'un atome d'énergie  $E > E_{\max}$  quitte le piège. Enfin, on pourrait s'intéresser aux questions de préthermalisation [150] et de points fixes non thermiques [151] lors de l'évolution du système.

## Améliorations sur le montage expérimental et perspectives

Même si le dispositif expérimental produit désormais des condensats, il est possible de l'améliorer sur plusieurs points. Augmenter le taux de répétition de l'expérience constituerait par exemple un gain de temps considérable. Actuellement la séquence permettant de produire des condensats dure 30 secondes. Cependant, le chauffage des bobines X entraîne des pertes et des fluctuations du nombre d'atomes coup sur coup importantes, et nous ne produisons un condensat que toutes les minutes afin de stabiliser le nombre d'atomes. Un refroidissement à eau de ces bobines devrait grandement améliorer la situation. Par ailleurs, comme nous utilisons deux enceintes distinctes pour le piège magnéto-optique et la puce, on pourrait recommencer à charger le piège magnéto-optique juste après le début du transport des atomes vers la deuxième enceinte, ce qui permettrait de quasiment doubler le taux de répétition de l'expérience. Cela serait particulièrement profitable pour des expériences nécessitant un grand nombre d'images, comme des mesures de corrélations par exemple.

Nous avons aussi mis en place les éléments nécessaires pour faire une phase de pompage optique, afin d'accumuler les atomes dans l'état  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  juste avant de les piéger magnétiquement. Nous n'avons pas encore eu le temps de tester cette technique sur l'expérience mais cela devrait augmenter le nombre d'atomes dans le piège magnétique, ce qui permettrait de réduire la température du four et d'espacer les rechargements en sodium. Par ailleurs, nous nous sommes aperçus que la configuration actuelle de l'imagerie par absorption n'est pas idéale et qu'il faudrait utiliser le faisceau repompeur selon le même axe que celui d'imagerie pour augmenter la section efficace.

L'un des objectifs de l'expérience était d'étudier le régime de forte interaction. Nous espérons initialement atteindre ce régime en augmentant la longueur de diffusion à l'aide de résonances de Feshbach micro-onde. Cependant, les pertes d'atomes très rapides que nous avons observées semblent compromettre leur utilisation pour contrôler les interactions. On pourrait utiliser un réseau optique pour augmenter les interactions effectives, comme ce qui

a été fait dans l'article [41]. Pour atteindre ce régime il faudrait aussi travailler avec un très faible nombre d'atomes, de l'ordre de la centaine. Pour les détecter on pourrait mettre en place une imagerie par fluorescence sur le principe de ce qui a été fait dans l'article [124], en utilisant des nappes de lumières et un capteur EMCCD (Electron Multiplying Charge Coupled Device).

Il serait aussi intéressant de travailler dans une géométrie de type boîte plutôt que dans un piège harmonique, qui est la géométrie naturelle pour comparer aux modèles théoriques. Cela permettrait par exemple d'étudier certains états hors équilibre comme la propagation d'ondes de choc [152]. L'équipe a prévu pour cela d'utiliser un potentiel optique créé par un laser vert à 532 nm, que nous avons récemment acquis, et une matrice de micro-miroirs, afin de générer un potentiel arbitraire corrigeant la rugosité du potentiel magnétique et formant les bords de la boîte [122, 153]. Travailler dans une boîte permettrait de mettre en œuvre expérimentalement de façon directe les simulations numériques effectuées au chapitre 5. On pourrait par exemple mesurer la distribution en impulsion après avoir conduit le système hors d'équilibre à l'aide d'un potentiel magnétique oscillant au cours du temps.

Maintenant que nous arrivons à produire de façon fiable des condensats avec le dispositif expérimental, nous pouvons espérer des résultats physiques intéressants dans les années à venir sur l'étude des gaz unidimensionnels et de leurs propriétés hors équilibre.

# **Annexes**



## Calibration des champs magnétiques des bobines

Nous utilisons quatre paires de bobines en configuration Helmholtz, que nous avons appelées bobines X, bobines X2, bobines Y et bobines Z. Ces bobines créent un champ magnétique homogène  $B_{\text{bob}}$ , proportionnel au courant  $I$  qui les traverse :  $B_{\text{bob}} = \alpha I$ . Pour calibrer au mieux le rapport  $\alpha$  entre le champ  $B_{\text{bob}}$  et le courant  $I$ , nous avons tiré parti de l'effet Zeeman : nous avons effectué des mesures des fréquences micro-onde permettant de transférer les atomes du niveau hyperfin de l'état fondamental  $|f = 1, m_f = -1\rangle$  aux niveaux  $|f = 2, m_f = -2, -1, 0\rangle$ , qui dépendent du champ magnétique statique à la position des atomes. Nous avons initialement préparé un condensat de Bose-Einstein sur la puce, puis effectué un temps de vol de 5 ms en coupant tous les champs magnétiques à l'exception de celui créé par la bobine à calibrer. On envoie ensuite un champ micro-onde dans le guide d'onde durant 100  $\mu\text{s}$ , puis on prend une image par absorption en l'absence de faisceau repompeur, ce qui permet de mesurer le nombre d'atomes transférés dans l'état  $f = 2$ . En balayant la fréquence du champ micro-onde, on trouve trois fréquences de résonance pour lesquelles les atomes sont transférés vers  $f = 2$ , dont l'expression à la limite linéaire, valable pour des champs faibles est la suivante :

- $\nu_{\text{res1}} = \nu_{\text{hf}} - |g_f| \mu_B B / h$  pour la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = 0\rangle$  induite par la polarisation  $\sigma^+$ ,
- $\nu_{\text{res2}} = \nu_{\text{hf}} - 2|g_f| \mu_B B / h$  pour la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = -1\rangle$  induite par la polarisation  $\pi$ ,
- $\nu_{\text{res3}} = \nu_{\text{hf}} - 3|g_f| \mu_B B / h$  pour la transition vers l'état  $|f = 2, m_f = -2\rangle$  induite par la polarisation  $\sigma^-$ ,

avec  $h\nu_{\text{hf}}$  l'écart en énergie entre les niveaux hyperfins à champ magnétique nul,  $g_f = -1/2$  le facteur de Landé hyperfin,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $B$  la norme du champ magnétique total. Ce champ magnétique total comprend le champ magnétique créé par les bobines  $B_{\text{bob}} = \alpha I$  qu'on cherche à calibrer ainsi que le champ magnétique résiduel  $B_{\text{res}}$  lorsque toutes les bobines sont éteintes, dont la contribution principale est le champ magnétique terrestre. Pour chacune des bobines, nous avons mesuré les trois fréquences  $\nu_{\text{res1,2,3}}$  pour différentes valeurs du courant  $I$ . En ajustant le modèle aux données, en laissant les coefficients  $\alpha$  ainsi que le champ magnétique résiduel en paramètre libre, nous avons trouvé les valeurs suivantes pour les calibrations des bobines :

- $\alpha_x = 3,72(7) \text{ G.A}^{-1}$  pour les bobines X, avec  $\vec{B}_X = \alpha_x I_x \vec{e}_x$
- $\alpha_{x2} = -0,99(1) \text{ G.A}^{-1}$  pour les bobines X2, avec  $\vec{B}_{X2} = \alpha_{x2} I_{x2} \vec{e}_x$
- $\alpha_y = -6,24(3) \text{ G.A}^{-1}$  pour les bobines Y, avec  $\vec{B}_Y = \alpha_y I_y \vec{e}_y$
- $\alpha_z = 11,3(1) \text{ G.A}^{-1}$  pour les bobines Z, avec  $\vec{B}_Z = \alpha_z I_z \vec{e}_z$ .

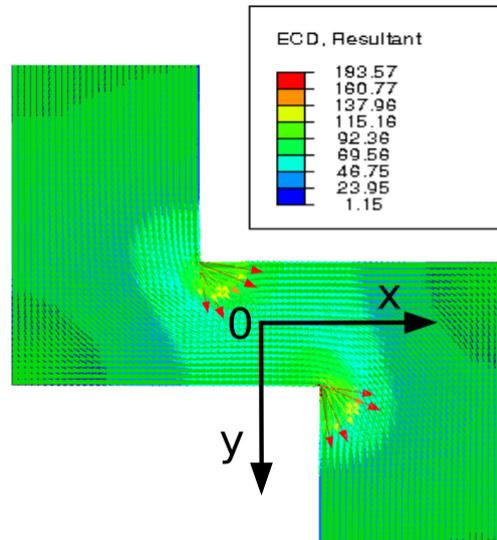
Nous trouvons pour les composantes du champ magnétique résiduel :  $B_x = 0,16(5) \text{ G}$ ,  $B_y = 0,47(3) \text{ G}$  et  $B_z = -0,24(3) \text{ G}$ . On peut noter que la norme du champ résiduel trouvée vaut  $B_{\text{res}} = 0,55 \text{ G}$ , ce qui est compatible avec celle du champ magnétique terrestre qui vaut environ  $0,5 \text{ G}$ .

# Annexe **B**

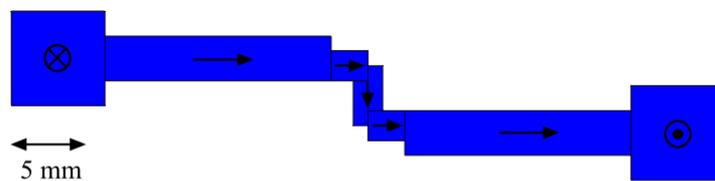
## Simulations des champs magnétiques du fil en Z et de la puce

Dans l'annexe précédente nous avons expliqué comment nous avons mesuré précisément les champs magnétiques des bobines. Il est très utile de connaître aussi le profil du champ magnétique créé par le fil en Z et les fils de la puce, car une bonne connaissance du champ magnétique des pièges nous permet d'estimer les taux de collisions des atomes ou leur densité dans l'espace des phases par exemple. Pour estimer ce champ magnétique, nous utilisons un code qui calcule le champ magnétique produit par des parallélépipèdes rectangles, parcourus par une densité de courant homogène. On modélise le fil en Z et les fils de la puce par une succession de parallélépipèdes rectangles reproduisant la géométrie de ces fils. Pour le fil en Z, nous avons observé un écart de quelques gauss selon l'axe  $x$  entre ce modèle simplifié et les mesures effectuées sur l'expérience, car la distribution de courant s'accumule aux bords des fils au niveau des angles, comme on peut le voir sur la figure B.1 qui propose une simulation par la méthode des éléments finis, plus réaliste mais trop complexe pour être utilisée de façon routinière pour la détermination du profil de champ lorsque nous modifions plusieurs paramètres simultanément.

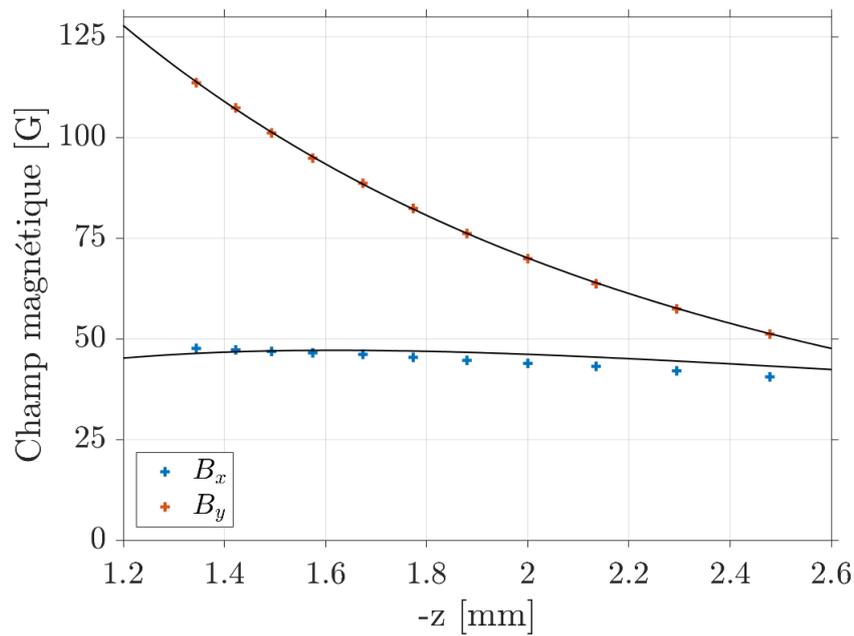
Afin d'améliorer le modèle en adaptant légèrement la géométrie du fil en Z, nous avons mesuré les composantes du champ magnétique orientées selon  $x$  et  $y$  créées par le fil en Z, pour différentes valeurs de la position verticale  $z$ , en  $x = y = 0$ . Pour cela on piège des atomes froids dans le piège en Z, pour différentes valeurs de champs magnétiques des bobines Y et on diminue le champ des bobines X jusqu'à ce qu'on observe des pertes Majorana importantes, qui sont la signature d'un champ magnétique (quasiment) nul au centre du piège, en  $x = y = 0$ . On en déduit les composantes selon  $x$  et  $y$  du champ créé par le fil en Z, qui sont environ égales à  $-\vec{B}_X$  et  $-\vec{B}_Y$  respectivement. On relève aussi la position des atomes selon l'axe vertical  $z$  avec une image in situ. Pour améliorer l'accord entre ces mesures et les simulations, nous avons réduit la largeur des barres transversales du fil en Z dans le modèle de 3 mm à 2 mm à proximité des angles du fil en Z. La géométrie utilisée pour le fil en Z dans les simulations est représentée sur la figure B.2 et la comparaison entre les mesures expérimentales de champs magnétiques et ceux des simulations pour le fil en Z est présentée sur la figure B.3.



**Figure B.1** – Densité de courant dans le fil en Z. Le courant présente une répartition complexe, notamment à proximité des angles. Simulation réalisée par Yann Charles à l'aide de la méthode des éléments finis.



**Figure B.2** – Géométrie utilisée pour le fil en Z dans les simulations qui calculent le champ magnétique. Le sens du courant dans chaque élément est représenté par les flèches. Les champs créés par les rectangles qui se recouvrent partiellement sont additionnés.



**Figure B.3** – Comparaison entre les mesures de champs magnétiques créés par le fil en Z et les simulations de ce champ magnétique. On a mesuré les composantes du champ magnétique selon  $x$  (points bleus) et selon  $y$  (points orange) en  $x = y = 0$ , en fonction de la position verticale. L'origine du repère est prise au centre du fil en Z. Les lignes noires correspondent à ces composantes de champ magnétique calculées dans les simulations. On observe un excellent accord entre l'expérience et le modèle pour la composante selon  $y$ . L'accord est correct pour la composante selon  $x$



# Bibliographie

- [1] L. de BROGLIE : Recherches sur la théorie des Quanta. Thèse, 1924.
- [2] W. PAULI : Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren. *Zeitschrift für Physik*, 31(1):765–783, 1925.
- [3] S. BOSE : Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. *Zeitschrift für Physik*, 26(1):178–181, 1924.
- [4] A. EINSTEIN : Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse*, 22:261–267, 1924.
- [5] A. EINSTEIN : Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandlung. *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Physikalisch-mathematische Klasse*, 1(3):3–14, 1925.
- [6] M. H. ANDERSON, J. R. ENSHER, M. R. MATTHEWS, C. E. WIEMAN et E. A. CORNELL : Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor. *Science*, 269(5221):198–201, 1995.
- [7] K. B. DAVIS, M. MEWES, M. R. ANDREWS, N.J. van DRUTEN, D. S. DURFEE, D. M. KURN et W. KETTERLE : Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms. *Physical Review Letters*, 75(22):3969–3973, 1995.
- [8] C. N. COHEN-TANNOUJDI : Nobel Lecture : Manipulating atoms with photons. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):707–719, 1998.
- [9] S. CHU : Nobel Lecture : The manipulation of neutral particles. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):685–706, 1998.
- [10] W. D. PHILLIPS : Nobel Lecture : Laser cooling and trapping of neutral atoms. *Reviews of Modern Physics*, 70(3):721–741, 1998.
- [11] W. D. PHILLIPS et H. METCALF : Laser Deceleration of an Atomic Beam. *Physical Review Letters*, 48(9):596–599, 1982.
- [12] E. L. RAAB, M. PRENTISS, A. CABLE, S. CHU et D. E. PRITCHARD : Trapping of Neutral Sodium Atoms with Radiation Pressure. *Physical Review Letters*, 59(23):2631–2634, 1987.
- [13] S. CHU, L. HOLLBERG, J. E. BJORKHOLM, A. CABLE et A. ASHKIN : Three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms by resonance radiation pressure. *Physical Review Letters*, 55(1):48–51, 1985.

- [14] P. D. LETT, R. N. WATTS, C. I. WESTBROOK, W. D. PHILLIPS, P. L. GOULD et H. J. METCALF : Observation of Atoms Laser Cooled below the Doppler Limit. *Physical Review Letters*, 61(2):169–172, 1988.
- [15] J. DALIBARD et C. COHEN-TANNOUDJI : Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models. *Journal of the Optical Society of America B*, 6(11):2023, 1989.
- [16] A. L. MIGDALL, J. V. PRODAN, W. D. PHILLIPS, T. H. BERGEMAN et H. J. METCALF : First Observation of Magnetically Trapped Neutral Atoms. *Physical Review Letters*, 54(24):2596–2599, 1985.
- [17] S. CHU, J. E. BJORKHOLM, A. ASHKIN et A. CABLE : Experimental Observation of Optically Trapped Atoms. *Physical Review Letters*, 57(3):314–317, 1986.
- [18] H. F. HESS : Evaporative cooling of magnetically trapped and compressed spin-polarized hydrogen. *Physical Review B*, 34(5):3476–3479, 1986.
- [19] N. MASUHARA, J. M. DOYLE, J. C. SANDBERG, D. KLEPPNER, T. J. GREYTAKE, H. F. HESS et G. P. KOCHANSKI : Evaporative Cooling of Spin-Polarized Atomic Hydrogen. *Physical Review Letter*, 61(8):935–938, 1988.
- [20] K. B. DAVIS, M-O. MEWES, M. A. JOFFE, M. R. ANDREWS et W. KETTERLE : Evaporative Cooling of Sodium Atoms. *Physical Review Letters*, 74(26):5202–5205, 1995.
- [21] E. A. CORNELL et C. E. WIEMAN : Nobel Lecture : Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):875–893, 2002.
- [22] W. KETTERLE : Nobel lecture : When atoms behave as waves : Bose-Einstein condensation and the atom laser. *Reviews of Modern Physics*, 74(4):1131–1151, 2002.
- [23] B. DEMARCO et D. JIN : Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas. 285(285):1703–1706, 1999.
- [24] B. J. BLOOM, T. L. NICHOLSON, J. R. WILLIAMS, S. L. CAMPBELL, M. BISHOP, X. ZHANG, W. ZHANG, S. L. BROMLEY et J. YE : An Optical Lattice Clock with Accuracy and Stability at the  $10^{-18}$  Level. *Nature*, 506(7486):71–75, 2014.
- [25] L. MOREL, Z. YAO, P. CLADÉ et S. GUELLATI-KHÉLIFA : Determination of the fine-structure constant with an accuracy of 81 parts per trillion. *Nature*, 588(7836):61–65, 2020.
- [26] M. LEWENSTEIN, A. SANPERA, V. AHUFINGER, B. DAMSKI, A. SEN DE et U. SEN : Ultracold atomic gases in optical lattices : mimicking condensed matter physics and beyond. *Advances in Physics*, 56(2):243–379, 2007.
- [27] I. BLOCH, J. DALIBARD et S. NASCIBÈNE : Quantum simulations with ultracold quantum gases. *Nature Physics*, 8(4):267–276, 2012.
- [28] C. GROSS et I. BLOCH : Quantum simulations with ultracold atoms in optical lattices. *Science*, 357(6355):995–1001, 2017.
- [29] R. P. FEYNMAN : Simulating physics with computers. *International Journal of Theoretical Physics*, 21(6):467–488, 1982.
- [30] M. GREINER, O. MANDEL, T. ESSLINGER, T. W. HÄNSCH et I. BLOCH : Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms. *Nature*, 415(6867):39–44, 2002.

- [31] N. D. MERMIN et H. WAGNER : Absence of Ferromagnetism or Antiferromagnetism in One- or Two-Dimensional Isotropic Heisenberg Models. *Physical Review Letter*, 17(22):1133–1136, 1966.
- [32] P. C. HOHENBERG : Existence of Long-Range Order in One and Two Dimensions. *Physical Review*, 158(2):383–386, 1967.
- [33] V. BAGNATO et D. KLEPPNER : Bose-Einstein condensation in low-dimensional traps. *Physical Review A*, 44(11):7439–7441, 1991.
- [34] I. BLOCH, J. DALIBARD et W. ZWERGER : Many-body physics with ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 80(3):885–964, 2008.
- [35] H. A. BETHE : Zur theorie der metalle. *European Physical Journal*, 71(3):205–226, 1931.
- [36] M. GIRARDEAU : Relationship between Systems of Impenetrable Bosons and Fermions in One Dimension. *Journal of Mathematical Physics*, 1(6):516–523, 1960.
- [37] A. GÖRLITZ, J. M. VOGELS, A. E. LEANHARDT, C. RAMAN, T. L. GUSTAVSON, J. R. ABO-SHAER, A. P. CHIKKATUR, S. GUPTA, S. INOUE, T. ROSENBERG et W. KETTERLE : Realization of Bose-Einstein Condensates in Lower Dimensions. *Physical Review Letter*, 87(13):130402, 2001.
- [38] S. BURGER, F. S. CATALIOTTI, C. FORT, P. MADDALONI, F. MINARDI et M. INGUSCIO : Quasi-2D Bose-Einstein condensation in an optical lattice. *Europhysics Letters*, 57(1):1, 2002.
- [39] S. STOCK, Z. HADZIBABIC, B. BATTELIER, M. CHENEAU et J. DALIBARD : Observation of Phase Defects in Quasi-Two-Dimensional Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letter*, 95(19):190403, 2005.
- [40] M. GREINER, I. BLOCH, O. MANDEL, T. W. HÄNSCH et T. ESSLINGER : Exploring Phase Coherence in a 2D Lattice of Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letter*, 87(16):160405, 2001.
- [41] T. KINOSHITA, T. WENGER et D. S. WEISS : Observation of a One-Dimensional Tonks-Girardeau Gas. *Science*, 305(5687):1125–1128, 2004.
- [42] K. MERLOTI, R. DUBESSY, L. LONGCHAMBON, A. PERRIN, P.-E. POTTIE, V. LORENT et H. PERRIN : A two-dimensional quantum gas in a magnetic trap. *New Journal of Physics*, 15(3):033007, 2013.
- [43] J. ESTEVE, J.-B. TREBBIA, T. SCHUMM, A. ASPECT, C. I. WESTBROOK et I. BOUCHOULE : Observations of Density Fluctuations in an Elongated Bose Gas : Ideal Gas and Quasicondensate Regimes. *Physical Review Letter*, 96(13):130403, 2006.
- [44] S. HOFFERBERTH, I. LESANOVSKY, B. FISCHER, T. SCHUMM et J. SCHMIEDMAYER : Non-equilibrium coherence dynamics in one-dimensional Bose gases. *Nature*, 449(7160):324–327, 2007.
- [45] J. REICHEL, W. HÄNSEL et T. W. HÄNSCH : Atomic micromanipulation with magnetic surface traps. *Phys. Rev. Lett.*, 83:3398–3401, Oct 1999.
- [46] R. FOLMAN, P. KRÜGER, D. CASSETTARI, B. HESSMO, T. MAIER et J. SCHMIEDMAYER : Controlling Cold Atoms using Nanofabricated Surfaces : Atom Chips. *Physical Review Letter*, 84(20):4749–4752, 2000.
- [47] W. HÄNSEL, P. HOMMELHOFF, T. W. HÄNSCH et J. REICHEL : Bose-Einstein condensation on a microelectronic chip. *Nature*, 413:498–501, 2001.

- [48] R. FOLMAN, P. KRÜGER, J. SCHMIEDMAYER, J. DENSCHLAG et C. HENKEL : Microscopic Atom Optics : From Wires to an Atom Chip. *In Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 48, pages 263–356. Academic Press, 2002.
- [49] J. REICHEL : Microchip traps and Bose–Einstein condensation. *Applied Physics B*, 74(6):469–487, 2002.
- [50] J. FORTÁGH et C. ZIMMERMANN : Magnetic microtraps for ultracold atoms. *Reviews of Modern Physics*, 79(1):235–289, 2007.
- [51] I. BOUCHOULE, N. J. van DRUTEN et C. I. WESTBROOK : Atom Chips and One-Dimensional Bose Gases. *In Atom Chips*, pages 331–363. John Wiley & Sons, Ltd, 2011.
- [52] H. FESHBACH : Unified theory of nuclear reactions. *Annals of Physics*, 5(4):357–390, 1958.
- [53] U. FANO : Effects of Configuration Interaction on Intensities and Phase Shifts. *Physical Review*, 124(6):1866–1878, 1961.
- [54] E. TIESINGA, B. J. VERHAAR et H. T. C. STOOF : Threshold and resonance phenomena in ultracold ground-state collisions. *Physical Review A*, 47(5):4114–4122, 1993.
- [55] S. INOUE, M. R. ANDREWS, J. STENGER, H.-J. MIESNER, D. M. STAMPER-KURN et W. KETTERLE : Observation of Feshbach resonances in a Bose–Einstein condensate. *Nature*, 392(6672):151–154, 1998.
- [56] Ph. COURTEILLE, R. S. FREELAND, D. J. HEINZEN, F. A. van ABEELLEN et B. J. VERHAAR : Observation of a Feshbach Resonance in Cold Atom Scattering. *Physical Review Letter*, 81(1):69–72, 1998.
- [57] C. CHIN, R. GRIMM, P. JULIENNE et E. TIESINGA : Feshbach resonances in ultracold gases. *Reviews of Modern Physics*, 82(2):1225–1286, 2010.
- [58] M. THEIS, G. THALHAMMER, K. WINKLER, M. HELLWIG, G. RUFF, R. GRIMM et J. Hecker DENSCHLAG : Tuning the Scattering Length with an Optically Induced Feshbach Resonance. *Physical Review Letters*, 93(12):123001, 2004.
- [59] D. J. PAPOULAR, G. V. SHLYAPNIKOV et J. DALIBARD : Microwave-induced Fano-Feshbach resonances. *Physical Review A*, 81(4):041603, 2010.
- [60] B. PAREDES, A. WIDERA, V. MURG, O. MANDEL, S. FÖLLING, I. CIRAC, G. V. SHLYAPNIKOV, T. W. HÄNSCH et I. BLOCH : Tonks–Girardeau gas of ultracold atoms in an optical lattice. *Nature*, 429(6989):277–281, 2004.
- [61] T. JACQMIN, J. ARMIJO, T. BERRADA, K. KHERUNTSYAN et I. BOUCHOULE : Sub-Poissonian fluctuations in a 1D Bose gas : from the quantum quasi-condensate to the strongly interacting regime. *Physical Review Letters*, 106(23):230405, 2011.
- [62] D. J. PAPOULAR : Manipulation of Interactions in Quantum Gases : a theoretical approach. Thèse de doctorat, Université Paris Sud - Paris XI, 2011.
- [63] D. BEN ALI : Conception et construction d’une expérience d’atomes froids : vers un condensat de sodium sur puce. Thèse de doctorat, Université Paris 13, 2016.
- [64] J. SEAWARD : Gaz unidimensionnels avec interactions accordables. Thèse de doctorat, Université Sorbonne Paris Nord, 2020.
- [65] D. BEN ALI, T. BADR, T. BRÉZILLON, R. DUBESSY, H. PERRIN et A. PERRIN : Detailed study of a transverse field Zeeman slower. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 50(5):055008, 2017.

- [66] T. BADR, D. BEN ALI, J. SEAWARD, Y. GUO, F. WIOTTE, R. DUBESSY, H. PERRIN et A. PERRIN : Comparison of time profiles for the magnetic transport of cold atoms. *Applied Physics B*, 125(6):102, 2019.
- [67] M. BALLU, B. MIRMAND, T. BADR, H. PERRIN et A. PERRIN : Fast manipulation of a quantum gas on an atom chip with a strong microwave field, 2024. Preprint arXiv:2405.07583.
- [68] P. BÖHI : Coherent manipulation of ultracold atoms with microwave near-fields. Thèse de doctorat, Ludwig-Maximilians-Universität München, 2010.
- [69] N. NAVON, A. L. GAUNT, R. P. SMITH et Z. HADZIBABIC : Emergence of a turbulent cascade in a quantum gas. *Nature*, 539(7627):72–75, 2016.
- [70] V. E. ZAKHAROV, V. S. L'VOV et G. FALKOVICH : Kolmogorov spectra of turbulence. *Springer, Berlin*, 1992.
- [71] S. NAZARENKO : Wave Turbulence. *Springer Science & Business Media*, Vol. 825, 2011.
- [72] S. Y. ANNENKOV et V. I. SHRIRA : Direct Numerical Simulation of Downshift and Inverse Cascade for Water Wave Turbulence. *Physical Review Letter*, 96(20):204501, 2006.
- [73] A. A. VEDENOV : Theory of a Weakly Turbulent Plasma. *In Reviews of Plasma Physics : Volume 3*, pages 229–276. Springer US, 1967.
- [74] S. DYACHENKO, A. C. NEWELL, A. PUSHKAREV et V. E. ZAKHAROV : Optical turbulence : weak turbulence, condensates and collapsing filaments in the nonlinear Schrödinger equation. *Physica D Nonlinear Phenomena*, 57:96–160, 1992.
- [75] V. E. ZAKHAROV : Turbulence in Integrable Systems. *Studies in Applied Mathematics*, 122(3):219–234, 2009.
- [76] S. RANDOUX et P. SURET : Integrable Turbulence with Nonlinear Random Optical Waves. *In Rogue and Shock Waves in Nonlinear Dispersive Media*, pages 277–307. Springer International Publishing, 2016.
- [77] M. J. ABLOWITZ et H. SEGUR : Solitons and the inverse scattering transform. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol.127, 1981.
- [78] J. BEUGNON : Physique Statistique Quantique, cours de Master 1 Phytem. <https://www.lkb.upmc.fr/boseeinsteinsondensates/beugnon/>, 2018.
- [79] J. DALIBARD : Atomes ultra-froids, cours de Master 2. [https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index\\_en.html](https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index_en.html).
- [80] Y. CASTIN : Bose-Einstein condensates in atomic gases : simple theoretical results. volume 72, pages 1–136. 2001. arXiv :cond-mat/0105058.
- [81] F. DALFOVO, S. GIORGINI, L. P. PITAEVSKII et S. STRINGARI : Theory of Bose-Einstein condensation in trapped gases. *Reviews of Modern Physics*, 71(3):463–512, 1999.
- [82] E. P. GROSS : Structure of a quantized vortex in boson systems. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 20(3):454–477, 1961.
- [83] L. P. PITAEVSKII : Vortex lines in an imperfect Bose gas. *Soviet Physics JETP*, 13(2):451–454, 1961.
- [84] N. BOGOLIUBOV : On the theory of superfluidity. *Journal of Physics of the USSR*, XI(1):23–32, 1947.

- [85] W. KETTERLE et N. J. van DRUTEN : Bose-Einstein condensation of a finite number of particles trapped in one or three dimensions. *Physical Review A*, 54(1):656–660, 1996.
- [86] D. S. PETROV, D. M. GANGARDT et G. V. SHLYAPNIKOV : Low-dimensional trapped gases. *Journal de Physique IV*, 116:5–44, 2004.
- [87] A. JOHNSON : One-dimensional Bose Gases on an Atom Chip : Correlations in Momentum Space and Theoretical Investigation of Loss-induced Cooling. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay (COmUE), 2016.
- [88] M. SCHEMMER : Out-of-equilibrium dynamics in 1D Bose gases. Thèse de doctorat, Université Paris Saclay (COmUE), 2019.
- [89] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV et J. T. M. WALRAVEN : Regimes of Quantum Degeneracy in Trapped 1D Gases. *Physical Review Letters*, 85(18):3745–3749, 2000.
- [90] M. OLSHANII : Atomic Scattering in the Presence of an External Confinement and a Gas of Impenetrable Bosons. *Physical Review Letters*, 81(5):938–941, 1998.
- [91] E. H. LIEB et W. LINIGER : Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. I. The General Solution and the Ground State. *Physical Review*, 130(4):1605–1616, 1963.
- [92] E. H. LIEB : Exact Analysis of an Interacting Bose Gas. II. The Excitation Spectrum. *Physical Review*, 130(4):1616–1624, 1963.
- [93] C. N. YANG et C. P. YANG : Thermodynamics of a One-Dimensional System of Bosons with Repulsive Delta-Function Interaction. *Journal of Mathematical Physics*, 10(7):1115–1122, 1969.
- [94] J. W. KANE et L. P. KADANOFF : Long-Range Order in Superfluid Helium. *Physical Review*, 155(1):80–83, 1967.
- [95] L. REATTO et G. V. CHESTER : Phonons and the Properties of a Bose System. *Physical Review*, 155(1):88–100, 1967.
- [96] K. V. KHERUNTSYAN, D. M. GANGARDT, P. D. DRUMMOND et G. V. SHLYAPNIKOV : Pair Correlations in a Finite-Temperature 1D Bose Gas. *Physical Review Letters*, 91(4):040403, 2003.
- [97] L. TONKS : The Complete Equation of State of One, Two and Three-Dimensional Gases of Hard Elastic Spheres. *Physical Review*, 50(10):955–963, 1936.
- [98] S. DETTMER, D. HELLWEG, P. RYYTTY, J. J. ARLT, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, H. KREUTZMANN, L. SANTOS et M. LEWENSTEIN : Observation of Phase Fluctuations in Elongated Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 87(16):160406, 2001.
- [99] D. HELLWEG, S. DETTMER, P. RYYTTY, J. J. ARLT, W. ERTMER, K. SENGSTOCK, D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV, H. KREUTZMANN, L. SANTOS et M. LEWENSTEIN : Phase Fluctuations in Bose-Einstein Condensates. *Applied Physics B*, 73(8):781–789, 2001.
- [100] D. S. PETROV, G. V. SHLYAPNIKOV et J. T. M. WALRAVEN : Phase-Fluctuating 3D Bose-Einstein Condensates in Elongated Traps. *Physical Review Letters*, 87(5):050404, 2001.
- [101] R. SHAH, T. J. BARRETT, A. COLCELLI, F. Oručević, A. TROMBETTONI et P. KRÜGER : Probing the Degree of Coherence through the Full 1D to 3D Crossover. *Physical Review Letter*, 130(12):123401, 2023.

- [102] F. GERBIER : Quasi-1D Bose-Einstein condensates in the dimensional crossover regime. *Europhysics Letters*, 66(6):771, 2004.
- [103] J. DALIBARD : Universalité de Van der Waals et résonances de Fano-Feshbach, cours du Collège de France. [https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index\\_en.html](https://pro.college-de-france.fr/jean.dalibard/index_en.html), 2021.
- [104] W. HEITLER et F. LONDON : Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik. *Z.Physik*, 44:445, 1927.
- [105] B. A. LIPPMANN et J. SCHWINGER : Variational Principles for Scattering Processes. I. *Physical Review*, 79(3):469–480, 1950.
- [106] K. HUANG et C. N. YANG : Quantum-Mechanical Many-Body Problem with Hard-Sphere Interaction. *Physical Review*, 105(3):767–775, 1957.
- [107] P. JUNCAR, J. PINARD, J. HAMON et A. CHARTIER : Absolute Determination of the Wavelengths of the Sodium D1 and D2 Lines by Using a CW Tunable Dye Laser Stabilized on Iodine. *Metrologia*, 17(3):77, 1981.
- [108] P. CHEINEY, O. CARRAZ, D. BARTOSZEK-BOBER, S. FAURE, F. VERMERSCH, C. M. FABRE, G. L. GATTOBIGIO, T. LAHAYE, D. GUÉRY-ODELIN et R. MATHEVET : Zeeman slowers made simple with permanent magnets in a Halbach configuration. *Review of Scientific Instruments*, 82(6):063115, 2011.
- [109] K. M. R. van der STAM, E. D. van OOIJEN, R. MEPELINK, J. M. VOGELS et P. van der STRATEN : Large atom number Bose-Einstein condensate of sodium. *Review of Scientific Instruments*, 78(1):013102, 2007.
- [110] C. F. OCKELOEN, A. F. TAUSCHINSKY, R. J. C. SPREEUW et S. WHITLOCK : Detection of small atom numbers through image processing. *Physical Review A*, 82(6):061606, 2010.
- [111] J. REICHEL, W. HÄNSEL et T. W. HÄNSCH : Atomic Micromanipulation with Magnetic Surface Traps. *Physical Review Letters*, 83(17):3398–3401, 1999.
- [112] O. J. LUITEN, M. W. REYNOLDS et J. T. M. WALRAVEN : Kinetic theory of the evaporative cooling of a trapped gas. *Physical Review A*, 53(1):381–389, 1996.
- [113] W. KETTERLE et N. J. VAN DRUTEN : Evaporative Cooling of Trapped Atoms. *In Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, volume 37, pages 181–236. Academic Press, 1996.
- [114] D. GUÉRY-ODELIN : Dynamique collisionnelle des gaz d'alcalins lourds : du refroidissement évaporatif à la condensation de Bose-Einstein. Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998.
- [115] L.D. LANDAU et E.M. LIFSHITZ : *Quantum Mechanics : Non-relativistic Theory*. Pergamon Press, 1977.
- [116] C. ZENER et R. H. FOWLER : Non-adiabatic crossing of energy levels. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character*, 137(833):696–702, 1997.
- [117] Y. CASTIN et R. DUM : Bose-Einstein Condensates in Time Dependent Traps. *Physical Review Letters*, 77(27):5315–5319, 1996.
- [118] H. KREUTZMANN, A. SANPERA, L. SANTOS, M. LEWENSTEIN, D. HELLWEG, L. CACCIAPUOTI, M. KOTTKE, T. Schulte K. SENGSTOCK, J. J. ARLT et W. ERTMER : Characterization and control of phase fluctuations in elongated Bose-Einstein condensates. *Applied Physics B : Lasers and Optics*, 76(2):165–172, 2003.

- [119] A. IMAMBEKOV, I. E. MAZETS, D. S. PETROV, V. GRITSEV, S. MANZ, S. HOFFERBERTH, T. SCHUMM, E. DEMLER et J. SCHMIEDMAYER : Density ripples in expanding low-dimensional gases as a probe of correlations. *Physical Review A*, 80(3):033604, 2009.
- [120] J. ESTÈVE, C. AUSSIBAL, T. SCHUMM, C. FIGL, D. MAILLY, I. BOUCHOULE, C. I. WESTBROOK et A. ASPECT : Role of wire imperfections in micromagnetic traps for atoms. *Physical Review A*, 70(4):043629, 2004.
- [121] J.-B. TREBBIA, C. L. GARRIDO ALZAR, R. CORNELUSSEN, C. I. WESTBROOK et I. BOUCHOULE : Roughness Suppression via Rapid Current Modulation on an Atom Chip. *Physical Review Letter*, 98(26):263201, 2007.
- [122] M. TAJIK, B. RAUER, T. SCHWEIGLER, F. CATALDINI, F. S. SABINO, J. and Møller, S. JI, I. E. MAZETS et J. SCHMIEDMAYER : Designing Arbitrary One-dimensional Potentials on an Atom Chip. *Optics Express*, 27(23):33474, 2019.
- [123] M. SCHEMMER, A. JOHNSON et I. BOUCHOULE : Monitoring squeezed collective modes of a one-dimensional Bose gas after an interaction quench using density-ripple analysis. *Physical Review A*, 98(4):043604, 2018.
- [124] R. BÜCKER, A. PERRIN, S. MANZ, T. BETZ, Ch KOLLER, T. PLISSON, J. ROTTMANN, T. SCHUMM et J. SCHMIEDMAYER : Single-particle-sensitive imaging of freely propagating ultracold atoms. *New Journal of Physics*, 11(10):103039, 2009.
- [125] T. KÖHLER, K. GÓRAL et P. S. JULIENNE : Production of cold molecules via magnetically tunable Feshbach resonances. *Reviews of Modern Physics*, 78(4):1311–1361, 2006.
- [126] C. MAURY, B. BAKKALI-HASSANI, G. CHAUVEAU, F. RABEC, S. NASCIMBENE, J. DALIBARD et J. BEUGNON : Precision Measurements of Atom-Dimer Interactions in a Uniform Planar Bose Gas. *Physical Review Research*, 5(1):L012020, 2023.
- [127] C. MAURY : Probing few and many-body physics in a planar Bose gas : Atom-dimer interactions and zero-temperature superfluid fraction. Thèse de doctorat, Sorbonne Université, 2023.
- [128] P. BÖHI, M. F. RIEDEL, J. HOFFFROGGE, J. REICHEL, T. W. HAENSCH et P. TREUTLEIN : Coherent manipulation of Bose-Einstein condensates with state-dependent microwave potentials on an atom chip. *Nature Physics*, 5(8):592–597, 2009.
- [129] F. K. FATEMI, K. M. JONES, P. D. LETT et E. TIESINGA : Ultracold ground-state molecule production in sodium. *Physical Review A*, 66(5):053401, 2002.
- [130] L. E. de ARAUJO, J. D. WEINSTEIN, S. D. GENSEMER, F. K. FATEMI, K. M. JONES, P. D. LETT et E. TIESINGA : Two-color photoassociation spectroscopy of the lowest triplet potential of  $\text{Na}_2$ . *The Journal of Chemical Physics*, 119(4):2062–2074, 2003.
- [131] A. CRUBELLIER, O. DULIEU, F. MASNOU-SEEUWS, M. ELBS, H. KNÖCKEL et E. TIEMANN : Simple determination of  $\text{Na}_2$  scattering lengths using observed bound levels at the ground state asymptote. *The European Physical Journal D - Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics*, 6(2):211–220, 1999.
- [132] E. TIESINGA, C. J. WILLIAMS, P. S. JULIENNE, K. M. JONES, P. D. LETT et W. D. PHILLIPS : A Spectroscopic Determination of Scattering Lengths for Sodium Atom Collisions. *Journal of Research of the National Institute of Standards and Technology*, 101(4):505–520, 1996.

- [133] P. NAIDON, E. TIESINGA et P. S. JULIENNE : Two-Body Transients in Coupled Atomic-Molecular Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 100(9):093001, 2008.
- [134] G. QUÉMÉNER et P. S. JULIENNE : Ultracold Molecules under Control! *Chemical Reviews*, 112(9):4949–5011, 2012.
- [135] Y. ZHU, B. SEMISALOV, G. KRSTULOVIC et S. NAZARENKO : Direct and Inverse Cascades in Turbulent Bose-Einstein Condensates. *Physical Review Letters*, 130(13):133001, 2023.
- [136] M. SCHMIDT, S. ERNE, B. NOWAK, D. SIXTY et T. GASENZER : Non-thermal fixed points and solitons in a one-dimensional Bose gas. *New Journal of Physics*, 14(7):075005, 2012.
- [137] D. S. AGAFONTSEV et V. E. ZAKHAROV : Integrable turbulence and formation of rogue waves. *Nonlinearity*, 28(8):2791–2821, 2015.
- [138] P. SURET, S. RANDOUX, A. GELASH, D. AGAFONTSEV, B. DOYON et G. EL : Soliton Gas : Theory, Numerics and Experiments, 2023. arXiv :2304.06541.
- [139] D. J. FRANTZESKAKIS : Dark solitons in atomic Bose–Einstein condensates : from theory to experiments. *Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical*, 43(21):213001, 2010.
- [140] F. VERCESI, Q. FONTAINE, S. RAVETS, J. BLOCH, M. RICHARD, L. CANET et A. MINGUZZI : Phase diagram of one-dimensional driven-dissipative exciton-polariton condensates. *Physical Review Research*, 5(4):043062, 2023.
- [141] L. HE, L. M. SIEBERER et S. DIEHL : Space-Time Vortex Driven Crossover and Vortex Turbulence Phase Transition in One-Dimensional Driven Open Condensates. *Physical Review Letter*, 118(8):085301, 2017.
- [142] A. K. SAHA et R. DUBESSY : Characterizing far from equilibrium states of the one-dimensional nonlinear Schrödinger equation, 2022. ArXiv :2210.09812.
- [143] T. TSUZUKI : Nonlinear waves in the Pitaevskii-Gross equation. *Journal of Low Temperature Physics*, 4(4):441–457, 1971.
- [144] P. SURET, A. TIKAN, F. BONNEFOY, F. COPIE, G. DUCROZET, A. GELASH, G. PRABHUDESAI, G. MICHEL, A. CAZAUBIEL, E. FALCON, G. EL et S. RANDOUX : Nonlinear spectral synthesis of soliton gas in deep-water surface gravity waves. *Physical Review Letter*, 125:264101, 2020.
- [145] T. JACQMIN, B. FANG, T. BERRADA, T. ROSCILDE et I. BOUCHOULE : Momentum distribution of 1D Bose gases at the quasi-condensation crossover : theoretical and experimental investigation. *Physical Review A*, 86(4):043626, 2012.
- [146] J. J. GARCIA-RIPOLL, S. DÜRR, N. SYASSEN, D. M. BAUER, M. LETTNER, G. REMPE et J. I. CIRAC : Dissipation-induced hard-core boson gas in an optical lattice. *New Journal of Physics*, 11(1):013053, 2009.
- [147] N. SYASSEN, D. M. BAUER, M. LETTNER, T. VOLZ, D. DIETZE, J. J. GARCIA-RIPOLL, J. I. CIRAC, G. REMPE et S. DURR : Strong Dissipation Inhibits Losses and Induces Correlations in Cold Molecular Gases. *Science*, 320(5881):1329–1331, 2008.
- [148] B. ZHU, B. GADWAY, M. FOSS-FEIG, J. SCHACHENMAYER, M. L. WALL, K. R. A. HAZZARD, B. YAN, S. A. MOSES, J. P. COVEY, D. S. JIN, J. YE, M. HOLLAND et A. M. REY : Suppressing the Loss of Ultracold Molecules Via the Continuous Quantum Zeno Effect. *Physical Review Letter*, 112(7):070404, 2014.

- 
- [149] S. MANZ, R. BÜCKER, T. BETZ, Ch. KOLLER, S. HOFFERBERTH, I. E. MAZETS, A. IMAMBEKOV, E. DEMLER, A. PERRIN, J. SCHMIEDMAYER et T. SCHUMM : Two-point density correlations of quasicondensates in free expansion. *Physical Review A*, 81(3):031610, 2010.
- [150] M. GRING, M. KUHNERT, T. LANGEN, T. KITAGAWA, B. RAUER, M. SCHREITL, I. MAZETS, D. ADU SMITH, E. DEMLER et J. SCHMIEDMAYER : Relaxation and Prethermalization in an Isolated Quantum System. *Science*, 337(6100):1318–1322, 2012.
- [151] C-M. SCHMIED, A. N. MIKHEEV et T. GASENZER : Non-thermal fixed points : Universal dynamics far from equilibrium. *International Journal of Modern Physics A*, 34(29):1941006, 2019.
- [152] R. DUBESSY, J. POLO, H. PERRIN, A. MINGUZZI et M. OLSHANII : Universal shock-wave propagation in one-dimensional Bose fluids. *Physical Review Research*, 3(1):013098, 2021.
- [153] Y-Q. ZOU, É. LE CERF, B. BAKKALI-HASSANI, C. MAURY, G. CHAUVEAU, P. C. M. CASTILHO, R. SAINT-JALM, S. NASCIMBENE, J. DALIBARD et J. BEUGNON : Optical control of the density and spin spatial profiles of a planar Bose gas. *Journal of Physics B : Atomic, Molecular and Optical Physics*, 54(8):08LT01, 2021.

## Résumé

Dans cette thèse, nous présentons une expérience produisant des condensats de Bose-Einstein de sodium. L'utilisation d'une puce à atomes, qui donne accès à des pièges magnétiques très allongés, permet de produire des gaz quantiques unidimensionnels dans le régime de quasi-condensat. Nous avons optimisé le refroidissement par évaporation et le transfert des atomes vers le piège magnétique de la puce à atomes. Nous nous sommes ensuite intéressés aux résonances de Feshbach micro-onde, dans le but de contrôler les interactions entre atomes, ce qui nécessite de fortes puissances micro-onde. Pour cela, nous utilisons un guide d'ondes coplanaire intégré à la puce à atomes. Des mesures d'oscillations de Rabi entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental du sodium  $f = 1$  et  $f = 2$  montrent que nous pouvons atteindre des amplitudes magnétiques de plusieurs gauss pour le champ oscillant. Nous avons effectué la spectroscopie micro-onde des états moléculaires de la branche  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  les plus proches de la limite de dissociation. Les pertes d'atomes rapides observées au voisinage des résonances moléculaires semblent limiter leur intérêt comme outil de contrôle des interactions.

Dans une deuxième partie nous avons étudié numériquement la dynamique hors équilibre d'un gaz de Bose unidimensionnel dans une boîte, en résolvant l'équation de Gross-Pitaevskii 1D. Le système est conduit hors d'équilibre à l'aide d'un potentiel extérieur oscillant. Nous nous sommes notamment intéressés aux profils de densité, aux énergies et à la distribution en impulsion. Les méthodes de transformée de diffusion inverse, avec le calcul du spectre de Lax, permettent d'étudier les solitons du système.

**Mots-clefs :** Condensat de Bose-Einstein, puce à atomes, gaz unidimensionnels, spectroscopie moléculaire, résonances de Feshbach, dynamique hors-équilibre, Gross-Pitaevskii, solitons, spectre de Lax.

## Abstract

In this thesis, we present an experiment producing sodium Bose-Einstein condensates. The use of an atom chip, giving access to highly elongated magnetic traps, allows to produce one-dimensional quantum gases in the quasi-condensate regime. We optimized evaporative cooling and atom transfer in the magnetic trap of the atom chip. We then turned to microwave Feshbach resonances, with the aim of controlling the interactions between atoms, which requires high microwave power. To achieve this, the atom chip encompasses a coplanar waveguide. Rabi oscillations measurements between the two hyperfine levels of the sodium ground state  $f = 1$  and  $f = 2$  show that we can achieve magnetic amplitudes of several gauss for the oscillating field. We have performed microwave spectroscopy of the molecular states in the  $[f_1 = 1, f_2 = 2]$  branch closest to the dissociation limit. The rapid loss of atoms observed close to the molecular resonances seems to limit their use as a tool for interaction control.

In a second part, we numerically study the non-equilibrium dynamics of a one-dimensional Bose gas in a box, by solving the 1D Gross-Pitaevskii equation. The system is driven out of equilibrium using an oscillating external potential. We focused on density profiles, energies and momentum distributions. Inverse scattering transform methods, with the calculation of the Lax spectrum, are used to study the solitons of the system.

**Keywords :** Bose-Einstein condensate, atom chip, one-dimensional gas, molecular spectroscopy, Feshbach resonance, out of equilibrium dynamics, Gross-Pitaevskii, solitons, Lax spectrum.