



UNIVERSITÉ PARIS XIII – SORBONNE PARIS NORD
ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES, TECHNOLOGIES, SANTÉ – GALILÉE

Méthode de décomposition de domaine
espace-temps et parallèle en temps pour les
écoulements incompressibles et nouvelle
analyse de la méthode de relaxation d'onde
de Schwarz optimisée

Thèse de Doctorat présentée par

Arthur ARNOULT

Laboratoire Analyse, Géométrie et Applications

Pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN MATHÉMATIQUES

Soutenue le 4 juillet 2025

Devant la commission d'examen formée de

M. Xavier Claeys	ENSTA	Rapporteur
M. Jérôme Droniou	Université de Montpellier	Rapporteur
M. Franck Boyer	Université de Toulouse	Examineur
M. Martin Gander	Université de Genève	Examineur
Mme Laurence Halpern	Université Sorbonne Paris Nord	Examinatrice
M. Yvon Maday	Sorbonne Université	Examineur
Mme Caroline JAPHET	Université Sorbonne Paris Nord	Directrice de thèse
M. Pascal OMNES	CEA	Directeur de thèse

*Pour petit Léandre,
Pour celui à venir,
Et tous les suivants*

Remerciements

Difficile document qu'est celui-ci, à la fois scolaire, scientifique, professionnel, et dans ces quelques pages, personnel.

Je vais donc commencer avec le sérieux nécessaire, avec une pensée particulière pour les chefs d'orchestre de cette thèse, qui m'ont habilement guidé au quotidien. C'est par un heureux alignement que, pour un sujet, j'ai contacté Pascal, qui m'a refusé. . . puis m'a renvoyé un mail pour un autre sujet. La machine était lancée, un premier entretien où le *feeling* passe très bien. Ce sera fidèle à nos entrevues durant quatre années, à mêler discussions personnelles et techniques, parfois il faut le dire, au-delà de nos compétences initiales. Qu'à cela ne tienne, nous avons appris ! Caroline, tu es (et de très loin !), mon interlocutrice principale de ma thèse. Des heures, à discuter, débattre, apprendre, mais toujours avancer. J'ai apprécié ton soutien, que ce soit personnel ou professionnel. Tu as été là pour les maths, et aussi d'un formidable appui pour le code. Ensemble nous avons vaincu FreeFem ! À tous les deux, vous m'avez donné une belle image sur ce qu'est le travail académique et je vous suis extrêmement reconnaissant pour la richesse de ce que vous m'avez apporté ; cette thèse n'a été possible que grâce à vous.

Je tiens aussi à remercier particulièrement mes rapporteurs, Jérôme Droniou et Xavier Claeys. Vous avez pris le temps de découvrir mon travail, et d'y apporter votre expérience pour compléter et corriger ce manuscrit, qui en sort, je pense, grandi.

Merci aussi à Laurence Halpern d'avoir accepté de partager son expertise en faisant partie de mon jury, et d'avoir été présente pour répondre à mes sollicitations durant la thèse. Merci à Frank Boyer qui, il y a presque deux ans, nous a mis sur la piste pour gérer le manque de régularité de la dérivée. Un petit détail en apparence, mais qui a été la clé manquante d'une grande partie des résultats théoriques de ce manuscrit. Merci aussi pour ce livre coécrit avec Pierre Fabrie, cité pas moins de 20 fois dans le manuscrit, une mine pédagogique pour les mathématiques de la mécanique des fluides. Merci aussi à Martin Gander pour nos échanges toujours chaleureux sur la décomposition de domaine. Merci enfin à Yvon Maday de me faire l'honneur de présider le jury.

Merci à mes parents pour l'amour qu'ils m'offrent chaque jour. Merci à ma maman d'avoir toléré que j'aime les maths, à mon papa de m'avoir entraîné à calculer sur les routes de balades. Je mesure pleinement la chance de vous avoir eu à mes côtés durant cette thèse. Merci à mes grandes sœurs que j'aime plus que tout et chacune à leur adorable famille, qui s'agrandit encore un peu plus. J'espère que vous comprendrez enfin un peu ce que je fais de mes journées. Le(s) petit(s), je vous promets que je serai un super tonton.

Merci à mon Léo d'avoir fait le déplacement depuis l'étranger lointain pour être présent. Tu es mon plus ancien ami, le plus fidèle sans doute. Avec toi j'ai eu mes premiers cours de maths, mais ce n'est clairement pas cela que je retiens de toi ! Tu es et resteras mon guitariste préféré, toi qui est tout de même bien meilleur, mais qui m'appelle Clapton depuis tant de temps.

Merci à Sonia et à Élise, mes amies du lycée de conserver notre amitié après tout ce temps. Sonia, merci d'être aussi chaleureuse et d'habiter les montagnes. Le mont Aiguilles ne nous résistera pas. Élise, j'ai un aveu à te faire. Je n'ai pas créé les nombres Élure. Je te laisse toute la gloire de leur création.

Ma véritable aventure mathématique a commencé en prépa. Je m'y suis vraiment épanoui, et pour beaucoup grâce à mes amis (dans l'ordre alphabétique) Audrey, Aurélie, Clément, Eloïse (sans h) et Mathias, à découvrir les espaces vectoriels en un coup de vent qui nous aura bien fait marrer. Bien sûr, Mathias a une place particulière ici puisqu'il a le bon goût d'être un ami que j'aime par-dessus tout, mais aussi de faire les mêmes maths que moi. J'ai eu beaucoup de plaisir à parler des heures

avec toi de nos travaux, et à développer une admiration inattendue pour Grothendieck.

Dans le paragraphe prépa, je dois ajouter un remerciement pour Madame Mahdjoub, dont la pédagogie hors norme et la bonne humeur quotidienne m'ont permis d'apprécier ma MP, ce qui n'est pas rien, et d'aimer encore plus les maths.

Mais il faut le dire, ma thèse n'aurait rien été sans les amis que j'ai côtoyés au quotidien durant ces quatre années de thèse, et qui ont été ma motivation à faire de longs trajets chaque jour.

Déjà, un souvenir pour les anciens, ceux qui m'ont chaleureusement accueilli dès mon arrivée, en premier lieu Neige et Hugo. Puis ceux que j'ai eu la chance de côtoyer quelques années de plus, Elie mon préféré dans la catégorie mulet, et que je n'oublierai presque sûrement jamais. Viens aussi Wassim avec qui j'ai eu tant de conversations, et notamment à propos d'analyse numérique, ce que je dois le dire a été fort pratique... Psartek mon Wassim. De ma promo, une personne est dans une catégorie à part, c'est bien Victor. Certes, je n'ai jamais réussi à retenir son prénom, mais je l'ai aussi vu devenir sociable au cours de cette dernière année, au point de sortir avec nous. Minecraft fait des miracles chez les jeunes.

Et puis les années défilant, les nouveaux sont arrivés par vagues, année après année.

Après une année de maths est arrivée Maissâ, une véritable amie, et qui, étrangement, adore les inégalités. Je n'oublierai jamais notre nuit sur la plage. . . Merci aussi Nicolas C. – dit « le petit », bien que cette dénomination soit anachronique, puisque Nicolas « le grand » (voir aussi Nicolas G.) n'est arrivé qu'a posteriori. Le bérêt, le smile, le beurre salé. À n'en pas douter dans le premier quartile de mes rencontres. Et mon Vincent, personne adorable, et grand remplisseur de Pokédex, ce n'est pas rien. Et la rayonnante Francesca, merci pour ton enthousiasme de tous les jours si agréable. René, sans doute la personne la plus d'humeur joyeuse que je connaisse ! Ça a été un plaisir d'avoir nombre de discussions avec toi, et même un jour d'escalader à tes côtés. J'espère qu'on le fera.

Ma troisième année a été riche en nouvelles têtes, de nouveaux amis. Romain a évidemment eu une place particulière pour moi, un acteur important de ma vie. Mon `~/bashrc` te doit beaucoup, mais mon bonheur aussi. Loth, avec qui j'ai débrieffé chaque match du PSG cette année, mais qui n'a d'yeux que pour Ousmane Dembélé et P. S. (rien à voir avec *presque sûrement*, je le précise). La personne la moins stressée du monde. D'ailleurs, à quoi bon stresser, ça ne sert à rien. Je te remercie toutefois sincèrement pour ton aide précieuse sur l'analyse fonctionnelle. Lucas, une relation conflictuelle pour cacher tant d'amour qui nous a menés une nuit sur les routes de Saint-Ouen. . . (et ma tarte Tatin d'anniversaire, c'était si gentil). Merci aussi à Benachir (à partir de 14h). On s'est bien marrés quand même¹.

Heureusement que j'ai fait une année de plus ! J'allais passer à côté de la nouvelle génération. Oui David, tu fais partie de cette catégorie, et tant mieux, car tu as été une très belle rencontre (et un espoir pour les autres ingénieurs désabusés : retournes faire des maths !!). Valentin, tu es aussi à part, à double titre. Déjà, puisque tu es la preuve que l'on peut faire une thèse après avoir eu M. Arnoult en cours (et boire un coup avec son prof dès le dernier TD terminé) ; j'espère avoir eu une petite part dans ta motivation. Et tu as aussi la lourde tâche de prendre la suite de mon travail, je compte sur toi ! Nicolas G., merci pour ta gentillesse, mais surtout pour tes idées plus loufoques les unes que les autres, tes folies scientifiques ont été un plaisir à suivre. Et puis il y a Joelle, pétillante. On s'est rencontrés lorsque je t'ai accueilli à travailler sur la table de la passerelle. On s'est beaucoup charriés et je pense qu'on construit une belle complicité. Je t'attends pour trinquer. Oh, et il y a aussi des post-docs cette année là, alors un petit coucou à Alice et Vadim (merci de nous avoir accueilli chez toi, et les quelques verres de champagnes).

Et tous les doctorants que je n'ai pas encore nommés, mais qui ont eux aussi égayé mon quotidien, Dominic, Jakob, Noé, Julien, Aby, Jordan, Moussa, Guilhem, David, Phelippe, Happy, Elyes, Tristan, Thomas, Kelly, Mouna, Amine, Oisín.

Merci à tous de rendre la vie plus douce.

¹Désolé Benachir, j'ai eu beau chercher, mais caser un jeu de mots avec *foncteurs polynomiaux* était vraiment hors de mes capacités.

Résumé

Cette thèse a pour objectif l'étude d'algorithmes de résolution d'équations aux dérivées partielles par des algorithmes parallèles en temps et espace-temps. Le manuscrit est divisé en deux parties indépendantes. La première concerne la résolution des équations de la mécanique des fluides (Oseen et Navier-Stokes) avec les algorithmes *Pararéal* et *Optimized Schwarz Waveform Relaxation* (OSWR). La seconde partie propose une nouvelle analyse de l'algorithme OSWR pour l'équation de la chaleur, reposant sur une analyse discrète en temps.

Dans la première partie, nous commençons par réécrire le problème d'Oseen faible de manière équivalente au problème monodomaine, sur une partition du domaine d'étude, puis nous introduisons l'algorithme OSWR pour la résolution de ce problème couplé. Nous montrons alors la convergence des vitesses obtenues par l'algorithme vers la famille de vitesses solution du problème couplé multi-domaines. Bien que l'algorithme permette de déterminer une pression dans tous les sous-domaines à chaque itération, celles-ci ne convergent pas vers les pressions solutions du problème monodomaine. Nous proposons alors une méthodologie de reconstruction de pression pour remédier à cela. Nous reprenons alors le même cheminement pour introduire un algorithme issu du couplage des algorithmes Pararéal et OSWR, ce qui définit une méthodologie de résolution du problème d'Oseen parallèle en temps et en espace. Pour pouvoir étendre l'algorithme OSWR au problème de Navier-Stokes, nous devons résoudre ce problème sur des sous-domaines avec des conditions limites de Robin. Nous commençons donc par établir l'existence et l'unicité de la solution à ce problème. Nous pouvons alors introduire l'algorithme et vérifier qu'il est bien posé, puis montrer sa convergence pour la vitesse et la pression, après correction. Des simulations numériques pour des problèmes académiques ainsi qu'un problème plus réaliste sont présentées pour illustrer l'efficacité de ces techniques.

La seconde partie apporte une analyse nouvelle de l'algorithme OSWR pour la résolution de l'équation de la chaleur unidimensionnelle. Après avoir établi une analyse reposant sur l'introduction d'un schéma numérique en temps, nous apportons une nouvelle analyse de la convergence, et deux résultats nouveaux : la convergence ne dépend que du paramètre de Robin et du nombre de pas de temps, et la convergence peut être atteinte en un nombre fini d'itérations si le paramètre de Robin est choisi astucieusement. Surtout, nous mettons en évidence que le choix d'un paramètre optimal doit être dépendant du nombre d'itérations de décomposition de domaine réalisées, et proposons un tel paramètre, dont nous montrons numériquement l'efficacité. Nous apportons aussi une analyse permettant de choisir un paramètre de Robin optimisé dans le cas où la donnée de Robin est initialisée à partir de la condition initiale, ce qui est un cas usuel en pratique afin d'accélérer la convergence. Enfin, l'analyse est étendue à l'équation de la chaleur en deux dimensions d'espace.

Abstract

The aim of this thesis is to study algorithms for solving partial differential equations using parallel algorithms in time and space-time. The manuscript is divided into two independent parts. The first concerns the solution of fluid mechanics equations (Oseen and Navier-Stokes) using the *Parareal* and *Optimized Schwarz Waveform Relaxation* (OSWR) algorithms. The second part proposes a new analysis of OSWR algorithm for the heat equation, based on a discrete-time analysis.

In the first part, we begin by rewriting the weak Oseen problem equivalently to the monodomain problem, on a partition of the study domain, and then we introduce the OSWR algorithm for solving this coupled problem. We then prove the convergence of the velocities obtained by the algorithm towards the family of velocities solving the coupled multi-domain problem. Although the algorithm is able to determine a pressure in all the subdomains at each iteration, these do not converge to the pressures solution of the monodomain problem. We propose a pressure reconstruction methodology to remedy this. We then follow the same path to introduce an algorithm obtained from the coupling of the Parareal and OSWR algorithms, which defines a methodology for solving the Oseen problem in parallel in time and space. In order to extend the OSWR algorithm to the Navier-Stokes problem, we need to solve this problem on subdomains with Robin boundary conditions. We therefore begin by establishing the existence and uniqueness of the solution to this problem. We can then introduce the algorithm and check that it is well-posed, then show its convergence for velocity and pressure, after correction. Numerical simulations for academic problems and a more realistic problem are presented to illustrate the efficiency of these techniques.

The second part provides a new analysis of the OSWR algorithm for solving the one-dimensional heat equation. After establishing an analysis based on the introduction of a numerical time scheme, we provide a new analysis of convergence, and two new results : convergence depends only on the Robin parameter and the number of time steps, and convergence can be achieved in a finite number of iterations if the Robin parameter is chosen astutely. Most of all, we show that the choice of an optimal parameter must depend on the number of domain decomposition iterations performed. We then propose such a parameter and we show numerically its efficiency. We also provide an analysis for choosing an optimised Robin parameter in the case where the Robin data is initialised from the initial condition, which is a common case in practice in order to accelerate convergence. Finally, the analysis is extended to the heat equation in two spatial dimensions.

Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	vi
Abstract	vii
Introduction	xi
I Algorithmes OSWR et Pararéel, ainsi que leur couplage pour les équations de la mécanique des fluides	1
1 Résultats généraux d'analyse fonctionnelle	3
1.1 Théorèmes de référence	3
1.2 Suite de fonctions à valeur dans un espace de Hilbert	6
1.2.1 Suites régularisantes	6
1.2.2 Résultat de densité	7
1.3 Théorème de Lions-Magenes	9
1.4 Convergence d'une suite de somme bornée	14
2 Algorithme OSWR pour le problème d'Oseen	15
2.1 Problème d'Oseen et formulation multidomaines	16
2.1.1 Formulation forte	16
2.1.2 Formulation faible	18
2.2 Algorithme OSWR pour Oseen	27
2.3 Convergence par estimation d'énergie	28
2.4 Recalibrage de la pression	36
2.5 Facteur de convergence par transformée de Fourier	42
2.5.1 Définition des paramètres optimisés	42
2.5.2 Fréquences discrètes en temps	42
2.6 Résultats numériques	43
2.6.1 Optimisation des paramètres de Robin en <i>one-sided</i>	44
2.6.2 Optimisation des paramètres de Robin en <i>two-sided</i>	48
2.6.3 Évolution de la convergence selon le nombre de sous-domaines	50
2.6.4 Cas test plus réaliste	52
3 Algorithme Pararéel-OSWR pour le problème d'Oseen	55
3.1 Algorithme Pararéel	55
3.2 Formulation faible multidomaine spatio-temporelle	56
3.3 Algorithme couplé Pararéel-OSWR	57
3.4 Convergence par estimation d'énergie	61
3.5 Recalibrage de la pression	65
3.6 Résultats numériques	66
3.6.1 Dépendance au nombre d'itérations d'OSWR	67
3.6.2 Paramètre de Robin optimisés	69

4	Problème de Navier-Stokes avec des conditions limites mixtes	73
4.1	Théorèmes de référence	74
4.2	Existence du champ de vitesse	77
4.2.1	Estimation d'énergie	78
4.2.2	Estimation des dérivées fractionnaires en temps	80
4.2.3	Passage à la limite	83
4.3	Unicité du champ de vitesse	86
4.4	Existence et unicité de la pression	88
5	Algorithme OSWR pour le problème de Navier-Stokes	91
5.1	Problème de Navier-Stokes et formulation multidomaines	91
5.1.1	Formulation forte	91
5.1.2	Formulation faible	92
5.2	OSWR pour le problème de Navier-Stokes	94
5.3	Convergence par estimation d'énergie	95
5.4	Recalibrage de la pression pour Navier-Stokes	99
5.5	OSWR pour résoudre le problème non linéaire	99
5.6	Résultats numériques	101
II	Analyse discrète en temps de l'algorithme OSWR	103
6	Discrete-time analysis of OSWR	105
6.1	Introduction	105
6.2	Problem Setting	107
6.3	Jordan decomposition	108
6.3.1	Definitions and general results	108
6.3.2	Square root of a matrix	109
6.3.3	Application to matrix A	110
6.4	OSWR algorithm	110
6.4.1	Continuous case	110
6.4.2	Dimensionless Robin parameters	111
6.4.3	Discrete-time algorithm	111
6.4.4	Discrete-time convergence analysis	111
6.4.5	Choice of the Robin parameters	115
6.5	Numerical results	116
6.5.1	Convergence depending only on $\bar{\alpha}$, for a given N	117
6.5.2	Comparison between discrete-time estimate and relative L^∞ -error	117
6.5.3	One-sided optimization	119
6.5.4	Two-sided optimization	122
6.5.5	Asymptotic behavior as a function of N	123
6.5.6	Comparison with $\bar{\alpha}_M$	124
7	Extensions de l'analyse discrète en temps de l'algorithme OSWR	127
7.1	Prise en compte de la donnée de Robin initiale à l'interface	127
7.1.1	Analyse	127
7.1.2	Résultats numériques	129
7.2	Analyse discrète en temps pour l'équation de la chaleur 2D	134
7.2.1	Problème modomaine et algorithme OSWR	134
7.2.2	Analyse de l'algorithme	135
7.2.3	Majoration et matrice de convergence	138
7.2.4	Estimation de la norme de l'erreur prenant en compte le maillage	138
7.2.5	Optimisation pratique	140
7.2.6	Résultats numériques	140
A	Appendix : Solution to a second-order vector equation	145
B	Annexe : Nullité d'un champ vectoriel à partir de ses projections normale et tangentielle	147
	Conclusions et perspectives	149

Introduction

Histoire ancienne et formalisme moderne de la mécanique des fluides

La mécanique des fluides est la branche de la physique se consacrant à l'étude du mouvement des gaz et liquides. Elle tire ses origines de l'hydrologie, bien avant le développement de la physique et des mathématiques modernes. Dès l'Antiquité, les écoulements d'eau sont étudiés empiriquement, tout comme l'hydrostatique, notamment par Archimède. La maîtrise des canaux d'irrigation ou des aqueducs, par exemple, est une preuve de l'intérêt qu'il peut y avoir à comprendre et maîtriser le comportement des fluides. Il faudra attendre la Renaissance pour avoir les premières traces d'une analyse plus scientifique de la mécanique des fluides, à la suite des études de Léonard de Vinci. Pascal, théorisant les idées de Stevin, introduit le principe qui porte son nom : dans un liquide homogène à l'équilibre, la pression ne dépend que de la profondeur, ce qui permet alors de faire des calculs hydrostatiques.

Au XVIII^e siècle, Bernoulli développe l'idée de conservation d'énergie d'un fluide, et relie la vitesse d'un fluide à sa pression dans le principe qui porte son nom. Les mathématiques entrent alors de plus en plus dans le monde de la physique, et les outils modernes comme le calcul infinitésimal permettent aux premiers modèles modernes d'apparaître, sous l'impulsion notamment de d'Alembert et d'Euler. À ce moment, l'étude de la mécanique des fluides prend la forme d'équations aux dérivées partielles.

Au XIX^e siècle, les travaux de Navier et de Stokes permettent d'établir les équations dites de Navier-Stokes, encore considérées aujourd'hui comme les équations de base de la mécanique des fluides. Ce système d'équations aux dérivées partielles modélise le comportement du champ de vitesse et de la pression d'un fluide en mouvement. En intégrant les effets de la viscosité et des forces externes, les équations de Navier-Stokes permettent de modéliser des comportements de fluides aussi variés que les écoulements laminaires, turbulents, qu'ils soient compressibles ou incompressibles. Aujourd'hui encore, la mécanique des fluides est un domaine de recherche très actif, tant pour les aspects théoriques que pour l'ingénierie, où comprendre et savoir simuler précisément le comportement des fluides est indispensable pour l'aérodynamisme, la météorologie ou l'étude des écoulements sanguins pour citer quelques exemples.

Dans ce contexte, l'objectif de cette thèse est d'explorer ces équations sous différents aspects théoriques et numériques, afin de contribuer à de meilleures simulations des phénomènes fluides complexes, dans un contexte de calcul à grande échelle et de calcul massivement parallèle.

Intéressons-nous davantage aux systèmes d'équations que nous souhaitons résoudre de façon approchée. L'objectif final de cette thèse est d'étudier le problème de Navier-Stokes, pour un fluide à la vitesse \mathbf{u} et la pression p , dans un domaine Ω et sur un intervalle de temps $]0, T[$:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{dans } \Omega \times]0, T[, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{dans } \Omega \times]0, T[, \end{aligned}$$

assorti d'une condition initiale et de conditions limites qui seront explicitées plus loin dans le mémoire. Ces équations régissent le comportement d'un fluide incompressible en mouvement, dont la viscosité est ν et sous l'effet d'un terme source \mathbf{f} (classiquement, le champ de gravité terrestre). Notons que nous nous intéressons à l'écriture adimensionnelle du problème de Navier-Stokes : partant de l'équation physique faisant intervenir des données dimensionnées, on divise par des grandeurs caractéristiques (taille du domaine, temps d'étude, etc.) influençant l'écoulement. On se ramène donc à une équation de la forme proposée, où le coefficient de diffusion représente l'inverse du nombre de Reynolds. Une particularité de ce système d'équation est qu'il couple la vitesse \mathbf{u} et p la pression du fluide, ce qui rend sa résolution moins aisée. La première équation est celle de la conservation de la quantité de mouvement, obtenue à partir du principe fondamental de la dynamique. La relation de divergence nulle traduit la conservation de la masse du fluide au cours de l'écoulement, si celui-ci est incompressible. On

rappellera par exemple que si l'existence et l'unicité de telle solution sont connues depuis les travaux de Leray [83] en 1934 en deux dimensions, l'unicité reste à ce jour un problème ouvert en dimension 3.

Le modèle de Navier-Stokes est physiquement très riche, mais est aussi compliqué à étudier théoriquement et numériquement, notamment en raison de sa non-linéarité. Dans le cas d'un fluide dont la viscosité domine (ce qui correspond à un nombre de Reynolds faible), l'écoulement est lent et le terme d'auto-advection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est négligé. Le problème, dit de Stokes, est alors linéaire et son étude plus aisée, notamment numériquement. Un autre modèle simplifié usuel est donné par le problème d'Oseen. Il s'agit du problème de Navier-Stokes linéarisé, où le terme d'auto-advection $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ est remplacé par un terme d'advection linéaire $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, où \mathbf{b} est un champ d'advection donné. Dans cette thèse, la modélisation d'Oseen sera étudiée dans un premier temps afin de mettre en place les méthodologies sur un problème linéaire. Nous étendrons ensuite les résultats au problème de Navier-Stokes.

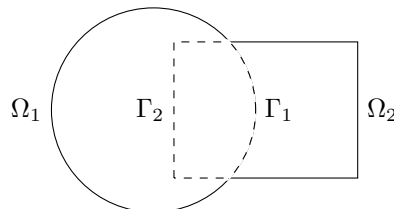
Schéma numérique et limites numériques

Les équations de Navier-Stokes n'ont, sauf cas particuliers, pas de solution analytique. On peut néanmoins en trouver une solution approchée avec les outils classiques de résolution des équations aux dérivées partielles : introduction d'un schéma en temps et en espace. Généralement, cela amène à résoudre à chaque pas de temps un système algébrique (linéaire ou non). Malheureusement, les mouvements des fluides peuvent être très difficiles à capter précisément avec une résolution numérique, surtout en temps long et sur de larges échelles spatiales. Il est alors nécessaire de faire appel à un raffinement de maillage élevé et un nombre de pas de temps trop important pour une résolution rapide. En effet, sur des problèmes de résolution à grande échelle, on peut être amené à résoudre des problèmes avec des milliards de mailles et des millions de pas de temps. Sur un seul processeur, une telle résolution est totalement hors de portée en un temps limité, et encore moins en temps réel.

Pour pallier cela, dans les dernières décennies, se sont développées des méthodes de résolution faisant appel à plusieurs processeurs. En effet, la croissance de la puissance des processeurs s'est ralentie durant les dernières années, mais l'agrégation de nombreux processeurs en cluster s'est généralisée, ce qui permet de répartir les tâches indépendantes sur des processeurs distincts : on parle alors de parallélisation. La méthode la plus utilisée aujourd'hui, car la moins invasive pour le code, est de paralléliser les produits matrices-vecteurs intervenant dans la résolution itérative des systèmes algébriques. Cette méthode est certes efficace, mais ne suffit plus pour les problèmes les plus gros, dont le temps de calcul peut être prohibitif. Pourquoi alors ne pas concevoir de nouvelles méthodes numériques intrinsèquement parallèles et adaptées à la physique du problème plutôt que de se limiter à paralléliser des opérations déjà existantes ? Les mathématiciens et informaticiens ont alors imaginé de telles méthodes, qu'il est possible d'exploiter en plus des parallélisations classiques. Nous nous intéresserons à deux directions de parallélisation pour la résolution d'équations aux dérivées partielles : une parallélisation en temps (reposant sur un découpage de l'intervalle en temps), et une en espace (reposant sur une décomposition du domaine spatial).

Décomposition de domaine

Les méthodes de décomposition de domaine sont aujourd'hui classiques pour mettre en œuvre une résolution en parallèle dans la direction spatiale. Cette méthodologie tire son origine loin des problématiques de temps de calcul numériques, mais d'une problématique théorique d'existence et d'unicité de solution à l'équation de Laplace. Alors que la solution était connue sur un domaine circulaire et sur un domaine rectangulaire, la question restait ouverte sur les autres géométries de domaines. H. A. Schwarz [99] propose en 1870 d'étudier le cas d'une intersection entre un disque et un rectangle, comme présenté sur le schéma suivant.



Schwarz propose alors un algorithme itératif pour résoudre dans un domaine formé de l'union du disque Ω_1 et du rectangle Ω_2 : partant d'une condition limite arbitraire sur la portion de frontière Γ_1 du disque située à l'intérieur du rectangle, et de la condition nulle sur le reste de la frontière, il est possible d'obtenir une solution dans le disque. Cela permet ensuite de trouver une solution dans le rectangle, en prenant pour condition limite sur la portion de frontière Γ_2 la valeur de la solution obtenue sur le disque. On peut alors répéter le processus de manière itérative, avec l'algorithme suivant, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \Delta u_1^\ell &= 0 & \text{dans } \Omega_1, & & \Delta u_2^\ell &= 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^\ell &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, & & u_2^\ell &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \\ u_1^\ell &= u_2^{\ell-1} & \text{sur } \Gamma_1, & & u_2^\ell &= u_1^\ell & \text{sur } \Gamma_2, \end{aligned}$$

partant d'une donnée initiale u_2^0 fixée.

Schwarz a alors montré la convergence de cet algorithme, ce qui a conclu ce problème d'existence pour cette géométrie non élémentaire. Cette méthode est désignée sous le terme de méthode de Schwarz alternée, ou méthode de Schwarz multiplicative. Cet algorithme a été conçu comme outil théorique pour montrer l'existence d'une unique solution à une équation aux dérivées partielles. Aussi a-t-il perdu en intérêt avec l'avènement du calcul variationnel au début du XX^e siècle, avant que le développement du calcul parallèle dans les années 80 ne le remette en avant, avec l'article fondateur de Lions [90] de 1988. Celui-ci a repris l'algorithme de Schwarz, en proposant simplement que le problème sur le domaine Ω_2 fasse appel à la donnée de Dirichlet de la solution du domaine $u_1^{\ell-1}$ sur Γ_2 , i.e. à l'itération précédente, ce que l'on appelle aujourd'hui méthode de Schwarz parallèle.

$$\begin{aligned} \Delta u_1^\ell &= 0 & \text{dans } \Omega_1, & & \Delta u_2^\ell &= 0 & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^\ell &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_1 \setminus \Gamma_1, & & u_2^\ell &= 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \setminus \Gamma_2, \\ u_1^\ell &= u_2^{\ell-1} & \text{sur } \Gamma_1, & & u_2^\ell &= u_1^{\ell-1} & \text{sur } \Gamma_2. \end{aligned}$$

Cette écriture est alors naturellement parallèle puisque la résolution dans chacun des sous-domaines à l'itération ℓ ne dépend que de la solution dans l'autre domaine calculée à l'itération précédente. D'un point de vue informatique, chaque domaine est associé à un processeur. Il y a alors une succession de deux phases. La première est celle du calcul de la solution dans les sous-domaines, où la résolution est effectuée simultanément dans Ω_1 et dans Ω_2 . Elle est suivie par une phase d'échange d'informations entre les processeurs, ici les valeurs des traces des solutions calculées, respectivement sur Γ_2 et Γ_1 . Cette méthodologie se généralise bien sûr à un nombre de sous-domaines arbitraire. Les centres de calcul modernes ayant désormais fréquemment des milliers de processeurs, il est alors possible de décomposer le domaine en milliers de sous-domaines, d'une taille très réduite, et sur lesquels la résolution du problème est nettement moins coûteuse que la résolution sur l'ensemble du domaine. On prendra garde toutefois que, sans surcouche algorithmique supplémentaire, plus il y a de sous-domaines, plus il sera nécessaire d'itérer pour faire converger la méthode. Nous renvoyons à [61] pour une revue historique de la décomposition de domaine, de l'idée originale de Schwarz à l'application moderne de Lions.

Après l'article fondateur de Lions, les généralisations ont été nombreuses, d'une part pour étudier l'algorithme sur de nombreuses classes d'équations, et d'autre part pour accélérer la vitesse de convergence de l'algorithme. Cet algorithme ne converge que si les domaines se recouvrent, ce qui limite l'intérêt de la méthode. En 1988, Lions a montré dans [89] qu'il est possible de faire converger l'algorithme sans recouvrement en remplaçant les conditions limites de Dirichlet par des conditions limites de Robin, pondérées d'un coefficient appelé coefficient de Robin. Il montre alors la convergence de l'algorithme, et que le paramètre peut être choisi pour optimiser la convergence de l'algorithme. Si les coefficients de Robin sont les mêmes de part et d'autre d'une frontière de deux domaines adjacents, on dira que l'algorithme est *one-sided*, et il sera *two-sided* dans le cas contraire, ce qui offre un degré de liberté supplémentaire pour optimiser la convergence. Cette optimisation est même nécessaire pour obtenir une convergence rapide, et a été l'objet de nombreuses études (avec des conditions limites de Robin ou de Ventcell, voir [75, 78, 79, 46]), et repose sur une optimisation du facteur de convergence obtenue par une analyse par transformée de Fourier. On dit alors que cet algorithme est une méthode de Schwarz optimisée. L'analyse a aussi été portée au niveau discret, prenant en compte le maillage et le schéma de résolution, voir [10, 66, 51].

Alors que les méthodes de Schwarz étaient originellement conçues pour les problèmes stationnaires, elles peuvent être étendues pour les problèmes en temps. L'approche la plus simple consiste à introduire une discrétisation temporelle, et à résoudre l'équation aux dérivées partielles, pas de temps par pas de temps, avec une méthode de Schwarz. Cela est proposé par exemple dans [22]. Cette méthode

nécessite d'utiliser une même discrétisation temporelle dans chaque sous-domaine. Cela peut être limitant, notamment dans le cas d'un couplage où les deux domaines représentent des physiques différentes voir [42] pour une équation de la chaleur avec des coefficients de diffusion discontinus, ou [82] pour un couplage océan-atmosphère, où la physique des deux domaines est différente (i.e. l'équation aux dérivées partielles est différente). La méthode exigeant intrinsèquement une même discrétisation temporelle dans tous les sous-domaines, il serait alors pertinent de faire appel à des méthodes de décomposition de domaine permettant un raffinement temporel adapté à la physique de chaque domaine.

Les méthodes de relaxation d'onde de Schwarz (*Schwarz Waveform Relaxation* en anglais) ou SWR sont des méthodes de Schwarz pour les problèmes en temps, où la résolution est effectuée sur l'ensemble de la fenêtre temporelle dans chaque sous-domaine, et les données échangées à chaque itération de décomposition de domaines sont aussi sur l'ensemble de la fenêtre temporelle. Ces informations peuvent être de type Dirichlet [59, 62, 96], mais aussi de Robin/Ventcell optimisé [49, 52, 95, 44, 50, 21, 108, 2, 104, 26], et l'on parle alors de méthode de relaxation d'onde de Schwarz optimisée, où *Optimized Schwarz Waveform Relaxation*, que l'on désignera par OSWR. Cet algorithme faisant appel à des échanges de données via des opérateurs de Robin ou de Ventcell sur les interfaces, il permet à nouveau l'utilisation d'un (ou plusieurs) paramètres, que l'on peut optimiser. À nouveau, la méthodologie classique repose sur l'analyse dans le domaine de Fourier. Puisque cet algorithme est global en temps, il permet l'utilisation de discrétisations temporelles différentes dans chacun des sous-domaines [67, 71, 72]. Cela nécessite l'utilisation d'une méthode de projection pour projeter la solution obtenue sur la grille en temps d'un sous-domaine à celle de l'autre sous-domaine [53]. Le choix du nombre d'itérations de décomposition de domaine à effectuer est un point crucial à étudier, afin de ne pas réaliser d'itérations superflues. Il est proposé dans [3, 2] d'utiliser des estimateurs *a posteriori* afin d'arrêter les itérations de décomposition de domaine (ici OSWR) quand l'estimateur indique que la méthode a convergé.

Parallélisation en temps

L'autre voie que nous explorons est celle de la parallélisation en temps. Celle-ci est apparue plus tard, sans doute car elle semble moins naturelle que pour la parallélisation spatiale. L'évolution temporelle pouvant être perçue comme une succession de pas de temps infinitésimaux, celle-ci semble par nature purement séquentielle. Néanmoins, la première idée de parallélisation en temps est née en 1964, avec l'article de Nievergelt [97], par une méthode de tir. Cette méthode comprend deux phases, une résolution grossière et une correction. L'idée est de diviser la fenêtre de temps en sous-fenêtres indépendantes. Partant d'une donnée initiale grossière (éventuellement arbitraire) sur chaque fenêtre, on effectue une résolution sur chaque fenêtre en parallèle (une fenêtre est associée à un processeur). Le résultat obtenu n'est évidemment pas une solution du problème initial, mais il est possible d'effectuer une correction pour approcher la solution, en forçant la continuité à l'interface entre chaque fenêtre. La méthode est même exacte en une itération sur les problèmes linéaires.

Les méthodes de relaxation d'onde tirent leurs origines dans les itérations de Picard [98, 84] étudiées pour donner l'existence et l'unicité pour une classe d'équations différentielles. Ces méthodes ont été introduites en 1982 par [81, 106] pour simuler le comportement de circuits électriques. Pour un système d'équations, disons de deux équations différentielles couplées, on résout la première en fixant une valeur pour la solution de la deuxième, et on injecte la solution obtenue dans la seconde équation que l'on résout à son tour. On répète alors le processus jusqu'à convergence. L'algorithme se ramène en réalité à un système équivalent à des problèmes de Gauss-Seidel pour des systèmes différentiels.

S'en sont suivies de nombreuses méthodologies de parallélisation temporelle [23, 7]. Nous renvoyons à [47] pour une analyse détaillée de l'historique des algorithmes de résolution parallèle en temps.

L'algorithme « Pararéel » fut introduit en 2001 par Lions, Maday et Turinici dans [86], et son nom traduit la volonté de résoudre en parallèle des problèmes en temps réel. C'est un algorithme itératif alternant une phase de résolution en parallèle et une phase de correction séquentielle. Il repose sur une décomposition de la fenêtre temporelle d'étude $[0, T[$ en N sous-fenêtres temporelles $(\mathcal{T}_n)_{n \in [1, N]}$. L'idée de l'algorithme est de déterminer une suite de conditions initiales au début de chaque fenêtre temporelle. Partant d'une première famille de conditions initiales $(U_n^0)_{n \in [0, N-1]}$, on calcule alors, successivement, une nouvelle famille $(U_n^k)_{n \in [0, N-1]}$ au cours des itérations k , avec l'objectif de faire converger cette suite vers les véritables valeurs de la solution au début de chaque fenêtre. Une fois ces

valeurs déterminées, on peut calculer la solution dans chacune des fenêtres, en partant de leur condition initiale propre. Tout l'enjeu est de calculer, à chaque itération k , la nouvelle famille $(U_n^k)_{n \in [1, N]}$ avec une formule de correction. Celle-ci repose sur une combinaison linéaire obtenue *via* deux opérateurs :

- un opérateur grossier $\mathcal{G}(\mathcal{T}_n, V)$ qui donne une approximation grossière de $U(T_{n+1})$, partant d'une condition initiale $U(T_n) = V$,
- un opérateur fin $\mathcal{F}(\mathcal{T}_n, V)$, qui donne une approximation fine de $U(T_{n+1})$ partant d'une condition initiale $U(T_n) = V$.

L'algorithme itère alors un certain nombre de fois jusqu'à atteindre une condition initiale pour chaque fenêtre suffisamment précise. L'intérêt d'une telle formulation est que la partie coûteuse à résoudre numériquement, celle du solveur fin, peut s'effectuer en parallèle sur chacune des fenêtres, et les parties séquentielles concernent seulement le solveur grossier, peu coûteux. Typiquement, on peut imaginer le solveur grossier comme étant une résolution temporelle avec des grands pas de temps, tandis que le solveur fin sera avec des petits pas de temps. Néanmoins, d'autres choix sont possibles, il est par exemple possible, pour le problème grossier, de prendre aussi une discrétisation spatiale réduite, voir [41], de prendre un modèle simplifié, comme dans [5, 93], ou bien d'utiliser des techniques de *machine learning*, voir [74].

Souvent, l'analyse de convergence est effectuée en considérant le solveur fin comme exact. Cette hypothèse est en effet raisonnable, tant que l'erreur induite par le grossier est largement plus importante. Toutefois, la convergence dans le cas où le solveur fin est non exact est aussi étudiée dans [6, 5]. L'algorithme a ensuite été étudié dans [60] qui précise que Pararéel peut être interprété comme une méthode de tir direct multiple, et prouve une convergence super-linéaire sur des intervalles de temps bornés. Leur analyse est alors étendue aux équations aux dérivées partielles. La convergence pour un système d'équations différentielles ordinaires est démontrée dans [48] et observée numériquement pour une équation différentielle non linéaire. Les problèmes d'instabilité pour les problèmes hyperboliques sont traités dans [31]. Une version améliorée de Pararéel est décrite dans [92], où la précision du solveur fin est adaptée au cours des itérations.

Couplage des algorithmes de parallélisation en temps et en espace

Après le développement de méthodes de résolutions parallèles en espace et d'autres parallèles en temps, une direction pour obtenir encore davantage de parallélisme consiste à utiliser simultanément une parallélisation en temps et en espace. Nous nous intéresserons dans cette thèse au couplage entre l'algorithme Pararéel et un schéma de décomposition de domaine. Cette approche a débuté en 2005 avec l'idée de Maday et Turinici [94], puis [64, 55, 20] consistant à utiliser l'algorithme SWR comme solveur fin de Pararéel. Ainsi, à chaque itération de Pararéel, la résolution de l'équation aux dérivées partielles sur chaque fenêtre se fait *via* une décomposition de domaine. Cela définit donc un algorithme à deux niveaux de parallélisme : l'un en temps, l'autre en espace, voir aussi [43]. L'idée a ensuite été développée pour la méthode de Jacobi [70].

Une question se pose alors : après combien d'itérations de décomposition de domaine doit-on s'arrêter avant de passer à l'itération de Pararéel suivante ? Il faudrait *a priori* faire converger l'algorithme de décomposition de domaine, c'est-à-dire itérer jusqu'à ce que les valeurs ne changent plus aux interfaces entre les sous-domaines. Néanmoins, il a été observé que cela n'est pas nécessaire : faire seulement un nombre fini d'itérations de décomposition de domaine n'empêche pas la convergence, celle-ci étant atteinte au fur et à mesure des itérations de Pararéel. L'algorithme POSWR est alors dit incomplet. Gander, Jiang et Song, dans [55], présentent même un algorithme dénommé PSWR effectuant une seule itération de SWR pour le solveur fin de Pararéel. Cet algorithme est étudié ensuite dans [54]. Nous nous intéressons dans cette thèse à l'algorithme Pararéel-OSWR résultant du couplage entre Pararéel et OSWR, dans [18] et dans [17] pour le problème de Stokes, que nous étendrons au problème d'Oseen. Cela définit un algorithme à deux niveaux de parallélisme, l'un en temps, et l'autre en espace, dont l'algorithme de décomposition de domaine converge sans recouvrement et peut être optimisé par un choix judicieux des coefficients de Robin. De cela résulte un algorithme plus rapide, mais dont l'étude de convergence est plus complexe et repose sur une analyse par estimation d'énergie.

Algorithmes de parallélisation pour la mécanique des fluides

En raison de l'importance de savoir simuler précisément le comportement des fluides, il a été cherché depuis longtemps des méthodologies d'accélération de la résolution numérique de tels problèmes, et une approche de parallélisation est donc souvent nécessaire pour les problèmes les plus grands. Aussi, les algorithmes de parallélisation pour la mécanique des fluides ont été l'objet de nombreuses études depuis des décennies.

L'algorithme Pararéel a été étendu au problème de Stokes dans la thèse [17] et la convergence montrée. Une première étude numérique pour le problème de Navier-Stokes a été réalisée dans [41], et approfondie avec une étude selon le nombre de Reynolds dans [101].

Les méthodes de décomposition de domaine pour des problèmes de mécanique des fluides ont fait l'objet de nombreuses publications, traduisant l'intérêt de la communauté pour ce type de parallélisation. Pour le problème de Stokes stationnaire, un algorithme de décomposition de domaine est proposé dans [35]. Le problème couplé Stokes-Darcy stationnaire a été étudié avec des conditions limites de Robin dans [33, 24]. Puisqu'il est possible d'appliquer les méthodes de Schwarz, pour des problèmes stationnaires, pas de temps par pas de temps, le problème de Navier-Stokes semi-discret en temps a été traité dans [25, 12], et étudié numériquement dans [28]. Une analyse de la méthode SWR pour le problème de Navier-Stokes compressible est effectuée dans [27]. Une analyse a aussi porté sur le problème de Navier-Stokes entièrement discrétisé dans [91].

L'analyse de l'algorithme OSWR pour les problèmes de mécanique des fluides a débuté avec la thèse de Bui [17] et l'article [19], avec des travaux aboutis pour le problème de Stokes, et une première approche pour le problème d'Oseen. Ces deux références seront donc une base pour notre travail avec l'approfondissement pour le problème d'Oseen.

À notre connaissance, il n'existe pas d'étude du problème de Navier-Stokes pour l'algorithme OSWR. La nature non linéaire de ce système d'équations en rend l'analyse plus complexe. On trouve dans [56] une première étude de l'algorithme OSWR pour un problème non linéaire, en continu et en discret.

Paramètres de Robin optimisés pour OSWR

L'analyse traditionnelle de la convergence de l'algorithme OSWR est principalement effectuée au niveau continu, dans le but d'obtenir une théorie indépendante des schémas numériques utilisés pour la discrétisation. Cette analyse peut être effectuée par des estimations d'énergie, à la fois dans les cas *one-sided* et *two-sided* [52, 95, 67, 71]. Cette technique est assez générale, mais ne fournit pas de taux de convergence, ni d'indication sur une manière de choisir correctement les paramètres de Robin pour une convergence rapide. Au niveau semi-discret temps, une preuve de convergence par estimation d'énergie est effectuée pour le cas *one-sided* [67], mais pas pour le cas *two-sided*.

En revanche, il est courant d'utiliser des transformées de Fourier en temps et en espace au niveau continu pour obtenir un taux de convergence de la méthode OSWR pour chaque mode de Fourier espace-temps [78, 46, 52, 95, 50, 8, 9]. Bien que le supremum de ce facteur de convergence sur l'ensemble de l'espace de Fourier soit égal à un, on peut toutefois l'utiliser pour choisir des paramètres de Robin efficaces qui minimisent ce taux de convergence sur la plage (bornée) de fréquences pertinentes pour les maillages numériques discrets (temps et espace) que l'on a en pratique. Cependant, les résultats numériques réels obtenus avec ce choix de paramètres de Robin ne sont pas toujours aussi efficaces que prévu. Une raison avancée à cela est que la transformée de Fourier en temps ne permet pas toujours d'effectuer une analyse adéquate des propriétés de convergence de la méthode [103, 57, 58]. Cela peut être dû au fait que la transformée de Fourier est effectuée en supposant un intervalle de temps infini, alors que la simulation réelle est nécessairement effectuée sur un intervalle fini. Le passage aux séries de Fourier ne résout pas ce problème puisque l'erreur ne disparaît pas au temps final comme elle le fait au temps initial. Une autre approche, basée sur l'analyse discrète en temps, est proposée dans [29, 68]. Pour les schémas simples, elle est basée sur ce que l'on appelle la transformation en \mathcal{Z} , qui est un équivalent discret de la transformée de Laplace. Cependant, cela nécessite également de considérer des intervalles de temps infinis ou de négliger l'erreur au temps final.

Une méthodologie basée sur le schéma numérique en temps, mais ne faisant pas appel à une transformée de Fourier (discrète) ou équivalent, offre donc une piste d'étude afin d'analyser l'algorithme OSWR et de définir des paramètres de Robin optimisés les plus efficaces possibles.

Analyse fonctionnelle

L'étape centrale des algorithmes de décomposition de domaine et de Pararéel (ainsi que de leur couplage) repose sur la résolution d'une équation aux dérivées partielles dans chaque sous-domaine, et sur chaque fenêtre temporelle dans le cas de Pararéel. Cette approche soulève naturellement des questions d'analyse fonctionnelle pour l'étude du problème.

La première interrogation concerne l'existence et l'unicité de la solution en présence des conditions limites aux interfaces, qui sont de type Robin dans le cas OSWR. À notre connaissance, aucun résultat de ce type n'avait été établi pour les problèmes d'Oseen (dans le cas où le champ d'advection n'est pas plus régulier que le champ de vitesse solution) et de Navier-Stokes.

Notre analyse fera donc appel à des notions de problèmes variationnels faibles, de distributions, de fonctions en temps à valeurs dans des espaces de Banach et leurs dérivées, aux espaces de Sobolev, ainsi que sur des résultats de densité, afin d'établir les propriétés d'existence des solutions et la convergence des algorithmes.

Pour ces aspects, nous nous appuyons principalement sur [15], qui propose une analyse approfondie des équations de la mécanique des fluides, tout en constituant une base riche pour les théorèmes et méthodes utiles à l'étude des équations aux dérivées partielles. Nous faisons également référence à [40, 16, 38, 30, 36] pour des éléments généraux d'analyse fonctionnelle.

La principale difficulté rencontrée dans cette étude est le manque de régularité de la dérivée temporelle des solutions dans les sous-domaines pour les problèmes d'Oseen et de Navier-Stokes. En effet, cette dérivée est *a priori* moins régulière que dans le cas monodomaine, où les conditions aux limites sont de Dirichlet. La perte de régularité est directement liée aux conditions limites différentes, ce qui empêche d'appliquer certains résultats classiques d'intégration ou de densité. Il nous faudra donc étendre ces résultats pour les adapter à nos hypothèses de régularité.

Plan de la thèse

Cette thèse est divisée en deux parties indépendantes. La première partie concerne l'analyse des algorithmes de parallélisation en espace et en temps pour les systèmes d'équations de la mécanique des fluides, tandis que la seconde partie présente une nouvelle analyse de la convergence d'OSWR sur l'équation de la chaleur discrétisée en temps.

Tout au long de ces deux parties, des résultats numériques viendront illustrer les différents résultats obtenus analytiquement sur les propriétés des algorithmes et méthodes présentées. Les résultats numériques de la première partie pour la mécanique des fluides seront effectués avec FREEFEM++ [69], dans sa version séquentielle et parallèle, en *mpi*. Les résultats numériques de la seconde partie seront effectués avec OCTAVE [37].

Dans la première partie, nous étendons l'algorithme OSWR au problème d'Oseen et de Navier-Stokes, ainsi que le couplage entre OSWR et Pararéel pour Oseen avec une analyse au niveau continu (en temps et en espace) du problème.

Une difficulté théorique est le manque de régularité de la dérivée des vitesses solutions des problèmes d'Oseen et de Navier-Stokes obtenues sur les sous-domaines à chaque itération d'OSWR. En effet, en raison des conditions limites de Robin sur les problèmes sur les sous-domaines (et plus précisément, de l'absence de conditions limites de Dirichlet homogène sur l'ensemble des frontières), les dérivées des vitesses calculées au cours des itérations d'OSWR sont moins régulières que celles que l'on a classiquement sur le problème d'Oseen et de Navier-Stokes. Cela nous empêche d'appliquer directement certains résultats classiques, notamment de densité, mais aussi le théorème de Lions-Magenes (d'intégration en temps de crochets de dualité en espace), pour lesquels les hypothèses sont *a priori* trop restrictives pour notre problème. Aussi, le Chapitre 1 est-il destiné à étendre ces résultats d'analyse pour nos cas. Notons aussi que ce chapitre préliminaire contient aussi les théorèmes d'analyse généraux auxquels nous nous référerons au cours des chapitres suivants.

Notons toutefois que ces difficultés n'existent pas pour le problème d'Oseen si le champ d'advection est suffisamment régulier (par exemple, constant, ou même borné en temps et en espace). Néanmoins, en vue d'étendre aisément les résultats obtenus pour le problème d'Oseen au problème de Navier-Stokes, nous réalisons les preuves avec la régularité « minimum » pour le champ d'advection, qui est celle de la solution en vitesse du problème de Navier-Stokes. Nous avons ainsi souhaité insister sur le

chapitre développant l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen de manière que les extensions (au couplage Pararéel-OSWR et à OSWR pour Navier-Stokes) soient facilitées, et se concentrent sur les difficultés ajoutées, les preuves s'étendant pour la plupart directement.

Le Chapitre 2 est consacré à l'étude de l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen et est le plus détaillé, les autres études y faisant régulièrement référence. En pratique, ce chapitre comprend les étapes suivantes :

- Écriture du problème sous forme variationnelle. Ce choix est motivé, car c'est cette écriture qui intervient dans de nombreux aspects de l'étude : existence et unicité de solution, problème couplé multidomaine équivalent, preuve de convergence par estimation d'énergie des algorithmes et enfin au niveau numérique avec des résolutions par éléments finis. Nous ne considérerons que des équations différentielles prises au sens des distributions en temps.
- Formulation variationnelle multidomaine. À partir du problème monodomaine, nous définissons une famille de problèmes couplés posés sur chacun des sous-domaines. Nous montrons qu'obtenir la solution de ce problème couplé est équivalent à résoudre le problème monodomaine. Nous explicitons la relation entre les données de Robin aux interfaces entre les sous-domaines, ce qui fait apparaître la faible régularité de celles-ci. Cette écriture a l'avantage d'être relativement « indépendante » du problème, une intégration par partie faisant simplement apparaître une intégrale de bord simple ; cela en facilite l'extension.
- Écriture de l'algorithme OSWR. Là encore, nous faisons le choix d'une écriture sous forme de problème variationnel, puis nous montrons alors que celui-ci est bien posé.
- Preuve de convergence par estimation d'énergie. Cette méthodologie est classique pour montrer la convergence de l'algorithme OSWR. Une première difficulté pour pouvoir prendre la fonction étudiée elle-même comme fonction test est d'étendre la formulation variationnelle à des fonctions test qui dépendent du temps, cela se fait par un résultat de densité. Cela fait, la preuve est alors classique, et les résultats que nous présentons est démontré pour le cas *two-sided*.
- Recalibrage de la pression. L'algorithme tel que nous le posons permet de faire converger le champ de vitesse au cours des itérations vers la vitesse monodomaine, mais pas la famille de pression. Une méthodologie de correction est donc nécessaire, et développe celle déjà proposée dans [17, 19] pour le problème de Stokes. Cela passe par la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps. Notons que ce système est de petite taille (proportionnelle au nombre de sous-domaines), ce qui fait que le surcoût est très modéré.
- Paramètres de Robin optimisés. Pour le problème d'Oseen (qui est linéaire), nous avons une méthode de calcul de paramètre de Robin optimisé pour l'algorithme OSWR. La méthodologie classique par transformée de Fourier fonctionne, et avait déjà été effectué dans la thèse [17], avec une adaptation supplémentaire prenant en compte la discrétisation temporelle, et qui s'avère efficace numériquement pour le problème de Stokes. Nous reprenons donc directement les résultats obtenus.
- Résultats numériques. Nous présentons des résultats numériques en éléments finis obtenus avec FREEFEM++. Nous étudions la convergence de la vitesse, celle de la pression corrigée et la sensibilité aux paramètres de Robin. Nous étudions aussi la dépendance de la convergence au nombre de sous-domaines, et les temps de calcul associés.

L'étude du couplage Pararéel-OSWR dans le Chapitre 3 reprend la trame établie pour l'algorithme OSWR pur, et les difficultés mathématiques se concentrent sur la preuve de convergence de l'algorithme. L'estimation d'énergie sur une fenêtre temporelle est totalement similaire à celle de l'algorithme OSWR pur, et nous ne détaillons que la partie liée à l'algorithme Pararéel, et enfin à leur couplage. Nous présentons ensuite des résultats numériques illustrant l'efficacité de l'algorithme. Notons que nous n'avons pas de méthodologie pour optimiser les paramètres dans le cas du couplage Pararéel-OSWR, mais que les paramètres obtenus pour l'algorithme OSWR pur donnent de très bons résultats, comme nous l'observerons en pratique dans nos cas tests.

Le Chapitre 4 joue un rôle à part au sein de la thèse. Nous y montrons l'existence et l'unicité de la solution à un problème de Navier-Stokes avec des conditions limites mixtes de Robin et de Dirichlet, par une méthode de Galerkin. Bien que le résultat soit intéressant en lui-même, il nous sera utile pour étendre OSWR au problème de Navier-Stokes, où nous serons amenés à résoudre de tels problèmes sur chaque sous-domaine à chaque itération d'OSWR. Ce chapitre est largement inspiré de [15, Chapitre V

et VII] qui donne une preuve d'existence et d'unicité de la solution du problème de Navier-Stokes. Il y a alors deux différences dans notre analyse : l'ajout des termes de Robin (qui ne posent pas de difficultés particulières), et la baisse de régularité de la dérivée de la vitesse qui nous oblige à adapter la preuve.

Le Chapitre 5 propose une étude de l'algorithme OSWR pour le problème de Navier-Stokes. À nouveau, les résultats obtenus pour celui d'Oseen s'étendent aisément, et ce chapitre se concentre sur la difficulté technique d'une preuve par estimation d'énergie pour ce problème non linéaire. Les résultats numériques montrent la convergence de l'algorithme pour la vitesse et la pression corrigée (la correction de la pression étant exactement la même que celle déterminée pour le problème d'Oseen).

La seconde partie de la thèse présente une nouvelle analyse de l'algorithme OSWR, reposant sur une discrétisation temporelle. Cela nous permet une meilleure compréhension de l'algorithme, et une nouvelle manière de l'optimiser. Par souci de simplicité, nous restreignons notre étude à l'équation de la chaleur, pour laquelle nous obtenons déjà une analyse riche.

Le Chapitre 6 reprend l'article [4]. Nous y présentons une nouvelle analyse de l'algorithme OSWR pour l'équation de la chaleur, obtenue après introduction d'une discrétisation en temps et d'un schéma en temps (d'Euler implicite). L'analyse d'OSWR est alors effectuée sans faire appel à une transformée de Fourier (même discrète) contrairement aux approches usuelles. Nous obtenons ainsi une analyse vectorielle, qui offre de nouveaux résultats de convergence. Nous démontrons tout d'abord la convergence discrète en temps en *two-sided*. Nous présentons aussi qu'il est possible de faire converger exactement la méthode en $N + 1$ itérations (si N est le nombre de pas de temps) avec un choix de paramètres Robin judicieusement choisi, pour lesquels nous donnons une formule explicite simple. On propose surtout une nouvelle manière de choisir le paramètre de Robin optimisé, dépendant du nombre d'itérations de décomposition de domaine effectuées. On montre en effet que le paramètre optimal numérique varie selon le nombre d'itérations effectuées. Des résultats numériques montrent ce phénomène, et que le paramètre proposé permet effectivement d'approcher finement le paramètre optimal numérique aux différentes itérations étudiées. Une comparaison est proposée avec le paramètre usuel continu obtenu par transformée de Fourier, qui est, lui, fixe quel que soit le nombre d'itérations de décomposition de domaine effectué.

Le Chapitre 7 est une extension du chapitre précédent et comporte deux sections indépendantes. La première est une suite directe du chapitre précédent, et nous y proposons un choix de paramètre de Robin optimisé dépendant du choix de la donnée de Robin initiale. En effet, la vitesse de convergence d'OSWR est grandement influencée par ce choix initial, et peut être accélérée avec un choix judicieux. Dans les applications pratiques, il est commun de partir de l'opérateur de Robin appliqué à la condition initiale, ce qui permet en effet d'accélérer la convergence, mais les méthodologies d'analyse usuelles ne prennent pas en compte ce choix, et donc le paramètre optimisé continu usuel non plus. Après une analyse poursuivant les travaux du Chapitre 6, nous présentons un paramètre de Robin dépendant toujours du nombre d'itérations de décomposition de domaine effectuées, mais prenant désormais aussi en compte cette donnée initiale. Des simulations numériques montrent la précision de ce choix pour optimiser la convergence aux différentes itérations étudiées. Enfin, dans la deuxième section, nous étendons la méthodologie du Chapitre 6 à l'équation de la chaleur bidimensionnelle, à l'aide de séries de Fourier discrètes pour la partie spatiale, et de l'analyse vectorielle due au schéma numérique pour la partie temporelle. Des paramètres de Robin optimisés sont à nouveau proposés et leur efficacité pour approcher le paramètre optimal numérique au cours des itérations d'OSWR est illustrée par des résultats numériques.

Première partie

Algorithmes OSWR et Pararéel, ainsi
que leur couplage pour les équations
de la mécanique des fluides

Chapitre 1

Résultats généraux d'analyse fonctionnelle

Sommaire

1.1	Théorèmes de référence	3
1.2	Suite de fonctions à valeur dans un espace de Hilbert	6
1.2.1	Suites régularisantes	6
1.2.2	Résultat de densité	7
1.3	Théorème de Lions-Magenes	9
1.4	Convergence d'une suite de somme bornée	14

Les algorithmes de décomposition de domaines ainsi que l'algorithme Pararéel reposent sur une structure itérative, dont l'étape centrale consiste en la résolution d'une équation aux dérivées partielles. L'analyse de ces algorithmes est donc étroitement liée à l'analyse fonctionnelle. Ce travail nécessitera ainsi de s'intéresser aux problèmes variationnels faibles, aux distributions, aux fonctions en temps à valeurs dans des espaces de Banach et à leur dérivée, aux espaces de Sobolev, ainsi qu'à certains résultats de densité. Pour ces aspects, nous nous appuierons principalement sur [15] pour l'analyse des équations issues de la mécanique des fluides, et sur [40, 16, 38, 30, 36] pour des résultats plus généraux.

Par ailleurs, les problèmes d'Oseen et de Navier-Stokes que nous résoudrons dans chaque sous-domaine présenteront une régularité plus faible que celle généralement obtenue pour le problème monodomaine. Cette différence est due aux conditions limites imposées par les algorithmes (de type Robin), ce qui nous contraindra à affiner certains théorèmes par rapport aux cas classiques.

Ce chapitre préliminaire rassemble ainsi divers théorèmes généraux d'analyse qui seront utilisés tout au long de cette première partie. Nous débutons par un rappel des théorèmes fondamentaux d'analyse utiles à l'étude des équations aux dérivées partielles, auxquels nous nous référerons régulièrement. De plus, nous établissons trois nouveaux résultats.

Les lemmes 1.19 et 1.20 explicitent deux suites de fonctions régulières qui permettront d'obtenir des résultats par densité, et ainsi de prouver le Théorème 1.24 et le Lemme 2.15, respectivement. Le Théorème 1.24 propose une généralisation du théorème de Lions-Magenes, portant sur les intégrales en temps de crochets de dualité en espace, sous des hypothèses de régularité plus faibles que celles du théorème classique. Enfin, le Lemme 1.25 établit un critère de convergence dans tout espace L^p (pour p fini) pour une suite dont la somme est bornée; ce résultat sera essentiel pour démontrer la convergence des algorithmes étudiés dans cette partie.

Tout au long de cette étude, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ désignera un domaine connexe, borné, non vide et lipschitzien, et l'intervalle temporel sera $]0, T[$, avec $T > 0$.

1.1 Théorèmes de référence

Nous énonçons dans cette section divers théorèmes classiques d'analyse qui nous serviront au cours de ce chapitre et des suivants.

Lemme 1.1 ([15, Proposition III.2.35]). Soit Ω un domaine lipschitzien de \mathbb{R}^2 à frontière compacte. Pour tout $q \geq 2$, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{2/q} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-2/q}.$$

Théorème 1.2 (Réciproque partielle du théorème de convergence dominée [16, Théorème 4.9]). Soit $p \in [1, +\infty[$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $L^p(]0, T[)$ et $f \in L^p(]0, T[)$. On suppose que $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f$ dans $L^p(]0, T[)$. Alors, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

- $f_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$ presque partout sur $]0, T[$,
- il existe $h \in L^p(]0, T[)$ telle que $|f_{n_k}(t)| \leq h(t)$ presque partout sur $]0, T[$, pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Définition 1.3 ([15, Définition II.5.7]). Soient I un intervalle de \mathbb{R} , et $\mathcal{D}(I)$ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(I)$ à support compact dans I . Soit $X \subset Y$ deux espaces de Banach et $1 \leq p, q \leq +\infty$. On dit qu'une fonction $u \in L^p(I, X)$ a une dérivée faible dans $L^q(I, Y)$ s'il existe une fonction $g \in L^q(I, Y)$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\int_I \varphi'(t) u(t) dt = - \int_I \varphi(t) g(t) dt.$$

Si une telle fonction g existe, elle est unique et on note $\frac{du}{dt} := g(t)$.

Lemme 1.4 (Aubin [40, Lemme 6.2]). Soit $1 < p_1, p_2 < +\infty$, et $B \subset B_1$ deux espaces de Banach réflexifs avec inclusion continue. Alors, toute fonction $u \in L^{p_1}(]0, T[, B)$ telle que $\frac{du}{dt} \in L^{p_2}(]0, T[, B_1)$ est continue sur $[0, T]$ à valeurs dans B . Le résultat ci-dessus reste encore valable si $u \in L^{p_1}(]0, T[, B_0)$, avec $B_0 \subset B \subset B_1$ trois espaces de Banach réflexifs avec inclusions continues, puisque $L^{p_1}(]0, T[, B_0) \subset L^{p_1}(]0, T[, B)$.

Théorème 1.5 ([15, Corollaire II.4.2]). Toute fonction f de $W^{1,1}(]0, T[)$ est égale presque partout à une fonction continue sur $[0, T]$. De plus, pour presque tout $x, y \in]0, T[$,

$$f(y) = f(x) + \int_x^y f'(\tau) d\tau.$$

Théorème 1.6 (Inégalité de Hölder, [15, Proposition II.2.18]). Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , et $(p_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une famille de réels avec $p_i \geq 1$, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (et éventuellement infinis), et soit $r \in [1, +\infty]$ tel que

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}.$$

Alors, pour toute famille de fonctions $(f_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ telle que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, le produit des fonctions $f_1 \dots f_n$ appartient à $L^r(\Omega)$ et

$$\|f_1 \dots f_n\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \dots \|f_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}.$$

Théorème 1.7 (Grönwall, [15, Lemme II.4.10]). Soit $y \in L^\infty(]0, T[)$ et $g \in L^1(]0, T[)$ deux fonctions, avec g positive et y_0 une constante réelle telle que, pour presque tout $t \in]0, T[$

$$y(t) \leq y_0 + \int_0^t g(\tau)y(\tau) \, d\tau.$$

On a alors, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$y(t) \leq y_0 \exp \left(\int_0^t g(\tau) \, d\tau \right).$$

Théorème 1.8 (Aubin-Lions [38, Théorème 6.32]). Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte de façon continue et dense dans H . Soit aussi $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(]0, T[, V)$ tels que $\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \frac{d\mathbf{v}}{dt} \in L^2(]0, T[, V')$. Alors, la fonction $t \mapsto (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_\Omega$ est absolument continue, et on a

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))_H = \left\langle \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \mathbf{v}(t) \right\rangle_{V', V} + \left\langle \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}, \mathbf{u}(t) \right\rangle_{V', V}.$$

Théorème 1.9 ([15, Théorème III.2.36], avec $p = d = 2$). Soit Ω un domaine lipschitzien de \mathbb{R}^2 à frontière compacte. Alors pour tout $r \in [2, +\infty[$, on a

$$H^{1/2}(\partial\Omega) \subset L^r(\partial\Omega),$$

et, de plus, il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$\|u\|_{L^r(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/r} \|u\|_{H^1(\Omega)}^{1-1/r}.$$

Lemme 1.10 ([15, Lemme V.1.2]). Soit V un espace de Hilbert. L'ensemble \mathcal{E} des fonctions φ de la forme

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=0}^N \eta_k(t) \psi_k(x),$$

où N est un entier quelconque, $\eta_k \in \mathcal{D}(]0, T[)$ et $\psi_k \in V$, est dense, pour la topologie de la norme $L^\infty(]0, T[, V)$, dans l'ensemble des fonctions continues à support compact $\mathcal{C}_c^0(]0, T[, V)$.

Théorème 1.11 (Inégalité de Young). Pour a et b deux réels positifs, et p et q deux réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$ab \leq \frac{1}{(q\varepsilon)^{p/q}} \frac{a^p}{p} + \varepsilon b^q.$$

Lemme 1.12. Pour tout $\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$, avec \mathbf{b} à divergence nulle, on a :

$$((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = -((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega + ((\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\partial\Omega}. \quad (1.1)$$

Si, par ailleurs, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, alors

$$((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = -((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega. \quad (1.2)$$

Enfin, on a les majorations

$$|((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega| \leq \|\mathbf{b}\|_{L^4(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^4(\Omega)}. \quad (1.3)$$

Preuve. L'égalité (1.1) s'obtient par intégration par parties en explicitant les composantes des vecteurs, et avec l'hypothèse de champ à divergence nulle. L'égalité (1.2) est alors directe. L'inégalité (1.3) s'obtient finalement à partir de l'inégalité de Hölder. \square

Théorème 1.13 (De Rham [15, Théorème IV.2.3]). Soit Ω un domaine de \mathbb{R}^2 lipschitzien, connexe et borné. Soit $\mathbf{f} \in (H^{-1}(\Omega))^2$ tel que

$$\langle \mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in (H_0^1(\Omega))^2 \text{ tel que } \nabla \cdot \boldsymbol{\varphi} = 0.$$

Alors, il existe un élément $\psi \in L^2(\Omega)$, unique à une constante près, tel que $\mathbf{f} = \nabla \psi$.

1.2 Suite de fonctions à valeur dans un espace de Hilbert

1.2.1 Suites régularisantes

Lemme 1.14 (Continuité de l'opérateur de translation [15, Corollaire II.5.4]). Soit X un espace de Banach et I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $1 \leq p < +\infty$, et $f \in L^p(I, X)$. Soit \tilde{f} le prolongement de f par 0 en dehors de I . Alors, pour $h \in \mathbb{R}$, la fonction τ_h définie par $\tau_h f := \tilde{f}(\cdot + h)$ tend vers f dans $L^p(I, X)$ lorsque h tend vers 0.

Définition 1.15 (Fonction régularisante [15, Définition II.2.23]). On appelle fonction régularisante (ou « mollifier » en anglais) toute fonction $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, telle que $\text{Supp}(\eta) \subset]-1, 1[$,
- $\eta \geq 0$ et $\|\eta\|_{L^1(\mathbb{R})} = 1$,
- $\eta(t)$ dépend seulement de $|t|$.

Remarque 1.16. Une telle fonction existe bien, par exemple

$$\eta(t) := \begin{cases} \frac{1}{C} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{pour } -1 < t < 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $C = \int_{-1}^1 e^{-\frac{1}{1-\tau^2}} d\tau$.

Proposition 1.17 ([15, Proposition II.2.25]). Soit η une fonction régularisante vérifiant la Définition 1.15. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $\eta_\varepsilon : t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \eta(\frac{t}{\varepsilon})$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors, pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$, on a :

$$f * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.4a}$$

$$\|f * \eta_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}, \tag{1.4b}$$

où $*$ désigne le produit de convolution. Si de plus $p < +\infty$,

$$f * \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}). \tag{1.4c}$$

On peut alors étendre ces propriétés aux fonctions en temps à valeur dans un espace de Banach X .

Proposition 1.18. Soit η une fonction régularisante vérifiant la Définition 1.15. Pour $\varepsilon > 0$, on définit $\eta_\varepsilon : t \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \eta(\frac{t}{\varepsilon})$. Soit $1 \leq p \leq +\infty$ et X un espace de Banach. Pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$, et tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$f * \eta_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, X) \tag{1.5a}$$

$$\|f * \eta_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}, X)}, \tag{1.5b}$$

où $*$ désigne le produit de convolution. Si de plus $p < +\infty$,

$$f * \eta_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f \quad \text{dans } L^p(\mathbb{R}, X). \tag{1.5c}$$

Preuve. Soit $p \in [1, +\infty]$ et $f \in L^p(\mathbb{R}, X)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Nous ne ferons la preuve que pour l'inégalité (1.5b), les autres résultats s'étendant de manière similaire. On a, par l'inégalité de Jensen (car η_ε est à support compact), et puisque η_ε est une fonction uniquement du temps et positive,

$$\begin{aligned} \|(f * \eta_\varepsilon)(t)\|_X &= \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \tau) \eta_\varepsilon(\tau) d\tau \right\|_X \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \|f(t - \tau)\|_X \eta_\varepsilon(\tau) d\tau, \\ &\leq (\|f\|_X * \eta_\varepsilon)(t). \end{aligned}$$

Ainsi, $\|f * \eta_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}, X)} \leq \left\| \|f\|_X * \eta_\varepsilon \right\|_{L^p(\mathbb{R})}$ et on peut appliquer l'inégalité (1.4b) à $\|f\|_X$ de la Proposition 1.17 pour conclure. \square

1.2.2 Résultat de densité

Nous allons utiliser les suites régularisantes afin de montrer deux résultats de densité (Lemmes 1.19 et 1.20) pour des fonctions en temps à valeur vectorielle. Les relations de convergence (1.8a) et (1.8b) sont connues, voir [36, Théorème 2.3.1], ou [15, Lemme II.5.10], et l'on détaille les preuves pour ajouter des résultats de convergence supplémentaires.

Lemme 1.19. *Soit $T > 0$. Soit aussi H et V deux espaces de Hilbert. Considérons la fonction*

$$\varphi \in L^2(]0, T[, V) \quad \text{avec} \quad \frac{d\varphi}{dt} \in L^1(]0, T[, V'). \quad (1.6)$$

Considérons l'opérateur de translation τ_h du Lemme 1.14, puis la fonction $\eta_{\frac{1}{n}}(t) := n\eta(nt)$ avec η une fonction régularisante, ainsi que θ_1, θ_2 deux fonctions positives de $\mathcal{C}^\infty([0, T], \mathbb{R})$ de somme 1 et dont les supports se recouvrent et sont tels que $\text{Supp}(\theta_1) \subset [0, \frac{2}{3}T]$ et $\text{Supp}(\theta_2) \subset [\frac{1}{3}T, T]$. Alors, il existe une fonction extractrice σ telle que la suite $(\varphi_n)_n$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\varphi_n = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 \varphi) + \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_2 \varphi) \right), \quad (1.7)$$

ait ses éléments dans $\mathcal{C}^\infty([0, T], V)$, et vérifie de plus les convergences suivantes

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \varphi \quad \text{dans } L^2(]0, T[, V), \quad (1.8a)$$

$$\frac{d\varphi_n}{dt} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{dans } L^1(]0, T[, V'), \quad (1.8b)$$

$$\|\varphi_n - \varphi\|_V \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{p.p. sur }]0, T[, \quad (1.8c)$$

$$\left\| \frac{d(\varphi_n - \varphi)}{dt} \right\|_{V'} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{p.p. sur }]0, T[. \quad (1.8d)$$

Si, par ailleurs, $\varphi \in L^\infty(]0, T[, H)$, alors la suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty(]0, T[, H)$.

Preuve. Soit $\varphi \in L^2(]0, T[, V)$ telle que $\frac{d\varphi}{dt} \in L^1(]0, T[, V')$. Soit θ_1, θ_2 deux fonctions positives de $\mathcal{C}^\infty([0, T], \mathbb{R})$ de somme 1 et dont les supports se recouvrent et sont tels que

$$\text{Supp}(\theta_1) \subset \left[0, \frac{2}{3}T\right], \quad \text{et} \quad \text{Supp}(\theta_2) \subset \left[\frac{1}{3}T, T\right].$$

On remarque alors que $\varphi = \theta_1 \varphi + \theta_2 \varphi$. Pour approcher φ , on va donc plutôt approcher séparément $\theta_1 \varphi$ et $\theta_2 \varphi$. Notons $\mathbf{v} := \theta_1 \varphi$. Cette fonction est bien, elle aussi, dans $L^2(]0, T[, V)$ avec $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ dans $L^1(]0, T[, V')$.

Pour $0 < h < T/3$ et $0 < \varepsilon < h$, posons $\mathbf{v}_{h,\varepsilon} := \eta_\varepsilon * \tau_h(\mathbf{v}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V)$, où τ_h est l'opérateur d'extension par 0 et de translation du Lemme 1.14, et $\eta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon} \eta(\frac{t}{\varepsilon})$ avec η une fonction régularisante.

On a alors, par inégalité triangulaire, que pour tout n suffisamment grand (tel que $2/n < T/3$),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}} - \mathbf{v}\|_{L^2([0, T[, V)} &\leq \|\eta_{\frac{1}{n}} * \tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v}) - \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0(\mathbf{v})\|_{L^2([0, T[, V)} + \|\eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0(\mathbf{v}) - \tau_0(\mathbf{v})\|_{L^2([0, T[, V)} \quad (1.9) \\ &\leq \|\eta_{\frac{1}{n}} * (\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v}) - \tau_0(\mathbf{v}))\|_{L^2(\mathbb{R}, V)} + \|\eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0(\mathbf{v}) - \tau_0(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathbb{R}, V)} \\ &\leq \|\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v}) - \tau_0(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathbb{R}, V)} + \|\eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0(\mathbf{v}) - \tau_0(\mathbf{v})\|_{L^2(\mathbb{R}, V)} \end{aligned}$$

grâce à la majoration (1.5b). On peut ensuite passer à la limite sur $n \in \mathbb{N}$. Le premier terme du membre de droite tend vers 0 par le Lemme 1.14, et le second aussi par la relation (1.5c). Ceci nous permettra d'obtenir la relation (1.8a), à l'aide de la suite $(\varphi_n)_n$, définie ci-dessous.

Nous reprenons ce raisonnement pour la convergence de la dérivée en temps :

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}}) - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\|_{L^1([0, T[, V')} &\leq \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \frac{d}{dt}(\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v})) - \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1([0, T[, V')} + \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1([0, T[, V')} . \end{aligned}$$

Or, $\frac{d}{dt}(\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v})) = \delta_{-\frac{2}{n}}\mathbf{v}(0) + \tau_{\frac{2}{n}}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)$, où δ_a désigne la masse de Dirac en un point a . Notons qu'il n'y a pas de masse de Dirac en $\frac{2T}{3} - \frac{2}{n}$ car $\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v})$ est nul en ce point. Ainsi,

$$\eta_{\frac{1}{n}} * \frac{d}{dt}(\tau_{\frac{2}{n}}(\mathbf{v})) = \eta_{\frac{1}{n}} * \delta_{-\frac{2}{n}}\mathbf{v}(0) + \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_{\frac{2}{n}}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right). \quad (1.10)$$

Or, $\eta_{\frac{1}{n}} * \delta_{-\frac{2}{n}}\mathbf{v}(0) = \tau_{\frac{2}{n}}(\eta_{\frac{1}{n}})\mathbf{v}(0)$ est à support dans $[-\frac{3}{n}, -\frac{1}{n}]$ donc nul presque partout sur $]0, T[$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}}) - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right\|_{L^1([0, T[, V')} &\leq \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_{\frac{2}{n}}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1([0, T[, V')} + \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1([0, T[, V')} \\ &\leq \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \left(\tau_{\frac{2}{n}}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}, V')} + \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}, V')} \\ &\leq \left\| \tau_{\frac{2}{n}}\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}, V')} + \left\| \eta_{\frac{1}{n}} * \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) - \tau_0\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) \right\|_{L^1(\mathbb{R}, V')}, \end{aligned}$$

la dernière inégalité provenant de (1.5b). On peut ensuite passer à la limite sur $n \in \mathbb{N}$. À nouveau, le premier terme tend vers 0 par le Lemme 1.14, et le second aussi par la relation (1.5c), ce qui nous permettra d'obtenir la relation (1.8b).

De plus, d'après le Théorème 1.2 on peut extraire une sous-suite de $(\|\mathbf{v}_{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}} - \mathbf{v}\|_V)_n$ qui converge presque partout sur $]0, T[$ vers 0. En appliquant cette extraction à la suite $(\mathbf{v}_{\frac{2}{n}, \frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient une suite $(\mathbf{v}_n^1)_n = (\mathbf{v}_{\frac{2}{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}})_n$ (avec σ une extractrice) qui a toujours les mêmes propriétés de convergence forte, avec en plus (1.8c).

On procède de même sur le terme de la dérivée pour extraire une suite de $(\mathbf{v}_n^1)_n$ notée $(\tilde{\mathbf{v}}_n^1)_n = (\mathbf{v}_{\frac{2}{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}}^1)_n$ avec une nouvelle extractrice, toujours notée σ , ce qui donne la convergence (1.8d).

Nous supposons désormais que, de plus, $\varphi \in L^\infty([0, T[, H)$. Alors, la suite $(\tilde{\mathbf{v}}_n^1)_n$ est bornée dans $L^\infty([0, T[, H)$. Cela découle de l'inégalité (1.5b) avec $p = +\infty$, et du fait que \mathbf{v} soit un élément de $L^\infty([0, T[, H)$.

La preuve de chacun des résultats du théorème a été faite pour approcher $\mathbf{v} = \theta_1\varphi$. On peut bien sûr faire de même sur $\theta_2\varphi$, et donc déterminer une suite $(\tilde{\mathbf{v}}_n^2)_n$ qui approche $\theta_2\varphi$ et vérifie toutes les propriétés précédentes, à une composée d'extractrices près, que l'on note toujours σ . Notons que l'extraction de cette deuxième suite doit se faire en partant de la suite $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_2\mathbf{v}))_n$ avec σ l'extractrice de la première suite, de manière à conserver les propriétés pour approcher $\theta_1\mathbf{v}$.

Finalement, on définit la suite $(\varphi_n)_n := (\tilde{\mathbf{v}}_n^1)_n + (\tilde{\mathbf{v}}_n^2)_n$, qui vérifie toutes les propriétés souhaitées, ce qui conclut la preuve du lemme. \square

Nous allons désormais exhiber une seconde suite construite de manière similaire, mais à support compact sur $]0, T[$. Notons que la différence entre la définition des suites (1.7) et (1.12) est que les translations obtenues avec les opérateurs τ_h et τ_{-h} sont de directions opposées.

Lemme 1.20. *Soit $T > 0$. Soit aussi H et V deux espaces de Hilbert. Considérons la fonction*

$$\varphi \in L^2([0, T[, V) \cap L^\infty([0, T[, H). \quad (1.11)$$

Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_c^\infty([0, T[, V)$ qui converge vers φ dans $L^2([0, T[, V)$, et qui est bornée dans $L^\infty([0, T[, H)$.

Preuve. On procède comme pour le Lemme 1.19, en étudiant tout d'abord $\mathbf{v} := \theta_1 \varphi$ (avec θ_1 et θ_2 définis comme dans le Lemme 1.19).

Posons cette fois, pour $0 < h < T/6$ et $0 < \varepsilon < h$, $\mathbf{v}_{h,\varepsilon} := \eta_\varepsilon * \tau_{-h}(\mathbf{v}) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, V)$. Ainsi,

$$\text{Supp}(\mathbf{v}) \subset \left[0, \frac{2T}{3}\right] \quad \text{donc} \quad \text{Supp}(\tau_{-h}(\mathbf{v})) \subset \left[h, \frac{2T}{3} + h\right],$$

et donc le support de la convolution donne

$$\text{Supp}(\eta_\varepsilon * (\tau_{-h}(\mathbf{v}))) \subset]-\varepsilon, \varepsilon[+ \left[h, \frac{2T}{3} + h\right] \subset \left[h - \varepsilon, \frac{2T}{3} + h + \varepsilon\right],$$

qui est inclus dans un compact de $]0, T[$ dès lors que $\varepsilon < h$ et $h < T/6$. On en déduit finalement que $\mathbf{v}_{h,\varepsilon} \in \mathcal{C}_c^\infty([0, T[, V)$. La convergence et le caractère borné s'obtiennent ensuite comme pour le Lemme 1.19. On fait de même pour $\mathbf{w} := \theta_2 \varphi$, mais avec l'extension et translation $\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}$, et on définit finalement la suite

$$\varphi_n = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 \varphi) + \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_2 \varphi) \right), \quad (1.12)$$

qui est bien un élément de $\mathcal{C}_c^\infty([0, T[, V)$. \square

1.3 Théorème de Lions-Magenes

Avant d'en venir à l'objectif de cette section, rappelons un résultat utile pour la suite.

Lemme 1.21 ([15, Corollaire II.3.8]). *Soient V et H deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte de façon dense et continue dans H . D'après le théorème de Riesz, on peut identifier H et son dual via son produit scalaire. On a alors une double injection dense*

$$V \subset H \subset V',$$

la seconde injection étant définie par :

$$f \in H \mapsto T_f \in V', \quad \text{avec} \quad \langle T_f, v \rangle_{V', V} = (f, v), \quad \forall v \in V.$$

Remarque 1.22. *Les espaces H et V (et H_i et V_i) définis dans les chapitres suivants vérifieront toujours cette propriété, de sorte que l'on fera systématiquement l'identification, pour tout $f \in H$ et $v \in V$,*

$$\langle f, v \rangle_{V', V} = (f, v)_H.$$

On rappelle alors le Théorème de Lions-Magenes classique.

Théorème 1.23 (Lions-Magenes [15, Théorèmes II.5.12 et II.5.13]). *Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte de façon continue et dense dans H . On identifie alors H à son dual de telle sorte que l'on a $V \subset H \subset V'$, le produit de dualité entre V et V' étant donné par le produit scalaire de H . Si $\mathbf{u} \in L^2([0, T[, V)$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2([0, T[, V')$, alors, la fonction $t \mapsto \mathbf{u}(t) \in \mathcal{C}^0([0, T], H)$, et on a*

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(t), \mathbf{u}(t) \right\rangle_{V', V} dt = \frac{\|\mathbf{u}(T)\|_H^2 - \|\mathbf{u}(0)\|_H^2}{2}.$$

Nous présentons ici une généralisation du Théorème de Lions-Magenes 1.23, avec des hypothèses d'application plus faibles, et adaptées à notre cas d'étude où la dérivée en temps sera moins régulière. La preuve s'inspire de celle présentée dans [15, Théorème II.5.12] pour le théorème classique.

Théorème 1.24 (Généralisation du théorème de Lions-Magenes). *Soit V et H deux espaces de Hilbert tels que V s'injecte de façon continue et dense dans H . Supposons alors que $\mathbf{u} \in L^2(]0, T[, V)$ et $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(]0, T[, V')$, et qu'en outre, il existe un $J \in \mathbb{N}^*$ tel que pour presque tout $\tau, s \in]0, T[$,*

$$\left| \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau), \mathbf{u}(s) \right\rangle_{V', V} \right| \leq C \sum_{j=1}^J R_j(\tau) T_j(s), \quad (1.13)$$

avec, $C \geq 0$, et, tel que pour tout $j \in \llbracket 1, J \rrbracket$, il existe $p_j \in]1, +\infty[$ tel que, $R_j \in L^{p_j}(]0, T[)$, $T_j \in (L^{p_j}(]0, T[))'$. Alors $t \mapsto \|\mathbf{u}\|_H^2(t) \in \mathcal{C}^0([0, T])$, et pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$\int_0^t \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau), \mathbf{u}(\tau) \right\rangle_{V', V} d\tau = \frac{\|\mathbf{u}\|_H^2(t) - \|\mathbf{u}\|_H^2(0)}{2}. \quad (1.14)$$

Si de plus, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^{1+\varepsilon}(]0, T[, V')$, alors la fonction $t \mapsto \mathbf{u}(t)$ appartient à $\mathcal{C}^0([0, T], H)$, et on a, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\int_0^t \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau), \mathbf{u}(\tau) \right\rangle_{V', V} d\tau = \frac{\|\mathbf{u}(t)\|_H^2 - \|\mathbf{u}(0)\|_H^2}{2}. \quad (1.15)$$

Preuve. Soit \mathbf{u} vérifiant les hypothèses du théorème. Alors, puisque \mathbf{u} vérifie (1.6), on peut introduire la suite $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^\infty([0, T], V)$ donnée par le Lemme 1.19, qui converge vers \mathbf{u} dans $L^2(]0, T[, V)$, telle que $(\frac{d\mathbf{u}_n}{dt})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ dans $L^1(]0, T[, V')$. Les éléments de la suite $(\|\mathbf{u}_n\|_H^2)_{n \in \mathbb{N}}$ étant réguliers en temps, on peut les dériver au sens classique. Ainsi, par intégration par parties, on a, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0, T[)$, et $n \in \mathbb{N}$,

$$-\int_0^T \varphi'(t) \|\mathbf{u}_n(t)\|_H^2 dt = \int_0^T \varphi(t) \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_n\|_H^2(t) dt = 2 \int_0^T \varphi(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n}{dt}(t), \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_H dt,$$

que l'on réécrit avec l'identification du Lemme 1.21,

$$-\int_0^T \varphi'(t) \|\mathbf{u}_n(t)\|_H^2 dt = 2 \int_0^T \varphi(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n}{dt}(t), \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V', V} dt. \quad (1.16)$$

On va alors passer à la limite sur n dans les deux termes de l'égalité précédente.

Tout d'abord, pour le membre de gauche de (1.16), on a :

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \varphi'(t) (\|\mathbf{u}_n\|_H^2 - \|\mathbf{u}\|_H^2) dt \right| \\ & \leq \|\varphi'\|_{L^\infty(]0, T[)} \int_0^T (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_H \|\mathbf{u}_n\|_H + \|\mathbf{u}\|_H \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_H) dt \\ & \leq \|\varphi'\|_{L^\infty(]0, T[)} (\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_{L^2(]0, T[, H)} \|\mathbf{u}_n\|_{L^2(]0, T[, H)} + \|\mathbf{u}\|_{L^2(]0, T[, H)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_{L^2(]0, T[, H)}) \\ & \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

car $(\mathbf{u}_n)_n$ tend vers \mathbf{u} dans $L^2(]0, T[, H)$ d'après (1.8a) et l'injection continue de V dans H , et que de plus, $(\|\mathbf{u}_n\|_{L^2(]0, T[, H)})_n$ tend vers $\|\mathbf{u}\|_{L^2(]0, T[, H)}$.

¹Notons que cette hypothèse est en réalité assez peu exigeante pour obtenir que le crochet de dualité $\left\langle \frac{d\mathbf{u}(\tau)}{dt}, \mathbf{u}(\tau) \right\rangle_{V', V}$ soit bien intégrable, et donc espérer aboutir à la relation (1.14). Cette hypothèse est d'ailleurs vérifiée avec les hypothèses du Théorème de Lions-Magenes classique 1.23, avec $J = 1$, $p_1 = 2$, $R_1 = \|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\|_{V'} \in L^2(]0, T[)$ et $T_1 = \|\mathbf{u}\|_V \in L^2(]0, T[)$.

Pour le terme du membre de droite de (1.16), nous allons utiliser le théorème de convergence dominée pour intervertir la limite sur n et l'intégrale sur $]0, T[$. À cette fin, posons, pour $n \in \mathbb{N}$, et presque tout $t \in]0, T[$, $\psi_n(t) := \varphi(t) \langle \frac{d\mathbf{u}_n}{dt}, \mathbf{u}_n \rangle_{V', V}$ et $\psi(t) := \varphi(t) \langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \rangle_{V', V}$. Grâce aux convergences presque partout de $(\mathbf{u}_n)_n$ et de sa dérivée en temps (1.8c)-(1.8d), on a, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| \leq \|\varphi\|_{L^\infty(]0, T[)} \left(\left\| \frac{d(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})}{dt} \right\|_{V'} \|\mathbf{u}_n\|_V + \left\| \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right\|_{V'} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_n\|_V \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

En effet, d'une part, pour presque tout $t \in]0, T[$, $(\|\mathbf{u}_n - \mathbf{u}\|_V)_n$ tend vers 0 et $(\|\mathbf{u}_n\|_V)_n$ tend vers $\|\mathbf{u}\|_V$, et de plus, $\|\mathbf{u}\|_V$ est borné, pour presque tout $t \in]0, T[$ car $\mathbf{u} \in L^2(]0, T[, V)$, et d'autre part, pour presque tout $t \in]0, T[$, $(\|\frac{d(\mathbf{u}_n - \mathbf{u})}{dt}\|_{V'})_n$ tend vers 0 et $\|\frac{d\mathbf{u}}{dt}\|_{V'}$ est fini car $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(]0, T[, V')$.

Nous allons en outre montrer que $(\psi_n)_n$ est dominée par une fonction intégrable. La suite $(\mathbf{u}_n)_n$ introduite ci-dessus est donnée explicitement par la formule (1.7), qui donne, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{u}_n = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 \mathbf{u}) + \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_2 \mathbf{u}) \right).$$

Alors, avec les propriétés vues ci-dessus, voir (1.10), on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$,

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\frac{d(\theta_1 \mathbf{u})}{dt} \right) + \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\frac{d(\theta_2 \mathbf{u})}{dt} \right) \right) + \delta_{-\frac{2}{\sigma(n)}} \mathbf{v}(0) + \delta_{T+\frac{2}{\sigma(n)}} \mathbf{v}(T).$$

Ainsi, dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$, et donc, presque partout sur $]0, T[$, on a

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\frac{d(\theta_1 \mathbf{u})}{dt} \right) + \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\frac{d(\theta_2 \mathbf{u})}{dt} \right) \right).$$

Puisque $\theta_1 \mathbf{u}$ et $\theta_2 \mathbf{u}$ sont le produit d'une fonction $\mathcal{C}^\infty([0, T])$ et d'une distribution, la dérivation donne presque partout sur $]0, T[$,

$$\frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \left(\tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\theta'_1 \mathbf{u} + \theta_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \tau_{-\frac{2}{\sigma(n)}} \left(\theta'_2 \mathbf{u} + \theta_2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \right).$$

Ainsi, en explicitant les produits de convolution, on a, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt}, \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V', V} \\ &= \left\langle \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t - \tau) \left(\left(\theta'_1 \mathbf{u} + \theta_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)} \right) + \left(\theta'_2 \mathbf{u} + \theta_2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \left(\tau - \frac{2}{\sigma(n)} \right) \right) d\tau, \right. \\ & \quad \left. \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t - s) \left((\theta_1 \mathbf{u})(s + \frac{2}{\sigma(n)}) + (\theta_2 \mathbf{u})(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right) ds \right\rangle_{V', V}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, par la formule [15, Page 93], grâce à la réflexivité de V et puisque les intégrales sont en réalité finies, car le support des $\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}$ est compact, on peut intervertir les crochets de dualité et les intégrales. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt}, \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V', V} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t - \tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t - s) \\ & \quad \left\langle \left(\theta'_1 \mathbf{u} + \theta_1 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)} \right) + \left(\theta'_2 \mathbf{u} + \theta_2 \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) \left(\tau - \frac{2}{\sigma(n)} \right), (\theta_1 \mathbf{u})(s + \frac{2}{\sigma(n)}) + (\theta_2 \mathbf{u})(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds, \end{aligned}$$

et donc, en développant les termes du crochet de dualité,

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt}, \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V', V} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta'_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \mathbf{u}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta'_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_2(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \mathbf{u}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta'_2(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \mathbf{u}(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta'_2(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_2(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \mathbf{u}(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_2(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_2(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_2(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_2(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau - \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s - \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Cette expression comporte deux groupes de quatre termes similaires, pour lesquels nous n'allons étudier qu'un terme, les autres se traitant de manière similaire. Pour le premier terme du membre de droite de (1.17), on a, en regroupant les termes de la variable τ et ceux de la variable s ,

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta'_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \left\langle \mathbf{u}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}), \mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \right\rangle_{V', V} d\tau ds \right| \\
&\leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) |\theta'_1(\tau + \frac{2}{\sigma(n)})| \|\mathbf{u}(\tau + \frac{2}{\sigma(n)})\|_H d\tau \right) \\
&\quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1(s + \frac{2}{\sigma(n)}) \|\mathbf{u}(s + \frac{2}{\sigma(n)})\|_H ds \right) \\
&\leq \left(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} (\|\theta'_1 \mathbf{u}\|_H)(t) \right) \left(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} (\|\theta_1 \mathbf{u}\|_H)(t) \right)
\end{aligned}$$

Or $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} (\|\theta'_1 \mathbf{u}\|_H))_n$ tend vers $\|\theta'_1 \mathbf{u}\|_H$ dans $L^2([0, T])$. En effet, il est possible de faire un calcul similaire à (1.9), en remarquant bien que $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}})_n$ est aussi une suite régularisante, et que $\|\theta'_1 \mathbf{u}\|_H \in L^2([0, T])$. On déduit du Théorème 1.2 que $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}} (\|\theta'_1 \mathbf{u}\|_H))_n$ (à une extraction de sous-suite près, et donc quitte à changer l'extractrice σ dès le début de cette preuve) est dominée par une fonction de $L^2([0, T])$.

On fait de même pour le second terme, borné lui aussi dans $L^2([0, T])$, en on déduit que le produit est borné dans $L^1([0, T])$.

On borne de même les trois termes suivants de (1.17). Il nous reste à dominer les quatre termes restants. Nous ne traiterons que le premier, les autres se traitant de manière équivalente. En utilisant

la majoration (1.13), on déduit que ce terme se majore de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right) \theta_1\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right), \mathbf{u}\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) \right\rangle_{V',V} d\tau ds \right| \\
 & \leq C \sum_{j=1}^J \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right) \theta_1\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) |R_j|\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right) |T_j|\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) d\tau ds \\
 & \leq C \sum_{j=1}^J \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-\tau) \theta_1\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right) |R_j|\left(\tau + \frac{2}{\sigma(n)}\right) d\tau \right) \\
 & \quad \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_{\frac{1}{\sigma(n)}}(t-s) \theta_1\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) |T_j|\left(s + \frac{2}{\sigma(n)}\right) ds \right) \\
 & \leq C \sum_{j=1}^J \left(\left(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 |R_j|) \right)(t) \right) \left(\left(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 |T_j|) \right)(t) \right).
 \end{aligned}$$

Or $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 |R_j|))_n$ tend vers $\theta_1 |R_j|$ dans $L^{p_j}([0, T])$. En effet, comme précédemment, on peut reprendre le calcul (1.9), en exploitant que $\theta_1 |R_j| \in L^{p_j}([0, T])$. On déduit du Théorème 1.2 que $(\eta_{\frac{1}{\sigma(n)}} * \tau_{\frac{2}{\sigma(n)}}(\theta_1 |R_j|))_n$ (à une extraction de sous-suite près, et donc, à nouveau, quitte à changer l'extractrice σ dès le début de cette preuve) est dominée par une fonction de $L^{p_j}([0, T])$.

On fait de même pour le terme $\theta_1 |T_j| \in L^{p'_j}([0, T])$ pour obtenir finalement que le terme étudié est borné par une somme de produits d'une fonction $L^{p_j}([0, T])$ et d'une fonction $L^{p'_j}([0, T])$.

Finalement, il existe une fonction positive et intégrable F telle que :

$$|\psi_n(t)| \leq |\varphi(t)| \left| \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt}, \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V',V} \right| \leq \|\varphi(t)\|_{L^\infty([0, T])} F(t),$$

et donc $(\psi_n)_n$ est dominée par une fonction intégrable. Puisque l'on a déjà montré que cette suite est simplement convergente vers ψ sur $]0, T[$, on déduit du théorème de convergence dominée que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}([0, T])$,

$$\int_0^T \varphi(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}_n(t)}{dt}, \mathbf{u}_n(t) \right\rangle_{V',V} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^T \varphi(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \mathbf{u}(t) \right\rangle_{V',V} dt.$$

On peut désormais passer à la limite dans l'égalité (1.16), pour obtenir :

$$-\int_0^T \varphi'(t) \|\mathbf{u}(t)\|_H^2 dt = 2 \int_0^T \varphi(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}(t)}{dt}, \mathbf{u}(t) \right\rangle_{V',V} dt. \quad (1.18)$$

Par ailleurs, par l'hypothèse (1.13) du théorème, on déduit que $t \mapsto \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{V',V} \in L^1([0, T])$. Finalement, (1.18) implique que $\frac{d\|\mathbf{u}\|_H^2}{dt} = 2 \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{V',V}$ dans $L^1([0, T])$ au sens de la Définition 1.3. Par ailleurs, puisque l'on a aussi que $\|\mathbf{u}\|_H^2 \in L^1([0, T])$, on déduit que $\|\mathbf{u}\|_H^2 \in W^{1,1}([0, T])$, et donc, d'après le Théorème 1.5, $\|\mathbf{u}\|_H^2$ est une fonction continue du temps sur $[0, T]$. On obtient l'égalité (1.14) en intégrant sur $[0, t]$ la relation $\frac{d\|\mathbf{u}\|_H^2}{dt} = 2 \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{V',V}$ avec l'égalité donnée par Théorème 1.5.

On peut par ailleurs appliquer le Lemme 1.4 pour déduire que $\mathbf{u} \in C^0([0, T], H)$. Cela permet finalement d'obtenir (1.15). \square

1.4 Convergence d'une suite de somme bornée

Lemme 1.25. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives sur $]0, T[$, et, pour $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in]0, T[$, $S_n(t) := \sum_{k=0}^n u_k(t)$. S'il existe $C \geq 0$ tel que pour $n \in \mathbb{N}$ et presque tout $t \in]0, T[$,

$$S_n(t) \leq C,$$

alors, la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $L^p(]0, T[)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Preuve. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Puisque les u_k sont positifs, on a, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$(S_n(t))^p = \left(\sum_{k=0}^n u_k(t) \right)^p \geq \sum_{k=0}^n (u_k(t))^p.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^n \int_0^T (u_k(t))^p dt \leq \int_0^T C^p dt,$$

et donc

$$\sum_{k=0}^n \|u_k\|_{L^p(]0, T[)}^p \leq TC^p.$$

La borne obtenue est finie et indépendante de n , ainsi, la série des $(\|u_k\|_{L^p(]0, T[)}^p)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, et donc le terme général de cette série tend vers 0. Finalement,

$$\|u_k\|_{L^p(]0, T[)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Pour les $p \in [1, +\infty[$ non entiers, on utilise la convergence vers 0 dans $L^{\lfloor p \rfloor + 1}(]0, T[)$, et le fait que le domaine soit borné. \square

Chapitre 2

Algorithme OSWR pour le problème d'Oseen

Sommaire

2.1	Problème d'Oseen et formulation multidomaines	16
2.1.1	Formulation forte	16
2.1.2	Formulation faible	18
2.2	Algorithme OSWR pour Oseen	27
2.3	Convergence par estimation d'énergie	28
2.4	Recalibrage de la pression	36
2.5	Facteur de convergence par transformée de Fourier	42
2.5.1	Définition des paramètres optimisés	42
2.5.2	Fréquences discrètes en temps	42
2.6	Résultats numériques	43
2.6.1	Optimisation des paramètres de Robin en <i>one-sided</i>	44
2.6.2	Optimisation des paramètres de Robin en <i>two-sided</i>	48
2.6.3	Évolution de la convergence selon le nombre de sous-domaines	50
2.6.4	Cas test plus réaliste	52

La simulation de l'écoulement des fluides constitue un enjeu majeur en physique et en industrie. Toutefois, la résolution numérique des équations de Navier-Stokes peut s'avérer très coûteuse en temps de calcul. Pour y remédier, les méthodes de décomposition de domaine proposent un algorithme reposant sur la résolution de problèmes locaux sur des sous-domaines issus d'une partition du domaine initial, et donc de résolution beaucoup plus rapide. Partant d'une donnée aux interfaces entre les sous-domaines (*a priori* quelconque), une première résolution est effectuée dans les sous-domaines, puis les données aux interfaces sont mises à jour à partir des solutions obtenues. L'algorithme est alors itératif, alternant entre des phases de résolution et de calcul des nouvelles valeurs pour les conditions aux limites.

Nous souhaitons mettre en place un algorithme de décomposition de domaine pour Navier-Stokes. L'utilisation d'une telle approche a été étudiée dans [25, 12, 28], où une méthode de décomposition de domaine stationnaire est utilisée, pas de temps par pas de temps.

Ici, nous proposons et analysons un algorithme de décomposition de domaine espace-temps pour le problème instationnaire, où les conditions aux interfaces entre les sous-domaines sont de type Robin, algorithme connu sous le nom d'Optimized Schwarz Waveform Relaxation (désigné par OSWR), voir [49, 52, 95, 44, 50, 21, 108, 2, 104, 26]. Un des avantages de cet algorithme est qu'il accélère la convergence (moins d'itérations sont nécessaires pour atteindre une précision donnée), notamment grâce à l'utilisation d'un paramètre (à choisir) intervenant dans la condition de Robin.

La principale difficulté théorique du problème de Navier-Stokes réside dans sa non-linéarité. Nous nous intéressons donc, dans un premier temps, à une version linéarisée du problème de Navier-Stokes, en étudiant le modèle d'Oseen. Ce travail s'inscrit dans la continuité des études menées sur l'algorithme OSWR pour le problème de Stokes [17, 19]. Il permettra d'établir le formalisme et les concepts nécessaires pour étendre l'algorithme au problème de Navier-Stokes dans le Chapitre 5.

Nous débutons, dans la Section 2.1, par l'écriture d'un problème couplé équivalent au problème monodomaine, d'abord en formulation forte puis en formulation faible. L'algorithme OSWR est introduit dans la Section 2.2. Nous prouvons ensuite la convergence de l'algorithme pour le champ de vitesse dans la Section 2.3, puis celle de la pression (après correction) dans la Section 2.4. Enfin, des paramètres de Robin optimisés sont définis dans la Section 2.5, et la convergence est étudiée numériquement dans la Section 2.6.

2.1 Problème d'Oseen et formulation multidomaines

Dans cette section, nous introduisons le problème d'Oseen monodomaine et sa réécriture multidomaines, sur une partition du domaine d'étude, en formulation forte puis faible.

2.1.1 Formulation forte

Soit un domaine borné non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ connexe et lipschitzien, et sur un intervalle de temps $]0, T[$, avec $T > 0$, le problème d'Oseen instationnaire consiste à déterminer le couple vitesse-pression (\mathbf{u}, p) solution de

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (2.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (2.1b)$$

$$\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2.1c)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (2.1d)$$

où $\nu > 0$ désigne un coefficient de diffusion constant, \mathbf{b} un champ de convection à divergence nulle, \mathbf{f} un terme source, et \mathbf{u}_0 , une condition initiale à divergence nulle.

Ce problème n'ayant pas une unique solution de pression (celle-ci étant clairement définie au moins à une constante près), on doit, pour espérer l'unicité, au moins imposer une condition pour fixer cette constante. Nous choisissons

$$\int_{\Omega} p = 0.$$

Afin d'introduire la méthode de décomposition de domaine, on réécrit le problème monodomaine (2.1) sur $(\Omega_1, \dots, \Omega_M)$, une partition de Ω composée de sous-domaines connexes et lipschitziens. Pour chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on définit \mathcal{I}_i comme étant l'ensemble des indices de ses voisins. Pour deux domaines adjacents d'indice i, j , on définit la frontière $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji} = \overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j$. On définit en outre Γ_i comme la réunion des frontières Γ_{ij} autour du domaine Ω_i . Enfin, on note \mathbf{n}_{ij} la normale unitaire de Γ_{ij} , allant de Ω_i vers Ω_j , et ainsi $\mathbf{n}_{ji} = -\mathbf{n}_{ij}$. On note aussi \mathbf{n}_i la normale à Ω_i sur Γ_i , qui est telle que $\mathbf{n}_i|_{\Gamma_{ij}} = \mathbf{n}_{ij}$.

Cela nous amène à la formulation multidomaines du problème d'Oseen, posée sur chaque sous-domaine Ω_i , $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$:

$$\partial_t \mathbf{u}_i - \nu \Delta \mathbf{u}_i + (\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + \nabla p_i = \mathbf{f}_i \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (2.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{u}_i(t = 0) = \mathbf{u}_{0i} \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (2.2c)$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times]0, T[, \quad (2.2d)$$

avec les conditions de transmission physiques sur les frontières intérieures $\Gamma_{ij} \times]0, T[$, pour $j \in \mathcal{I}_i$,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \quad (2.3a)$$

$$\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_i - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) = \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_j - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}), \quad (2.3b)$$

$$\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}) = \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}), \quad (2.3c)$$

avec, pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$,

- $\mathbf{b}_i := \mathbf{b}|_{\Omega_i}$,
- $\mathbf{f}_i := \mathbf{f}|_{\Omega_i}$,
- $\mathbf{u}_{0i} := \mathbf{u}_0|_{\Omega_i}$.

Remarque 2.1. Notons que si $\mathbf{b} \in L^2([0, T[, (H^1(\Omega))^2)$ (qui sera l'hypothèse faite ultérieurement), alors, sur chaque arête Γ_{ij} , $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}_j$ au sens de la trace.

Proposition 2.2. Les relations de transmission (2.3a), (2.3b) et (2.3c) se réécrivent sous forme équivalente avec des opérateurs de Robin, de telle sorte que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $(\alpha_{ij}, \alpha_{ji}, \beta_{ij}, \beta_{ji}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, on ait sur $\Gamma_{ij} \times]0, T[$

$$\alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_i - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = g_{ij}, \quad (2.4a)$$

$$\beta_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \xi_{ij}, \quad (2.4b)$$

avec

$$g_{ij} := \alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_j - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}, \quad (2.5a)$$

$$\xi_{ij} := \beta_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}. \quad (2.5b)$$

Preuve. Posons

- $\omega_{ij} := \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_i - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})$,
- $\lambda_{ij} := \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij})$.

Nous souhaitons alors montrer que la proposition : $\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \quad \omega_{ij} = \omega_{ji}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, \quad (2.6)$$

équivalent à la proposition : pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$,

$$\alpha_{ij} \omega_{ij} + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \alpha_{ij} \omega_{ji} + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}, \quad (2.7a)$$

$$\beta_{ij} \lambda_{ij} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \beta_{ij} \lambda_{ji} + \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}. \quad (2.7b)$$

En prenant la première égalité de (2.6) contre $\cdot \mathbf{n}_{ij}$ et $\times \mathbf{n}_{ij}$ et en faisant une combinaison linéaire des égalités obtenues avec (2.3b) et (2.3c), on obtient directement (2.7).

Réciproquement, soit $(\alpha_{ij}, \beta_{ij}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$. Si $j \in \mathcal{I}_i$, alors $i \in \mathcal{I}_j$ et les égalités (2.7) restent vraies en permutant i et j . On a alors

$$\alpha_{ij} \omega_{ij} + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \alpha_{ij} \omega_{ji} + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij},$$

$$\alpha_{ji} \omega_{ji} + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} = \alpha_{ji} \omega_{ij} + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ji}.$$

Soustrayons les deux égalités :

$$\alpha_{ij} \omega_{ij} + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - \alpha_{ji} \omega_{ji} - \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} = \alpha_{ij} \omega_{ji} + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - \alpha_{ji} \omega_{ij} - \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ji},$$

et puisque $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$, les termes de la forme $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}$ s'annulent, et donc

$$(\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \omega_{ij} = (\alpha_{ij} + \alpha_{ji}) \omega_{ji},$$

et donc puisque les coefficients de Robin sont strictement positifs, $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. On trouve de la même façon $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}$. Si l'on reprend les équations (2.7), on obtient désormais

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij},$$

$$\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij},$$

et donc $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$. □

On peut alors énoncer une relation sur les données Robin à l'interface entre les sous-domaines.

Proposition 2.3. *Lorsque les quantités de Robin définies par (2.5) vérifient (2.4) aux interfaces Γ_{ij} , $\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, on a les relations suivantes :*

$$g_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}, \quad (2.8a)$$

$$\xi_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ji}. \quad (2.8b)$$

De plus, en définissant λ_i par

$$\lambda_i|_{\Gamma_{ij}} = \frac{g_{ij}}{\alpha_{ij}} \mathbf{n}_{ij} + \frac{\xi_{ij}}{\beta_{ij}} \boldsymbol{\tau}_{ij}$$

avec $\boldsymbol{\tau}_{ij} = ((\mathbf{n}_{ij})_y, -(\mathbf{n}_{ij})_x)^T$, on a la relation équivalente

$$(\lambda_i + \lambda_j)|_{\Gamma_{ij}} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{n}_{ij} + \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} (\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}) \boldsymbol{\tau}_{ij}. \quad (2.9)$$

Preuve. Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$. Prenant en compte les définitions (2.5), que $\mathbf{n}_{ij} = -\mathbf{n}_{ji}$, puis la relation (2.4) réécrite en permutant i et j , on a

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_j - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} \\ &= \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} \left(\alpha_{ji} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} - p_j - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}) (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}) \right) + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} \right) - \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} - \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji} \\ &= \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}, \end{aligned}$$

ce qui donne (2.8a). On démontre de même (2.8b). De plus, (2.9) découle de (2.8), et réciproquement, en projetant (2.9) sur \mathbf{n}_{ij} et $\boldsymbol{\tau}_{ij}$. \square

2.1.2 Formulation faible

Nous allons dans la suite travailler sur la formulation faible du problème d'Oseen. Sous réserve de régularité suffisante, les formulations faible et forte sont équivalentes. Avant cela, introduisons les espaces fonctionnels adaptés à notre problème.

2.1.2.1 Espaces fonctionnels et notations

Introduisons les espaces fonctionnels :

$$\begin{aligned} V &:= \left\{ \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}, \\ H &:= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}, \\ X &:= \left\{ \mathbf{u} \in (H_0^1(\Omega))^2 \right\}, \\ L_0^2(\Omega) &:= \left\{ p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p = 0 \right\}, \end{aligned}$$

ainsi que les espaces suivants, définis sur Ω_i :

$$\begin{aligned} V_i &:= \left\{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega_i))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \right\}, \\ H_i &:= \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega_i))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \right\}, \\ X_i &:= \left\{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega_i))^2, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_i \cap \partial\Omega \right\}. \end{aligned}$$

Notons que pour ces espaces V et H , ainsi que V_i et H_i , nous sommes dans le cadre du Lemme 1.21 et de la Remarque 1.3.

On munit V et X de la norme $H^1(\Omega)$, ainsi que H et $L_0^2(\Omega)$ de la norme $L^2(\Omega)$. On procède de même avec les espaces sur Ω_i . Par ailleurs, les espaces duaux sont munis de la norme duale.

Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, on introduit aussi la notation $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega \nabla \mathbf{u} : \nabla \mathbf{v}$. Précisons en outre que pour un champ fonctionnel \mathbf{b} , $((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega = \int_\Omega (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est bien défini dès que $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ est intégrable sur Ω , même si l'on n'a pas $(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)$.

Pour un espace E , on note

$$S([0, T[, E)$$

l'ensemble des fonctions constantes en temps sur $]0, T[$, à valeur dans E . Cet espace sera utilisé pour les fonctions tests des formulations variationnelles que l'on rencontrera, de manière à bien distinguer lorsque les fonctions tests peuvent ou ne peuvent pas dépendre du temps.

Pour une portion de frontière $\omega \subset \partial \mathcal{O}$ d'un domaine \mathcal{O} , on définit aussi l'espace :

$$H_{00}^{1/2}(\omega)$$

des fonctions h de $H^{1/2}(\omega)$ telles qu'il existe un relèvement dans $(H^1(\mathcal{O}))^2$ dont la trace vaut h sur ω , et $\mathbf{0}$ sur $\partial \mathcal{O} \setminus \omega$. On note $H_{00}^{-1/2}(\omega)$ le dual de $H_{00}^{1/2}(\omega)$ et $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\omega)$ le dual de $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega) := (H_{00}^{1/2}(\omega))^2$. On note aussi $\mathbf{H}^{-1/2}(\omega)$ le dual de $\mathbf{H}^{1/2}(\omega) := (H^{1/2}(\omega))^2$. Notons que l'on peut identifier $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega)$ (resp. $\mathbf{H}^{1/2}(\omega)$) avec $(H_{00}^{1/2}(\omega))^2$ (resp. $(H^{1/2}(\omega))^2$). Il est à noter que l'espace $H_{00}^{1/2}(\omega)$ est en réalité indépendant du domaine de relèvement \mathcal{O} . En effet, cet espace est aussi l'espace interpolé entre $H_0^1(\omega)$ et $L^2(\omega)$ d'indice $1/2$.

Notons par ailleurs que la définition de l'espace $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega)$ reste valide si $\omega = \partial \mathcal{O}$, et l'on remarque dans ce cas que $\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega) = \mathbf{H}^{1/2}(\omega)$. On a donc aussi dans ce cas, $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\omega) = \mathbf{H}^{-1/2}(\omega)$.

On introduit alors la notation du double crochet pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\omega)$, pour tout $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega)$,

$$\langle\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle\rangle_\omega := \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\omega), \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega)}.$$

Notons, que si $\omega = \partial \mathcal{O}$, alors $\langle\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle\rangle_\omega = \langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle_{\mathbf{H}^{-1/2}(\omega), \mathbf{H}^{1/2}(\omega)}$.

On rappelle un théorème de relèvement pour les fonctions de $H^{1/2}(\omega)$.

Théorème 2.4 (Relèvement de $H^{1/2}(\partial \Omega)$ [30, Théorème 1.3.3]).

Soit Ω un domaine lipschitzien. Il existe un opérateur de relèvement linéaire et continu de $H^{1/2}(\partial \Omega)$ dans $H^1(\Omega)$.

On dit que

$$\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\omega, \mathcal{D}'([0, T[))$$

si, pour tout compact \mathcal{T} de $]0, T[$, il existe un entier $N_{\mathcal{T}} \in \mathbb{N}$ et une constante $C_{\mathcal{T}}$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{T}}([0, T[)$ et $\mathbf{h} \in S([0, T[, \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega))$,

$$\langle\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{h} \rangle\rangle_\omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'([0, T[), \mathcal{D}([0, T[)} \leq C_{\mathcal{T}} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\omega)} \max_{\alpha \in \mathbb{N}, |\alpha| \leq N_{\mathcal{T}}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty([0, T[)},$$

où $\mathcal{D}_{\mathcal{T}}([0, T[)$ désigne l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}([0, T[)$ à support dans \mathcal{T} .

Pour tout espace de Banach E , on définit l'espace

$$\mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, E)$$

tel qu'un élément p appartient à cet espace s'il existe un $P \in L^\infty([0, T[, E)$ tel que $p = \partial_t P$.

Pour un tel p , on introduit la notation suivante, pour tout $q \in S([0, T[, L^2(\Omega))$,

$$((p, q))_\Omega = \frac{d}{dt}(P, q)_\Omega. \quad (2.10)$$

Notons bien que la définition précédente est à prendre au sens des distributions en temps. Si par ailleurs, p est suffisamment régulière en temps, alors $((p, v))_\Omega = (p, v)_\Omega$, ce qui explique le choix de cette notation. Enfin, $((\cdot, \cdot))_\Omega$ étant la dérivée (au sens des distributions) d'une intégrale, c'est une forme bilinéaire qui vérifie une relation de Chasles sur le domaine Ω .

2.1.2.2 Formulation faible et multidomaine équivalente

Supposons le champ d'advection $\mathbf{b} \in L^2([0, T[, V)$ et la condition initiale $\mathbf{u}_0 \in H$.

Le problème (2.1) s'écrit sous forme variationnelle : trouver un champ de vitesse $\mathbf{u} \in L^2([0, T[, X)$ et de pression $p \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L_0^2(\Omega))$ tel que :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - ((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X), \quad (2.11a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_\Omega = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega), \quad (2.11b)$$

$$\left(\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V), \quad (2.11c)$$

où l'équation (2.11a) est à prendre au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[)$, avec A l'application définie sur $X \times X$ par

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega.$$

Remarque 2.5¹. Précisons que la condition initiale (2.11c) a bien un sens. Cela provient du fait que la fonction \mathbf{u} est solution de (2.11a), et cherchée dans $L^2([0, T[, X)$. Soit $\mathbf{w} \in V$. Introduisons la fonction $F_{\mathbf{w}} : t \mapsto (\mathbf{u}(t), \mathbf{w})_\Omega = \langle \mathbf{u}(t), \mathbf{w} \rangle_{V', V}$. Alors, en prenant $\mathbf{w} = \mathbf{v}$ avec $\mathbf{v} \in S([0, T[, V)$ (de manière à annuler le terme de pression) et en isolant le terme $\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega$ dans (2.11a), on obtient que cette égalité est de la forme $\frac{dF_{\mathbf{v}}}{dt} = H_{\mathbf{v}}$ dans $\mathcal{D}'([0, T[)$ où $H_{\mathbf{v}} \in L^1([0, T[)$ en raison des régularités cherchées pour \mathbf{u} et supposées pour \mathbf{b} . On en déduit que $F_{\mathbf{v}} \in W^{1,1}([0, T[)$ et donc, d'après le Théorème 1.5, que cette fonction admet un représentant continu sur $[0, T]$, ce qui donne un sens à $(\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v})(0)$.

Nous pouvons alors rappeler un résultat d'existence et d'unicité au problème d'Oseen.

Théorème 2.6 (Solution monodomaine). Soit $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$. Supposons aussi $\mathbf{b} \in L^\infty([0, T[, (L^2(\Omega))^2) \cap L^2([0, T[, (H^1(\Omega))^2)$. Alors le problème monodomaine (2.11) admet une unique solution, qui est telle que $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T[, H) \cap L^2([0, T[, V)$ avec $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2([0, T[, V')$, et $p \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L_0^2(\Omega))$.

Preuve. La preuve se fait de manière similaire à celle, classique, pour le problème de Navier-Stokes présentée dans [15, V.1.4] et développée dans le Théorème 4.1 avec des conditions limites de Robin, i.e. par une méthode de Galerkin, en remarquant que l'on considère un champ d'advection avec la même régularité que la vitesse solution \mathbf{u} solution du problème de Navier-Stokes. Cette preuve étant assez lourde, et détaillée dans la suite pour le problème de Navier-Stokes, nous ne présentons ici pour le problème d'Oseen que la trame de la preuve simplifiée dans le cas où l'advection \mathbf{b} est dans $L^\infty([0, T[, (L^\infty(\Omega))^2)$.

Pour cela, on reprend la preuve de [19, Théorème 3.11] pour le problème de Stokes que l'on étend au problème d'Oseen. Il suffit de vérifier que la forme bilinéaire A est continue et coercive sur V . La coercivité provient du fait que, pour tout $\mathbf{u} \in V$, $A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 \geq C \|\mathbf{u}\|_V^2$ grâce à l'inégalité de Poincaré. Par ailleurs, pour tout $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$,

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega \\ &\leq \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega \|\nabla \mathbf{v}\|_\Omega + \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^\infty([0, T[, (L^\infty(\Omega))^2)} \left(\|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega \|\mathbf{v}\|_\Omega + \|\mathbf{u}\|_\Omega \|\nabla \mathbf{v}\|_\Omega \right) \\ &\leq \left(\nu + \frac{1}{2} \|\mathbf{b}\|_{L^\infty([0, T[, (L^\infty(\Omega))^2)} \right) (\|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega + \|\mathbf{u}\|_\Omega) \|\mathbf{v}\|_V, \end{aligned}$$

ce qui implique la continuité de la forme bilinéaire A . On suit ensuite la preuve de [19, Théorème 3.11] pour démontrer l'existence de la vitesse $\mathbf{u} \in L^2([0, T[, V) \cap \mathcal{C}^0([0, T[, H)$ avec $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2([0, T[, V')$ et d'une fonction $p \in L^\infty([0, T[, L_0^2(\Omega))$ tel que, pour presque tout $t \in]0, T[$ et $\mathbf{v} \in S([0, T[, V)$,

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_\Omega - (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_\Omega + \int_0^t A(\mathbf{u}(\tau), \mathbf{v}) d\tau - \int_\Omega P(t) \nabla \cdot \mathbf{v} = \int_0^t (\mathbf{f}(\tau), \mathbf{v})_\Omega d\tau.$$

En prenant la dérivée temporelle au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[)$ de cette égalité et en utilisant la notation $((\cdot, \cdot))$ donnée par (2.10), on aboutit à l'équation (2.11a) en définissant $p = \partial_t P$. On obtient donc l'existence de la solution (\mathbf{u}, p) au problème d'Oseen, et l'unicité est aussi démontrée de la même façon que dans [19, Théorème 3.11]. \square

¹Voir [15, Chapitre V, Section 1.2.1].

C'est le problème (2.11) que nous souhaitons résoudre avec la décomposition de domaine. Nous allons donc introduire la version faible de la formulation multidomaines du problème d'Oseen, donnée par (2.2) (voir, par exemple [76, 77] pour ce type de décomposition et l'utilisation des espaces $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$ pour les termes de Robin).

Pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on définit l'application $A_i(\cdot, \cdot)$ sur $X_i \times X_i$ par

$$\begin{aligned} A_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := & \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} + \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\Omega_i} \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right), \end{aligned} \quad (2.12)$$

et d_i l'application affine par rapport à $\boldsymbol{\lambda}_i$, et linéaire par rapport à \mathbf{v} , définie² sur $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i) \times X_i$ par

$$d_i(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v}) := (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} \quad (2.13)$$

On peut alors définir le problème couplé : trouver la famille $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i \in M_i := L^\infty(]0, T[, H_i) \cap L^2(]0, T[, V_i)$, $p_i \in \mathcal{W}^{-1, \infty}(]0, T[, L^2(\Omega_i))$ et les quantités de Robin aux frontières $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'(]0, T[))$ ³, et tels que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - (p_i, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_i} = d_i(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S(]0, T[, X_i), \quad (2.14a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_i, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (2.14b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S(]0, T[, V_i), \quad (2.14c)$$

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle p_i, 1 \rangle_{\Omega_i} = 0, \quad (2.14d)$$

avec les relations sur les interfaces, pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right), \quad (2.15a)$$

et, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$ et \mathbf{v} dans X , nul sur $\Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)$ ⁴,

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} + \langle \boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_j} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} (\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}}. \quad (2.15b)$$

Rappelons que les équations (2.14a), (2.14d) et (2.15) sont écrites dans $\mathcal{D}'(]0, T[)$, et (2.14b) est dans $L^2(]0, T[)$.

Nous souhaitons maintenant nous assurer que le problème couplé admet bien une unique solution constituée des restrictions de la solution monodomaine (2.11) aux sous-domaines Ω_i . C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.7. *Soit $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$ et $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (2.11) donnée par le Théorème 2.6. Le problème couplé (2.14)-(2.15) admet une unique solution $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$, qui est telle que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$ et $p_i = p|_{\Omega_i}$.*

On sépare la preuve en deux parties, l'une pour l'existence, l'autre pour l'unicité.

Preuve de l'existence. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème monodomaine (2.11), dont on a l'existence et l'unicité grâce au Théorème 2.6, dans les espaces fonctionnels mentionnés. On va désormais construire des solutions de (2.14)-(2.15) à partir de \mathbf{u} et p . Pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, posons $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$, $p_i = p|_{\Omega_i}$.

²En rappelant que l'espace $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i)$ désigne le même espace que $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_i)$ si Γ_i n'a pas d'intersection avec $\partial\Omega$.

³Si Ω_i est un domaine intérieur, alors $\boldsymbol{\lambda}_i$ appartient aussi à $\mathbf{H}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'(]0, T[))$.

⁴Les relations (2.15b) permettent de retrouver la continuité des vitesses sur les interfaces, et sont l'équivalent faible de la relation (2.9) du problème fort, qui sont de la forme utilisée pour l'algorithme OSWR. Néanmoins, dans le seul but de définir un problème faible couplé équivalent au problème monodomaine, on pourrait simplement imposer à la place la relation $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ sur Γ_{ij} .

Précisons le sens de la restriction de p à Ω_i . En effet, puisque la pression $p \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L_0^2(\Omega))$ ⁵, il existe $P \in L^\infty([0, T[, L_0^2(\Omega))$ tel que $p = \partial_t P$. On définit alors $P_i = P|_{\Omega_i} \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))$, puis l'on pose $p_i = \partial_t P_i$.

Notons que, par définition de \mathbf{u}_i et p_i , on a bien $\mathbf{u}_i \in M_i$ et $p_i \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$.

Soit $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i) \subset \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_i)$. Alors, d'après le Théorème 2.4, il existe une constante $C > 0$ et une fonction $\mathbf{r} \in (H^1(\Omega_i))^2$, de trace nulle sur $\partial\Omega_i \setminus \Gamma_i$, tels que $\mathbf{r}|_{\Gamma_i} = \mathbf{h}$, et tels que

$$\|\mathbf{r}\|_{(H^1(\Omega_i))^2} \leq C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^{1/2}(\Gamma_i)}.$$

Définissons $\boldsymbol{\lambda}_i$ avec la formule suivante, prise au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T])$:

$$\langle\langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{h} \rangle\rangle_{\Gamma_i} = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}) - ((p_i, \nabla \cdot \mathbf{r}))_{\Omega_i} - (\mathbf{f}_i, \mathbf{r})_{\Omega_i}. \quad (2.16)$$

Les fonctions $\boldsymbol{\lambda}_i$ ainsi définies sont bien des éléments de $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'([0, T]))$. En effet, quel que soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{T})$, avec \mathcal{T} un compact de $]0, T[$,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r})_{\Omega_i}, \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} \right| &= \left| \langle (\mathbf{u}_i, \mathbf{r})_{\Omega_i}, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} \right| = \left| \int_0^T \int_{\Omega_i} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{r} \varphi') \right| \\ &\leq \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], H_i)} \|\mathbf{r}\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^2([0, T])}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, puisque $p_i = \partial_t P_i$ où $P_i \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))$, on a

$$\begin{aligned} \left| \langle ((p_i, \nabla \cdot \mathbf{r}))_{\Omega_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} \right| &= \left| \int_0^T (P_i, \nabla \cdot \mathbf{r})_{\Omega_i} \varphi' \right| \\ &\leq \|P_i\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^1([0, T])}. \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'inégalité de Hölder, l'inégalité (1.3), et l'injection de $H^1(\Omega_i)$ dans $L^4(\Omega_i)$, on a

$$\begin{aligned} &| \langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{h} \rangle\rangle_{\Gamma_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} | \\ &\leq \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], H_i)} \|\mathbf{r}\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^2([0, T])} \\ &\quad + \nu \|\nabla \mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega_i))} \|\nabla \mathbf{r}\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^2([0, T])} \\ &\quad + C \|\mathbf{b}_i\|_{L^2([0, T], V_i)} \|\nabla \mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega_i))} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^\infty([0, T])} \\ &\quad + \|P_i\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^1([0, T])} \\ &\quad + \|\mathbf{f}_i\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega_i))} \|\mathbf{r}\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^2([0, T])} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} \|\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{L^2([0, T], \Gamma_{ij})} \|\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\varphi\|_{L^2([0, T])} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} \|\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}\|_{L^2([0, T], \Gamma_{ij})} \|\mathbf{r} \times \mathbf{n}_{ij}\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\varphi\|_{L^2([0, T])}, \end{aligned}$$

et donc, grâce une inégalité de trace, on a

$$\begin{aligned} &| \langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{h} \rangle\rangle_{\Gamma_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} | \\ &\leq \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], H_i)} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^2([0, T])} \\ &\quad + C \|\mathbf{b}_i\|_{L^2([0, T], V_i)} \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], V_i)} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^\infty([0, T])} \\ &\quad + \|P_i\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))} \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi'\|_{L^1([0, T])} \\ &\quad + \left(\nu \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], V_i)} + \|\mathbf{f}_i\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega_i))} + C \|\mathbf{u}_i\|_{L^2([0, T], V_i)} \right) \|\mathbf{r}\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^2([0, T])}. \end{aligned}$$

Finalement, puisque φ est dans $\mathcal{D}(\mathcal{T})$, et grâce à la continuité du relèvement mentionné ci-dessus de \mathbf{h} vers \mathbf{r} , on obtient

$$| \langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{h} \rangle\rangle_{\Gamma_i}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} | \leq C \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)} (\|\varphi\|_{L^\infty(\mathcal{T})} + \|\varphi'\|_{L^\infty(\mathcal{T})}), \quad (2.17)$$

⁵Rappelons que nous avons défini cet espace dans 2.1.2.1, comme l'espace des dérivées en temps de fonctions $L^\infty([0, T[, L_0^2(\Omega))$.

où la constante C est finie en raison de la régularité de \mathbf{b}_i , \mathbf{f}_i , \mathbf{u}_i et P_i . Ainsi $\boldsymbol{\lambda}_i$ est un élément de $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'([0, T]))$.

Par ailleurs (2.16) définit bien $\boldsymbol{\lambda}_i$ de façon unique sur chaque Γ_i , c'est-à-dire que les membres de droite ne dépendent pas du relèvement choisi. En effet, prenons \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 deux relèvements de \mathbf{h} dans Ω_i tels que $\mathbf{r}_1|_{\Gamma_i} = \mathbf{r}_2|_{\Gamma_i} = \mathbf{h}$. On veut montrer que le terme de droite est le même dans (2.16) avec \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 . Faisons la différence des termes de droite, et introduisons $\mathbf{z} \in (H_0^1(\Omega))^2$ tel que $\mathbf{z}|_{\Omega_i} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, prolongé par $\mathbf{0}$ sur $\Omega \setminus \Omega_i$. Précisons que \mathbf{z} est bien dans $(H_0^1(\Omega))^2$, car $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \in X_i$ et est de trace nulle sur Γ_i . On obtient alors, par linéarité, que la différence des termes de droite vaut

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) - ((p_i, \nabla \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)))_{\Omega_i} - (\mathbf{f}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i}.$$

Or, on a

$$A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = A(\mathbf{u}, \mathbf{z}),$$

puisque $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot \mathbf{n}_i = 0$ et $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{n}_i = 0$ sur Γ_i . De plus, $((p_i, \nabla \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)))_{\Omega_i} = ((p, \nabla \cdot \mathbf{z}))_{\Omega}$, et $(\mathbf{f}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i} = (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\Omega}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i} - ((p_i, \nabla \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)))_{\Omega_i} - (\mathbf{f}_i, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)_{\Omega_i} \\ = \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\Omega} + A(\mathbf{u}, \mathbf{z})_{\Omega} - ((p, \nabla \cdot \mathbf{z}))_{\Omega} - (\mathbf{f}, \mathbf{z})_{\Omega}, \end{aligned}$$

et ce terme est nul car (\mathbf{u}, p) vérifie la formulation variationnelle monodomaine (2.11a) et $\mathbf{z} \in (H_0^1(\Omega))^2$ est une fonction test admissible qui est bien indépendante du temps, car \mathbf{h} et donc \mathbf{r}_1 et \mathbf{r}_2 le sont.

Maintenant que nous avons défini les $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$, nous devons nous assurer qu'ils vérifient le problème (2.14)-(2.15). Soit $\mathbf{v} \in S([0, T[, X_i)$. L'équation (2.14a) est vérifiée immédiatement, en prenant, dans (2.16), $\mathbf{h} = \mathbf{v}|_{\Gamma_i} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$, et \mathbf{v} pour le relèvement associé.

De plus, les fonctions (\mathbf{u}_i, p_i) étant choisies comme restriction à Ω_i de la solution du problème monodomaine (2.11), on a immédiatement (2.14b) en prenant des fonctions tests à support dans Ω_i .

Par ailleurs, puisque, d'après le Théorème 2.6, $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T], H)$, la condition initiale (2.11c) se réécrit donc, quel que soit \mathbf{v} dans $S([0, T[, V)$,

$$\int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} = \left(\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega} \mathbf{u}(0) \cdot \mathbf{v}.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0)) \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2, \text{ avec } \nabla \cdot \mathbf{v} = 0,$$

par définition de V . Alors, d'après le Théorème 1.13, il existe $\psi \in L^2(\Omega)$ tel que $\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0) = \nabla \psi$ (ce qui montre au passage que ψ est dans $H^1(\Omega)$). Par ailleurs on a $\nabla \cdot (\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0)) = 0$ dans Ω et $\nabla(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u}(0)) \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ (puisque $\mathbf{u}(0)$ et \mathbf{u}_0 sont dans H), et donc $\Delta \psi = 0$ dans Ω , et $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Par conséquent ψ est constante dans Ω , et donc $\mathbf{u}_0 = \mathbf{u}(0)$ presque partout dans Ω .

Ainsi, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i(0) = \mathbf{u}_{0i}$ dans $(L^2(\Omega_i))^2$. On peut alors prendre cette relation contre une fonction test dans $S([0, T[, H_i)$, et intégrer sur Ω_i pour arriver à (2.14c).

Enfin, (2.14d) s'obtient par le calcul suivant :

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} ((p_i, 1))_{\Omega_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \frac{d}{dt}(P_i, 1)_{\Omega_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} P_i = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} P = 0.$$

Nous devons désormais vérifier que la famille $(\boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ ainsi définie vérifie les relations (2.15). Montrons d'abord (2.15a). Soit $\mathbf{v} \in X$. Alors, pour toute frontière Γ_i , $\mathbf{v}|_{\Gamma_i} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$. On obtient alors, par (2.16) en prenant $\mathbf{h} = \mathbf{v}|_{\Gamma_i}$ et $\mathbf{r} = \mathbf{v}$ comme relèvement, que

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \left(\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - ((p_i, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} - (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} \right).$$

On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
 \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \lambda_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - ((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} \\
 &+ \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\
 &= \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right),
 \end{aligned}$$

car (\mathbf{u}, p) vérifie la formulation variationnelle monodomaine (2.11a), et car \mathbf{v} est une fonction test admissible. On obtient la relation (2.15a).

Les relations (2.15b) s'obtiennent de manière similaire. Prenons $j \in \mathcal{I}_i$ et une fonction test $\mathbf{v} \in X$, nulle sur $\Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)$. On considère alors (2.16) écrite pour l'indice i , avec $\mathbf{h} = \mathbf{v}|_{\Gamma_i}$, et $\mathbf{r} = \mathbf{v}$ et (2.16) écrite pour l'indice j avec $\mathbf{h} = \mathbf{v}|_{\Gamma_j}$ et $\mathbf{r} = \mathbf{v}$, puis on somme les deux équations obtenues. Puisque \mathbf{v} est nul en dehors de $\Omega_i \cup \Omega_j$, les termes sur Ω_i et Ω_j pris contre \mathbf{v} sont aussi des termes sur Ω , et donc

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} + \langle \lambda_j, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_j} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - ((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} \\
 &+ \frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\alpha_{ji}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ji}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ji})_{\Gamma_{ij}} \\
 &+ \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ji}} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ji}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ji})_{\Gamma_{ij}}.
 \end{aligned}$$

Puisque (\mathbf{u}, p) est solution du problème monodomaine (2.11a), et que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}$, et de même pour les termes tangentiels, on en déduit l'égalité (2.15b).

Ainsi, nous avons bien construit des familles $(\mathbf{u}_i, p_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ solutions de (2.14)-(2.15). \square

Preuve de l'unicité. Soit $(\mathbf{u}_i, p_i, \lambda_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ une solution du problème couplé (2.14)-(2.15).

Notons $\tilde{\mathbf{u}}$ la fonction dont la restriction à chaque domaine Ω_i est \mathbf{u}_i . La fonction $\tilde{\mathbf{u}}$ ainsi définie est bien un élément de X , car sa restriction à Ω_i appartient à X_i , et les sauts des solutions aux interfaces sont nuls par la relation (2.15b). En effet, en faisant la différence de la relation (2.15b) pour le couple (i, j) et pour le couple (j, i) , on a, pour tout $\mathbf{v} \in X$ nul en dehors de $\Omega_i \cap \Omega_j$,

$$\frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} ((\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} ((\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} = 0.$$

En appliquant le Lemme B.1, on obtient finalement $\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_i$ dans $(L^2(\Gamma_{ij}))^2$.

Construisons désormais \tilde{p} comme la dérivée d'une fonction $L^\infty([0, T[, L_0^2(\Omega))$. Pour cela, puisque la pression p_i appartient à $\mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$, il existe $P_i \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega_i))$ tel que $p_i = \partial_t P_i$. On définit alors $P \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $P|_{\Omega_i} = P_i$. Ainsi, on définit la pression $\tilde{p} := \partial_t P \in \mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L^2(\Omega))$. De plus,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} P = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} P_i = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} ((p_i, 1))_{\Omega_i} = 0,$$

avec la notation (2.10) et la définition des $(p_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ donnée par (2.14d). Ainsi, $\int_{\Omega} P$ est une fonction constante en temps. Alors,

$$\tilde{p} = \partial_t P = \partial_t \left(P - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} P \right),$$

et donc \tilde{p} est la dérivée au sens des distributions de la fonction à moyenne nulle $P - \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} P$, ce qui donne finalement que $\tilde{p} \in \mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L_0^2(\Omega))$.

Soit à présent $\mathbf{v} \in X$. Alors, $\mathbf{v}|_{\Omega_i} \in X_i$, et nous pouvons évaluer pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, les égalités (2.14a) avec cette fonction test, puis sommer chacune de ces formulations variationnelles. Nous prenons en compte que, puisque $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$, la trace de \mathbf{v} est continue sur chaque frontière Γ_i

et Γ_{ij} , de sorte que les crochets de dualité et intégrales sur Γ_{ij} peuvent être écrits sur $\mathbf{v}|_{\Omega_i}$ ou $\mathbf{v}|_{\Omega_j}$ sans distinction, et donc sur \mathbf{v} sans précision de domaine. On obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\Omega} + A(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} \left((\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) - ((\tilde{p}, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} \\ = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} + \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle \rangle_{\Gamma_i}. \end{aligned}$$

Notons que $\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} (\nabla \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} = (\nabla \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega}$, car $\tilde{\mathbf{u}} \in (H^1(\Omega))^2$.

Ensuite, appliquant la relation (2.15a), on déduit que $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ est solution de la formulation variationnelle, pour tout $\mathbf{v} \in X$

$$\frac{d}{dt}(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\Omega} + A(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) - ((\tilde{p}, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega}.$$

De plus, les \mathbf{u}_i étant à divergence nulle sur Ω_i et à saut nul sur chaque interface Γ_i , on en déduit que $\tilde{\mathbf{u}}$ est à divergence nulle sur Ω . En outre, la condition initiale étant vérifiée sur chaque domaine Ω_i , elle l'est aussi pour $\tilde{\mathbf{u}}$ sur Ω . Ainsi, $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ est solution du problème de monodomaine (2.11).

Soit maintenant une deuxième famille $(\mathbf{u}'_i, p'_i, \boldsymbol{\lambda}'_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i}$ solution du problème couplé (2.14)-(2.15). On définit de même $(\tilde{\mathbf{u}}', \tilde{p}')$, aussi solution du problème d'Oseen monodomaine. Puisque que $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$ et $(\tilde{\mathbf{u}}', \tilde{p}')$ sont solutions du problème d'Oseen, et que cette solution est unique d'après le Théorème 2.6, on déduit que $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}) = (\tilde{\mathbf{u}}', \tilde{p}')$ et donc que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_i$ et $p_i = p'_i$.

Il reste à montrer que les données de Robin sont elles aussi uniques. Cela s'obtient à partir de la relation (2.14a), vérifiée dans $\mathcal{D}'([0, T[)$, par $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i}$ et $(\mathbf{u}'_i, p'_i, \boldsymbol{\lambda}'_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i}$. Puisque $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_i$ et $p_i = p'_i$, on obtient, pour tout $\mathbf{v} \in X_i$, $\langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}'_i, \mathbf{v} \rangle \rangle_{\Gamma_i} = 0$, et donc, pour tout $\mathbf{h} \in \mathbf{H}_{00}^{1/2}(\Gamma_i)$, $\langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}'_i, \mathbf{h} \rangle \rangle_{\Gamma_i} = 0$. Ainsi, $\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{\lambda}'_i$ dans $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'([0, T[))$. \square

Nous avons, jusqu'à présent, considéré le cas le plus général pour les régularités des solutions du problème couplé (2.14)-(2.15). Néanmoins, pour une décomposition en plus de deux sous-domaines, nous n'avons pas réussi à démontrer la convergence de l'algorithme OSWR dans ces conditions en raison de la faible régularité des données de Robin aux interfaces. Pour remédier à cela, nous allons, dans la suite, exiger plus de régularité sur les quantités de Robin.

Hypothèse 2.8. Supposons que $\boldsymbol{\lambda}_i \in L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_i))^2)$.

Définissons $g_i = \boldsymbol{\lambda}_i \cdot \mathbf{n}_i$ et $\xi_i = \boldsymbol{\lambda}_i \times \mathbf{n}_i$. Alors g_i et ξ_i sont dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$ et tels que

$$\langle \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle \rangle_{\Gamma_i} = (g_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}. \quad (2.18)$$

Alors, le second membre de (2.14a) s'écrit avec des produits scalaires au lieu des crochets de dualité, et l'on introduit l'application c_i telle que

$$c_i(g_i, \xi_i, \mathbf{v}) := d_i(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + (g_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}. \quad (2.19)$$

Pour $j \in \mathcal{I}_i$, on définit alors $g_{ij} := \alpha_{ij} g_i$ et $\xi_{ij} := \beta_{ij} \xi_i$ sur Γ_{ij} , ces quantités vérifiant, dans $L^2(0, T, L^2(\Gamma_{ij}))$, les relations⁶

$$g_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}, \quad (2.20a)$$

$$\xi_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ji}. \quad (2.20b)$$

Ces hypothèses peuvent être impliquées, par exemple, si la solution est suffisamment régulière.

Proposition 2.9. Si $\mathbf{u}, \mathbf{b} \in L^2([0, T[, (H^2(\Omega))^2)$, avec $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, et qu'en outre $p \in L^2([0, T[, H^1(\Omega))$, alors l'Hypothèse 2.8 est vérifiée.

⁶Ces relations sont analogues aux relations (2.8) du problème couplé fort.

Preuve. Supposons les hypothèses de régularité de \mathbf{u} et p vérifiées. Soit $\mathbf{v} \in S(]0, T[, X)$. On peut alors appliquer les Théorèmes d'Aubin-Lions 1.8 et de Stokes, et la formule (1.2), afin de déduire de la formulation monodomaine faible (2.11a) que

$$\left(\frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} \right)_{\Omega} - \nu(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + (\nabla p, \mathbf{v})_{\Omega} = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} \quad \text{dans } \mathcal{D}'(]0, T[),$$

en remarquant que $((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} = (p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega}$ car $p \in L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$. Puisque toutes les fonctions en jeu sont aussi dans $L^2(]0, T[, L^2(\Omega))$, on obtient

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f},$$

presque partout sur $]0, T[\times \Omega$. Cela est donc aussi vrai pour (\mathbf{u}_i, p_i) dans Ω_i , et donc en prenant l'équation obtenue contre une fonction test $\mathbf{v} \in S(]0, T[, X_i)$ et en intégrant sur Ω_i , on obtient

$$\left(\frac{d\mathbf{u}_i}{dt}, \mathbf{v} \right)_{\Omega_i} - \nu(\Delta \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + (\nabla p_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i}.$$

On applique ensuite à nouveau les Théorèmes d'Aubin-Lions 1.8 et de Stokes, ainsi que la formule 1.1, et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + \nu(\nabla \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} - \nu(\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Gamma_i} \\ + \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} + \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Gamma_i} \\ - (p_i, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega_i} + (p_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i}, \end{aligned}$$

où des termes de bord apparaissent car \mathbf{u}_i et \mathbf{v} ne sont pas nécessairement nuls sur $\partial\Omega_i$. En insérant cette relation dans la formulation faible (2.14a) du sous-domaine Ω_i (ce qui est légitime, car la solution de ce système est bien (\mathbf{u}_i, p_i) d'après le Théorème 2.7), on obtient

$$\begin{aligned} \langle \langle \lambda_i, \mathbf{v} \rangle \rangle_{\Gamma_i} &= \nu(\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + \nu(\partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} \\ &- \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i), \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u} \times \mathbf{n}_i), \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} - (p_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ &= (g_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}, \end{aligned}$$

en posant

$$\begin{aligned} g_i &= \nu \partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) - p_i + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} \mathbb{1}_{\Gamma_{ij}}, \\ \xi_i &= \nu \partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_i - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_i) + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} \mathbb{1}_{\Gamma_{ij}}. \end{aligned}$$

Tout les termes ci-dessus sont bien définis en raison des régularités mentionnées dans la Proposition 2.9. En effet, on a $\mathbf{u}_i|_{\Gamma_i}, \partial_{\mathbf{n}_i} \mathbf{u}_i|_{\Gamma_i}, \mathbf{b}_i|_{\Gamma_i} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Gamma_i))^2)$, et $p_i \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$.

Par ailleurs, puisque $\mathbf{u}_i \in L^2(]0, T[, (H^2(\Omega_i))^2) \subset L^2(]0, T[, (C^0(\bar{\Omega}_i))^2)$ par inclusion de Sobolev, on a que $(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i)(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_i) \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$.

On en déduit que $g_i, \xi_i \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$ pour tout $j \in \mathcal{I}_i$, et donc dans $L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$.

Finalement, on peut repartir de la relation (2.15b), et la définition $g_{ij} := \alpha_{ij} g_i$ (resp. $\xi_{ij} := \beta_{ij} \xi_i$) sur Γ_{ij} , pour trouver (2.20a) (resp. (2.20b)). \square

Remarque 2.10. Sous l'Hypothèse 2.8, alors les quantités de Robin $(g_i, \xi_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ étant dans $L^2(\Gamma_i)$, les égalités (2.20) impliquent aussi les relations (2.15b). Finalement, le problème couplé multidomaine se ramène donc à (2.14) et (2.20).

2.2 Algorithme OSWR pour Oseen

Nous pouvons désormais introduire l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen. Ainsi, plutôt que de résoudre le problème monodomaine initial, nous allons résoudre le problème multidomaine couplé (2.14)-(2.15). Nous utilisons un procédé itératif : partant de données initiales de Robin sur les interfaces, nous résolvons des problèmes locaux espace-temps dans les sous-domaines (indépendamment les uns des autres), puis nous mettons à jour de nouvelles données de Robin aux interfaces.

Algorithme 1 (OSWR pour le problème d'Oseen)

Choisir des données de Robin initiales $g_{ij}^0, \xi_{ij}^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij})), \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

1. Pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, définir $g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$ tel que $g_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} g_{ij}^{\ell-1}$ et $\xi_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \xi_{ij}^{\ell-1}$

2. Résoudre dans chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ le problème : trouver la vitesse $\mathbf{u}_i^\ell \in M_i$ et la pression $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ tel que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v}) - ((p_i^\ell, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = c_i(g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1}, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X_i), \quad (2.21a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_i^\ell, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (2.21b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i^\ell \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V_i). \quad (2.21c)$$

3. Mettre à jour les données de Robin sur les interfaces, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$,

$$g_{ij}^\ell = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji}^{\ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j^\ell \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[, \quad (2.22a)$$

$$\xi_{ij}^\ell = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji}^{\ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j^\ell \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[. \quad (2.22b)$$

fin pour

Remarque 2.11. Observons que si cet algorithme converge (i.e. les vitesses, pressions et données de Robin dans chacun des sous-domaines convergent), alors (2.21) permet de retrouver les équations (2.14a)-(2.14b)-(2.14c), et que (2.22) permet de retrouver (2.20), et donc le problème couplé (voir Remarque 2.10), sauf pour la contrainte de pression à moyenne nulle (2.14d). Nous verrons au Théorème 2.16 ci-dessous que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, la suite de vitesse $(\mathbf{u}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ de l'Algorithme 1 converge bien vers la vitesse \mathbf{u}_i du problème couplé. Néanmoins, comme observé dans [19, Section 5], la suite de pressions $(p_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers la pression p_i , ce à quoi on peut s'attendre puisque dans l'algorithme, rien n'impose une pression à moyenne nulle sur l'ensemble des sous-domaines qui aurait permis de retrouver (2.14d). Un moyen de palier à cela est d'effectuer, une correction des pressions, ce qui permet de retrouver à convergence la pression p_i (voir Section 2.4).

Remarque 2.12⁷. D'un point de vue pratique, la pression peut être corrigée une seule fois, après la dernière itération. Si le critère d'arrêt de la méthode OSWR est basé sur les sauts des quantités de Robin aux interfaces des sous-domaines, alors des calculs supplémentaires de la correction de pression peuvent être nécessaires aux itérations intermédiaires, mais ce coût de calcul supplémentaire associé sera faible par rapport au coût global (voir à nouveau Section 2.4).

Nous souhaitons montrer que l'Algorithme 1 est bien défini. Pour cela, commençons par énoncer un lemme donnant l'existence et l'unicité de la solution au problème d'Oseen posé sur chaque sous-domaine.

Théorème 2.13. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*, i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Supposons que $\mathbf{u}_0 \in H, \mathbf{b} \in L^\infty([0, T[, H) \cap L^2([0, T[, V)$ et $\mathbf{f} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, ainsi que $g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$. Alors, le problème (2.21) admet une unique solution telle que l'on a $\mathbf{u}_i^\ell \in \mathcal{C}^0([0, T[, H_i) \cap L^2([0, T[, V)$ et $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$. Ce résultat reste vrai si $\Gamma_i = \partial\Omega_i$, i.e. s'il n'y a pas de condition limite de Dirichlet sur le bord du domaine Ω_i .

⁷Voir [19, Remarque 7.4].

Preuve. De manière similaire à la preuve du Théorème 2.6 (pour le problème monodomaine) et la preuve de [19, Théorème 3.2], on obtient l'existence et l'unicité de la solution sous l'hypothèse $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, (L^\infty(\Omega))^2)$. À nouveau, comme pour le cas monodomaine du Théorème 2.6, le résultat s'étend à $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$, comme nous le montrerons dans le Chapitre 4, Théorème 4.1, pour le problème de Navier-Stokes. \square

Théorème 2.14. *Supposons que $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$ et $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$. Si, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $g_{ij}^0, \xi_{ij}^0 \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, alors l'Algorithme 1 est bien défini, et pour chaque itération $\ell \geq 1$, $\mathbf{u}_i^\ell \in M_i$, $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}(]0, T[, L^2(\Omega_i))$ et les quantités de Robin aux interfaces vérifient $g_{ij}^\ell, \xi_{ij}^\ell \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$.*

Preuve. Il s'agit de montrer que :

- à toutes les itérations $\ell \in \mathbb{N}^*$ et dans chaque sous-domaine, le problème (2.21) admet une unique solution dans les espaces mentionnés par le théorème,
- les quantités de Robin mises à jour $g_{ij}^\ell, \xi_{ij}^\ell$ restent dans $L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$.

Montrons cela par récurrence sur ℓ .

Partant des données de Robin $g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1} \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, on obtient, d'après le Théorème 2.13 un unique $\mathbf{u}_i^\ell \in M_i$, et un unique $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}(]0, T[, L^2(\Omega_i))$.

Puis, le théorème de trace nous indique que les traces normales et tangentielles de \mathbf{u}_i^ℓ sont dans $L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$. Les formules de mises à jour des quantités de Robin (2.22) montrent finalement que $g_{ij}^\ell, \xi_{ij}^\ell \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$. \square

2.3 Convergence par estimation d'énergie

L'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen définit à chaque itération une vitesse dans chaque sous-domaine, dont nous allons montrer qu'elles convergent vers le champ de vitesse du problème monodomaine. Pour cela, on a le théorème de convergence, introduit dans la thèse [17], dont nous reprenons la preuve en l'adaptant pour correspondre à notre écriture, et en l'étendant au cas *two-sided* (i.e. avec éventuellement $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ ou $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$).

On définit les erreurs comme étant la différence entre les itérés et leur équivalent dans la formulation multidomaine du problème couplé (2.14)-(2.15), pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$ et $\ell \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{e}_i^\ell := \mathbf{u}_i^\ell - \mathbf{u}_i, \quad d_i^\ell := p_i^\ell - p_i, \quad h_{ij}^\ell := g_{ij}^\ell - g_{ij}, \quad \zeta_{ij}^\ell := \xi_{ij}^\ell - \xi_{ij}.$$

Alors, à partir de l'Algorithme 1 et du problème couplé (2.14), ces erreurs vérifient, par linéarité, l'Algorithme 2 ci-dessous.

Algorithme 2 (OSWR sur l'erreur pour le problème d'Oseen)

Choisir des données de Robin initiales $h_{ij}^0, \zeta_{ij}^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, $\forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

1. Pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, définir $h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$ tel que $h_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} h_{ij}^{\ell-1}$ et $\zeta_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \zeta_{ij}^{\ell-1}$.

2. Résoudre dans chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ le problème : trouver la vitesse $\mathbf{e}_i^\ell \in M_i$ et la pression $d_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ tel que⁸

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v}) - ((d_i^\ell, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = \tilde{c}_i(h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1}, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X_i), \quad (2.23a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_i^\ell, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (2.23b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{v} \right) (0) = 0 \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V_i). \quad (2.23c)$$

3. Mettre à jour les données de Robin sur les interfaces, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$,

$$h_{ij}^\ell = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} h_{ji}^{\ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{e}_j^\ell \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[, \quad (2.24a)$$

$$\zeta_{ij}^\ell = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \zeta_{ji}^{\ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{e}_j^\ell \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[. \quad (2.24b)$$

fin pour

Pour la réécriture du problème monodomaine en sous-problèmes équivalents, nous avons fait le choix d'une formulation variationnelle avec des fonctions tests stationnaires. Nous avons alors naturellement défini l'algorithme OSWR de la même manière. Malheureusement, pour la preuve de convergence de l'algorithme, nous aurons besoin d'effectuer des estimations d'énergie, et donc d'utiliser la solution \mathbf{e}_i^ℓ elle-même comme fonction test.

Dans le problème de Navier-Stokes monodomaine usuel avec des conditions limites de Dirichlet homogène, on peut montrer que la dérivée $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ est dans $L^2([0, T[, V')$, puis étendre la formulation variationnelle aux fonctions tests $\mathcal{C}_c^0([0, T[, V)$, et enfin, par densité de cet espace dans $L^2([0, T[, V)$, étendre la formulation variationnelle aux fonctions tests dans $L^2([0, T[, V)$, voir par exemple [15, Proposition V.1.3].

Une particularité du problème variationnel issu d'OSWR, où les conditions limites ne sont pas de Dirichlet homogènes sur tout le bord, fait que l'on n'a pas $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^2([0, T[, V'_i)$ et donc que l'on ne peut pas obtenir une formulation variationnelle avec n'importe quelle fonction de $L^2([0, T[, V_i)$. Toutefois, pour les estimations d'énergie, nous souhaitons utiliser \mathbf{e}_i^ℓ elle-même comme fonction test. Nous n'avons donc besoin que d'une formulation variationnelle posée pour des fonctions tests dans $L^\infty([0, T[, H_i) \cap L^2([0, T[, V_i)$, qui est l'espace dans lequel se trouve \mathbf{e}_i^ℓ , ce que nous proposons dans le lemme suivant.

Lemme 2.15. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Supposons que $\mathbf{b}_i \in M_i$ et l'Hypothèse 2.8. Soit \mathbf{e}_i^ℓ la solution en vitesse de (2.23). Alors $\mathbf{e}_i^\ell \in \mathcal{C}^0([0, T[, H_i)$, et $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^1([0, T[, V'_i)$, et on a en outre l'inégalité, pour tout $\varphi \in M_i$ et presque tout $\tau, s \in]0, T[$,

$$\left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}(\tau), \varphi(s) \right\rangle_{V', V} \right| \leq C_i \left(R_{1i}^\ell(\tau) T_{1i}(s) + R_{2i}^\ell(\tau) T_{2i}(s) \right), \quad (2.25)$$

avec $C_i \geq 0$, et $R_{1i}^\ell \in L^2([0, T[)$, $T_{1i}^\ell \in L^2([0, T[)$, $R_{2i}^\ell \in L^{4/3}([0, T[)$, $T_{2i}^\ell \in L^4([0, T[)$, où R_{1i}^ℓ et R_{2i}^ℓ dépendent de \mathbf{e}_i^ℓ , et T_{1i} et T_{2i} dépendent de φ .

Par ailleurs, pour tout $\varphi \in M_i$, on a $t \mapsto \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi \right\rangle_{V'_i, V_i} \in L^1([0, T[)$, et on a de plus l'égalité

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi \right\rangle_{V'_i, V_i} + \int_0^T A_i(\mathbf{e}_i^\ell, \varphi) = \int_0^T \tilde{c}_i(h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1}, \varphi). \quad (2.26)$$

Enfin, pour tout $p \in [1, 2[$, on a $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^p([0, T[, V'_i)$.

⁸L'opérateur \tilde{c}_i est l'équivalent de c_i pour $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\tilde{c}_i(h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1}, \mathbf{v}) := (h_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\zeta_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}$.

Nous séparons la preuve en trois parties, la première permet l'introduction de la dérivée en temps de \mathbf{e}_i^ℓ puis d'obtenir l'inégalité (2.25). La deuxième amène à la formulation variationnelle (2.26). Enfin, la dernière démontre la régularité de la dérivée en temps.

Preuve de l'inégalité (2.25). Considérons un domaine Ω_i , avec $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, et une itération $\ell \in \mathbb{N}^*$. Nous commençons par nous restreindre aux fonctions tests à divergence nulle dans (2.23a), et alors, le terme de pression s'annule. Ainsi, pour tout $\mathbf{v} \in S([0, T[, V_i]$,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v}) = \tilde{c}_i(h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1}, \mathbf{v}), \quad (2.27)$$

au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T])$.

Pour cette preuve, nous introduisons la fonctionnelle $\mathcal{H}_i^\ell \in V_i'$ telle que pour tout $\varphi \in V_i$,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V_i', V_i} &:= -\nu (\nabla \mathbf{e}_i^\ell, \nabla \varphi)_{\Omega_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \varphi)_{\Omega_i} + \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} \\ &\quad - \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \varphi \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \varphi \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ &\quad + (h_i^{\ell-1}, \varphi \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\zeta_i^{\ell-1}, \varphi \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Or, chaque terme de l'application \mathcal{H}_i^ℓ définit une forme linéaire prise sur V_i à valeur dans $L^1([0, T])$. Cela s'obtient en majorant chacun des termes avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et en utilisant une inégalité de trace pour les termes sur Γ_i et Γ_{ij} , et les régularités de \mathbf{e}_i^ℓ et \mathbf{b}_i dans M_i et aussi de $h_i^{\ell-1}, g_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$. On déduit que $\mathcal{H}_i^\ell \in L^1([0, T[, V_i')$.

Montrons par ailleurs, que l'application $\varphi \in M_i \mapsto \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell(t), \varphi(t) \rangle_{V_i', V_i} dt$ est linéaire et continue pour la norme $\|\cdot\|_{M_i} = \max(\|\cdot\|_{L^\infty([0, T[, H_i]}, \|\cdot\|_{L^2([0, T[, V_i]})$. Prenons alors $\varphi \in M_i$.

Commençons par traiter le premier terme d'advection issu de (2.28), qui est le plus difficile. On applique l'inégalité (1.3) puis le Lemme 1.1 pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \varphi)_{\Omega_i} \right| &\leq \int_0^T \|\mathbf{b}_i\|_{L^4(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^4(\Omega_i)} \\ &\leq C \int_0^T \sqrt{\|\mathbf{b}_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{b}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \|\varphi\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi\|_{H^1(\Omega_i)}} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{V_i}, \end{aligned}$$

et donc, en appliquant l'inégalité de Hölder 1.6 avec $p_1 = p_3 = +\infty$, $p_2 = p_4 = 4$ et $p_5 = 2$, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \varphi)_{\Omega_i} \right| &\leq C \sqrt{\|\mathbf{b}_i\|_{L^\infty([0, T[, H_i])} \|\mathbf{b}_i\|_{L^2([0, T[, V_i])} \|\varphi\|_{L^\infty([0, T[, H_i])} \|\varphi\|_{L^2([0, T[, V_i])} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2([0, T[, V_i])}} \\ &\leq C \sqrt{\|\varphi\|_{L^\infty([0, T[, H_i])} \|\varphi\|_{L^2([0, T[, V_i])}}, \end{aligned}$$

où la constante C est finie car \mathbf{b}_i et \mathbf{e}_i^ℓ sont dans M_i . Les autres termes se traitent de manière beaucoup plus directe, nous ne précisons pas ici le calcul, et sont tous bornés par $C\|\varphi\|_{L^2([0, T[, V_i])}$. Nous aboutissons finalement au fait que, pour tout $\varphi \in M_i$,

$$\left| \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V_i', V_i} \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2([0, T[, V_i])} + C \|\varphi\|_{L^\infty([0, T[, H_i])}^{1/2} \|\varphi\|_{L^2([0, T[, V_i])}^{1/2}. \quad (2.29)$$

On en déduit alors que $\int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V_i', V_i} \leq C \|\varphi\|_{M_i}$ pour tout $\varphi \in M_i$.

On reprend ensuite la démarche de la preuve de [15, Proposition V.1.3]. En utilisant la notation \mathcal{H}_i^ℓ , l'équation (2.27) se réécrit, pour tout $\theta \in \mathcal{D}([0, T])$ et $\mathbf{v} \in S([0, T[, V_i]$,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i}, \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} = \left\langle \langle \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \rangle_{V_i', V_i}, \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])}.$$

Or, par définition de la dérivée au sens des distributions,

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i}, \theta(t) \right\rangle_{\mathcal{D}'([0, T]), \mathcal{D}([0, T])} = - \int_0^T \theta'(t) (\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} = - \left(\int_0^T \theta'(t) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v} \right)_{\Omega_i},$$

et donc

$$-\left\langle \int_0^T \theta'(t) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v} \right\rangle_{V_i', V_i} = \int_0^T \theta(t) \langle \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \rangle_{V_i', V_i}.$$

En outre, on a que $\int_0^T \theta(t) \langle \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \rangle_{V_i', V_i} = \left\langle \int_0^T \theta(t) \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \right\rangle_{V_i', V_i}$, où le sens d'une intégrale sur $]0, T[$ d'une fonction à valeur dans V_i' est donné dans [15, Page 93], et grâce à la réflexivité de V_i . Nous obtenons donc que $-\left\langle \int_0^T \theta'(t) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v} \right\rangle_{V_i', V_i} = \left\langle \int_0^T \theta(t) \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \right\rangle_{V_i', V_i}$ avec $\mathcal{H}_i^\ell \in L^1(]0, T[, V_i')$. On en déduit que

$$\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} = \mathcal{H}_i^\ell \text{ dans } L^1(]0, T[, V_i')$$

au sens de la Définition 1.3.

On peut alors démontrer l'inégalité (2.25), en remarquant que l'égalité précédente reste vraie presque partout sur $]0, T[$ et à valeur dans V_i' . Prenons alors $\varphi \in M_i$. Par définition de \mathcal{H}_i^ℓ donnée par (2.28), et en prenant $\varphi(s) \in V_i$ comme fonction test, on obtient, par l'inégalité de Hölder et l'inégalité (1.3) que pour presque tout $\tau, s \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}(\tau), \varphi(s) \right\rangle_{V_i', V_i} \right| &\leq \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{L^2(\Omega_i)} \|\nabla \varphi(s)\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &+ \frac{1}{2} \|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{L^4(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{L^2(\Omega_i)} \|\varphi(s)\|_{L^4(\Omega_i)} \\ &+ \frac{1}{2} \|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{L^4(\Omega_i)} \|\nabla \varphi(s)\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{L^4(\Omega_i)} \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \|\varphi(s)\|_{L^2(\Gamma_{ij})} \\ &+ (\|h_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)} + \|\zeta_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)}) \|\varphi(s)\|_{L^2(\Gamma_i)}. \end{aligned}$$

Ainsi, par le Théorème 1.1 et l'inégalité de trace, on a

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}(\tau), \varphi(s) \right\rangle_{V_i', V_i} \right| &\leq \nu \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i} \|\varphi(s)\|_{V_i} \\ &+ \frac{C}{2} \sqrt{\|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{H_i} \|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{V_i}} \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i} \sqrt{\|\varphi(s)\|_{H_i} \|\varphi(s)\|_{V_i}} \\ &+ \frac{C}{2} \sqrt{\|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{H_i} \|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{V_i}} \sqrt{\|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{H_i} \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i}} \|\varphi(s)\|_{V_i} \\ &+ C \sum_{j \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i} \|\varphi(s)\|_{V_i} \\ &+ C (\|h_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)} + \|\zeta_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)}) \|\varphi(s)\|_{V_i}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

En utilisant que $\mathbf{b}_i, \mathbf{e}_i^\ell \in L^\infty(]0, T[, H_i)$, et donc de norme H_i plus petite que des constantes, on obtient l'inégalité (2.25), avec

- $R_{1i}^\ell(\tau) := \nu \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i} + \frac{C}{2} \sqrt{\|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{V_i} \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i}} + C \sum_{j \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i}$
 $+ C (\|h_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)} + \|\zeta_i^{\ell-1}(\tau)\|_{L^2(\Gamma_i)}),$ et donc $R_{1i}^\ell \in L^2(]0, T[),$
- $T_{1i}(s) := \|\varphi(s)\|_{V_i},$ et donc $T_{1i} \in L^2(]0, T[),$
- $R_{2i}^\ell(\tau) := \frac{C}{2} \sqrt{\|\mathbf{b}_i(\tau)\|_{V_i} \|\mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{V_i}},$ et donc $R_{2i}^\ell \in L^{4/3}(]0, T[),$
- $T_{2i}(s) := \sqrt{\|\varphi(s)\|_{H_i} \|\varphi(s)\|_{V_i}},$ et donc $T_{2i} \in L^4(]0, T[).$ □

Preuve de l'égalité (2.26). On cherche désormais à établir la formulation variationnelle (2.26) qui s'applique à des fonctions tests dans M_i . Pour cela, nous partons de l'égalité pour tout $\theta \in \mathcal{D}(]0, T[)$ et $\mathbf{v} \in V_i$

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \theta(t) \mathbf{v} \right\rangle_{V_i', V_i} = \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \theta(t) \mathbf{v} \rangle_{V_i', V_i}. \tag{2.31}$$

due à l'égalité de $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}$ et de \mathcal{H}_i^ℓ dans $L^1(]0, T[, V'_i)$. Nous allons alors successivement étendre cette formulation aux fonctions tests dans $\mathcal{C}_c^0(]0, T[, V_i)$, puis dans M_i .

Prenons tout d'abord $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^0(]0, T[, V_i)$. On déduit du Lemme 1.10 qu'il existe une suite de fonctions $(\varphi_{nk})_{k \in \mathbb{N}}$ dont les éléments sont des produits de fonctions de $\mathcal{D}(]0, T[)$ et de V_i , et qui tend vers φ_n pour la topologie de $\mathcal{C}_c^0(]0, T[, V_i)$, et donc,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi_n - \varphi_{nk} \right\rangle_{V'_i, V_i} - \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi_n - \varphi_{nk} \rangle_{V'_i, V_i} \right| \\ & \leq \left(\left\| \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \right\|_{L^1(]0, T[, V'_i)} + \|\mathcal{H}_i^\ell\|_{L^1(]0, T[, V'_i)} \right) \|\varphi_n - \varphi_{nk}\|_{L^\infty(]0, T[, V_i)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, φ_{nk} est une somme de $\theta(t)\mathbf{v}$, et est donc une fonction test admissible de (2.31), on obtient que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^0(]0, T[, V_i)$,

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi_n \right\rangle_{V'_i, V_i} = \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi_n \rangle_{V'_i, V_i}. \quad (2.32)$$

De plus, le Lemme 1.20 indique, pour tout $\varphi \in M_i$, l'existence d'une suite de fonctions régulières $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_c^0(]0, T[, V_i)$ dont la limite est φ , dans la norme $L^2(]0, T[, V_i)$, et qui est de plus bornée dans $L^\infty(]0, T[, H_i)$. Alors, en reprenant la majoration (2.29), avec la fonction test $\varphi - \varphi_n \in M_i$, on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi - \varphi_n \rangle_{V'_i, V_i} \right| \\ & \leq C \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(]0, T[, V_i)} + C \|\varphi - \varphi_n\|_{L^\infty(]0, T[, H_i)}^{1/2} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(]0, T[, V_i)}^{1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

et donc $\left(\int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi_n \rangle_{V'_i, V_i} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ admet $\int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V'_i, V_i}$ comme limite. Cela prouve, à partir de (2.32), que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi_n \right\rangle_{V'_i, V_i} = \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V'_i, V_i}, \quad (2.33)$$

et il reste à passer à la limite dans le membre de gauche de l'égalité précédente. En intégrant sur $]0, T[$ la relation (2.25), puis en utilisant les expressions explicites de T_{1i} et T_{2i} données ci-dessus, et avec $\varphi - \varphi_n$ comme fonction test, on obtient

$$\int_0^T \left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi - \varphi_n \right\rangle_{V'_i, V_i} \right| \leq \int_0^T \left(R_{1i}^\ell \|\varphi - \varphi_n\|_{V_i} + R_{2i}^\ell \sqrt{\|\varphi - \varphi_n\|_{H_i}} \|\varphi - \varphi_n\|_{V_i} \right)$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi - \varphi_n \right\rangle_{V'_i, V_i} \right| & \leq \|R_{1i}^\ell\|_{L^2(]0, T[)} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(]0, T[, V_i)} \\ & \quad + \|R_{2i}^\ell\|_{L^{4/3}(]0, T[)} \sqrt{\|\varphi - \varphi_n\|_{L^\infty(]0, T[, H_i)}} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(]0, T[, V_i)} \end{aligned}$$

qui converge vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Le passage à la limite donne finalement que, pour tout $\varphi \in M_i$,

$$\int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \varphi \right\rangle_{V'_i, V_i} = \int_0^T \langle \mathcal{H}_i^\ell, \varphi \rangle_{V'_i, V_i}, \quad (2.34)$$

ce qui est exactement la formulation variationnelle (2.26). \square

Preuve sur la régularité de la dérivée en temps. Soit $\varepsilon \in]0, 1]$, et montrons que $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^{2-\varepsilon}(]0, T[, V'_i)$, et pour cela, montrons que \mathcal{H}_i^ℓ appartient à cet espace. Prenons alors $\mathbf{v} \in V_i$, puis réécrivons \mathcal{H}_i^ℓ , défini dans (2.28), en intégrant par parties le terme d'advection avec la formule (1.1). Cela donne

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}_i^\ell, \mathbf{v} \rangle_{V'_i, V_i} & = -\nu (\nabla \mathbf{e}_i^\ell, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{b}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_i) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Gamma_i} \\ & \quad - \sum_{j \in \mathcal{I}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ & \quad + (h_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\zeta_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}. \end{aligned}$$

On montre aisément que tous les termes de cette expression sont dans $L^2(]0, T[, V'_i)$, à l'exception du terme $\mathcal{K}(\mathbf{v}) := -((\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Gamma_i}$ qui est le seul qui soit *a priori* seulement dans $L^{2-\varepsilon}(]0, T[, V'_i)$, et pour lequel la démonstration est plus subtile, et que nous détaillons ici.

En prenant $p_1 = p_2 \in [2, +\infty]$ et $p_3 \in [1, +\infty]$, tels que $1/p_1 + 1/p_2 + 1/p_3 = 1$, et que nous préciserons plus tard, on a, d'après le Théorème de Hölder 1.6, pour tout $\mathbf{v} \in V_i$,

$$|\mathcal{K}(\mathbf{v})| \leq \|\mathbf{b}_i\|_{L^{p_1}(\Gamma_i)} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^{p_1}(\Gamma_i)} \|\mathbf{v}\|_{L^{p_3}(\Gamma_i)},$$

et donc, par le Théorème 1.9⁹, puis en majorant la norme H_i de \mathbf{v} par la norme V_i de \mathbf{v} ,

$$|\mathcal{K}(\mathbf{v})| \leq C \|\mathbf{b}_i\|_{H_i}^{1/p_1} \|\mathbf{b}_i\|_{V_i}^{1-1/p_1} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H_i}^{1/p_1} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{V_i}^{1-1/p_1} \|\mathbf{v}\|_{V_i},$$

d'où

$$\|\mathcal{K}\|_{V'_i} \leq C \|\mathbf{b}_i\|_{H_i}^{1/p_1} \|\mathbf{b}_i\|_{V_i}^{1-1/p_1} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H_i}^{1/p_1} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{V_i}^{1-1/p_1}.$$

On souhaite alors intégrer sur $]0, T[$ la quantité $\|\mathcal{K}\|_{V'_i}^{2-\varepsilon}$ qui vérifie donc

$$\|\mathcal{K}\|_{V'_i}^{2-\varepsilon} \leq C \|\mathbf{b}_i\|_{H_i}^{(2-\varepsilon)/p_1} \|\mathbf{b}_i\|_{V_i}^{(2-\varepsilon)(1-1/p_1)} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H_i}^{(2-\varepsilon)/p_1} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{V_i}^{(2-\varepsilon)(1-1/p_1)}.$$

Choisissons alors p_1 de manière que cette borne soit intégrable. On pose pour cela $p_1 = \frac{2-\varepsilon}{1-\varepsilon} \in [2, +\infty]$ (et donc, $p_3 = \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \in [1, +\infty]$) pour trouver

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\mathcal{K}\|_{V'_i}^{2-\varepsilon} &\leq C \int_0^T \|\mathbf{b}_i\|_{H_i}^{1-\varepsilon} \|\mathbf{b}_i\|_{V_i} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H_i}^{1-\varepsilon} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{V_i} \\ &\leq C \|\mathbf{b}_i\|_{L^\infty(]0, T[, H_i)}^{1-\varepsilon} \|\mathbf{b}_i\|_{L^2(]0, T[, V_i)} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^\infty(]0, T[, H_i)}^{1-\varepsilon} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(]0, T[, V_i)} < +\infty \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder. Ainsi, tous les termes de \mathcal{H}_i^ℓ sont des éléments de $L^{2-\varepsilon}(]0, T[, V'_i)$, et donc $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}$ aussi, ce qui termine la preuve de la régularité de la dérivée.

On peut finalement déduire du Théorème de Lions-Magenes 1.24 la continuité en temps à valeur dans H_i de \mathbf{e}_i^ℓ . \square

On peut alors établir la convergence de l'algorithme OSWR pour la vitesse issue du problème d'Oseen.

Théorème 2.16 (Convergence OSWR pour Oseen). *Supposons l'Hypothèse 2.8 vérifiée. Alors, les suites de vitesses $(\mathbf{u}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ pour chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ définies par l'Algorithme 1 convergent dans $L^p(]0, T[, H_i) \cap L^2(]0, T[, V_i)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$, vers la famille de vitesses $(\mathbf{u}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ solution du problème couplé (2.14)-(2.15).*

Commençons par établir un lemme d'estimation de l'énergie de l'erreur à chaque itération de décomposition de domaine.

Lemme 2.17. *Soit $L \in \mathbb{N}^*$. Alors, pour presque tout $t \in]0, T[$, il existe une constante $C \geq 0$ telle que*

$$\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(t) + \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(t) + \mathfrak{B}^L(t) \leq \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(0) + \mathfrak{B}^0(t) + C \int_0^t \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau, \quad (2.35)$$

avec, pour $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$,

- $\mathfrak{E}^\ell(t) := \sum_{i=1}^M \|\mathbf{e}_i^\ell(t)\|_{\Omega_i}^2$,
- $\mathfrak{F}^\ell(t) := \nu \sum_{i=1}^M \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{\Omega_i}^2 d\tau$,
- $\mathfrak{B}^\ell(t) := \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \frac{\eta_{ij}}{\alpha_{ij}^2} \|h_{ij}^\ell(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2 d\tau + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \frac{\mu_{ij}}{\beta_{ij}^2} \|\zeta_{ij}^\ell(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2 d\tau$,

avec $\eta_{ij} := \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}$ et $\mu_{ij} := \frac{\beta_{ij} \beta_{ji}}{\beta_{ij} + \beta_{ji}}$.

⁹Si $p_3 < 2$, le théorème ne s'applique pas, mais on a alors $\|\mathbf{v}\|_{L^{p_3}(\Gamma_i)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Gamma_i)} \leq C \|\mathbf{v}\|_{V_i}$ par l'inégalité de Hölder et de trace.

Preuve. Nous nous plaçons sous l'Hypothèse 2.8 sous laquelle les données $g_i, \xi_i \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$ peuvent être décomposées sur Γ_i , avec $g_{ij} = \alpha_{ij} g_i|_{\Gamma_{ij}}$ et $\xi_{ij} = \beta_{ij} \xi_i|_{\Gamma_{ij}}$, et où l'on a les relations sur les données de Robin (2.20).

Soit $t \in]0, T[$. Nous partons de la relation sur les erreurs (2.26), en prenant $\mathbf{e}_i^\ell \mathbb{1}_{[0, t]} \in M_i$ comme fonction test. Les termes d'advection se compensent, et on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} + \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) d\tau, \end{aligned} \quad (2.36)$$

et donc, en introduisant les quantités $\varphi_{ij} := \frac{\alpha_{ij} - \alpha_{ji}}{2\alpha_{ij}\alpha_{ji}}$, et $\psi_{ij} := \frac{\beta_{ij} - \beta_{ji}}{2\beta_{ij}\beta_{ji}}$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} + \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\left(\frac{1}{\alpha_{ij}} + \varphi_{ij} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 - \frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\left(\frac{1}{\beta_{ij}} + \psi_{ij} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 - \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (2.37)$$

On exploite alors les relations aux interfaces Γ_{ij} sur l'erreur données par (2.24) :

$$\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij} = \eta_{ij} \left(\frac{h_{ij}^{\ell-1}}{\alpha_{ij}} - \frac{h_{ji}^\ell}{\alpha_{ji}} \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij} = \mu_{ij} \left(\frac{\zeta_{ij}^{\ell-1}}{\beta_{ij}} - \frac{\zeta_{ji}^\ell}{\beta_{ji}} \right),$$

avec $\eta_{ij} := \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} = \eta_{ji}$ et $\mu_{ij} := \frac{\beta_{ij}\beta_{ji}}{\beta_{ij} + \beta_{ji}} = \mu_{ji}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} + \varphi_{ij} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 - \frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \\ &= \frac{1}{2\eta_{ij}} \eta_{ij}^2 \left(\frac{\|h_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} + \frac{\|h_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ji}^2} - \frac{2}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (h_{ij}^{\ell-1}, h_{ji}^\ell)_{\Gamma_{ij}} \right) \\ & \quad - \eta_{ij} \left(\frac{\|h_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} - \frac{1}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (h_{ij}^{\ell-1}, h_{ji}^\ell)_{\Gamma_{ij}} \right) \\ &= \frac{\eta_{ij}}{2} \left(-\frac{\|h_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} + \frac{\|h_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ji}^2} \right). \end{aligned}$$

En faisant de même sur le terme tangentiel, on peut remplacer les résultats obtenus dans l'égalité (2.37), ce qui amène à

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} + \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\eta_{ij}}{2} \frac{\|h_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ji}^2} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\mu_{ij}}{2} \frac{\|\zeta_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\beta_{ji}^2} \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\eta_{ij}}{2} \frac{\|h_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\mu_{ij}}{2} \frac{\|\zeta_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\beta_{ij}^2} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) d\tau. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la généralisation du Théorème de Lions-Magenes 1.24, et grâce aux régularités de \mathbf{e}_i^ℓ et de sa dérivée (obtenue dans le Lemme 2.15),

$$\int_0^t \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} = \frac{\|\mathbf{e}_i^\ell(t)\|_{\Omega_i}^2 - \|\mathbf{e}_i^\ell(0)\|_{\Omega_i}^2}{2},$$

on aboutit à

$$\begin{aligned}
 & \|\mathbf{e}_i^\ell(t)\|_{\Omega_i}^2 - \|\mathbf{e}_i^\ell(0)\|_{\Omega_i}^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \eta_{ij} \frac{\|h_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ji}^2} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \mu_{ij} \frac{\|\zeta_{ji}^\ell\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\beta_{ji}^2} \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \eta_{ij} \frac{\|h_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \mu_{ij} \frac{\|\zeta_{ij}^{\ell-1}\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\beta_{ij}^2} \\
 &+ \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t 2\varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t 2\psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2.
 \end{aligned}$$

Puis, en sommant sur les sous-domaines Ω_i , $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on obtient, en utilisant les notations \mathfrak{E}^ℓ , \mathfrak{F}^ℓ et \mathfrak{B}^ℓ introduites dans le lemme, et en remarquant que $\eta_{ij} = \eta_{ji}$ et $\mu_{ij} = \mu_{ji}$, pour $j \in \mathcal{I}_i$:

$$\mathfrak{E}^\ell(t) + 2\mathfrak{F}^\ell(t) + \mathfrak{B}^\ell(t) = \mathfrak{E}^\ell(0) + \mathfrak{B}^{\ell-1}(t) + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + 2 \int_0^t \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2.$$

On somme ensuite sur les itérations $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$, et l'on obtient, après télescopage,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\ell=1}^L \left(\mathfrak{E}^\ell(t) + 2\mathfrak{F}^\ell(t) \right) + \mathfrak{B}^L(t) \\
 &= \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(0) + \mathfrak{B}^0(t) + 2 \sum_{\ell=1}^L \int_0^t \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right).
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

On peut alors majorer le terme d'erreur sur le bord avec le Théorème de trace 1.9, puis de Young 1.11,

$$\begin{aligned}
 \varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 &\leq |\varphi_{ij}| C_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H^1(\Omega_i)} \\
 &\leq \left(C_{ij} |\varphi_{ij}| + \frac{M C_{ij}^2 \varphi_{ij}^2}{\nu} \right) \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{\nu}{4M} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2,
 \end{aligned} \tag{2.39}$$

et l'on fait de même pour le terme tangentiel, pour aboutir à

$$\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(t) + 2 \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(t) + \mathfrak{B}^L(t) \leq \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(0) + \mathfrak{B}^0(t) + C \sum_{\ell=1}^L \int_0^t \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau + \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(t),$$

avec $C := M \max_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i} \left(\left(C_{ij} |\varphi_{ij}| + \frac{M^2 C_{ij}^2 \varphi_{ij}^2}{\nu} \right) + \left(C_{ij} |\psi_{ij}| + \frac{M^2 C_{ij}^2 \psi_{ij}^2}{\nu} \right) \right)$. On aboutit ainsi au résultat du lemme. \square

On peut alors montrer la convergence de l'algorithme OSWR pour le champ de vitesse.

Preuve du Théorème 2.16. On part de l'inégalité d'énergie obtenue dans le Lemme 2.17. En remarquant que $\mathfrak{B}^L \geq 0$ et que l'erreur initiale $\mathfrak{E}^\ell(0)$ est nulle pour toute itération $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$ avec (2.23c), on obtient que

$$\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(t) + \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(t) \leq \mathfrak{B}^0(t) + C \int_0^t \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau,$$

et donc, en ajoutant $\int_0^t \int_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(\tau) d\tau \geq 0$ dans le membre de droite, et puisque la fonction $t \mapsto \mathfrak{B}^0(t)$ est croissante,

$$\sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t)) \leq \mathfrak{B}^0(t) + C \int_0^t \sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(\tau) + \mathfrak{F}^\ell(\tau)) d\tau.$$

Finalement, on peut appliquer le lemme de Grönwall 1.7, car la fonction $t \mapsto \sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t))$ est bornée en temps, ce qui amène à

$$\sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t)) \leq \mathfrak{B}^0(T) \exp \left(\int_0^T C d\tau \right) \leq \mathfrak{B}^0(T) \exp(TC) < +\infty. \tag{2.40}$$

La borne obtenue étant indépendante de L , on obtient que la série des $(\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t))_\ell$ est convergente, et on en déduit que le terme de cette série tend vers 0 lorsque ℓ tend vers $+\infty$. Ainsi, $(\mathfrak{E}^\ell(t))_\ell$ tend vers 0, ce qui prouve que $(\mathbf{e}_i^\ell)_\ell$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $L^p([0, T], (L^2(\Omega_i))^2)$ pour tout $p \in [1, +\infty[$ d'après le Lemme 1.25, (et *a fortiori* dans $L^2([0, T], (L^2(\Omega_i))^2)$). Par ailleurs, puisque $(\mathfrak{F}^\ell(t))_\ell$ tend vers 0, on en déduit que $(\|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i})_\ell$ tend vers 0 dans $L^2([0, T])$, et finalement, que la suite $(\mathbf{e}_i^\ell)_\ell$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $L^2([0, T], (H^1(\Omega_i))^2)$. \square

Remarque 2.18. Dans l'étude de l'algorithme OSWR par estimation d'énergie, il est courant de se ramener à une inégalité de la forme (2.40), puis de déduire, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, la convergence de la suite $(\mathbf{e}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ vers $\mathbf{0}$ dans $L^\infty([0, T], (L^2(\Omega_i))^2)$. Nous pensons néanmoins que, sans argument supplémentaire, cette déduction n'est pas possible. Prenons pour contre-exemple la suite de fonctions à termes positifs $(v_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ définies sur $]0, 1[$, telle que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $v_\ell := \mathbb{1}_{[\frac{1}{2^{\ell+1}}, \frac{1}{2^\ell}]}(t)$. Alors, pour tout $L \in \mathbb{N}$ et $t \in]0, 1[$, $\sum_{\ell=1}^L v_\ell(t) \leq 1$, et la suite considérée vérifie donc une inégalité de la forme de (2.40). Pourtant $\|v_\ell - 0\|_{L^\infty([0, 1])} = 1 \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 1 \neq 0$. Supposer par ailleurs les fonctions continues ne fonctionne pas davantage, on se convaincra en prenant par exemple pour v_ℓ la fonction chapeau d'amplitude 1 à support dans $\mathbb{1}_{[\frac{1}{2^{\ell+1}}, \frac{1}{2^\ell}]}$.

2.4 Recalibrage de la pression

L'Algorithme 1 permet de définir une suite de vitesses qui converge vers la vitesse du problème monodomaine. Malheureusement, comme observé par [19, Section 5] sur le problème de Stokes, la suite de pression ne converge pas vers la pression monodomaine, et il est nécessaire d'effectuer une correction dans chaque sous-domaine, et à chaque pas de temps. Les idées de cet article s'étendent directement du problème de Stokes au problème d'Oseen. Nous présentons ici une preuve généralisée pour des cas importants en pratique : pour le cas *two-sided*, et pour des conditions limites au bord du domaine Ω de Dirichlet non nécessairement homogènes, ce qui consiste à changer l'équation (2.1d) en $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_D|_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i}$ sur $(\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times]0, T[$, avec $\mathbf{u}_D \in H^1([0, T], (H^{1/2}(\partial\Omega))^2)$, tel que $\int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} = 0$. Tout d'abord, introduisons la notation pour la valeur moyenne d'une grandeur g sur un domaine \mathcal{O} :

$$\langle g \rangle_{\mathcal{O}} = \frac{1}{|\mathcal{O}|} \int_{\mathcal{O}} g.$$

La notation $|\mathcal{O}|$ désigne la mesure du domaine \mathcal{O} , quelle qu'en soit sa dimension, avec la convention $|\emptyset| = 0$.

Hypothèse 2.19. Dans cette section, nous supposons les trois convergences, pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, et presque partout sur $]0, T[$:

$$\|(p_i^\ell - p_i) - \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i}\|_{\Omega_i} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0, \quad (2.41a)$$

$$\langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Gamma_{ij}} - \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0, \quad (2.41b)$$

$$\langle g_{ij}^{\ell-1} - g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \alpha_{ij} \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Gamma_{ij}} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0. \quad (2.41c)$$

Remarque 2.20. *Sous des hypothèses de convergence de \mathbf{u}_i^ℓ vers \mathbf{u}_i en norme plus forte que celle obtenue dans le Théorème 2.16, les trois hypothèses peuvent être déduites du problème fort sur l'erreur. En effet, supposons que $(\mathbf{e}_i^\ell, d_i^\ell)$ soit solution du problème sur l'erreur, avec $\mathbf{e}_i^\ell = \mathbf{u}_i^\ell - \mathbf{u}_i$, $d_i^\ell = p_i^\ell - p_i$, $h_{ij}^\ell = g_{ij}^\ell - g_{ij}$, $\zeta_{ij}^\ell = \xi_{ij}^\ell - \xi_{ij}$*

$$\partial_t \mathbf{e}_i^\ell - \nu \Delta \mathbf{e}_i^\ell + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell + \nabla d_i^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (2.42a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e}_i^\ell = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (2.42b)$$

$$\mathbf{e}_i^\ell(t=0) = 0 \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (2.42c)$$

$$\mathbf{e}_i^\ell = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times]0, T[, \quad (2.42d)$$

$$\alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}) - d_i^\ell \right) + \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij} = h_{ij}^{\ell-1} \quad \text{sur } \Gamma_{i,j} \times]0, T[, j \in \mathcal{I}_i, \quad (2.42e)$$

$$\beta_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij} = \zeta_{ij}^{\ell-1} \quad \text{sur } \Gamma_{i,j} \times]0, T[, j \in \mathcal{I}_i. \quad (2.42f)$$

avec les convergences presque partout sur $]0, T[$

$$\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H^2(\Omega_i)} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \|\partial_t \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0.$$

L'équation (2.42a) donne alors que, pour presque tout $t \in]0, T[$, $\|\nabla d_i^\ell(t)\|_{\Omega_i} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} 0$. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger permet de retrouver la relation (2.41a) et la continuité de l'opérateur trace donne (2.41b).

La convergence en norme $H^2(\Omega_i)$ entraîne la convergence au bord de \mathbf{e}_i^ℓ et de $\partial_{\mathbf{n}} \mathbf{e}_i^\ell$ vers 0 en norme $L^2(\Gamma_{ij})$, et donc aussi la convergence $\|\alpha_{ij} \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij} + \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2} (\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})\|_{\Gamma_{ij}} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} 0$, et donc la relation (2.42e) implique la troisième hypothèse.

Nous pouvons alors introduire la méthodologie de recalibrage de la pression pour l'algorithme OSWR. Pour cela, nous définissons trois matrices. Introduisons la matrice A telle que,

$$A = (a_{ij})_{(i,j) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2}, \quad \text{avec } a_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^M |\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}, \quad \text{et } a_{ij} = -|\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \quad \text{si } i \neq j, \quad (2.43)$$

(notons que $a_{ij} = 0$ si Ω_i et Ω_j ne sont pas voisins, en vertu de la convention $\Gamma_{ji} = \emptyset \implies |\Gamma_{ji}| = 0$), le vecteur $\mathbf{B}^\ell = (B_1^\ell, \dots, B_M^\ell)^T$ défini pour $\ell \in \mathbb{N}^*$, et tel que pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, par

$$B_i^\ell = \sum_{j=1}^M |\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \left(\frac{\langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}}}{\alpha_{ij}} - \frac{\langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}}}{\alpha_{ji}} + \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} - \langle p_j^\ell \rangle_{\Omega_j} \right) + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i, \quad (2.44)$$

ainsi que la matrice ligne

$$C = (|\Omega_1|, \dots, |\Omega_M|). \quad (2.45)$$

Théorème 2.21 (Recalibrage de la pression). *Supposons l'Hypothèse 2.19 vérifiée. Alors, le vecteur des pressions moyennes sur chaque sous-domaine $\mathbf{X} := (\langle p_1 \rangle_{\Omega_1}, \dots, \langle p_M \rangle_{\Omega_M})$ est la limite, dans \mathbb{R}^M , de la suite $(\mathbf{X}^\ell)_\ell$, où, pour tout ℓ , $\mathbf{X}^\ell \in \mathbb{R}^M$ est l'unique solution du problème*

$$A\mathbf{X}^\ell = \mathbf{B}^\ell, \quad (2.46a)$$

$$C\mathbf{X}^\ell = 0, \quad (2.46b)$$

et la pression corrigée définie, pour $t \in]0, T[$, par

$$\tilde{p}_i^\ell(t) := p_i^\ell(t) - \langle p_i^\ell(t) \rangle_{\Omega_i} + \mathbf{X}_i^\ell(t), \quad (2.47)$$

converge vers $p_i(t)$ dans $L^2(\Omega_i)$, avec $\mathbf{X}_i^\ell(t)$ la i -ème composante de $\mathbf{X}^\ell(t)$.

La preuve repose sur deux lemmes, l'un reposant sur des propriétés liées à l'équation d'Oseen et à l'algorithme OSWR associé, l'autre uniquement sur des considérations algébriques.

Lemme 2.22. *Le vecteur des pressions moyennes \mathbf{X} vérifie :*

$$\mathbf{B}^\ell \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} A\mathbf{X} \quad \text{dans } \mathbb{R}^M, \quad (2.48a)$$

$$C\mathbf{X} = 0. \quad (2.48b)$$

Preuve. La preuve repose sur trois propriétés du problème OSWR pour Oseen :

- (i) la relation (2.8a) entre les données de Robin à l'interface du problème multidomaine,
- (ii) les propriétés de vitesses à divergence nulle multidomaine (2.2b),
- (iii) les trois hypothèses de convergence (2.41).

Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$. En intégrant sur Γ_{ij} la relation (2.8a), on obtient

$$\frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle g_{ji} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}. \quad (2.49)$$

Or, la propriété de vitesse à divergence nulle (2.2b) implique que

$$0 = \int_{\Omega_i} \nabla \cdot \mathbf{u}_i = \int_{\partial\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega_i} = \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_{\Gamma_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} + \int_{\partial\Omega \cap \Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i.$$

L'égalité (2.49), une fois sommée sur tous les voisins du domaine Ω_i donne donc

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}} - \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle g_{ji} \rangle_{\Gamma_{ji}} = - \int_{\partial\Omega \cap \Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i. \quad (2.50)$$

Or, la relation de convergence (2.41c) s'écrit

$$\langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \alpha_{ij} \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Gamma_{ij}} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}}. \quad (2.51)$$

Par inégalité triangulaire, on obtient que

$$\begin{aligned} & |\langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \alpha_{ij} \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} - \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}}| \\ & \leq |\langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \alpha_{ij} \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Gamma_{ij}} - \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}}| + |\alpha_{ij} (\langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} - \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Gamma_{ij}})| \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

par les convergences (2.51) et (2.41b). Cela donne

$$\langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \alpha_{ij} \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}},$$

et donc, en multipliant cette équation par $\frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}|$ et en sommant sur $j \in \mathcal{I}_i$, on a

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} \right) \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle g_{ij} \rangle_{\Gamma_{ij}}. \quad (2.52)$$

En repartant de (2.51) et en permutant i et j mais en sommant toujours sur j , on trouve de manière similaire :

$$\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \frac{\alpha_{ji} \alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle p_j^\ell - p_j \rangle_{\Omega_j} \right) \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle g_{ji} \rangle_{\Gamma_{ji}}. \quad (2.53)$$

Si l'on soustrait les deux relations (2.52) et (2.53) et que l'on ajoute la relation (2.50), on trouve finalement

$$\begin{aligned} & \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle p_i^\ell - p_i \rangle_{\Omega_i} \right) \\ & - \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \frac{\alpha_{ji} \alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ji}| \langle p_j^\ell - p_j \rangle_{\Omega_j} \right) \xrightarrow[\ell \rightarrow \infty]{} - \int_{\partial\Omega \cap \Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i, \end{aligned}$$

où, de manière équivalente, en prenant en compte que $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ et que $|\Gamma_{ij}| = 0$ si j n'est pas dans \mathcal{I}_i ,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^M |\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} - \frac{1}{\alpha_{ji}} \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} - \langle p_j^\ell \rangle_{\Omega_j} \right) + \int_{\partial\Omega \cap \Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i \\ & \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle p_i \rangle_{\Omega_i} - \frac{\alpha_{ji}\alpha_{ij}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} |\Gamma_{ij}| \langle p_j \rangle_{\Omega_j} \right), \end{aligned}$$

ce qui se réécrit sous la forme $\mathbf{B}^\ell \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} A\mathbf{X}$ avec la matrice A et le vecteur \mathbf{B}^ℓ définis respectivement en (2.43) et (2.44), et \mathbf{X} le vecteur des pressions moyennes défini dans le Théorème 2.21.

Par ailleurs, la pression p appartenant à $L_0^2(\Omega)$, on a

$$0 = \int_{\Omega} p = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \int_{\Omega_i} p_i = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} |\Omega_i| \langle p_i \rangle_{\Omega_i},$$

ce qui est exactement $C\mathbf{X} = \mathbf{0}$, où C est définie par (2.45). \square

Lemme 2.23. *Pour presque tout $t \in]0, T[$, le problème (2.46) admet une unique solution dans \mathbb{R}^M .*

Preuve. La preuve est divisée en deux étapes :

- (i) Montrer que le problème $A\mathbf{X}^\ell = \mathbf{B}^\ell$ admet une solution, en déterminant l'image de A et en montrant que \mathbf{B}^ℓ y appartient ;
- (ii) Montrer l'unicité sous la contrainte $C\mathbf{X}^\ell = 0$.

Montrons (i), i.e. que le système $A\mathbf{X}^\ell = \mathbf{B}^\ell$ admet une solution, c'est-à-dire que \mathbf{B}^ℓ est dans l'image de A . Or, puisque pour toute matrice $\text{Im}(A) = \text{Ker}(A^T)^\perp = \text{Ker}(A)^\perp$ (car A est symétrique), déterminons le noyau de A .

Soit $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)^T$ un élément de ce noyau, alors, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on a $\sum_{j \in \llbracket 1, M \rrbracket} a_{ij} Y_j = 0$. En multipliant cette égalité par Y_i , puis en remarquant que $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij}$, on a,

$$0 = \sum_{j=1}^M a_{ij} Y_j Y_i = \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij} Y_j Y_i + a_{ii} Y_i^2 = \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij} (Y_j Y_i - Y_i^2).$$

En sommant alors ces expressions sur $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on a, puisque $a_{ij} = a_{ji}$,

$$0 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1, j \neq i}^M a_{ij} (Y_j Y_i - Y_i^2) = - \sum_{1 \leq j < i \leq M} a_{ij} (Y_i - Y_j)^2.$$

Finalement, puisque $a_{ij} \leq 0$ pour tout $i \neq j$, et $a_{ij} < 0$ si les sous-domaines Ω_i et Ω_j sont voisins, cela implique que $Y_i = Y_j$ pour toute paire de domaines (i, j) voisins. Puisque Ω est connexe, on déduit que tous les $(Y_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ sont égaux. Alors,

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect}\{\mathbf{e}\},$$

avec $\mathbf{e} := (1, \dots, 1)^T$. Pour montrer que le problème (2.46) admet une solution i.e. $\mathbf{B}^\ell \in \text{Ker}(A)^\perp$, il suffit alors de montrer que $\mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{e} = 0$. Or

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^\ell \cdot \mathbf{e} &= \sum_{i=1}^M B_i^\ell \\ &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} + \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M |\Gamma_{ji}| \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \left(\frac{1}{\alpha_{ji}} \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \langle p_j^\ell \rangle_{\Omega_j} \right) \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \end{aligned}$$

d'après (2.1b) Enfin, montrons (ii), i.e. que cette solution est unique sous la contrainte $C\mathbf{X}^\ell = \mathbf{0}$. Soit \mathbf{X}_1^ℓ et \mathbf{X}_2^ℓ deux solutions du problème (2.46). Alors

$$\begin{aligned} A\mathbf{X}_1^\ell &= \mathbf{B}^\ell, & A\mathbf{X}_2^\ell &= \mathbf{B}^\ell, \\ C\mathbf{X}_1^\ell &= \mathbf{0}, & C\mathbf{X}_2^\ell &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Alors, $\mathbf{X}_1^\ell - \mathbf{X}_2^\ell$ vérifie le problème

$$\begin{aligned} A(\mathbf{X}_1^\ell - \mathbf{X}_2^\ell) &= \mathbf{0}, \\ C(\mathbf{X}_1^\ell - \mathbf{X}_2^\ell) &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

et ainsi, $\mathbf{X}_1^\ell - \mathbf{X}_2^\ell$ appartient au noyau de A . Il existe donc un réel μ tel que

$$\mathbf{X}_1^\ell - \mathbf{X}_2^\ell = \mu \mathbf{e}.$$

En multipliant cette équation par C , et en remarquant que $C\mathbf{e} = |\Omega| \neq 0$, et puisque $C\mathbf{X}_1^\ell - C\mathbf{X}_2^\ell = \mathbf{0}$, on trouve que $\mu = 0$, et donc $\mathbf{X}_1^\ell = \mathbf{X}_2^\ell$.

On a donc obtenu l'unicité de la solution du problème (2.46). \square

Preuve du Théorème 2.21. On peut désormais montrer que la suite de solution \mathbf{X}^ℓ du problème (2.46) tend vers \mathbf{X} .

On a, d'après le Lemme (2.22),

$$A\mathbf{X}^\ell - A\mathbf{X} = \mathbf{B}^\ell - A\mathbf{X} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} \mathbf{0}.$$

Avec la contrainte $C\mathbf{X}^\ell - C\mathbf{X} = 0$, on a alors les relations

$$\begin{aligned} \lim_{\ell \rightarrow \infty} A(\mathbf{X}^\ell - \mathbf{X}) &= \mathbf{0}, \\ \lim_{\ell \rightarrow \infty} C(\mathbf{X}^\ell - \mathbf{X}) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Cela montre que \mathbf{X}^ℓ admet \mathbf{X} comme limite. En effet, l'opérateur qui à $\mathbf{B} \in \text{Im}(A)$ associe \mathbf{Z} l'unique solution du problème

$$A\mathbf{Z} = \mathbf{B}, \quad C\mathbf{Z} = \mathbf{0},$$

est linéaire sur un espace de dimension finie, et donc continu. Cela conclut la première partie de la preuve.

En outre, on peut désormais définir une grandeur qui converge vers p_i en partant de la relation de convergence (2.41a) dans $L^2(\Omega_i)$:

$$p_i^\ell - \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} + \langle p_i \rangle_{\Omega_i} \xrightarrow{\ell \rightarrow +\infty} p_i,$$

en estimant $\langle p_i \rangle_{\Omega_i}$ par X_i^ℓ . On définit donc une pression recalibrée \tilde{p}_i^ℓ (qui intégralement calculable à chaque itération ℓ) avec la formule (2.47), et qui converge vers p_i dans $L^2(\Omega_i)$. \square

Le problème (2.46) étant un problème sous contrainte, il peut être plus simple en pratique de résoudre un système linéaire inversible et sans contrainte. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 2.24 (Recalibrage pression pratique). *Le vecteur des pressions moyennes sur chaque sous-domaine \mathbf{X} est la limite de la suite $(\mathbf{X}^\ell)_\ell$, où, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, \mathbf{X}^ℓ est l'unique solution du problème*

$$\tilde{A}\mathbf{X}^\ell = \tilde{\mathbf{B}}^\ell, \tag{2.54}$$

où la matrice inversible \tilde{A} vérifie, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, M \rrbracket^2$

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} \quad \text{si } i < M, \quad \tilde{a}_{Mj} = |\Omega_j|,$$

et le vecteur $\tilde{\mathbf{B}}^\ell$ est tel que

$$\tilde{b}_i^\ell = b_i^\ell \quad \text{si } i < M, \quad \tilde{b}_M^\ell = 0.$$

Preuve. La définition du système linéaire (2.54) découle directement du système linéaire (2.46a), où la dernière équation est remplacée par (2.46b).

L'inversibilité de la matrice \tilde{A} équivaut à l'existence d'une unique solution au problème $\tilde{A}\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{B}}$ pour tout second membre $\tilde{\mathbf{B}}$. Prenons alors $\tilde{\mathbf{B}}$ arbitraire, et construisons un vecteur \mathbf{B} tel que $b_i = \tilde{b}_i$ si $i \in \llbracket 1, M-1 \rrbracket$, et $b_M = -\sum_{j=1}^{M-1} \tilde{b}_j$. Puisque $\text{Ker}(A) = \text{Vect}\{\mathbf{e}\}$, alors $\mathbf{B} \in \text{Ker}(A)^\perp = \text{Im}(A)$, et le problème $A\mathbf{X} = \mathbf{B}$ admet une solution, qui est unique sous la contrainte $C\mathbf{X} = \tilde{b}_M$ (dans la preuve du Lemme 2.23, nous avons démontré l'unicité dans le cas où le second membre de la contrainte est nul, mais la preuve est identique si $\tilde{b}_M \neq 0$). Par construction, le vecteur \mathbf{X} , est aussi solution de l'équation $\tilde{A}\mathbf{X} = \tilde{\mathbf{B}}$. \square

Remarque 2.25. La détermination du vecteur des pressions moyennes sur chaque sous-domaine se ramène donc à la résolution d'un système linéaire de taille $M \times M$ pour chaque pas de temps, et l'on obtient alors la pression corrigée. Puisque la pression n'intervient pas dans les données de Robin transmises à chaque itération via l'égalité (2.22), il n'est pas nécessaire de faire ce recalibrage à chaque itération, mais seulement à la dernière, qui nous permettra d'obtenir la valeur finale de la pression calculée avec l'algorithme OSWR. Ce coût de calcul est donc négligeable.

Remarque 2.26. Pour déterminer la pression monodomaine solution de (2.1), une autre méthode consisterait à partir de la convergence du gradient de pression ∇p_i^ℓ vers ∇p_i dans chaque sous-domaine. Ainsi, quitte à supposer suffisamment de régularité sur ∇p , il est possible, à convergence, de raccorder les ∇p_i^ℓ (calculés directement en prenant le gradient de p_i^ℓ) pour obtenir un gradient de pression modomaine. Alors, partant d'une valeur fixée en un point quelconque du domaine, on peut retrouver la pression en réintégrant ce gradient. On obtiendra donc une pression qui sera la bonne, à une constante près. On soustrait finalement à cette pression recalculée sa valeur moyenne pour obtenir la pression solution de (2.1) à moyenne nulle.

Si cela fonctionne au niveau continu, cela n'est plus possible au niveau discret avec les éléments finis de Crouzeix-Raviart que nous utiliserons (voir Section 2.6). En effet, la pression n'étant calculée qu'au centre des mailles, comment alors calculer un gradient de pression entre deux mailles situées de part et d'autre d'une interface entre deux sous-domaines ? Calculer le taux d'accroissement serait forcément faux vu que les pressions de part et d'autre de l'interface sont erronées d'une constante différente selon les sous-domaines.

Néanmoins, si l'on utilisait des éléments finis permettant un calcul de gradient sur chaque maille, cela fonctionnerait. Toutefois, le coût de calcul comme la difficulté de mise en place nous paraissent supérieurs à ce que nous proposons, issu du Théorème 2.24, et que nous recommandons donc quel que soit le schéma de résolution numérique utilisé.

Corollaire 2.27 (Recalibrage pression en 2 domaines). Dans le cas où le domaine Ω est décomposé en deux sous-domaines (i.e. $M = 2$), on peut obtenir une formule explicite pour la pression recalibrée. Sur chaque sous-domaine d'indice i , $i = 1, 2$, de voisin d'indice $j = 3 - i$, en posant, pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} \tilde{p}_i^\ell = p_i^\ell &+ \frac{|\Omega_j|}{|\Omega|} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ij}} - \frac{1}{\alpha_{ji}} \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} \right) - \frac{|\Omega_i|}{|\Omega|} \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} - \frac{|\Omega_j|}{|\Omega|} \langle p_j^\ell \rangle_{\Omega_j} \\ &+ \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \frac{|\Omega_j|}{|\Omega|} \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i, \end{aligned}$$

alors, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\tilde{p}_i^\ell(t) \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} p_i(t) \quad \text{dans } L^2(\Omega_i).$$

Preuve. Il s'agit du cas particulier du système (2.54) pour $M = 2$, qui s'écrit :

$$\begin{aligned} |\Gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} (X_1^\ell - X_2^\ell) &= |\Gamma_{12}| \frac{\alpha_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{12} + \alpha_{21}} \left(\frac{1}{\alpha_{12}} \langle g_{12}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{12}} - \frac{1}{\alpha_{21}} \langle g_{21}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{12}} + \langle p_1^\ell \rangle_{\Omega_1} - \langle p_2^\ell \rangle_{\Omega_2} \right) \\ &+ \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_1} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_1, \\ |\Omega_1| X_1^\ell + |\Omega_2| X_2^\ell &= 0. \end{aligned}$$

dont la solution est, pour $i = 1, 2, j = 3 - i$

$$X_i^\ell = \frac{|\Omega_j|}{|\Omega|} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} \langle g_{ij}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} - \frac{1}{\alpha_{ji}} \langle g_{ji}^{\ell-1} \rangle_{\Gamma_{ji}} + \langle p_i^\ell \rangle_{\Omega_i} - \langle p_j^\ell \rangle_{\Omega_j} + \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} \alpha_{ji}} \frac{1}{|\Gamma_{ij}|} \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i \right),$$

en utilisant que $\int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_1} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_1 = -\int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_2} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_2$. Enfin, la pression corrigée se retrouve à partir de la formule (2.47). \square

2.5 Facteur de convergence par transformée de Fourier

2.5.1 Définition des paramètres optimisés

Jusqu'à présent, nous avons montré que l'algorithme convergeait (au recalibrage de la pression près), mais sans en préciser à quelle vitesse. L'analyse sur le problème dans le domaine de Fourier est usuelle pour ce type de problème (voir par exemple [75, 78, 79, 46]). L'idée est de considérer une décomposition en deux domaines, et d'analyser le problème dans le domaine de Fourier temporel (fréquence ω) et dans la direction tangente à l'interface (fréquence k). Il est alors possible de résoudre explicitement l'équation aux dérivées partielles (qui se ramène à une équation différentielle pour chaque fréquence) pour obtenir une solution générique sur chaque sous-domaine. En introduisant ces relations dans les conditions de Robin à l'interface, on trouve alors une relation géométrique entre l'erreur à la ℓ -ième itéré et l'itéré initial. L'idée est alors de minimiser la raison de cette suite géométrique pour espérer minimiser l'erreur de l'algorithme de décomposition de domaine.

Cela permet de définir des paramètres de Robin $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ optimisés le long d'une interface, qui permettent une convergence rapide de l'algorithme. Nous rappelons la définition des paramètres de Robin optimisés obtenus dans [17, Section 2.9.5] (voir aussi [19, Section 8] pour les détails pour le problème de Stokes). Sur une frontière de longueur Y , de pas de maillage ΔY , de pas de temps Δt ,

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*) = \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{R}^+)^4}{\operatorname{argmin}} \max_{\omega \in [\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}], k \in [\frac{\pi}{Y}, \frac{\pi}{\Delta Y}]} \left(\varrho(\mathcal{R}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \omega, k)) \right), \quad (2.55)$$

où $\varrho(\mathcal{R})$ désigne ici le rayon spectral de la matrice

$$\mathcal{R} := \mathcal{M}^{-1}(\alpha_1, \beta_1) \mathcal{N}(\alpha_1, \beta_1) \mathcal{P}^{-1}(\alpha_2, \beta_2) \mathcal{Q}(\alpha_2, \beta_2),$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\alpha, \beta) &:= \begin{pmatrix} 1 + X(\alpha) + \frac{\alpha \mathbf{b}_x}{2} & 1 + Y(\alpha) \\ \frac{\imath |k|}{k} (1 + W(\beta) - \frac{\beta \mathbf{b}_x}{2}) & \frac{\imath r_+}{k} (1 + Y(\beta)) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{N}(\alpha, \beta) &:= \begin{pmatrix} 1 - X(\alpha) + \frac{\alpha \mathbf{b}_x}{2} & 1 - Y(\alpha) \\ \frac{-\imath |k|}{k} (1 - W(\beta) - \frac{\beta \mathbf{b}_x}{2}) & \frac{\imath r_-}{k} (1 - Y(\beta)) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{P}(\alpha, \beta) &:= \begin{pmatrix} 1 + X(\alpha) - \frac{\alpha \mathbf{b}_x}{2} & 1 + Y(\alpha) \\ \frac{\imath |k|}{k} (1 + W(\beta) + \frac{\beta \mathbf{b}_x}{2}) & \frac{-\imath r_-}{k} (1 + Y(\beta)) \end{pmatrix}, \\ \mathcal{Q}(\alpha, \beta) &:= \begin{pmatrix} 1 - X(\alpha) - \frac{\alpha \mathbf{b}_x}{2} & 1 - Y(\alpha) \\ \frac{-\imath |k|}{k} (1 - W(\beta) + \frac{\beta \mathbf{b}_x}{2}) & \frac{-\imath r_+}{k} (1 - Y(\beta)) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$X(\alpha) = \alpha \left(\nu |k| + \frac{\imath \omega + \mathbf{b}_y \imath k}{|k|} \right), \quad Y(\alpha) = \alpha \left(\nu r_+ - \frac{\mathbf{b}_x}{2} \right), \quad W(\alpha) = \alpha \nu |k|,$$

où r_+ et r_- sont respectivement les racines à partie réelle positive et négative de l'équation

$$-\nu r^2 + \mathbf{b}_x r + (\imath(\omega + \mathbf{b}_y k) + \nu k^2) = 0,$$

i.e. $r_\pm = \frac{\mathbf{b}_x \pm \lambda}{2\nu}$, avec λ la racine carrée à partie réelle positive de $\mathbf{b}_x^2 + 4\nu(\imath(\omega + \mathbf{b}_y k) + \nu k^2)$.

2.5.2 Fréquences discrètes en temps

On observe en pratique que les coefficients obtenus en minimisant le taux de convergence (2.55) ne sont pas du tout optimaux pour le problème de Stokes, voir [19, Section 9.2], probablement à cause de l'influence de la discrétisation temporelle pour la résolution numérique. Pour remédier à cela, nous proposons une méthodologie pour mieux choisir ces paramètres, en remplaçant les fréquences temporelles continues par leurs équivalentes discrètes, prenant en compte le pas de temps du schéma.

L'usage de la transformée de Fourier consiste à chercher une solution à la fréquence ω sous la forme $\mathbf{u} = \exp(i\bar{\omega}t) \mathbf{v}(x, y)$, dont la dérivée en temps donne $i\bar{\omega}\mathbf{u}$.

Si l'on considère une discrétisation du problème avec une méthode d'Euler, où \mathbf{u}_n approche $\mathbf{u}(n\Delta t)$ avec $n \in \llbracket 0, N \rrbracket$, la dérivée en temps est discrétisée par $\frac{\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}}{\Delta t}$. On cherche alors aussi une solution sous la forme $\mathbf{u}_n = \exp(i\omega n\Delta t) \mathbf{v}$, et la dérivée donne donc $\partial_t \mathbf{u} \sim \frac{\exp(i\omega n\Delta t) - \exp(i\omega(n-1)\Delta t)}{\Delta t} \mathbf{v} = \frac{1 - \exp(-i\omega\Delta t)}{\Delta t} \mathbf{u}_n$.

De ces deux expressions de la dérivée, en continu et en discret, on déduit l'analogie :

$$\frac{1 - e^{-i\omega\Delta t}}{\Delta t} \simeq i\bar{\omega},$$

puis

$$\bar{\omega} \simeq -i \frac{1 - e^{-i\omega\Delta t}}{\Delta t}.$$

Cela amène à la définition des paramètres semi-discrets en temps suivants.

Définition 2.28. On définit les paramètres optimisés par

$$(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \beta_1^*, \beta_2^*) := \underset{(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^4}{\operatorname{argmin}} \max_{\omega \in [\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}], k \in [\frac{\pi}{Y}, \frac{\pi}{\Delta Y}]} \left(\varrho \left(\mathcal{R}(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \bar{\omega}, k) \right) \right). \quad (2.56)$$

Les paramètres définis sans prendre en compte les fréquences discrètes étant, dans tous les cas tests réalisés, une moins bonne approximation en général, que ceux semi-discrets en temps, nous n'utiliserons que les paramètres semi-discrets en temps de la Définition 2.28.

Enfin, on définit deux types de paramètres optimisés :

- le paramètre *one-sided* α_{OS} , pris avec $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$,
- le paramètre *two-sided* α_{TS} , pris avec $\alpha_1 = \beta_1$ et $\alpha_2 = \beta_2$,

Notons que l'on ne présentera pas de cas où $\alpha \neq \beta$ dans les résultats numériques, en raison du trop grand nombre de degrés de liberté que l'on aurait dans ce cas, et donc de la difficulté à optimiser le taux de convergence et d'étudier les minimums numériques. Néanmoins, on pourrait accélérer davantage la convergence en optimisant sur l'ensemble complet $(\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2) \in (\mathbb{R}^{+*})^4$ sans contrainte supplémentaire sur les coefficients.

2.6 Résultats numériques

Cette section a pour but d'illustrer le comportement de l'algorithme d'OSWR pour le problème d'Oseen. Les résultats numériques sont obtenus à partir d'un code éléments finis FREEFEM++ [69], en utilisant des éléments finis de type Crouzeix-Raviart 2D, c'est-à-dire affines sur chaque maille et continus au centre de l'arête commune à deux mailles adjacentes pour les composantes de la vitesse, et constants sur chaque maille pour la pression. La résolution des systèmes linéaires associés est effectuée avec la librairie UMFPACK (et donc un solveur LU multifrontal). La résolution temporelle se fait par un schéma d'Euler implicite. Sauf mention contraire, nous résolvons le problème d'Oseen dans le carré unité $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$, sur la fenêtre temporelle $]0, 1[$ (i.e. $T = 1$).

Dans les différents cas tests présentés, nous ferons varier les paramètres de discrétisation. Trois raffinements sont définis, pour le pas de temps Δt et de maillage h , que l'on prendra égaux :

- raffinement R_1 , avec $\Delta t = h = 0.042$,
- raffinement R_2 , avec $\Delta t = h = 0.021$,
- raffinement R_3 , avec $\Delta t = h = 0.010$.

Le problème d'Oseen (2.11) dépend de deux paramètres physiques : le coefficient de diffusion ν et le champ d'advection \mathbf{b} que nous ferons varier. Toutefois, en raison des instabilités numériques sur le problème d'Oseen, nous sommes contraints de nous limiter à des coefficients de diffusion suffisamment élevés par rapport à la norme du champ d'advection, car le nombre de Péclet

$$\text{Pe} := \frac{\|\mathbf{b}\|_{\Omega} h}{2\nu}$$

doit toujours rester strictement plus petit que 1 pour assurer l'absence d'oscillations numériques, voir par exemple [39, Page 125].

Pour la décomposition de domaine, nous ne regardons que l'algorithme sur l'erreur, c'est-à-dire que la solution exacte recherchée est $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, 0)$, que les conditions limites sur $\partial\Omega$ sont de Dirichlet homogène, et que la condition initiale est $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Sauf mention contraire, la décomposition de domaine est réalisée avec deux domaines, de frontière verticale $\Gamma_{12} = \{x = 0.5\}$. Les données de Robin initiales $(g_i^0, \xi_i^0)_{i \in \{1,2\}}$ sont prises aléatoirement entre 0 et 1. Les paramètres de Robin optimisés sont ceux définis par la formule (2.56) de la Section 2.5.2. Les normes considérées dans tous les cas sont $L^\infty([0, T], V)$ et $L^2([0, T], H)$ pour la vitesse, et $L^2([0, T], L^2(\Omega))$ pour la pression. Notons que puisque la pression ne converge pas, nous ne présenterons ici que la pression corrigée définie dans le Théorème 2.21.

Enfin, notons que les paramètres optimisés *one-sided* et *two-sided* sont déterminés numériquement avec la fonction de minimisation *fminsearch* d'OCTAVE appliquée au problème (2.56).

La première section illustre la convergence en *one-sided* et présente une analyse des paramètres de Robin optimisés. La deuxième section porte sur les paramètres optimisés *two-sided*. La troisième section permet d'observer le comportement de l'algorithme OSWR en fonction du nombre de sous-domaines. Enfin, la dernière partie présente un cas plus réaliste de géométrie de domaine et de champ d'advection.

2.6.1 Optimisation des paramètres de Robin en *one-sided*

Dans cette section, nous allons étudier la dépendance de la convergence de l'algorithme au paramètre de Robin pour le cas *one-sided*. Sur les Figures 2.1, 2.2 et 2.3, nous traçons l'erreur relative (par rapport à la première itération) obtenue au bout de 25 itérations de décomposition de domaine, en fonction du paramètre de Robin. Nous faisons varier le champ d'advection $\mathbf{b} = (1, 1)^T$, $\mathbf{b} = (1, 0)^T$, $\mathbf{b} = (0, 1)^T$, pour les cas tests respectivement désignés par 1, 2 et 3. Ces cas correspondent respectivement à une advection orientée à 45° de l'interface, perpendiculaire à l'interface et parallèle à l'interface. Dans les trois cas, le paramètre de diffusion et le raffinement varient. Enfin, le paramètre optimisé est représenté par un rond noir sur les figures et ses valeurs sont données par le Tableau 2.1 suivant.

Précisons qu'en raison de la contrainte sur le nombre de Péclet, pour $\nu = 0.03$, nous ne considérons que le raffinement 3.

Cas test 1				Cas test 2				Cas test 3			
ν	R ₁	R ₂	R ₃	ν	R ₁	R ₂	R ₃	ν	R ₁	R ₂	R ₃
1	0.037	0.026	0.018	1	0.037	0.026	0.019	1	0.037	0.026	0.019
0.3	0.122	0.083	0.058	0.3	0.119	0.084	0.059	0.3	0.123	0.085	0.059
0.1	0.206	0.154	0.115	0.1	0.228	0.168	0.122	0.1	0.222	0.170	0.124
0.03	—	—	0.150	0.03	—	—	0.157	0.03	—	—	0.197

TABLE 2.1 : Paramètres de Robin *one-sided* optimisés semi-discrets en temps en fonction du raffinement (de gauche à droite dans chaque tableau) et du coefficient de diffusion (de haut en bas), pour les cas tests 1, 2 et 3.

Dans tous les cas, exceptés ceux avec une diffusion faible ($\nu = 0.03$), les courbes obtenues sur les Figures 2.1, 2.2 et 2.3 pour les deux normes de vitesse et celle de pression admettent un unique minimum qui coïncide pour les trois courbes. Cela rend pertinent l'objectif de trouver un unique paramètre le plus efficace possible, et qui sera relativement optimal quelle que soit la grandeur étudiée pour mesurer la convergence. Par ailleurs, dans ces cas, on observe que le paramètre optimisé α_{OS} est effectivement une très bonne estimation du paramètre optimal. Cela est particulièrement important pour les diffusions importantes ($\nu = 1$) où les courbes sont très piquées au voisinage de l'optimum. Dans ce cas, un paramètre même assez proche de l'optimum donne une convergence beaucoup moins efficace. On constate néanmoins que le paramètre optimisé est effectivement suffisamment proche de l'optimum pour donner une très bonne convergence.

Pour le cas test 3 (où le champ d'advection est parallèle à l'interface), et dans le cas d'un raffinement élevé et d'une diffusion faible (et donc d'une importance relative supérieure de l'advection), on constate une dégradation de l'estimation du paramètre optimal, mais aussi une sorte de plateau d'optimalité (pour α variant de 0.3 à 0.6), à l'intérieur duquel le choix du paramètre influence assez peu la convergence. Néanmoins, le paramètre optimisé α_{OS} est plus petit que 0.3, et la convergence obtenue est donc moins bonne.

On observe une légère dégradation du paramètre optimisé à mesure que l'on raffine les pas de temps et le maillage, en particulier en présence d'une faible diffusion. Toutefois, avec un plus grand nombre d'itérations de décomposition de domaine, la convergence atteindrait son régime linéaire, sur lequel nous basons la détermination des paramètres optimisés. Ces derniers seraient alors plus proches des valeurs optimales.

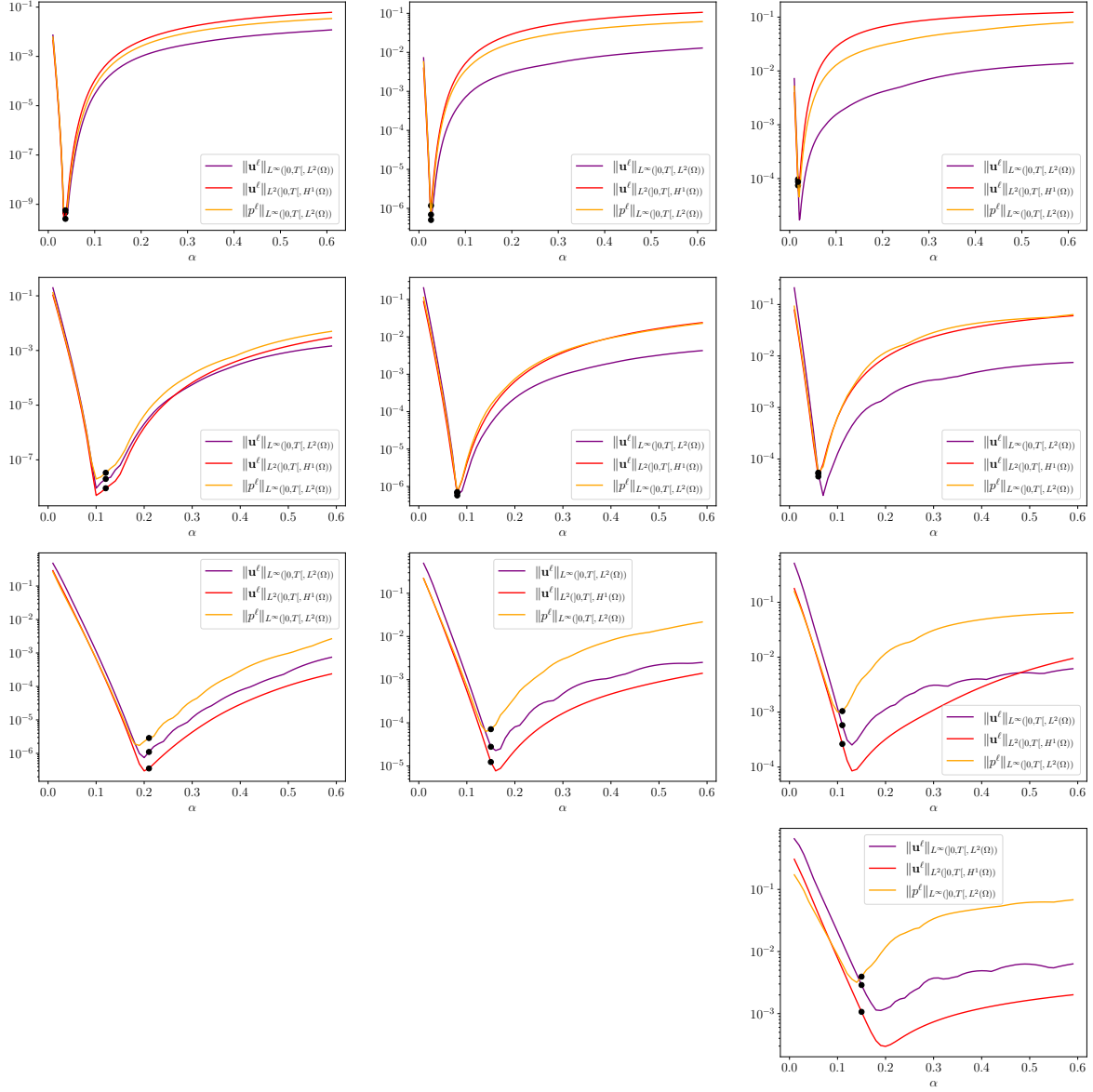


FIGURE 2.1 : Cas test 1 - Erreur relative après 25 itérations en fonction de α , pour $\mathbf{b} = (1, 1)^T$, avec, de haut en bas $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$ et de gauche à droite, $\text{raf} = 1, 2, 3$.

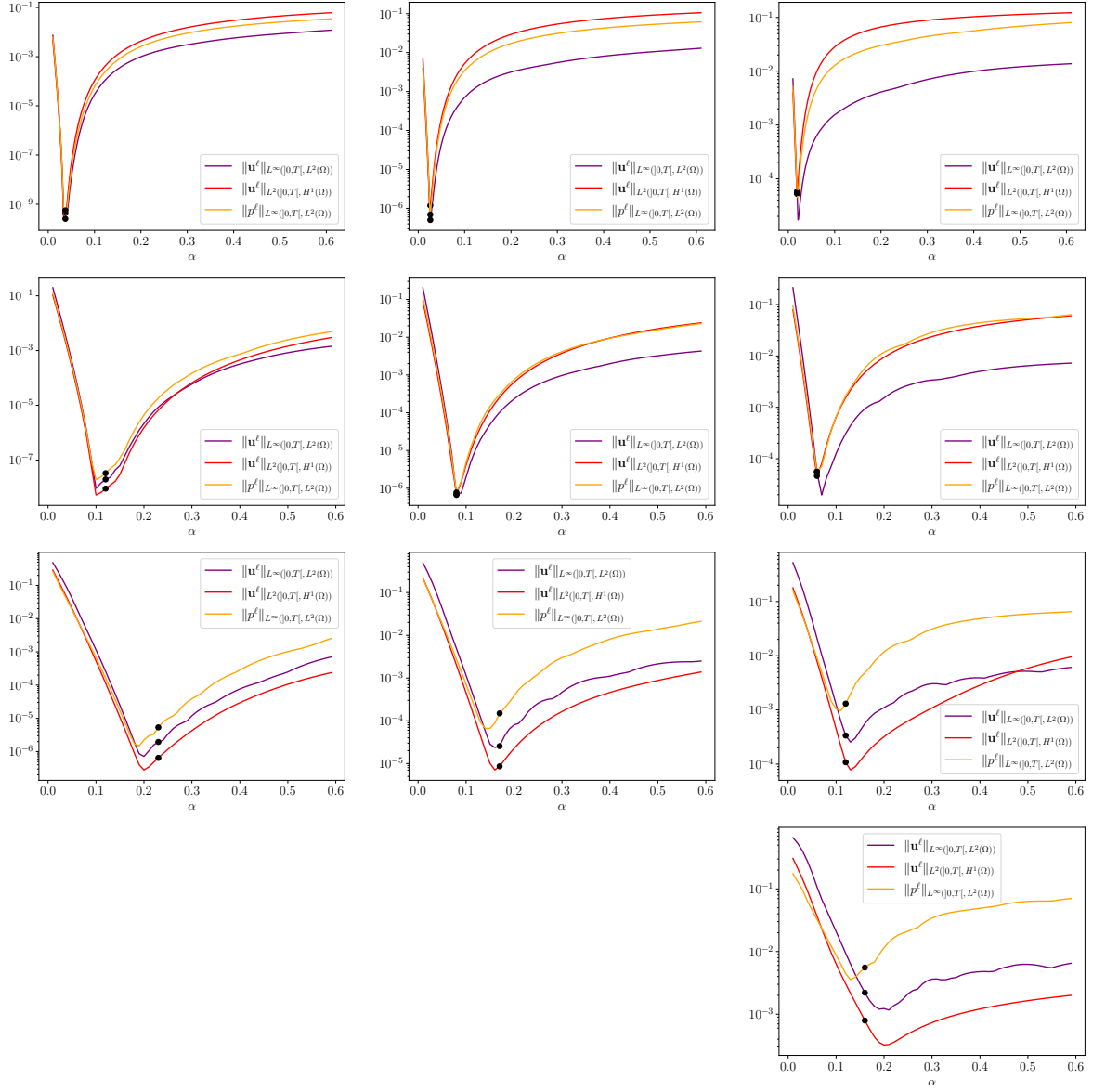


FIGURE 2.2 : Cas test 2 - Erreur relative après 25 itérations en fonction de α , pour $\mathbf{b} = (1, 0)^T$, avec, de haut en bas $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$ et de gauche à droite, $\text{raf} = 1, 2, 3$.

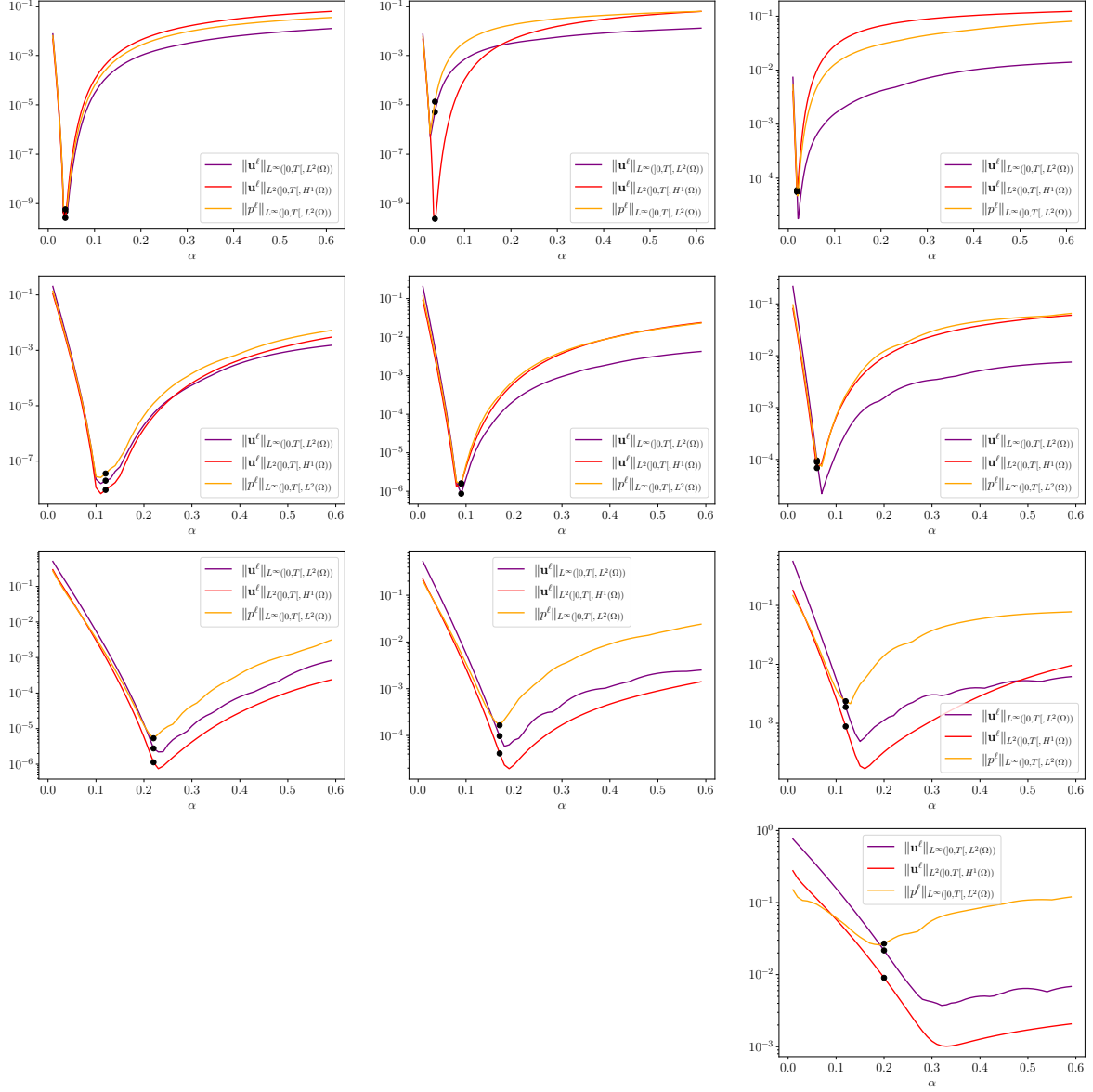


FIGURE 2.3 : Cas test 3 - Erreur relative après 25 itérations en fonction de α , pour $\mathbf{b} = (0, 1)^T$, avec, de haut en bas $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$ et de gauche à droite, $\text{raf} = 1, 2, 3$.

2.6.2 Optimisation des paramètres de Robin en *two-sided*

Le Théorème 2.16 a montré que l'algorithme OSWR converge en *two-sided*, et le Théorème 2.24 a amené à une formule de recalibrage de la pression qui fonctionne aussi dans ce cas. Nous observons que l'amélioration du *two-sided* par rapport au *one-sided* n'est sensible qu'avec un raffinement de maillage espace-temps important. Pour le comprendre, nous traçons sur la Figure 2.4 le ratio des deux paramètres optimisés (de part et d'autre de l'interface) en fonction du raffinement. On observe alors que, tant que le raffinement est grossier, les coefficients obtenus sont soit égaux (quand l'ordonnée est 1), soit très proches. Dans ces cas, les paramètres optimisés *two-sided* donnent une convergence très proche de celle que l'on aurait obtenue avec les paramètres optimisés *one-sided*. Ces paramètres seront néanmoins réellement différents dès que le raffinement est augmenté, et ils seront alors intéressants à utiliser sur des simulations à plus grande échelle.

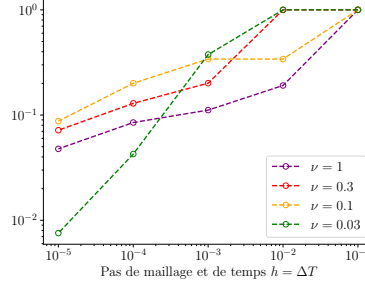


FIGURE 2.4 : Ratio des paramètres optimisés *two-sided* en fonction du raffinement pour le champ d'advection $\mathbf{b} = (1, 1)^T$.

Nous allons toutefois illustrer la convergence dans le cas *two-sided*, avec $\nu = 1$, le raffinement 3 et le champ d'advection $\mathbf{b} = (1, 1)^T$ où les deux paramètres sont effectivement différents (ce qui correspond au point d'abscisse 10^{-2} de la courbe violette sur la Figure 2.4). Nous allons alors comparer les résultats numériques en *one-sided* et *two-sided*, et l'on reprend les paramètres optimisés obtenus dans ces deux cas dans le Tableau 2.2.

	α_{OS}	α_{TS}
Paramètres de Robin	0.0185	(0.0400, 0.0076)

TABLE 2.2 : Paramètres de Robin optimisés *one-sided* et *two-sided*.

Nous représentons aussi sur la Figure 2.5 les courbes de niveaux (en échelle logarithmique) du facteur de convergence semi-discret en temps (sur la plage de fréquence $\omega \in [\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}]$ et $k \in [\frac{\pi}{Y}, \frac{\pi}{\Delta Y}]$), obtenu par transformée de Fourier, en fonction des paramètres *two-sided* (α_1, α_2) . Nous plaçons un rond noir à la position du paramètre α_{OS} (nécessairement sur la diagonale, par définition) et un rond rouge pour le paramètre α_{TS} . On observe donc effectivement un facteur de convergence plus bas pour le paramètre *two-sided*, mais d'un ordre de grandeur très proche ($10^{-0.26}$ contre $10^{-0.20}$), ce qui ne présage pas d'un grand écart dans les deux convergences.

De plus, le paramètre optimisé *two-sided* est proche d'une zone de très forte variation du facteur de convergence. Ainsi, un faible écart entre le paramètre optimisé et le paramètre optimal risque d'engendrer une perte de vitesse de convergence. Toutes ces raisons font que l'on ne s'attend pas à un gain de vitesse de convergence majeur pour les paramètres *two-sided* dans ce cas test.

On trace alors sur la Figure 2.6 l'erreur relative de l'algorithme OSWR obtenue au cours des itérations, dans les deux normes de vitesse et celle de pression.

On observe alors bien la convergence de la vitesse et de la pression corrigée au cours des itérations d'OSWR vers la précision machine avec des paramètres optimisés *two-sided*. Néanmoins, bien que les deux coefficients soient relativement différents, et donc aussi différents du cas *one-sided*, la vitesse de convergence est extrêmement proche : elle est légèrement plus rapide sur les premières itérations (jusqu'à environ 40 itérations), puis légèrement moins rapide.

Ainsi, ce cas permet bien d'illustrer la convergence avec des paramètres différents sur les deux sous-domaines, ce choix n'apporte pas de gain. Nous pensons qu'il est nécessaire d'utiliser des pas de maillages et de temps bien plus fins pour obtenir des comportements différents et une accélération de la convergence en *two-sided*.

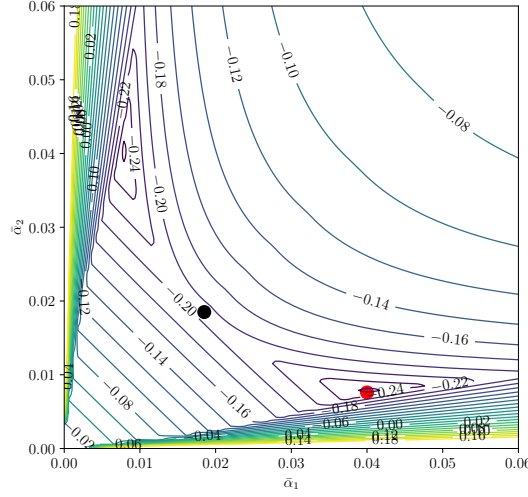


FIGURE 2.5 : Taux de convergence semi-discret en temps en *two-sided*, en échelle logarithmique, avec le paramètre α_{OS} (rond noir) et α_{TS} (rond rouge).

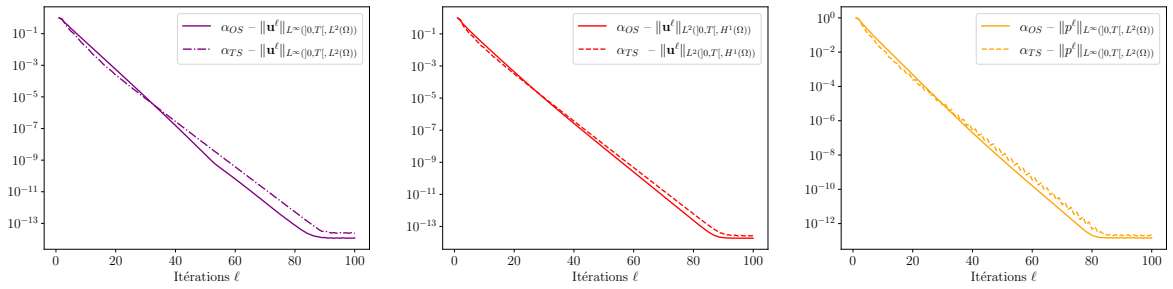


FIGURE 2.6 : Convergence au cours des itérations de décomposition de domaine, avec le paramètre optimisé semi-discret en temps *one-sided* α_{OS} et *two-sided* α_{TS} , avec, de gauche à droite, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$ et $\|p^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$.

2.6.3 Évolution de la convergence selon le nombre de sous-domaines

Dans cette section, nous souhaitons étudier le comportement de la convergence en fonction des itérations, pour différents nombres de sous-domaines. Deux décompositions du domaine sont envisagées : en bandes, et en grilles, avec le raffinement R_3 . Sur les Figures 2.7 et 2.8, nous traçons l'erreur relative (par rapport à la première itération) en fonction des itérations de décomposition de domaine. Nous travaillons toujours sur l'algorithme sur l'erreur dans le carré unité et l'intervalle de temps $]0, 1[$. Le coefficient de diffusion considéré est $\nu = 0.03$, et le champ d'advection est $\mathbf{b} = (1, 1)^T$. Notons que pour chaque cas, puisque la taille de l'interface peut changer, nous utilisons le paramètre optimisé de Robin *one-sided* associé, donné dans le Tableau 2.3.

En bandes					En grilles				
M	2	4	8	16	M	4	9	16	25
α_{OS}	0.150	0.150	0.150	0.150	α_{OS}	0.178	0.172	0.134	0.111

TABLE 2.3 : Paramètres de Robin *one-sided* optimisé semi-discrets en temps en fonction du nombre de sous-domaines.

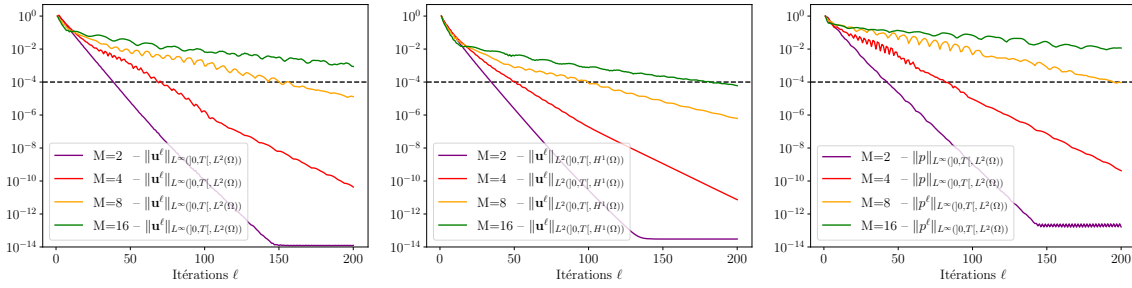


FIGURE 2.7 : Convergence au cours des itérations pour différents nombres de sous-domaines en bandes (2, 4, 8 et 16), avec, de gauche à droite, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$ et $\|p^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$.

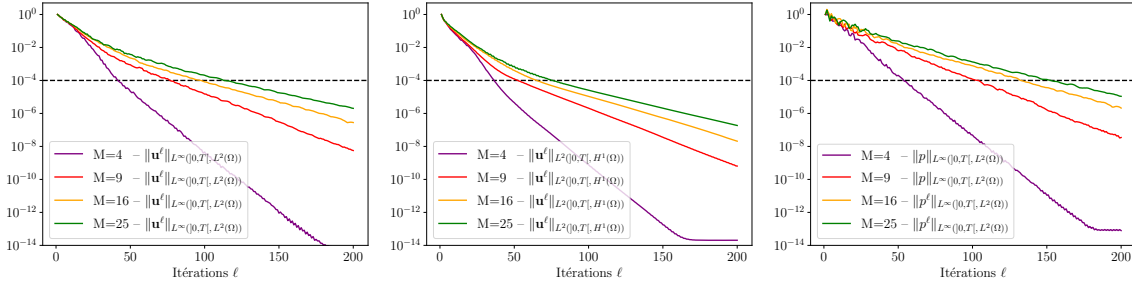


FIGURE 2.8 : Convergence au cours des itérations pour différents nombres de sous-domaines en grilles (4, 9, 16 et 25), avec, de gauche à droite, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$ et $\|p^\ell\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$.

Nous remarquons tout d'abord que, comme attendu, la convergence est conservée quel que soit le nombre de sous-domaines. Toutefois, pour les deux géométries de décomposition, on remarque une forte dégradation de la convergence à mesure de l'augmentation du nombre de sous-domaines. Ce comportement est connu en décomposition de domaine : puisque les échanges d'informations se font de proche en proche, plus il y a de sous-domaines, plus l'information met du temps (en termes de nombre d'itérations) pour se propager. Dans le cas en bandes, la convergence est environ deux fois plus lente si l'on double le nombre de sous-domaines. Dans le cas en grilles, la dégradation est plus limitée, et la convergence est plus rapide qu'en bandes, à nombre de sous-domaines fixé. En effet, prenons, par exemple, le cas où $M = 16$ sous-domaines, pour la vitesse en norme $L^\infty([0,T],(L^2(\Omega))^2)$. Alors qu'il faut plus de 200 itérations en bandes pour atteindre une erreur de 10^{-4} , il en faut un peu moins de 100 dans le cas en grilles. De même, on observe que la convergence avec 25 domaines en grilles est plus rapide que celle avec 16 domaines en bandes. Si l'on veut fixer le nombre de sous-domaines (par exemple en fonction du nombre de processeurs disponibles), il semble donc nettement préférable

d'utiliser une décomposition en grilles plutôt qu'en bandes.

Nous souhaitons alors quantifier ces observations, et déterminer quel gain en temps de calcul est obtenu en utilisant davantage de sous-domaines. En effet, bien qu'il faille effectuer davantage d'itérations, celles-ci sont beaucoup plus rapides. Pour analyser cela, nous reprenons dans les Tableaux 2.4 et 2.5 le nombre d'itérations nécessaires pour réduire l'erreur d'un facteur 10^{-4} , ainsi que le temps de calcul associé. Notons que, afin de ne pas prendre en compte certains éléments techniques liés à la programmation en FREEFEM++, ce temps ne prend en compte que la factorisation LU et la résolution des systèmes linéaires (à chaque pas de temps et chaque itération d'OSWR), qui sont les principales étapes de l'algorithme. Précisons que la parallélisation a été effectuée à partir du module *mpi* de FREEFEM++. Par ailleurs, les temps (en seconde) présentés dans le Tableau 2.4 et 2.5 sont ceux obtenus en moyenne sur 10 essais.

	$\ \mathbf{u}\ _{L^\infty([0,T[,L^2(\Omega))}$				$\ \mathbf{u}\ _{L^2([0,T[,H^1(\Omega))}$				$\ p\ _{L^\infty([0,T[,L^2(\Omega))}$			
M	2	4	8	16	2	4	8	16	2	4	8	16
L	39	71	157	326	35	51	100	182	43	82	195	448
Temps (s)	116.2	86.4	65.8	45.9	100.2	62.1	41.3	25.6	122.4	96.7	79.6	63.5

TABLE 2.4 : Nombre d'itérations L et temps de calcul associé pour réduire l'erreur relative d'un facteur 10^{-4} en fonction du nombre de sous-domaines – Configuration en bandes.

	$\ \mathbf{u}\ _{L^\infty([0,T[,L^2(\Omega))}$				$\ \mathbf{u}\ _{L^2([0,T[,H^1(\Omega))}$				$\ p\ _{L^\infty([0,T[,L^2(\Omega))}$			
M	4	9	16	25	4	9	16	25	4	9	16	25
L	42	77	98	113	37	53	65	76	54	105	133	153
Temps (s)	58.9	45.3	23.1	16.4	51.8	30.4	15.1	10.8	75.4	61.0	30.9	22.0

TABLE 2.5 : Nombre d'itérations L et temps de calcul associé pour réduire l'erreur relative d'un facteur 10^{-4} en fonction du nombre de sous-domaines – Configuration en grilles.

On observe tout d'abord que la décomposition en bandes est toujours plus lente pour atteindre l'erreur souhaitée que la décomposition en grilles. En effet, en norme $L^\infty([0,T[,L^2(\Omega))$, avec 4 (respectivement 16) sous-domaines, il faut 86.4s en bandes, contre 58.9s en grilles (respectivement 45.9s et 16.4s). Sur l'autre norme de la vitesse ou bien celle de la pression, les valeurs sont différentes, mais le comportement est similaire.

Par ailleurs, dans le cas en bandes comme en grilles, le temps de calcul diminue à mesure que l'on augmente le nombre de sous-domaines. Finalement, le calcul est environ 7 fois plus rapide en passant de 2 (en bandes) à 25 sous-domaines (en grilles). Ainsi, si l'algorithme OSWR est peut-être lent avec deux sous-domaines, il sera nettement accéléré en utilisant davantage de sous-domaines.

Toutefois, l'augmentation du nombre d'itérations nécessaire pour réduire l'erreur d'un facteur 10^{-4} est assez importante lorsque M augmente, et il sera nécessaire d'ajouter une méthodologie de type préconditionneur grille grossière (voir [34]) pour pouvoir augmenter le nombre de sous-domaines de manière importante sans avoir à trop accroître le nombre d'itérations.

Enfin, comparons ces temps de calcul avec celui obtenu par une résolution monodomaine du problème d'Oseen. Là encore, le temps considéré est uniquement celui des résolutions des systèmes linéaires. Si ces résolutions sont aussi effectuées avec un solveur LU, il faut alors 21.2s, ce qui est équivalent à ce que nous avons obtenu avec le découpage le plus rapide, avec 25 sous-domaines. Toutefois, l'intérêt de cet algorithme est qu'il permet de résoudre des problèmes de très grande taille, pour lesquels une factorisation LU est impossible sur le maillage complet, mais possible sur les maillages des sous-domaines (qui sont plus petits). Dans ce cas, la résolution monodomaine ne peut pas se faire avec un solveur direct et un solveur itératif est indispensable. Nous effectuons donc la résolution avec le solveur GMRES inclus dans FREEFEM++¹⁰. Le temps obtenu est de 8338s ce qui semble un temps de calcul déraisonnable par rapport à ce que l'on avait avec le solveur LU, c'est le temps obtenu sans aucun paramétrage particulier pour GMRES. Sur des applications pratiques, on aurait fait appel à un préconditionneur afin d'accélérer la convergence. Néanmoins, sans préconditionneur (ni pour la

¹⁰Notons que nous ne paramétrons pas l'initialisation de l'algorithme, qui pourrait être effectuée en partant du pas de temps précédent afin de limiter le nombre d'itérations nécessaire.

décomposition de domaine, ni pour GMRES) l'algorithme OSWR est une méthode itérative bien plus efficace. On voit alors bien l'intérêt de la décomposition de domaine pour accélérer la résolution pour des cas tests de grande taille où le recours à un solveur direct n'est pas possible.

2.6.4 Cas test plus réaliste

On souhaite désormais observer le comportement de l'algorithme OSWR dans un cas plus réaliste. On reprend pour cela le cas présenté dans [19, Section 10.4]. Le domaine d'étude est représenté sur la Figure 2.9, où l'on fait apparaître la décomposition en 9 sous-domaines sans recouvrement. On résout toujours le problème d'Oseen (2.1), cette fois sur la fenêtre temporelle $]0, 5[$ (i.e. $T=5$), avec $\nu = 0.01$ (i.e. un nombre de Reynolds de 100). Le terme source considéré, à support dans Ω_f , est

$$\mathbf{f}(x, y, t) = \begin{pmatrix} -2((\sin(\pi t)) + \cos(4\pi t)) \mathbb{1}_{\Omega_f}(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.57)$$

et la condition initiale est $\mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$. Sur le bord du domaine, on impose une condition de Dirichlet homogène.

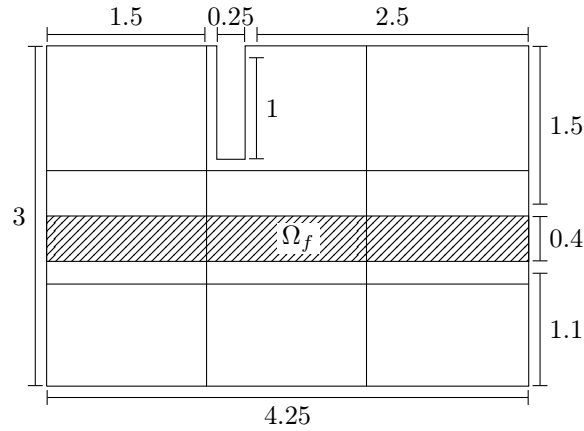


FIGURE 2.9 : Géométrie du domaine et partition en sous-domaines pour le cas réaliste.

Afin d'étudier le comportement du problème d'Oseen avec un champ d'advection moins régulier que les cas précédents, nous prenons pour \mathbf{b} la solution (en vitesse) du problème de Navier-Stokes correspondant obtenue au temps final, que nous représentons sur la Figure 2.10. C'est un champ d'advection plausible pour résoudre le problème d'Oseen, et qui s'approche ce que l'on aura pour une résolution du problème de Navier-Stokes.

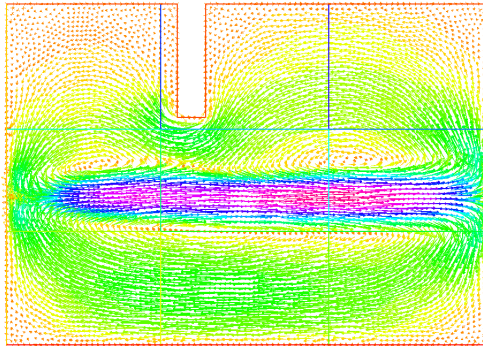


FIGURE 2.10 : Champ d'advection dans le cas réaliste.

Le maillage utilisé est triangulaire, avec des mailles régulières de taille $h = 0.05$, et le pas de temps $\Delta t = 0.05$.

Il faut alors faire un choix pour les données de Robin initiales. Un choix pertinent est d'appliquer l'opérateur de Robin à la donnée initiale. Néanmoins, pour le problème d'Oseen (comme cela était déjà nécessaire pour le problème de Stokes), l'opérateur de Robin s'applique au couple vitesse/pression.

Pour cela, un premier problème (peu coûteux) portant uniquement sur la pression est résolu sur une grille grossière en temps. La méthodologie est issue de [19, Section 10.4], où elle est explicitée en détail.

Nous traçons sur la Figure 2.11 la courbe de convergence de la solution au cours des itérations d'OSWR en *one-sided* avec $\alpha = 0.5$ (c'est un choix arbitraire qui a juste vocation à illustrer la convergence, mais pas d'être optimal). Nous observons alors la convergence de l'algorithme pour la vitesse (dans les deux normes) et la pression corrigée, et que $(\mathbf{u}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ et $(p^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ en norme $L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))$ convergent pratiquement à la même vitesse.

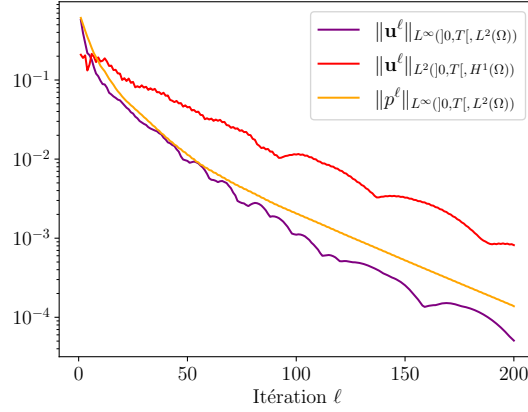


FIGURE 2.11 : Convergence au cours des itérations de décomposition de domaine, avec $\alpha = 0.5$, en $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))}$, $\|\mathbf{u}^\ell\|_{L^2(]0,T[,H^1(\Omega))}$ et $\|p^\ell\|_{L^\infty(]0,T[,L^2(\Omega))}$ dans le cas réaliste.

Chapitre 3

Algorithme Pararéel-OSWR pour le problème d'Oseen

Sommaire

3.1	Algorithme Pararéel	55
3.2	Formulation faible multidomaine spatio-temporelle	56
3.3	Algorithme couplé Pararéel-OSWR	57
3.4	Convergence par estimation d'énergie	61
3.5	Recalibrage de la pression	65
3.6	Résultats numériques	66
3.6.1	Dépendance au nombre d'itérations d'OSWR	67
3.6.2	Paramètre de Robin optimisés	69

La parallélisation de la résolution des équations aux dérivées partielles à l'aide d'algorithmes de décomposition de domaine peut s'avérer insuffisante pour accélérer davantage la résolution numérique des problèmes les plus gros. Il est alors possible de combiner cette approche avec une méthode de parallélisation temporelle. Nous nous intéressons ici à la méthode Pararéel, introduite par [86], qui repose sur une résolution itérative sur des sous-fenêtres.

Dans ce chapitre, nous proposons et analysons une méthode parallèle exploitant simultanément les directions spatiale et temporelle. Cette approche, baptisée « Pararéel-OSWR », qui résulte de l'association de l'algorithme Pararéel avec des itérations incomplètes de l'algorithme OSWR, est étudié dans [64, 55, 54, 18]. Une première approche pour le problème de Stokes est proposée dans [17, Section 2.11]. Pour prouver la convergence, la méthodologie repose sur une preuve par estimation d'énergie, en combinant les majorations obtenues pour la partie Pararéel et celles obtenues pour la partie OSWR. Nous présentons dans ce chapitre l'algorithme couplé Pararéel-OSWR pour le problème (2.1), et démontrons sa convergence pour la vitesse, ainsi que pour la pression, après une correction similaire à celle mise en place pour l'algorithme OSWR.

Nous débutons par un rappel de l'algorithme Pararéel dans la Section 3.1. La Section 3.2 introduit ensuite le problème couplé sur les fenêtres temporelles et les sous-domaines, équivalent au problème monodomaine-monofenêtre. L'algorithme Pararéel-OSWR est détaillé dans la Section 3.3, avant que nous n'établissions sa convergence pour la vitesse dans la Section 3.4 et pour la pression dans la Section 3.5. Enfin, des résultats numériques illustrant le comportement de l'algorithme sont présentés dans la Section 3.6.

3.1 Algorithme Pararéel

L'algorithme Pararéel, introduit par [86], est un algorithme itératif de parallélisation en temps pour la résolution d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Il repose sur le découpage de la fenêtre d'étude en temps $]0, T[$ en N sous-fenêtres $(\mathcal{T}_n)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$, de la forme $\mathcal{T}_n =]T_n, T_{n+1}[$ avec $n \in \llbracket 0, N - 1 \rrbracket$. L'objectif est de calculer une suite de conditions initiales au début de chacune des fenêtres temporelles.

Pour cela, partant d'une première famille de conditions initiales $(U_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ au début de chaque fenêtre temporelle, on calcule, successivement, une nouvelle famille $(U_n^k)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ au cours des itérations k , avec l'objectif de faire converger cette suite vers les véritables valeurs de la solution au début de chaque fenêtre \mathcal{T}_n . Une fois ces valeurs déterminées, il est possible de calculer la solution dans chacune des fenêtres, en partant de leur condition initiale propre. Tout l'enjeu est de calculer, à chaque itération k , la nouvelle famille $(U_n^k)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ avec une formule de correction (3.1). Celle-ci repose sur une combinaison linéaire obtenue *via* deux opérateurs :

- un opérateur grossier, $\mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \tilde{U})$ qui donne une approximation peu précise de $U(T_{n+1})$, où U est la solution de l'équation étudiée, partant d'une condition initiale $U(T_n) = \tilde{U}$,
- un opérateur fin, $\mathcal{F}(\mathcal{T}_n, \tilde{U})_2$ qui donne une approximation précise de $U(T_{n+1})$ partant d'une condition initiale $U(T_n) = \tilde{U}$.

Explicitons cet algorithme dans le cas où nous souhaitons résoudre une équation aux dérivées partielles, dont la condition initiale est donnée par U_0 .

Algorithme 3 (Pararéel)

Choisir une donnée initiale à chaque fenêtre temporelle $(U_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, avec $U_0^0 = U_0$.

pour $k = 0, 1, \dots$ **faire**

1. $U_0^{k+1} = U_0$.

2. Faire les corrections :

pour $n = 0, \dots, N-1$ **faire**

$$U_{n+1}^{k+1} = \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, U_n^{k+1}) + \mathcal{F}(\mathcal{T}_n, U_n^k) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, U_n^k). \quad (3.1)$$

fin pour

fin pour

Remarque 3.1. Usuellement, la donnée initiale (U_n^0) correspond à une approximation de $u(T_n)$, et est calculée par le solveur grossier. Partant de $U_0^0 = U_0$, on calcule itérativement $U_{n+1}^0 = \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, U_n^0)$, pour $n = 0, \dots, N-2$.

Pour définir l'algorithme, il ne reste donc qu'à expliciter deux opérateurs \mathcal{F} et \mathcal{G} . Généralement, on peut penser à deux solveurs de type Euler Implicite, où le solveur fin \mathcal{F} est associé à un pas de temps fin, et le solveur grossier \mathcal{G} est associé à un pas de temps grossier.

Dans ce chapitre, nous explorons une autre voie : la résolution coûteuse, celle du solveur fin, sera réalisée avec des itérations incomplètes de l'algorithme OSWR (i.e. un nombre fini d'itérations d'OSWR fixé), en parallèle en espace. Ainsi, à chaque itération de Pararéel, et sur chaque fenêtre \mathcal{T}_n , nous serons amenés à utiliser cet algorithme de décomposition de domaine.

À cette fin, nous allons réécrire le problème d'Oseen (2.1) sur une grille espace-temps composée du croisement des fenêtres temporelles $(\mathcal{T}_n)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ et des domaines $(\Omega_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$.

3.2 Formulation faible multidomaine spatio-temporelle

On reprend les notations chapitre sur OSWR pur pour le problème d'Oseen, introduite dans la Section 2.1.2.1, et l'on introduit aussi l'espace

$$K := \left\{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2, \mathbf{u}|_{\Omega_i} \in X_i \right\}.$$

On considère toujours la même partition du domaine Ω en M sous-domaines sans recouvrement $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M \bar{\Omega}_i$. On définit également les fenêtres temporelles $\mathcal{T}_n =]T_n, T_{n+1}[$, pour $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

Nous allons réécrire une version couplée du problème d'Oseen, sur les fenêtres $(\mathcal{T}_n)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ en temps et les domaines Ω_i . Ce problème est le pendant de (2.14)-(2.15) défini pour le cas de l'algorithme OSWR pur, où les sous-problèmes sont désormais posés sur \mathcal{T}_n au lieu de $]0, T[$, avec pour condition initiale la solution au temps final de la fenêtre précédente.

On peut alors introduire le problème couplé suivant : trouver $(\mathbf{u}_{in}, p_{in}, \boldsymbol{\lambda}_{in})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, on a $\mathbf{u}_{in} \in M_i = L^2(\mathcal{T}_n, X_i) \cap L^\infty(\mathcal{T}_n, H_i)$ et $p_{in} \in \mathcal{W}^{-1, \infty}(\mathcal{T}_n, L^2(\Omega_i))$, et les quantités de Robin aux frontières $\boldsymbol{\lambda}_{in} \in \mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'(\mathcal{T}_n))$, et vérifient

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_{in}, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_{in}, \mathbf{v}) - ((p_{in}, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = d_i(\boldsymbol{\lambda}_{in}, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, X_i), \quad (3.2a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{in}, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (3.2b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{in} \cdot \mathbf{v} \right) (T_n) = \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{i, n-1} \cdot \mathbf{v} \right) (T_n) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, V_i), \quad (3.2c)$$

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} ((p_{in}, 1))_{\Omega_i} = 0, \quad (3.2d)$$

avec la convention $\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{i, -1} \cdot \mathbf{v} \right) (T_0) = \left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{v} \right)$, et muni des relations sur les interfaces, sur \mathcal{T}_n , pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \boldsymbol{\lambda}_{in}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_{in} \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_{in} \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right), \quad (3.3a)$$

et, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$ et \mathbf{v} dans X , nul sur $\Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)$

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_{in}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} + \langle \boldsymbol{\lambda}_{jn}, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_j} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (\mathbf{u}_{in} \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} (\mathbf{u}_{jn} \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}}. \quad (3.3b)$$

Les applications A_i et d_i sont les mêmes que dans le cas de l'algorithme OSWR pur pour le problème d'Oseen de la Section 2.1.2.2, voir (2.12) et (2.13).

Théorème 3.2. Soit $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$ et $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$. Soit (\mathbf{u}, p) solution du problème (2.11) donnée par le Théorème 2.6. Le problème couplé (3.2)-(3.3) admet une unique solution $(\mathbf{u}_{in}, p_{in}, \boldsymbol{\lambda}_{in})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$, qui est telle que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}|_{\Omega_i \times \mathcal{T}_n}$ et $p_{in} = p|_{\Omega_i \times \mathcal{T}_n}$.

Preuve. La preuve est tout à fait similaire à celle pour le problème d'Oseen dans le cas de l'algorithme de OSWR simple dans le Théorème 2.7. L'existence se fait de manière équivalente :

- on définit $\mathbf{u}_{in} = \mathbf{u}|_{\Omega_i \times \mathcal{T}_n}$ et $p_{in} = p|_{\Omega_i \times \mathcal{T}_n}$ avec (\mathbf{u}, p) solution du problème d'Oseen (2.11) sur $\Omega \times]0, T[$,
- on définit les données de Robin sur $\Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n$ comme dans (2.16), en remplaçant $\boldsymbol{\lambda}_i$ par $\boldsymbol{\lambda}_{in}$, \mathbf{u}_i par \mathbf{u}_{in} et p_i par p_{in} ,
- on montre que les données de Robin ainsi définies vérifient les relations (3.3),
- on vérifie que les $(\mathbf{u}_{in}, p_{in}, \boldsymbol{\lambda}_{in})$ vérifient les équations (3.2a), (3.2b) et (3.2d).

Il reste à vérifier que les (\mathbf{u}_{in}) vérifient les conditions initiales (3.2c). Cela s'obtient directement, car la solution \mathbf{u} est continue sur $[0, T]$ à valeur dans H , comme indiqué dans le Théorème 2.6.

La preuve de l'unicité se conduit également de manière similaire à la preuve du Théorème 2.7, en raccordant les solutions sur les sous-domaines et les fenêtres temporelles. On somme ensuite sur les formulations variationnelles (3.2a) sur les sous-domaines Ω_i , et on exploite les relations sur les données de Robin à l'interface (3.3) pour retrouver la formulation variationnelle du problème d'Oseen monodomaine (2.11). On peut ensuite finir la preuve exactement de la même manière. \square

3.3 Algorithme couplé Pararéel-OSWR

Nous souhaitons désormais introduire l'algorithme Pararéel-OSWR afin de résoudre le problème couplé (3.2)-(3.3), c'est-à-dire trouver une suite de solutions $(\mathbf{u}_{in}^k, p_{in}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ qui tendent vers $(\mathbf{u}_{in}, p_{in})$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

L'opérateur \mathcal{F} de l'Algorithme 3 sera un solveur OSWR incomplet, i.e. avec un nombre fini (et fixé) d'itérations de décomposition de domaine, comme nous l'expliciterons par la suite. Pour tout intervalle de temps \mathcal{T} , l'opérateur $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \cdot) : K \rightarrow K$ sera quelconque, mais sera supposé lipschitzien, i.e. $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$,

$$\|\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathbf{u}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathbf{v})\|_K \leq \gamma \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_K, \quad (3.4)$$

avec une constante $\gamma \geq 0$ indépendante de \mathbf{u} et \mathbf{v} .

L'algorithme couplé Pararéel-OSWR est alors donné par l'Algorithme 4, où le solveur fin est désigné par $\text{OSWR}_L(\mathcal{T}, \mathbf{U}_0, (g, \xi))$, qui effectue L itération(s) d'OSWR, sur une fenêtre temporelle \mathcal{T} , en partant d'une donnée initiale U_0 , et de données de Robin aux interfaces g, ξ , de manière similaire à ce que nous avons étudié avec l'Algorithme 1. Nous expliciterons cet opérateur dans l'Algorithme 4'.

Algorithme 4 (Couplage Pararéel-OSWR pour le problème d'Oseen)

1. Choisir des conditions initiales $(\mathbf{U}_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ avec $\mathbf{U}_0^0 = \mathbf{u}_0$.
2. Choisir des données de Robin initiales $(g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$.
3. Faire les itérations de Pararéel :

pour $k = 0, 1, \dots$ **faire**

- a. Pour chaque intervalle de temps $\mathcal{T}_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, faire les L itérations de décomposition de domaine :

$$((\mathbf{u}_{in}^{kL}, (g_{ijn}^{kL}, \xi_{ijn}^{kL})_{j \in \mathcal{I}_i})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}) = \text{OSWR}_L(\mathcal{T}_n, \mathbf{U}_n^k, (g_{ijn}^{k0}, \xi_{ijn}^{k0})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i}).$$

- b. Définir $\mathbf{u}_n^{kL} \in L^2(\mathcal{T}_n, K)$ tel que $\mathbf{u}_n^{kL}|_{\Omega_i} = \mathbf{u}_{in}^{kL}$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

- c. Poser $\mathbf{U}_0^{k+1} = \mathbf{u}_0$, puis,

pour $n = 0, \dots, N-2$ **faire**

- (i). Faire les corrections de Pararéel :

$$\mathbf{U}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_n^{kL}(\mathcal{T}_{n+1}) + \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{U}_n^{k+1}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{U}_n^k) \quad \text{dans } K.$$

- (ii). Mettre à jour les données de Robin à l'interface pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$:

$$g_{ijn}^{k+1,0} = g_{ijn}^{kL}, \quad \text{et} \quad \xi_{ijn}^{k+1,0} = \xi_{ijn}^{kL}.$$

fin pour
fin pour

Remarque 3.3. Comme dans le cas de l'algorithme Pararéel pur, un choix pertinent pour l'étape 1. est l'initialisation des premières conditions initiales à partir du solveur grossier $\mathbf{U}_n^0 = \mathcal{G}(\mathcal{T}_{n-1}, \mathbf{U}_{n-1}^0)$ pour $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$.

De même, l'initialisation 2. des quantités de Robin peut aussi être réalisée à partir de la première approximation de la solution, en appliquant les opérateurs de Robin sur la première solution grossière. Celle-ci n'étant connue que sur les pas de temps grossiers, on peut, par exemple, réaliser une interpolation affine entre le début et la fin de la fenêtre temporelle \mathcal{T}_n .

De manière explicite, désignons par Δt_C le pas de temps grossier. Alors, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, posons $t_n := n\Delta t_C$ et $(U_n^G, P_n^G) := \mathcal{G}(T_n, U_n^0)^1$. Cela permet de définir W_n et P_n , les interpolations linéaires de la solution grossière entre le début et la fin de la fenêtre n , telle que l'on a, quelque soit $t \in]T_n, T_{n+1}[$,

$$\begin{aligned} W_n(t) &= \frac{1}{\Delta t_C} ((t_{n+1} - t)U_n^G + (t - t_n)U_{n+1}^G), \\ Q_n(t) &= \frac{1}{\Delta t_C} ((t_{n+1} - t)P_n^G + (t - t_n)P_{n+1}^G). \end{aligned}$$

Notons qu'à la fenêtre \mathcal{T}_0 , puisque nous ne connaissons pas de valeur pour la pression en début de fenêtre, nous prenons $Q_0(t) = P_1^G$ constante sur cette fenêtre. On définit alors, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, g_{ijn}^{00} et ξ_{ijn}^{00} sur la fenêtre $]T_n, T_{n+1}[$, pour n dans $\llbracket 0, N-1 \rrbracket$ par :

$$\begin{aligned} g_{ijn}^{00} &= \mathcal{B}_i^g(W_n, Q_n), \\ \xi_{ijn}^{00} &= \mathcal{B}_i^\xi(W_n, Q_n), \end{aligned}$$

avec \mathcal{B}_{ij}^g et \mathcal{B}_{ij}^ξ les opérateurs de Robin obtenus pour le problème d'Oseen, respectivement pour la composante tangentielle et normale (voir (2.5)) i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ij}^g(\mathbf{u}, p) &= \alpha_{ij}(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij} - p - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij})) + \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij} \\ \mathcal{B}_{ij}^\xi(\mathbf{u}, p) &= \beta_{ij}(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ij})) + \mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ij}. \end{aligned}$$

On réécrit l'Algorithme 4 en explicitant l'opérateur OSWR_L .

¹Le solveur grossier n'a pas besoin de renvoyer la pression pour faire fonctionner l'algorithme Pararéel, mais la calcule bel et bien en même temps que la vitesse, et peut donc la renvoyer si besoin, comme ici pour l'initialisation.

Algorithme 4' (Couplage Pararéel-OSWR pour le problème d'Oseen explicite)

1. Choisir des conditions initiales $(\mathbf{U}_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ avec $\mathbf{U}_0^0 = \mathbf{u}_0$.
2. Choisir des données de Robin initiales $(g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$.
3. Faire les itérations de Pararéel :
pour $k = 0, 1, \dots$ **faire**
 - a. Pour chaque intervalle de temps $\mathcal{T}_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, faire les L itérations de décomposition de domaine :
pour $\ell = 1, \dots, L$ **faire**
 - (i). Pour chaque sous-domaine d'indice $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, définir $g_{in}^{k, \ell-1}, \xi_{in}^{k, \ell-1} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_i))$, tels que, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$,

$$g_{in}^{k, \ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} g_{ijn}^{k, \ell-1} \quad \text{et} \quad \xi_{in}^{k, \ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \xi_{ijn}^{k, \ell-1}. \quad (3.5)$$

- (ii). Trouver $\mathbf{u}_{in}^{k\ell} \in M_i$ et $p_{in}^{k\ell} \in \mathcal{W}^{-1, \infty}(\mathcal{T}_n, L^2(\Omega_i))$ tel que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_{in}^{k\ell}, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_{in}^{k\ell}, \mathbf{v}) - ((p_{in}^{k\ell}, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = c_i(g_{in}^{k, \ell-1}, \xi_{in}^{k, \ell-1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, X_i)^2, \quad (3.6a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_{in}^{k\ell}, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i), \quad (3.6b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{in}^{k\ell} \cdot \mathbf{v} \right) (T_n) = \int_{\Omega_i} \mathbf{U}_n^k|_{\Omega_i} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, V_i). \quad (3.6c)$$

- (iii). Mettre à jour les données de Robin à l'interface, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$,

$$g_{ijn}^{k\ell} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{jin}^{k, \ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_{jn}^{k\ell} \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n, \quad (3.7a)$$

$$\xi_{ijn}^{k\ell} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{jin}^{k, \ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_{jn}^{k\ell} \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n. \quad (3.7b)$$

fin pour

- b. Définir $\mathbf{u}_n^{kL} \in L^2(\mathcal{T}_n, K)$ tel que $\mathbf{u}_n^{kL}|_{\Omega_i} = \mathbf{u}_{in}^{kL}$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$.

- c. Poser $\mathbf{U}_0^{k+1} = \mathbf{u}_0$, puis,

pour $n = 0, \dots, N-2$ **faire**

- (i). Faire les corrections de Pararéel :

$$\mathbf{U}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{u}_n^{kL}(T_{n+1}) + \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{U}_n^{k+1}) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{U}_n^k) \quad \text{dans } K. \quad (3.8)$$

- (ii). Mettre à jour les données de Robin à l'interface pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$:

$$g_{ijn}^{k+1, 0} = g_{ijn}^{kL} \quad \text{et} \quad \xi_{ijn}^{k+1, 0} = \xi_{ijn}^{kL}. \quad (3.9)$$

fin pour
fin pour

Remarque 3.4. *Le choix du solveur grossier a une influence déterminante sur la vitesse de convergence de l'algorithme. Un choix usuel, qui est celui que nous ferons dans les résultats numériques, est de résoudre le problème d'Oseen numériquement, avec un nombre de pas de temps qui sera négligeable devant le nombre de pas de temps utilisé pour le solveur fin, et donc peu coûteux en temps de résolution. Néanmoins, d'autres solutions sont possibles. Il est par exemple possible de résoudre un problème physiquement plus simple (et donc numériquement plus aisé), voir par exemple [5, 93], ou encore d'utiliser des techniques de machine-learning, comme dans [74].*

Dans tous les cas, la seule chose que l'on impose ici pour obtenir la convergence, est de prendre un opérateur \mathcal{G} lipschitzien en la donnée initiale, et même un solveur qui donnerait une mauvaise approximation de la solution à la fin de la fenêtre en temps permettrait la convergence. On pourra même remarquer que l'algorithme couplé Pararéel-OSWR, sans correction de Pararéel (i.e. la formule (3.8) avec $\mathcal{G} = 0$) n'empêcherait pas la convergence, quelque que soit le nombre d'itérations dans le solveur OSWR incomplet de l'étape 3.a. de l'Algorithme 4'.

²Les opérateurs A_i et c_i sont les mêmes que ceux définis pour l'algorithme OSWR pur respectivement aux équations (2.12) et (2.19).

La convergence de l'algorithme Pararéel-OSWR sera étudiée dans la Section 3.4. Commençons tout d'abord par montrer que celui-ci est bien posé.

Théorème 3.5. *Supposons que, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $\mathbf{U}_n^0 \in H$, et pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij}))$, et que par ailleurs, $\mathbf{b} \in L^\infty([0, T[, H) \cap L^2([0, T[, V)$ et $\mathbf{f} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$.*

Alors l'Algorithme 4' est bien posé, et de plus, pour toute itération $\ell \geq 1$ et $k \geq 0$, on a, pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{in}^{k\ell} &\in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{T}_n}, H_i) \cap L^2(\mathcal{T}_n, V_i), \\ p_{in}^{k\ell} &\in \mathcal{W}^{-1,\infty}(\mathcal{T}_n, L^2(\Omega_i)), \end{aligned}$$

et les quantités de Robin aux interfaces vérifient, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$,

$$g_{ijn}^{k\ell}, \xi_{ijn}^{k\ell} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij})).$$

Preuve. Partons des données $\mathbf{U}_n^0 \in H$ et $g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij}))$, alors les données de Robin définies pour $\ell = 1$ par (3.5) sont telles que $g_{in}^{00}, \xi_{in}^{00} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_i))$. Comme dans le cas du problème d'Oseen pur, le Théorème 2.13 donne l'existence d'une unique solution $(\mathbf{u}_{in}^{0,1}, p_{in}^{0,1})$ de (3.6) dans les espaces mentionnés par le théorème.

La formule de mise à jour (3.7) et le théorème de trace montrent que les données $(g_{ij}^{0,1}, \xi_{ij}^{0,1})$ restent dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$. Par récurrence sur les itérations de décomposition de domaine $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$, on déduit l'existence de $(\mathbf{u}_{in}^{0\ell}, p_{in}^{0\ell})$ dans les espaces mentionnés dans le théorème.

En particulier, $\mathbf{u}_{in}^{0L} \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathcal{T}_n}, H_i)$, et donc $\mathbf{u}_{in}^{0L}(\mathcal{T}_{n+1})$ est bien défini et à valeur dans H_i . De plus, puisque l'opérateur \mathcal{G} est à valeur dans K , on déduit de la formule de correction de Pararéel (3.8), que $\mathbf{U}_n^1 \in H$ pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Enfin, de la relation (3.9), on déduit que les données de Robin $g_{ijn}^{1,0}, \xi_{ijn}^{1,0}$ sont aussi dans $L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij}))$.

On montre alors le résultat par récurrence, en reprenant les mêmes étapes pour $k \in \mathbb{N}^*$. \square

3.4 Convergence par estimation d'énergie

Nous étendons ici la preuve de [17, Théorème 2.46] au problème d'Oseen, avec M sous-domaines et en *two-sided* (i.e. avec éventuellement $\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}$ ou $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$). En particulier, les nouveaux termes intervenant dans les estimations, qui ne sont pas présents en *one-sided* (i.e. avec $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ et $\beta_{ij} = \beta_{ji}$), sont traités à l'aide du lemme de Grönwall.

Hypothèse 3.6. *Comme dans le cas de l'algorithme OSWR pur, nous faisons l'hypothèse d'une régularité supérieure sur les données de Robin de la solution multidomaines de (2.11) aux interfaces. Ainsi, nous supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, les quantités de Robin du problème couplé (3.2)-(3.3) sont telles que $\lambda_{in} \in L^2(\mathcal{T}_n, (L^2(\Gamma_i))^2)$, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. On définit alors $g_{in} = \lambda_{in} \cdot \mathbf{n}_i$ et $\xi_{in} = \lambda_{in} \times \mathbf{n}_i$ dans $L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_i))$, et donc décomposables sur $(\Gamma_{ij})_{j \in \mathcal{I}_i}$ par $g_{ijn} = \alpha_{ij} g_{in}$, $\xi_{ijn} = \beta_{ij} \xi_{in}$ sur Γ_{ij} , et vérifient les relations dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$,*

$$\begin{aligned} g_{in} &= g_{jn} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} \mathbf{u}_{jn} \cdot \mathbf{n}_{ji}, \\ \xi_{in} &= \xi_{jn} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} \mathbf{u}_{jn} \times \mathbf{n}_{ji}. \end{aligned}$$

Commençons par introduire différentes notations pour les erreurs, puis l'Algorithme 5, obtenu à partir de l'Algorithme 4', du problème couplé (3.2)-(3.3), et de la linéarité de tous les opérateurs (sauf \mathcal{G})³. On définit, pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $\ell \in \mathbb{N}^*$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $k \in \mathbb{N}$,

- $\mathbf{E}_n^k := \mathbf{U}_n^k - \mathbf{u}(\mathcal{T}_n)$ dans Ω ,
- $\mathbf{e}_{in}^{k\ell} := \mathbf{u}_{in}^{k\ell} - \mathbf{u}_{in}$ dans $\Omega_i \times \mathcal{T}_n$,
- $\mathbf{e}_n^{k\ell}$ la fonction de $(L^2(\Omega))^2$ dont la restriction à Ω_i vérifie $\mathbf{e}_n^{k\ell}|_{\Omega_i} = \mathbf{e}_{in}^{k\ell}$ dans \mathcal{T}_n ,

³Nous n'avons pas besoin de supposer cet opérateur linéaire, son caractère lipschitzien sera suffisant pour montrer la convergence. Dans l'algorithme sur l'erreur, nous réécrivons donc simplement $\mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathbf{U}_n^k) = \mathcal{G}(\mathcal{T}, \mathbf{E}_n^k + \mathbf{u}(\mathcal{T}_n))$.

- $d_{in}^{k\ell} := p_{in}^{k\ell} - p_{in}$ dans $\Omega_i \times \mathcal{T}_n$,
- $h_{in}^{k\ell} := g_{in}^{k\ell} - g_{in}$ dans $\Gamma_i \times \mathcal{T}_n$,
- $h_{ijn}^{k\ell} := g_{ijn}^{k\ell} - g_{ijn}$ dans $\Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n$,
- $\zeta_{in}^{k\ell} := \xi_{in}^{k\ell} - \xi_{in}$ dans $\Gamma_i \times \mathcal{T}_n$,
- $\zeta_{ijn}^{k\ell} := \xi_{ijn}^{k\ell} - \xi_{ijn}$ dans $\Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n$.

Algorithme 5 (Couplage Pararéel-OSWR pour le problème d'Oseen sur l'erreur)

1. Choisir des conditions initiales $(\mathbf{E}_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ avec $\mathbf{E}_0^0 = 0$.
2. Choisir des données de Robin initiales $(h_{ijn}^{00}, \zeta_{ijn}^{00})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$.
3. Faire les itérations de Pararéel :
pour $k = 0, 1, \dots$ **faire**
 - a. Pour chaque intervalle de temps $\mathcal{T}_n, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, faire les L itérations de décomposition de domaine :
pour $\ell = 1, \dots, L$ **faire**
 - (i). Pour chaque sous-domaine d'indice $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, définir $h_{in}^{k, \ell-1}, \zeta_{in}^{k, \ell-1} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_i))$, tels que, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$,

$$h_{in}^{k, \ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} h_{ijn}^{k, \ell-1}, \quad \text{et} \quad \zeta_{in}^{k, \ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \zeta_{ijn}^{k, \ell-1}.$$

- (ii). Trouver $\mathbf{u}_{in}^{k\ell} \in M_i$ et $p_{in}^{k\ell} \in \mathcal{W}^{-1, \infty}(\mathcal{T}_n, L^2(\Omega_i))$ tel que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{e}_{in}^{k\ell}, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{e}_{in}^{k\ell}, \mathbf{v}) - ((d_{in}^{k\ell}, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = \tilde{c}_i(h_{in}^{k, \ell-1}, \zeta_{in}^{k, \ell-1}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, X_i)^4, \quad (3.10a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_{in}^{k\ell}, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i), \quad (3.10b)$$

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{e}_{in}^{k\ell} \cdot \mathbf{v} \right) (T_n) = \int_{\Omega} \mathbf{E}_n^k|_{\Omega_i} \cdot \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in S(\mathcal{T}_n, V_i), \quad (3.10c)$$

- (iii). Mettre à jour les données de Robin à l'interface, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$,

$$h_{ijn}^{k\ell} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} h_{jin}^{k, \ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{e}_{jn}^{k\ell} \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n, \quad (3.11a)$$

$$\zeta_{ijn}^{k\ell} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \zeta_{jin}^{k, \ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{e}_{jn}^{k\ell} \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times \mathcal{T}_n. \quad (3.11b)$$

fin pour

- b. Définir $\mathbf{e}_n^{kL} \in L^2(\mathcal{T}_n, K)$ tel que $\mathbf{e}_n^{kL}|_{\Omega_i} = \mathbf{e}_{in}^{kL}$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

- c. Poser $\mathbf{E}_0^{k+1} = 0$, puis,

pour $n = 0, \dots, N-2$ **faire**

- (i). Faire les corrections de Pararéel :

$$\mathbf{E}_{n+1}^{k+1} = \mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1}) + \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{E}_n^{k+1} + \mathbf{u}(T_n)) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{E}_n^k + \mathbf{u}(T_n)) \quad \text{dans } K. \quad (3.12)$$

- (ii). Mettre à jour les données de Robin à l'interface pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$:

$$h_{in}^{k+1, 0} = h_{in}^{kL}, \quad \text{et} \quad \zeta_{in}^{k+1, 0} = \zeta_{in}^{kL}. \quad (3.13)$$

fin pour

fin pour

⁴Rappelons que, comme dans le cas de l'algorithme OSWR pur, \tilde{c}_i est l'équivalent de c_i pour $\mathbf{f} = \mathbf{0}$, c'est-à-dire $\tilde{c}_i(h_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1}, \mathbf{v}) := (h_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i^{\ell-1}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}$.

Théorème 3.7. *Supposons que l'opérateur grossier \mathcal{G} vérifie (3.4). Fixons $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $L \in \mathbb{N}^*$. Supposons, $\mathbf{U}_n^0 \in H$, et pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $j \in \mathcal{I}_i$, $g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00} \in L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij}))$, et qu'en outre, $\mathbf{b} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$ et $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$. Soit enfin $(\mathbf{u}_{in})_{in}$ la famille de solutions en vitesse du problème couplé (3.2)-(3.3). Alors, l'algorithme Pararéel-OSWR 4' pour le problème d'Oseen vérifie les deux résultats de convergence suivants :*

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{U}_n^k = \mathbf{u}(T_n) \quad (3.14a)$$

dans $(L^2(\Omega))^2$, et

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{u}_{in}^{k\ell} = \mathbf{u}_{in} \quad (3.14b)$$

dans $L^p(\mathcal{T}_n, H_i) \cap L^2(\mathcal{T}_n, V_i)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$.

Nous commençons par établir une estimation d'énergie pour la partie due à l'algorithme OSWR, dans le Lemme 3.8. Puis, le Lemme 3.9 donne une estimation d'énergie après sommation sur les itérations de Pararéel. Enfin, le Lemme 3.10 donne une estimation due à la correction de Pararéel.

Lemme 3.8. *Soit $L \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $k \in \mathbb{N}$. Alors, il existe une constante $C \geq 0$ telle que pour tout $t \in \mathcal{T}_n$,*

$$\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}_n^{k\ell}(t) + \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}_n^{k\ell}(t) + \mathfrak{B}_n^{kL}(t) \leq L \|\mathbf{E}_n^k\|_\Omega^2 + \mathfrak{B}_n^{k0}(t) + C \int_{T_n}^t \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}_n^{k\ell}(\tau) d\tau \quad (3.15)$$

avec, pour $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$,

- $\mathfrak{E}_n^{k\ell}(t) := \|\mathbf{e}_n^{k\ell}(t)\|_\Omega^2$,
- $\mathfrak{F}_n^{k\ell}(t) := \nu \sum_{i=1}^M \int_{T_n}^t \|\nabla \mathbf{e}_{in}^{k\ell}(\tau)\|_{\Omega_i}^2 d\tau$,
- $\mathfrak{B}_n^{k\ell}(t) := \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_{T_n}^t \left(\eta_{ij} \frac{\|h_{ijn}^{k\ell}(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\alpha_{ij}^2} + \mu_{ij} \frac{\|\xi_{ijn}^{k\ell}(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2}{\beta_{ij}^2} \right) d\tau$,

avec $\eta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}$ et $\mu_{ij} = \frac{\beta_{ij}\beta_{ji}}{\beta_{ij}+\beta_{ji}}$.

Preuve. Il s'agit de l'application du Lemme 2.17 qui donne une estimation d'énergie pour l'algorithme d'OSWR pur pour le problème d'Oseen. Nous appliquons donc ce résultat sur chacune des fenêtres $\mathcal{T}_n =]T_n, T_{n+1}[$ et à chaque itération de Pararéel k . On utilise que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on a $\mathbf{e}_n^{kL}|_{\Omega_i} = \mathbf{e}_{in}^{kL}$, et donc que $\|\mathbf{e}_n^{kL}\|_\Omega^2 = \sum_{i=1}^M \|\mathbf{e}_{in}^{kL}\|_{\Omega_i}^2$. Le terme dû à la condition initiale $\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}_n^{k\ell}(0)$ est remplacé par $L \|\mathbf{E}_n^k\|_\Omega^2$ en appliquant la condition initiale (3.10c), qui est constante quel que soit $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$. \square

Lemme 3.9. Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $K \in \mathbb{N}$ et $L \in \mathbb{N}^*$. Alors, il existe une constante $C \geq 0$ telle que, pour tout $t \in \mathcal{T}_n$,

$$\sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) + \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{F}}_n^k \leq L \sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1}) + C \int_{T_n}^t \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{E}}_n^k(\tau) d\tau, \quad (3.16)$$

dont on déduit la majoration

$$\sum_{k=0}^K \|\mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1})\|_{\Omega}^2 \leq C_n \left(\sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1}) \right), \quad (3.17)$$

avec une constante $C_n \geq 0$ dépendant des $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i}$, de L , des Ω_i , de M , de ν et de $|T_{n+1} - T_n|$, mais indépendante de K , avec

- $\bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) := \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}_n^{k\ell}(t) = \sum_{\ell=1}^L \|\mathbf{e}_n^{k\ell}(t)\|_{\Omega}^2$,
- $\bar{\mathfrak{F}}_n^k(t) := \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}_n^{k\ell}(t) = \nu \sum_{\ell=1}^L \sum_{i=1}^M \int_{T_n}^t \|\nabla \mathbf{e}_{in}^{k\ell}(\tau)\|_{\Omega_i}^2 d\tau$.

Preuve. Partant de l'inégalité (3.15) du lemme précédent, en sommant sur les itérations de Pararéel jusqu'à une itération $K \in \mathbb{N}$, et prenant en compte la mise à jour des quantités de Robin (3.13) de l'algorithme Pararéel, qui entraînent que, pour $k \geq 1$, $\mathfrak{B}_n^{k0} = \mathfrak{B}_n^{k-1,L}$, on obtient, pour $t \in [T_n, T_{n+1}]$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) + \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{F}}_n^k(t) + \sum_{k=0}^K \mathfrak{B}_n^{kL}(t) \\ \leq L \sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k(t)\|_{\Omega}^2 + \sum_{k=0}^{K-1} \mathfrak{B}_n^{kL}(t) + \mathfrak{B}_n^{00}(t) + C \int_{T_n}^t \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{E}}_n^k(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Remarquant un télescopage sur les sommes sur k des termes de Robin aux interfaces $(\mathfrak{B}_n^{kL})_k$, en utilisant que $\mathfrak{B}_n^{KL}(t) \geq 0$, que $\sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{F}}_n^k(t) \geq 0$, et puisque $\mathfrak{B}_n^{00}(t) \leq \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1})$, on déduit l'inégalité (3.16).

De cette inégalité, on obtient, par application du lemme de Grönwall 1.7, que

$$\sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) \leq \left(L \sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1}) \right) \exp \left(\int_{T_n}^t C d\tau \right),$$

ce qui donne l'inégalité (3.17), en évaluant l'inégalité précédente en $t = T_{n+1}$, et par continuité de la solution \mathbf{e}_n^{kL} sur \mathcal{T}_n . \square

Lemme 3.10. Supposons que l'opérateur grossier \mathcal{G} vérifie (3.4). La correction de l'algorithme Pararéel implique la majoration⁵, pour tout $n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$, $K \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_{n+1}^{k+1}\|_{\Omega}^2 \leq 8\gamma^2 \sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + 2 \sum_{k=0}^K \|\mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1})\|_{\Omega}^2. \quad (3.18)$$

Preuve. Soit $n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$, $K \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, K \rrbracket$. Cette preuve ne repose que sur le caractère γ -lipschitzien de \mathcal{G} , et la correction de Pararéel. Une inégalité triangulaire sur la correction de Pararéel (3.12) implique

$$\|\mathbf{E}_{n+1}^{k+1}\|_{\Omega}^2 \leq 2\|\mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{E}_n^{k+1} + \mathbf{u}(T_n)) - \mathcal{G}(\mathcal{T}_n, \mathbf{E}_n^k + \mathbf{u}(T_n))\|_{\Omega}^2 + 2\|\mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1})\|_{\Omega}^2,$$

et puisque l'opérateur \mathcal{G} est γ -lipschitzien, on obtient en appliquant (3.4),

$$\begin{aligned} \|\mathbf{E}_{n+1}^{k+1}\|_{\Omega}^2 &\leq 2\gamma^2 \|\mathbf{E}_n^{k+1} - \mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + 2\|\mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1})\|_{\Omega}^2 \\ &\leq 4\gamma^2 (\|\mathbf{E}_n^{k+1}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2) + 2\|\mathbf{e}_n^{kL}(T_{n+1})\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

La sommation de $k = 0$ à K amène à la majoration (3.18). \square

⁵Remarquons ici que la solution \mathbf{e}_{N-1}^{kL} définie sur la dernière fenêtre temporelle n'intervient pas dans ces majorations (et donc dans les convergences) des erreurs au début des fenêtres temporelles.

En combinant les Lemmes 3.9 et 3.10, on peut désormais démontrer la convergence de l'Algorithme 4'.

Preuve du Théorème 3.7. Soit $n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$. Partons des deux relations (3.18) et (3.17). On obtient

$$\sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_{n+1}^{k+1}\|_{\Omega}^2 \leq 8\gamma^2 \sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + 2C_n \left(\sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1}) \right).$$

Introduisons désormais les notations pour les deux constantes $\gamma_N := \max_{n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket} (8\gamma^2 + 2C_n)$ ainsi que $R_N = \max_{n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket} (2C_n \mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1}) + \|\mathbf{E}_{n+1}^0\|_{\Omega}^2)$. L'inégalité précédente implique donc

$$\sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_{n+1}^k\|_{\Omega}^2 \leq \gamma_N \sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 + R_N,$$

et donc, de proche en proche, on trouve par récurrence sur n :

$$\sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_{n+1}^k\|_{\Omega}^2 \leq \gamma_N^{n+1} \sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_0^k\|_{\Omega}^2 + R_N \sum_{j=0}^n \gamma_N^j.$$

Avec la condition initiale $\mathbf{E}_0^k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ issue de l'initialisation de l'Algorithme 5 on obtient finalement, pour tout $n \in \llbracket 0, N-2 \rrbracket$

$$\sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_{n+1}^k\|_{\Omega}^2 \leq R_N \frac{1 - \gamma_N^N}{1 - \gamma_N},$$

si $\gamma_N \neq 1$, et $\sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_{n+1}^k\|_{\Omega}^2 \leq NR_N$ sinon. Ces majorations étant indépendantes de K , on déduit que la série $\sum_{k=0}^{K+1} \|\mathbf{E}_{n+1}^k\|_{\Omega}^2$ est convergente et donc que son terme général tend vers 0. Puisque $\mathbf{E}_0^k = 0$ pour tout k , on déduit que $\mathbf{E}_n^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ dans $(L^2(\Omega))^2$ pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, ce qui amène à (3.14a).

De manière similaire, repartons de l'inégalité (3.16), en ajoutant $\int_{T_n}^t \sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{F}}_n^k(\tau) d\tau \geq 0$ au membre de droite. Puisque la série $\left(\sum_{k=0}^K \|\mathbf{E}_n^k\|_{\Omega}^2 \right)_{K \in \mathbb{N}}$ est convergente, et que les données de Robin intervenant dans le terme $\mathfrak{B}_n^{00}(T_{n+1})$ sont dans $L^2(\mathcal{T}_n, L^2(\Gamma_{ij}))$, pour tout i, j , alors on a l'existence d'une constante D_n telle que

$$\sum_{k=0}^K (\bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) + \bar{\mathfrak{F}}_n^k(t)) \leq D_n + C \int_{T_n}^t \sum_{k=0}^K (\bar{\mathfrak{E}}_n^k(\tau) + \bar{\mathfrak{F}}_n^k(\tau)) d\tau,$$

et, d'après le lemme de Grönwall 1.7,

$$\sum_{k=0}^K (\bar{\mathfrak{E}}_n^k(t) + \bar{\mathfrak{F}}_n^k(t)) \leq D_n \exp \left(\int_{T_n}^t C d\tau \right) \leq D_n \exp (C(T_{n+1} - T_n)).$$

La borne obtenue étant finie, constante au cours du temps et indépendante de K . On déduit donc avec le Lemme 1.25 que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$ et $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$, la suite $(\mathbf{e}_{in}^{k\ell})_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers $\mathbf{0}$ dans $L^p(\mathcal{T}_n, H_i)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$. De plus, on obtient que la série $\sum_{k=0}^K \bar{\mathfrak{F}}_n^k(t)$ est convergente, et donc que son terme général tend vers 0. Ceci amène finalement à la convergence, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, et $\ell \in \llbracket 1, L \rrbracket$, de $(\mathbf{e}_{in}^{k\ell})_{k \in \mathbb{N}}$ vers $\mathbf{0}$ dans $L^2(\mathcal{T}_n, V_i)$. On a donc obtenu (3.14b), ce qui conclut la preuve du Théorème 3.7. \square

3.5 Recalibrage de la pression

Comme dans le cas de l'algorithme OSWR seul, la famille de pression issue de l'algorithme couplé Pararéel-OSWR ne converge pas vers la famille de pression $(p_{in})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ solution du problème (3.2)-(3.3). Il faut donc à nouveau procéder à un recalibrage suivant la même méthodologie que celle présentée pour l'algorithme OSWR pour les équations de Oseen (Section 2.4). La détermination

des pressions sur chaque sous-domaine se fait de manière similaire, par résolution d'un système linéaire de taille $M \times M$.

Introduisons le vecteur \mathbf{B}_n^k pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, analogue du vecteur \mathbf{B}^ℓ de l'algorithme OSWR seul, défini en (2.44) tel que $\mathbf{B}_n^k = (B_{1n}^k, \dots, B_{Mn}^k)^T$ où B_{in}^k est défini, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, pour tout $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, par

$$B_{in}^k = \sum_{j=1}^M |\Gamma_{ij}| \frac{\alpha_{ij} \alpha_{ji}}{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}} \left(\frac{\langle g_{ijn}^{kL} \rangle_{\Gamma_{ij}}}{\alpha_{ij}} - \frac{\langle g_{jin}^{kL} \rangle_{\Gamma_{ji}}}{\alpha_{ij}} + \langle p_{in}^{kL} \rangle_{\Omega_i} - \langle p_{jn}^{kL} \rangle_{\Omega_j} \right) + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Omega_i} \mathbf{u}_D \cdot \mathbf{n}_i,$$

Théorème 3.11 (Recalibrage de la pression). *Soit $n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$. Le vecteur des pressions moyennes sur chaque sous-domaine \mathbf{X}_n est la limite de la suite $(\mathbf{X}_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$, où, pour tout k , \mathbf{X}_n^k est l'unique solution du problème*

$$A\mathbf{X}_n^k = \mathbf{B}_n^k, \quad (3.19a)$$

$$C\mathbf{X}_n^k = 0, \quad (3.19b)$$

avec la matrice A définie en (2.43). Alors, la pression corrigée définie par

$$\tilde{p}_{in}^{kL}(t) := p_{in}^{kL}(t) - \langle p_{in}^{kL}(t) \rangle_{\Omega_i} + \mathbf{X}_{in}^k(t)$$

converge vers $p_{in}(t)$ dans $L^2(\Omega_i)$ presque partout sur \mathcal{T}_n , avec \mathbf{X}_{in}^k la i -ème ligne de \mathbf{X}_n^k , pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

Preuve. La preuve du recalibrage de la pression pour l'algorithme OSWR pur sur le problème d'Oseen, s'étend, et il est possible de reprendre les étapes du Théorème 2.21. Cette preuve est décomposée en deux lemmes :

- Le Lemme 2.22, qui exprime que le vecteur des pressions moyennes \mathbf{X}_n^k vérifie $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}_n^k = A\mathbf{X}_n^k$.
- Le Lemme 2.23, qui montre que le problème (3.19) admet une unique solution, et qui donc s'applique aussi dans ce cas.

Nous n'avons donc qu'à montrer ce premier point. Or celui-ci repose sur cinq propriétés qui sont aussi vérifiées par le problème considéré ici.

- (i). La relation (3.3b) (supposée vraie dans $L^2(\Gamma_{ij})$ entre les données de Robin à l'interface du problème multidomaine,
- (ii). les propriétés de vitesses à divergence nulle multidomaine,
- (iii). Les trois propriétés de convergence 2.19 que l'on peut supposer ici aussi.

Le reste de la preuve est donc identique, avec les modifications suivantes :

- remplacer g_{ij}^ℓ par g_{ijn}^{kL} ,
- remplacer p_i^ℓ par p_{in}^{kL} ,
- les limites ne sont plus pour $\ell \rightarrow \infty$, mais pour $k \rightarrow \infty$. □

3.6 Résultats numériques

Nous reprenons le cadre de la simulation utilisé pour le problème d'OSWR pur dans la Section 2.6, que nous adaptons à l'algorithme couplé Pararéel-OSWR (Algorithme 4). La résolution grossière de l'opérateur \mathcal{G} est effectuée avec un schéma d'Euler implicite avec un seul pas de temps grossier par fenêtre, et une résolution éléments finis pour la partie spatiale. La résolution fine de l'opérateur \mathcal{F} est, elle aussi, issue d'un schéma d'Euler implicite avec un grand nombre de pas de temps (que nous ferons varier, mais toujours grand devant 1), et le même schéma éléments finis.

L'initialisation de l'Algorithme 4 (pour la condition initiale $(\mathbf{U}_n^0)_{n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$ et les données de Robin initiales $(g_{ijn}^{00}, \xi_{ijn}^{00})_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i, n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket}$) se fait à partir du résultat du premier solveur grossier,

suivant la méthodologie décrite dans la Remarque 3.3.

Nous commençons par présenter une étude de la convergence selon le nombre d'itérations d'OSWR effectué, puis étudions l'efficacité des paramètres de Robin optimisés.

3.6.1 Dépendance au nombre d'itérations d'OSWR

Nous commençons par illustrer la convergence de l'Algorithme Pararéel-OSWR 4. Nous réalisons en même temps une étude de la dépendance de l'algorithme au nombre d'itérations d'OSWR, désigné par $L \in \mathbb{N}^*$.

La solution exacte recherchée est

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{pmatrix} -\cos(11t) \sin(\pi x) \cos(\pi y) \\ \cos(11t) \cos(\pi x) \sin(\pi y) \end{pmatrix}, \quad p(t, x, y) = \cos(t)(x^2 - y^2),$$

ce qui définit les conditions limites, la condition initiale et le terme source. Le temps final considéré est $T = 10$, et trois cas sont étudiés, en faisant varier le coefficient de diffusion et le champ d'advection :

- Cas 1 : $\nu = 0.05$, $\mathbf{b} = (1, 1)^T$.
- Cas 2 : $\nu = 1$, $\mathbf{b} = (1, 1)^T$.
- Cas 3 : $\nu = 0.05$, $\mathbf{b} = (-\cos(\pi x) \sin(\pi y), \sin(\pi x) \cos(\pi y))^T$.

La résolution numérique est effectuée avec un raffinement de 960 pas de temps et un maillage de taille caractéristique $h = 0.021$.

Pour l'algorithme Pararéel, nous considérons 10 fenêtres en temps (i.e. $N = 10$, et chaque fenêtre en temps a 96 pas de temps fins).

Pour la décomposition de domaine, nous utilisons le paramètre de Robin optimisé *one-sided* que l'on obtient pour l'algorithme OSWR pur pour une fenêtre en temps de longueur $T/N = 1$, suivant la méthodologie de la Section 2.5.2. Puisque le cas test 3 est à advection variable, la méthodologie ne s'applique *a priori* pas. Toutefois, nous extrapolons cette méthode de la manière suivante : sur chaque facette de l'interface, la valeur choisie pour l'advection est celle calculée au milieu de la facette, ce qui nous permet de trouver un paramètre par facette. Nous choisissons alors comme paramètre de Robin la moyenne des paramètres de Robin locaux ainsi obtenus sur chaque maille. Le Tableau 3.1 reprend les paramètres de Robin utilisés selon les cas tests.

Cas test	1	2	3
Paramètre de Robin	0.140	0.026	0.189

TABLE 3.1 : Paramètres de Robin utilisés pour les cas tests 1, 2 et 3.

Nous traçons sur la Figure 3.1 les courbes de l'erreur relative (par rapport à la norme de la solution monodomaine) en fonction des itérations de Pararéel dans les deux normes de vitesse ($L^\infty([0, T], H)$ et $L^2([0, T], V)$) et celle de pression ($L^2([0, T], L^2(\Omega))$), et l'on fait varier le nombre d'itérations de décomposition de domaine L en 1, 2, 4, 8 et ∞ . Le cas ∞ correspond au cas où l'algorithme couplé est équivalent à l'algorithme Pararéel pur, c'est-à-dire dans le cas où les itérations de décomposition de domaine sont « complètes », i.e. ont convergé. En pratique, ce nombre est choisi comme étant celui nécessaire pour atteindre une erreur relative de 10^{-10} sur la première fenêtre dès la première itération de Pararéel.

Nous relevons dans les Tableaux 3.2, 3.3 et 3.4 le nombre d'itérations nécessaires pour que l'erreur de l'algorithme soit 10 fois plus petite que l'erreur du schéma (i.e. l'erreur relative entre la solution exacte et la solution monodomaine) dans les trois normes, et nous plaçons une ligne horizontale à cette position sur les Figures 3.1.

	$\ \mathbf{u}\ _{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))}$					$\ \mathbf{u}\ _{L^2([0, T], H^1(\Omega))}$					$\ p\ _{L^\infty([0, T], L^2(\Omega))}$				
L	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞
K	16	8	4	3	3	11	6	3	2	2	19	10	5	3	1
$K * L$	16	16	16	24	246	11	12	12	16	164	19	20	20	24	82

TABLE 3.2 : Nombre d'itérations K pour atteindre l'erreur du schéma divisée par 10 pour l'algorithme couplé Pararéel-OSWR – Cas test 1, avec $\infty \simeq 82$.

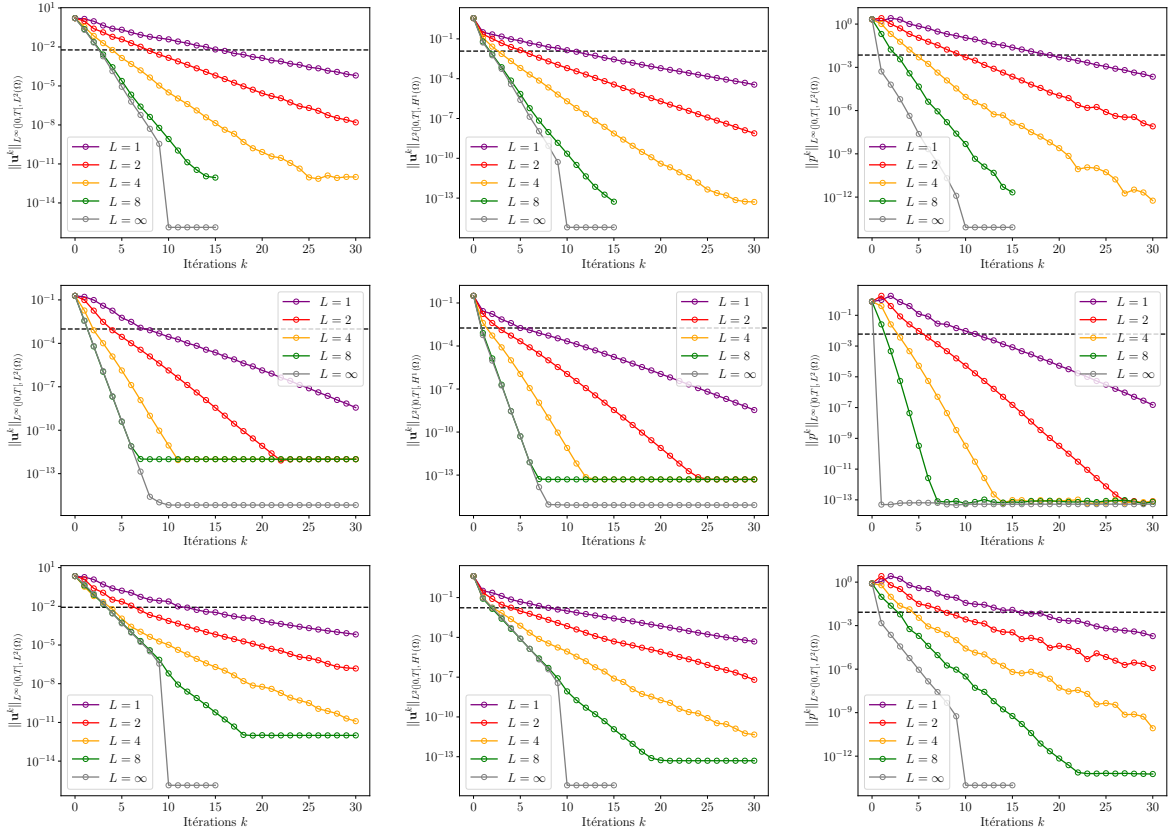


FIGURE 3.1 : Convergence au cours des itérations de Pararéel pour différents nombres d'itération(s) d'OSWR (1, 2, 4, 8 et ∞), avec, de gauche à droite, $\|\mathbf{u}^k\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$, $\|\mathbf{u}^k\|_{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$ et $\|p^k\|_{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$ et de bas en haut, les cas tests 1, 2 et 3.

	$\ \mathbf{u}\ _{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$					$\ \mathbf{u}\ _{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$					$\ p\ _{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$				
L	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞
K	8	4	2	2	2	5	3	2	1	1	12	6	3	2	1
$K * L$	8	8	8	16	72	5	6	8	8	36	12	12	12	16	36

TABLE 3.3 : Nombre d'itérations K pour atteindre l'erreur du schéma divisée par 10 pour l'algorithme couplé Pararéel-OSWR – Cas test 2, avec $\infty \simeq 36$.

	$\ \mathbf{u}\ _{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$					$\ \mathbf{u}\ _{L^2([0,T],H^1(\Omega))}$					$\ p\ _{L^\infty([0,T],L^2(\Omega))}$				
L	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞	1	2	4	8	∞
K	12	7	4	4	4	8	5	3	2	3	16	8	5	3	1
$K * L$	12	14	16	32	312	8	10	12	16	234	16	16	20	24	78

TABLE 3.4 : Nombre d'itérations K pour atteindre l'erreur du schéma divisée par 10 pour l'algorithme couplé Pararéel-OSWR – Cas test 3, avec $\infty \simeq 78$.

On observe sur ces tableaux que, dans les trois cas étudiés, le nombre d'itérations total $K * L$ nécessaire est relativement égal, que l'on fasse 1, 2 (voire 4) itérations de décomposition de domaine, qui sont les cas les plus efficaces. Faire plus d'itérations d'OSWR semble inutile : la précision supplémentaire obtenue est négligeable devant l'erreur due à la condition initiale au début de chaque fenêtre en temps. Nous notons toutefois que dans tous les cas, le choix $L = 1$ n'est jamais moins efficace qu'un L supérieur. Il semble donc, au moins dans le cas où l'on n'a que deux sous-domaines, qu'il est préférable de n'effectuer qu'une unique itération de décomposition de domaine par itération de Pararéel.

À ce stade, nous pouvons conclure que l'algorithme couplé donne une meilleure convergence que celle offerte par l'algorithme OSWR pur. Pour l'illustrer, prenons l'exemple du cas test 1 pour la norme de vitesse $L^\infty([0,T],L^2(\Omega))$. Il faut alors 16 itérations (avec $L = 1$) de Pararéel, c'est-à-dire que le

temps de calcul est à peine 1.6 fois plus long que le calcul que l'on aurait obtenu par résolution OSWR sur la fenêtre $]0, T[$ avec une unique itération de décomposition de domaine⁶. Puisqu'en pratique, il est nécessaire d'effectuer de l'ordre de la dizaine d'itérations d'OSWR pour obtenir une convergence similaire, on se rend compte du grand intérêt de ce couplage par rapport à l'algorithme non parallélisé en temps.

On en déduit même mieux, puisque cet algorithme couplé semble plus rapide que ce que l'on aurait eu avec une résolution monodomaine monofenêtre sans aucune parallélisation, et ce, avec seulement deux sous-domaines. En effet, la résolution sur un demi-domaine étant de l'ordre de 2 à 8 fois plus rapide que sur un domaine complet (selon le solveur utilisé), on en déduit une réduction du temps de calcul à $1.6/2 = 0.8$ voire $1.6/8 = 0.2$.

Dans le cas d'une décomposition en plus de sous-domaines, nous avons observé dans la Section 2.6.3 que l'utilisation de plus de 2 sous-domaines augmente bien le nombre d'itérations nécessaires, mais réduit drastiquement le temps de calcul en raison des résolutions plus rapides sur les plus petits sous-domaines. On peut donc extrapoler un résultat similaire dans le cas du couplage : avec plus de sous-domaines, il sera nécessaire d'effectuer plus d'itérations d'OSWR et/ou de Pararéel, mais le temps de calcul final sera lui grandement baissé.

3.6.2 Paramètre de Robin optimisés

On cherche dans cette section à étudier l'efficacité du paramètre de Robin optimisé, et vérifier si la méthodologie d'optimisation déterminée dans le cas de l'algorithme OSWR pur est aussi un bon choix dans le cas du couplage Pararéel-OSWR. Pour cela, on reprend les cas test 1, 2 et 3 précédents, et l'on trace la courbe de l'erreur obtenue en fonction du paramètre de Robin, aux itérations de Pararéel $K = 10, 20$ et 30 . Nous faisons cela pour les deux valeurs de nombre d'itérations de décomposition de domaine qui se sont révélées les plus efficaces dans la Section 3.6.1, i.e. $L = 1$ et 2 .

ν	1	0.3	0.1	0.03
α_{OS}	0.026	0.075	0.115	0.150

TABLE 3.5 : Paramètres de Robin optimisé en fonction de ν .

On observe que le paramètre de Robin optimal numérique évolue au cours des itérations : plus le nombre d'itérations d'OSWR et/ou de Pararéel est grand, plus le paramètre optimal diminue. Ce paramètre se stabilise à partir d'un certain nombre $K * L$ (dépendant des cas, et augmentant lorsque ν diminue), ce qui semble correspondre au moment où le régime linéaire de convergence de l'algorithme est atteint. Le paramètre optimisé semi-discret en temps (représenté par un cercle noir dans les courbes) approche bien les creux des courbes sur la Figure 3.2 et très bien sur la Figure 3.3. Cela signifie que, bien que ce paramètre soit défini pour optimiser l'algorithme OSWR pur, celui-ci est aussi particulièrement bien adapté pour accélérer la convergence de l'algorithme couplé Pararéel-OSWR.

Nous observons aussi que le paramètre de Robin optimisé tout comme le paramètre optimal augmente à mesure que ν diminue. On remarque finalement que plus le coefficient de diffusion est élevé, plus l'algorithme converge vite.

⁶On fait l'hypothèse d'une parallélisation parfaite, où le seul temps de calcul non négligeable est celui du solveur fin, i.e. des résolutions sur les sous-domaines et les fenêtres en temps.

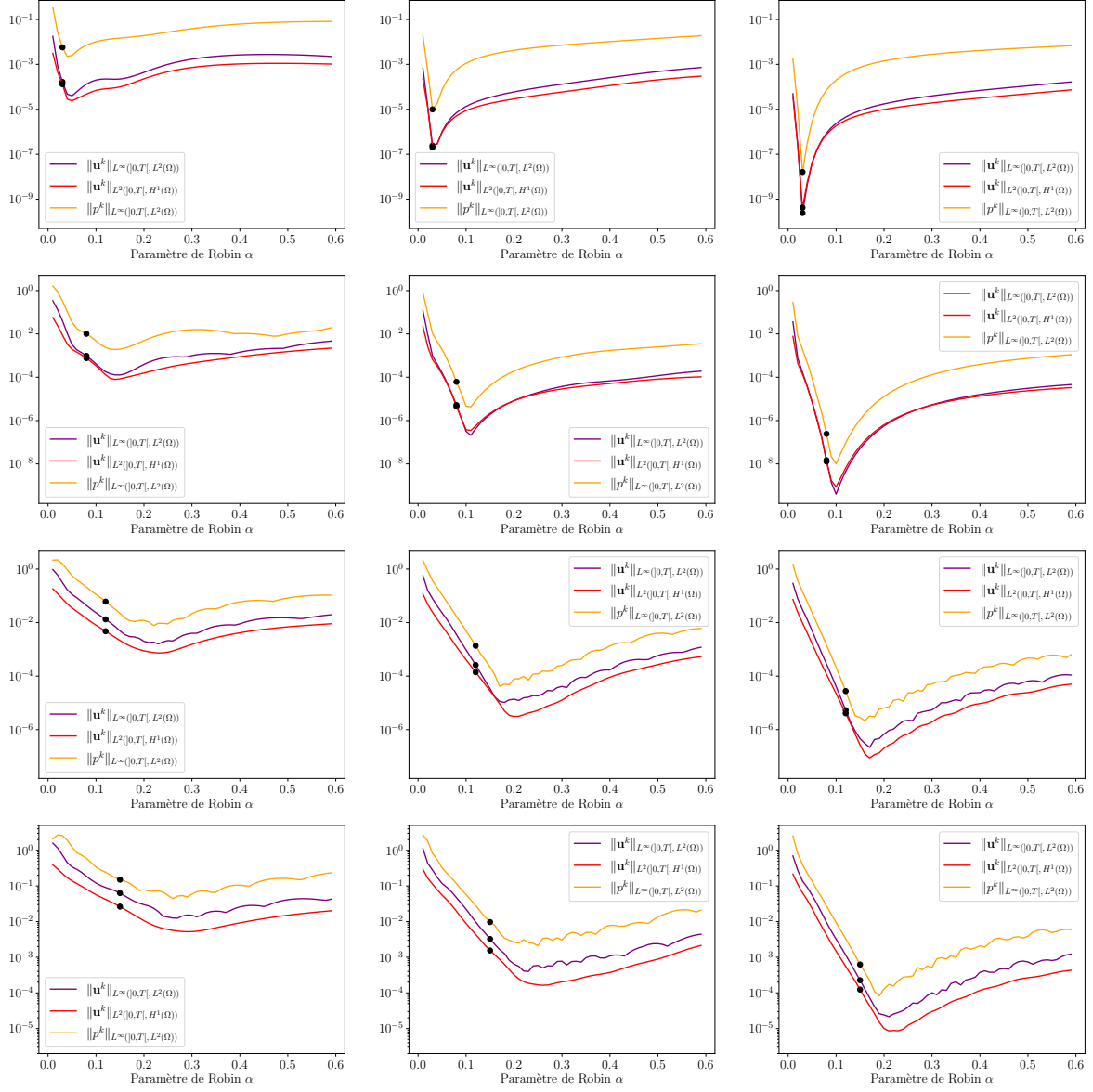


FIGURE 3.2 : Erreur relative en fonction de α , avec, de haut en bas $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$ et de gauche à droite, $K = 10, 20, 30$ pour $L = 1$.

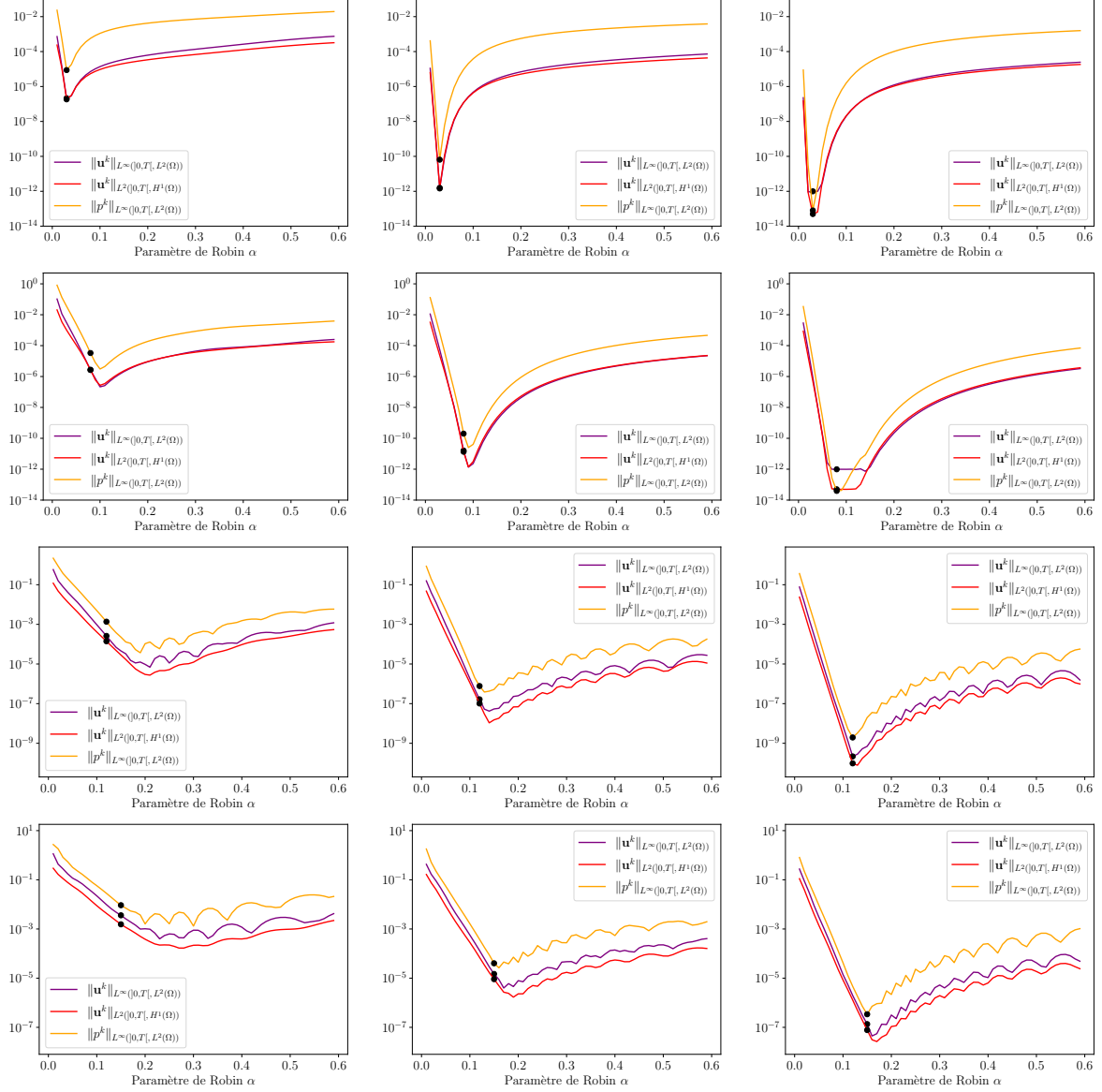


FIGURE 3.3 : Erreur relative en fonction de α , avec, de haut en bas $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$ et de gauche à droite, $K = 10, 20, 30$ pour $L = 2$.

Chapitre 4

Existence unicité de la solution au problème de Navier-Stokes avec des conditions limites mixtes de Dirichlet et de Robin

Sommaire

4.1	Théorèmes de référence	74
4.2	Existence du champ de vitesse	77
4.2.1	Estimation d'énergie	78
4.2.2	Estimation des dérivées fractionnaires en temps	80
4.2.3	Passage à la limite	83
4.3	Unicité du champ de vitesse	86
4.4	Existence et unicité de la pression	88

Les algorithmes de décomposition de domaine amènent à résoudre une équation aux dérivées partielles à chaque itération, dont les conditions limites peuvent être différentes de celle du problème initial. Dans notre cas, nous considérons le problème de Navier-Stokes en deux dimensions d'espace dans le Chapitre 5. Alors que l'existence et l'unicité de la solution sur le domaine tout entier sont assurées pour des conditions limites de Dirichlet homogène (voir par exemple [15, Théorème V.1.4]), l'existence et l'unicité de solutions sur chacun des sous-domaines, où les conditions limites sont mixtes avec une partie Dirichlet homogène et une partie Robin (voir uniquement Robin pour les domaines intérieurs) restent à prouver. L'objet de ce chapitre est d'aboutir à un tel résultat, donné par le Théorème 4.1. Le théorème d'existence et d'unicité obtenu sera ensuite utilisé pour obtenir une solution dans les sous-domaines à chaque itération de l'algorithme de décomposition de domaine du Chapitre 5, et ainsi pour pouvoir bien définir cet algorithme. Notons que ce théorème d'existence et d'unicité pourra également être utilisé de manière plus générale, lorsque le problème initial de Navier-Stokes a une condition aux limites de Robin sur le bord (ou une partie du bord) du domaine physique.

Nous insistons sur le fait que les théorèmes utilisés, ainsi que le cheminement de la démonstration, sont en grande partie issus de [15], reposant sur la notion de solution turbulente de Leray [83]. Nous reprenons donc la trame de la preuve (elle-même reprenant les travaux de [80], [85] et [102]), et certains calculs, et nous apportons les adaptations nécessaires à notre problème d'étude.

Commençons par présenter le problème de Navier-Stokes avec conditions limites de Robin. Dans ce chapitre uniquement, Ω désigne le domaine d'étude tout entier, connexe, borné, et lipschitzien. Pour la décomposition de domaine du chapitre suivant, il désignera un des sous-domaines Ω_i .

On décompose le bord du domaine Ω en deux sous parties, $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_R$, où Γ_D est la partie (éventuellement vide) de la frontière sur laquelle sont appliquées les conditions limites de Dirichlet, et Γ_R celle associée aux conditions limites de Robin. Les deux frontières ne se recouvrent pas et l'on suppose $|\Gamma_R| \neq 0$.

Enfin, dans ce chapitre uniquement, on note V et H les espaces prenant en compte la condition limite

de Dirichlet sur une partie du bord seulement, i.e.

$$\begin{aligned} X &:= \{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}, \\ V &:= \{ \mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}, \\ H &:= \{ \mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^2, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \}, \\ L_0^2(\Omega) &:= \left\{ p \in L^2(\Omega), \int_{\Omega} p = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Soit une condition initiale $\mathbf{u}_0 \in H$, un terme source $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, et les données de Robin $g \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_R))$ et $\xi \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_R))$, et deux coefficients de Robin $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}^{++})^2$.

On considère le problème, trouver $\mathbf{u} \in L^2(]0, T[, V)$ et $p \in \mathcal{W}^{-1, \infty}(]0, T[, L^2(\Omega))$, tels que pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} + \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega} + \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega} - \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\Omega} \\ & - ((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega} + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ & = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{\Omega} + (g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + (\xi, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}, \end{aligned} \quad (4.1a)$$

au sens des distributions de $D'([0, T])$, avec la condition initiale, pour tout $\mathbf{v} \in V$,

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega} \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}. \quad (4.1b)$$

Rappelons que cette condition initiale a bien un sens, comme cela est justifié pour le problème mono-domaine d'Oseen dans la Remarque 2.5.

Nous pouvons alors énoncer le théorème central de cette partie.

Théorème 4.1 (Existence et unicité de la solution). *Soit $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, et $g, \xi \in L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_R))$. Alors, le problème (4.1) admet une unique solution telle que*

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\in \mathcal{C}^0([0, T], H) \cap L^2(]0, T[, V), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &\in L^{1+\varepsilon}(]0, T[, V') \\ p &\in \mathcal{W}^{-1, \infty}(]0, T[, L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

pour tout $\varepsilon \in [0, 1[$.

Remarque 4.2. *Pour la décomposition de domaine, les termes de bord*

$$\frac{1}{\alpha}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}$$

de la formulation variationnelle (4.1a) sont en fait une somme sur les voisins \mathcal{I}_i d'un domaine Ω_i . Pour ne pas compliquer la preuve, on ne fait la démonstration qu'avec un sous-domaine voisin, mais la preuve s'étendrait directement à une famille quelconque (finie) de voisins.

4.1 Théorèmes de référence

Nous commençons par énoncer les théorèmes que nous utiliserons au cours de cette preuve.

Lemme 4.3 (Lemme des bouts ou théorème d'explosion en temps fini pour les équations différentielles ordinaires [73, Théorème 4.3]).

Soit $f : J \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction qui satisfait les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et $x :]t^-, t^+[\subseteq J \rightarrow U$ une solution de l'équation $x' = f(t, x)$. La solution est maximale à droite si et seulement si

- soit $t^+ = \sup J$,
- soit $t^+ < \sup J$ et, lorsque $t \rightarrow t^+$, $x(t)$ sort définitivement de tout compact de U .

Théorème 4.4 (Hausdorff-Young pour les espaces de Lebesgue [15, Théorème II.5.20]). Soit (E, μ) un espace topologique séparé localement compact, muni d'une mesure régulière μ sur sa tribu borélienne. Soit $q \in [1, +\infty]$. On note $\mathcal{F}(f)$ la transformée de Fourier de f .

Pour tout $p \in [1, 2]$ tel que $p \leq q \leq p'$, il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}, L^q(E, \mu)) \cap L^p(\mathbb{R}, L^q(E, \mu))$ on a

$$\mathcal{F}(f) \in L^{p'}(\mathbb{R}, L^q(E, \mu)) \quad \text{et} \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}, L^q(E, \mu))} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}, L^q(E, \mu))}.$$

Le théorème suivant donne un critère d'appartenance à un espace de Nikolskii défini, pour tout espace de Banach E , $q \in [1, +\infty[$, $\sigma \in]0, 1[$, par

$$N_q^\sigma(]0, T[, E) := \left\{ f \in L^q(]0, T[, E), \sup_{0 < h < T} \frac{\|\tau_h f - f\|_{L^q(]0, T-h[, E)}}{h^\sigma} < \infty \right\},$$

avec l'opérateur de translation τ défini dans le Lemme 1.14, et muni de la norme

$$\|f\|_{N_q^\sigma(]0, T[, E)} \leq \left(\|f\|_{L^q(]0, T[, E)}^q + \left(\sup_{0 < h < T} \frac{\|\tau_h f - f\|_{L^q(]0, T-h[, E)}}{h^\sigma} \right)^q \right)^{1/q}.$$

Théorème 4.5 ([15, Proposition II.5.23]). Soit H un espace de Hilbert, et $f \in L^2(]0, T[, H)$ une fonction telle que pour un certain $\sigma \in]0, 1[$ on ait

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\sigma} \|\mathcal{F}(\tilde{f})(\tau)\|_H^2 d\tau \leq C^2,$$

avec \tilde{f} le prolongement de f par 0 en dehors de $]0, T[$, et \mathcal{F} l'opérateur de transformation de Fourier.

Alors f appartient à l'espace de Nikolskii $N_2^\sigma(]0, T[, H)$ et on a

$$\|f\|_{N_2^\sigma(]0, T[, H)} \leq M_\sigma(1 + C),$$

où M_σ est une constante qui ne dépend que de σ et T .

Théorème 4.6 (Simon [15, Théorème II.5.17]). Soit B_0, B_1, B_2 trois espaces de Banach avec $B_0 \subset B_1 \subset B_2$. On suppose que l'injection de B_1 dans B_2 est continue et que l'injection de B_0 dans B_1 est compacte. Alors, pour tout $1 \leq q \leq +\infty$ et $0 < \sigma < 1$, l'injection

$$L^q(]0, T[, B_0) \cap N_q^\sigma(]0, T[, B_2) \hookrightarrow L^q(]0, T[, B_1)$$

est compacte.

Théorème 4.7 ([36, Théorème 1.4.1, Corollaires 1.3.2 et 1.4.1]). Soit $p \in [1, +\infty]$. Dans toute la suite on note $p' \in [1, +\infty]$ le conjugué de p , qui est tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Soit E un espace de Banach séparable dont le dual E' est séparable, alors pour tout $p \in [1, +\infty[$, $L^p(]0, T[, E)$ est un espace de Banach séparable tel que

$$(L^p(]0, T[, E))' \simeq L^{p'}(]0, T[, E').$$

De plus,

- si $1 < p < +\infty$, et E réflexif, alors $L^p(]0, T[, E)$ est réflexif,
- si $1 \leq p < +\infty$, alors $L^p(]0, T[, E)$ est séparable.

Définition 4.8 ([15, Définition II.2.6]). Soit E un espace de Banach de dual E' .

- On dit qu'une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge faiblement vers u dans E , et on notera $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, si

$$\forall f \in E', \quad f(u_n) = \langle f, u_n \rangle_{E', E} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u).$$

- On dit qu'une suite $(f_n)_n$ d'éléments de E' converge faiblement- $*$ vers $f \in E'$, et on notera $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty}^* f$, si

$$\forall u \in E, \quad f_n(u) = \langle f_n, u \rangle_{E', E} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle f, u \rangle_{E', E} = f(u).$$

Théorème 4.9 ([15, Théorème II.2.7]). De toute suite bornée dans un espace de Banach réflexif (respectivement dans le dual d'un espace de Banach séparable), on peut extraire une sous suite qui converge faiblement dans cet espace de Banach (resp. faiblement- $*$, dans le dual de cet espace Banach).

Théorème 4.10 ([15, Théorème II.5.5], Interpolation des espaces L^p). Soit $]0, T[$ un intervalle de \mathbb{R} , Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et p_1, q_1, p_2, q_2 quatre réels dans $[1, +\infty]$. Soit aussi $f \in L^{p_1}(]0, T[, L^{q_1}(\Omega)) \cap L^{p_2}(]0, T[, L^{q_2}(\Omega))$, alors pour tout $\theta \in [0, 1]$, la fonction f est dans $L^p(]0, T[, L^q(\Omega))$ pour tout p et q définis par

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_2},$$

et, de plus,

$$\|f\|_{L^p(]0, T[, L^q(\Omega))} \leq \|f\|_{L^{p_1}(]0, T[, L^{q_1}(\Omega))}^\theta \|f\|_{L^{p_2}(]0, T[, L^{q_2}(\Omega))}^{1-\theta}.$$

Théorème 4.11 ([15, Page 79]). Soit E et F deux espaces de Banach. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée d'éléments de E . Alors, si S est une application compacte de E dans F , il existe une sous-suite $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que $S(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge dans F .

Théorème 4.12 ([15, Théorème II.3.4]). Soit $(u_n)_n$ une suite de points d'un espace de Banach E qui converge faiblement vers u dans E , et S une application linéaire compacte de E dans F , alors la suite $(Su_n)_n$ converge fortement vers Su dans F .

Théorème 4.13 ([15, Proposition II.2.12]). Soit E, F et G trois espaces de Banach, et B une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans G . Si $(u_n)_n$ est une suite d'éléments de E qui converge fortement vers u , $(v_n)_n$ une suite d'éléments de F qui converge faiblement vers v , alors la suite $(B(u_n, v_n))_n$ converge faiblement vers $B(u, v)$ dans G .

Théorème 4.14 (Aubin-Lions-Simon [15, Théorème II.5.16]). Soit $B_0 \subset B_1 \subset B_2$, trois espaces de Banach tels que l'inclusion de B_1 dans B_2 soit continue, et celle de B_0 dans B_1 compacte. Soit $r \in]1, +\infty]$. Pour $T > 0$, on définit pour $p \in [1, +\infty[$,

$$E_{p,r} := \left\{ v \in L^p(]0, T[, B_0), \frac{dv}{dt} \in L^r(]0, T[, B_2) \right\}.$$

Alors, l'inclusion de $E_{\infty,r}$ dans $C^0([0, T], B_1)$ est compacte.

Nous séparons la preuve en trois sous-parties : la première montrant l'existence de la vitesse, la seconde montrant son unicité et la troisième, l'existence et l'unicité de la pression.

4.2 Existence du champ de vitesse

Nous allons établir une formulation de Galerkin de l'équation, sur un sous-espace de dimension finie N . Puis, nous montrerons que ce problème admet une solution, et qu'un passage à la limite (quand N tend vers $+\infty$) permet de trouver une fonction solution du problème initial.

Pour cela, rappelons quelques propriétés de V .

Lemme 4.15. *L'espace V est un espace de Hilbert séparable et réflexif.*

Preuve. V est un sous-espace fermé de $(H^1(\Omega))^2$, qui est un Hilbert séparable. Or tout sous-espace fermé d'un espace de Hilbert (respectivement séparable) est un espace de Hilbert (respectivement séparable).

Par ailleurs, tout espace de Hilbert est réflexif. \square

Notons $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base de V , choisie orthonormale pour le produit scalaire de $(L^2(\Omega))^2$. Fixons aussi $N \in \mathbb{N}$. Dans la suite, on va définir une suite de fonctions $(\mathbf{u}_N)_N$ dont les éléments appartiennent au sous-espace de dimension finie $V_N := \text{Vect} \{(\omega_k)_{k \in [0, N]}\}$. Pour définir le problème de Galerkin associé à notre équation dans $C^1([0, T], V_N)$, nous devons d'abord introduire une régularisation en temps des termes \mathbf{f} , g et ξ .

Lemme 4.16. *On définit, pour tout $t \geq 0$,*

- $\mathbf{f}_N(t) := N \int_{-1/N}^0 \tilde{\mathbf{f}}(t+h) dh,$
- $g_N(t) := N \int_{-1/N}^0 \tilde{g}(t+h) dh,$
- $\xi_N(t) := N \int_{-1/N}^0 \tilde{\xi}(t+h) dh,$

avec, pour toute fonction φ , $\tilde{\varphi}$ le prolongement par 0 de φ sur \mathbb{R} .

Alors, \mathbf{f}_N , g_N et ξ_N sont continues en temps et à valeur dans $(L^2(\Omega))^2$ et $L^2(\Gamma_R)$ respectivement, et vérifient

- $\|\mathbf{f}_N\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))},$
- $\|g_N\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))} \leq \|g\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))},$
- $\|\xi_N\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))} \leq \|\xi\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))}.$

De plus, la suite $(\mathbf{f}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers \mathbf{f} dans $L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$, $(g_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(\xi_N)_{N \in \mathbb{N}}$ respectivement vers g et ξ dans $L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))$.

Preuve. La majoration de la norme de \mathbf{f}_N provient directement de la convexité de la norme et de l'inégalité de Jensen, puisque l'application qui est à une fonction associe sa norme au carré est convexe.

On a de même, avec à l'inégalité de Jensen, que, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}_N(t)\|_{\Omega}^2 \leq N \int_{-1/N}^0 \|\tilde{\mathbf{f}}(t) - \tilde{\mathbf{f}}(t+h)\|_{\Omega}^2 dh,$$

et alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{f} - \mathbf{f}_N\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))} &\leq N \int_0^T \int_{-1/N}^0 \|\tilde{\mathbf{f}}(t) - \tilde{\mathbf{f}}(t+h)\|_{\Omega}^2 dh \\ &\leq N \int_{-1/N}^0 \|\tilde{\mathbf{f}} - \tau_h \mathbf{f}\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))}^2 dh \\ &\leq \sup_{|h| \leq 1/N} \|\tilde{\mathbf{f}} - \tau_h \mathbf{f}\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

et cette quantité tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$ d'après le Lemme 1.14.

On traite les termes g_N et ξ_N de la même façon. \square

On peut désormais introduire le problème de Galerkin associé à (4.1) : pour $N \in \mathbb{N}$, trouver une vitesse $t \mapsto \mathbf{u}_N(t)$ dans $C^1([0, T], V_N)$ telle que pour tout \mathbf{v}_N dans V_N on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega + \nu(\nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_\Omega + \frac{1}{2}((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{v}_N, \mathbf{u}_N)_\Omega \\ + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \end{aligned} \quad (4.2a)$$

$$\begin{aligned} = (\mathbf{f}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega + \frac{1}{\alpha}(g_N, \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\xi_N, \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}, \\ \mathbf{u}_N(0) = \mathcal{P}_N(\mathbf{u}_0), \end{aligned} \quad (4.2b)$$

où \mathcal{P}_N est le projecteur orthogonal de H sur V_N , i.e. $(\mathbf{u}_N(0), \mathbf{v})_\Omega = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_\Omega$ pour tout $\mathbf{v} \in V_N$. Notons que le terme non linéaire peut se réécrire, après une intégration par partie obtenue avec l'égalité (1.1), ce qui donne, pour tout $\mathbf{v}_N \in V_N$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega + \nu(\nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_N)_\Omega + ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_N)_{\Gamma_R} \\ + \frac{1}{\alpha}(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ = (\mathbf{f}_N, \mathbf{v}_N)_\Omega + \frac{1}{\alpha}(g_N, \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta}(\xi_N, \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

et nous utiliserons les formulations variationnelles (4.2a) et (4.3) de manière équivalente.

Lemme 4.17. *Il existe un temps $T_N \in]0, T]$ et une solution \mathbf{u}_N au problème (4.2a) telle que $\mathbf{u}_N \in C^1([0, T_N[, V_N)$.*

Preuve. Cherchons une solution au problème (4.2) sous la forme $\mathbf{u}_N(t) = \sum_{k=0}^N \varphi_k(t) \boldsymbol{\omega}_k$, avec, pour $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\varphi_k \in C^0([0, T])$. Nous prenons $\mathbf{v}_N = \boldsymbol{\omega}_j \in V_N$ avec $j \in \llbracket 0, N \rrbracket$ comme fonction test. Puisque la famille $(\boldsymbol{\omega}_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ est orthonormale dans $(L^2(\Omega))^2$, il existe alors une application \mathcal{S} telle que $\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_k)_{k \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ soit solution de

$$\frac{d\boldsymbol{\varphi}}{dt} = \mathcal{S}(\boldsymbol{\varphi}, t), \quad (4.4)$$

muni de la condition initiale $\boldsymbol{\varphi}(0) = ((\mathcal{P}_N(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\omega}_N)_\Omega, \dots, (\mathcal{P}_N(\mathbf{u}_0), \boldsymbol{\omega}_N)_\Omega)^T$. De plus, l'opérateur \mathcal{S} est polynomiale en $\boldsymbol{\varphi}$. En effet, les φ_k étant indépendants de l'espace, ils peuvent sortir des intégrales sur Ω . Ainsi, \mathcal{S} est continue et localement lipschitzienne en $\boldsymbol{\varphi}$ (car polynomiale) et continue en temps (grâce à la régularisation du terme source et des termes de bords) donné par le Lemme 4.16. Alors, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe $T_N \in]0, T]$ et un (unique) $\boldsymbol{\varphi}$ solution dans $C^1([0, T_N])$ de (4.4). On en déduit alors l'existence de $\mathbf{u}_N \in C^1([0, T_N[, V_N)$. \square

4.2.1 Estimation d'énergie

On souhaite alors établir des estimations d'énergie sur \mathbf{u}_N indépendantes de N sur un certain intervalle $]0, T_N[$, qui nous permettront dans un premier temps de montrer que $T_N = T$, puis d'obtenir la régularité de la solution, ce qui nous permettra de passer à la limite sur N dans (4.2).

Lemme 4.18 (Estimation d'énergie sur $]0, T_N[$). *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a les majorations suivantes*

$$\sup_{t \leq T_N} \|\mathbf{u}_N(t)\|_\Omega^2 \leq C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp(T), \quad (4.5a)$$

$$\int_0^{T_N} \|\nabla \mathbf{u}_N(\tau)\|_\Omega^2 d\tau \leq \frac{1}{2\nu} C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp(T), \quad (4.5b)$$

avec

$$C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) := \|\mathbf{u}_0\|_\Omega^2 + \|\mathbf{f}\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2\alpha} \|g\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))}^2 + \frac{1}{2\beta} \|\xi\|_{L^2([0, T], L^2(\Gamma_R))}^2.$$

Preuve. Considérons le problème de Galerkin (4.2). Bien que cette formulation ne prenne en compte que des fonctions tests qui ne dépendent pas du temps, il est possible de considérer $\mathbf{v}_N = \boldsymbol{\omega}_k$, puis de multiplier par $(\mathbf{u}_N, \boldsymbol{\omega}_k)_\Omega$ et de sommer sur $k \in \llbracket 0, N \rrbracket$. La dimension finie (en espace) de l'ensemble des solutions permet donc de considérer \mathbf{u}_N comme fonction test, en prenant garde au terme de dérivée en temps. Dans cette formulation, les termes non linéaires se compensent.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \\ &= (\mathbf{f}_N, \mathbf{u}_N)_\Omega + \frac{1}{\alpha} (g_N, \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\xi_N, \mathbf{u}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}. \end{aligned}$$

On majore alors le second membre à l'aide des inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young :

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}_N, \mathbf{u}_N)_\Omega &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}_N\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2, \\ \frac{1}{\alpha} (g_N, \mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\|g_N\|_{\Gamma_R}^2}{4} + \|\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \right), \\ \frac{1}{\beta} (\xi_N, \mathbf{u}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} &\leq \frac{1}{\beta} \left(\frac{\|\xi_N\|_{\Gamma_R}^2}{4} + \|\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \right), \end{aligned}$$

et ainsi,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 + \frac{1}{\beta} \|\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathbf{f}_N\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\|g_N\|_{\Gamma_R}^2}{4} + \|\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \right) + \frac{1}{\beta} \left(\frac{\|\xi_N\|_{\Gamma_R}^2}{4} + \|\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \right), \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{d}{dt} \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + 2\nu \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 \leq \|\mathbf{f}_N\|_\Omega^2 + \frac{\|g_N\|_{\Gamma_R}^2}{2\alpha} + \frac{\|\xi_N\|_{\Gamma_R}^2}{2\beta} + \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2.$$

On intègre ensuite entre 0 et t (avec $t \leq T_N \leq T$) :

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{u}_N(t)\|_\Omega^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 d\tau \\ &\leq \|\mathbf{u}_N(0)\|_\Omega^2 + \int_0^t \|\mathbf{f}_N\|_\Omega^2 d\tau + \int_0^t \frac{\|g_N\|_{\Gamma_R}^2}{2\alpha} d\tau + \int_0^t \frac{\|\xi_N\|_{\Gamma_R}^2}{2\beta} d\tau + \int_0^t \|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 d\tau \\ &\leq C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) + \int_0^t \left(\|\mathbf{u}_N\|_\Omega^2 + \nu \int_0^\tau \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 ds \right) d\tau, \end{aligned}$$

car \mathcal{P}_N est un projecteur orthogonal, et donc $\|\mathbf{u}_N(0)\|_\Omega^2 = \|\mathcal{P}_N \mathbf{u}_0\|_\Omega^2 \leq \|\mathbf{u}_0\|_\Omega^2$ et puisque les régularisations en temps \mathbf{f}_N , g_N et ξ_N sont respectivement de norme inférieure à celle des fonctions \mathbf{f} , g et ξ d'après le Lemme 4.16.

On peut alors appliquer le Lemme de Grönwall 1.7, en se rappelant que \mathbf{u}_N est continue en temps à valeur dans $(L^2(\Omega))^2$ (et donc bornée sur $]0, T[$) :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_N(t)\|_\Omega^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}_N\|_\Omega^2 &\leq C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp \left(\int_0^t 1 d\tau \right) \\ &\leq C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp(T). \end{aligned}$$

Cette borne étant indépendante de t , cela permet de prendre la borne supérieure sur $]0, T_N[$ de chacun des termes de gauche l'un après l'autre, et d'obtenir le résultat (4.5). \square

On déduit du Lemme 4.18 que les éléments de la suite $(\mathbf{u}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont bornés sur $[0, T_N]$ quelque soit $N \in \mathbb{N}$ en norme $L^2(\Omega)$, indépendamment de T_N . Le Théorème d'explosion en temps fini pour les équations différentielles ordinaires 4.3 permet alors de montrer le lemme suivant.

Lemme 4.19. *On a $T_N = T$ et les inégalités (4.5) restent vraies avec $T_N = T$. Ainsi, \mathbf{u}_N est borné dans $L^2(]0, T[, (H^1(\Omega))^2)$ et dans $L^\infty(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$ indépendamment de N .*

Preuve. Dans notre cas, la solution \mathbf{u}_N obtenue est maximale (car la solution obtenue par le théorème de Cauchy-Lipschitz l'est). Ainsi, si $T_N \neq T$, alors d'après le Lemme des bouts 4.3, $T_N < T$ et pour tout compact $U \subset V_N$, lorsque $t \rightarrow T_N$, $\mathbf{u}_N(t)$ sort définitivement de U .

Or si l'on considère la boule fermée de centre 0 et de rayon $\sqrt{C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp(T)}$, alors le Lemme 4.18 nous donne

$$\lim_{t \rightarrow T_N} \|\mathbf{u}_N(t)\|_\Omega \leq \sup_{t \leq T_N} \|\mathbf{u}_N(t)\|_\Omega \leq \sqrt{C(\mathbf{u}_0, \mathbf{f}, g, \xi) \exp(T)},$$

ce qui est en contradiction avec le fait que $\mathbf{u}_N(t)$ sorte de U . Ainsi, $T_N = T$. \square

À cette étape, nous avons déterminé une suite de fonctions $(\mathbf{u}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ solution du problème de Galerkin (4.2). Nous souhaitons ensuite montrer que cette suite converge (à une sous suite près) vers une fonction $\bar{\mathbf{u}}$ solution du problème (4.1). Pour cela, on va traiter chacun des termes du problème de Galerkin (4.2) et montrer qu'ils convergent (faiblement).

4.2.2 Estimation des dérivées fractionnaires en temps

Cette partie permet de déduire une compacité, de laquelle nous déduirons une convergence forte de la vitesse à partir d'une majoration, ce qui nous permettra de passer à la limite dans les termes non linéaires et de bord. On rappelle que l'on note \mathcal{F} la transformée de Fourier en temps, de paramètre de Fourier τ , en notant $\tilde{\varphi}$ le prolongement par 0 en dehors de $]0, T[$ d'une fonction φ .

Lemme 4.20. *Pour tout $\sigma \in]0, 1/6[$, il existe une constante C indépendante de N , telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}$,*

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{2\sigma} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)(\tau)\|_\Omega^2 d\tau < C.$$

Preuve. Soit $N \in \mathbb{N}$. Les fonctions \mathbf{u}_N , \mathbf{f}_N , g_N et ξ_N sont définies uniquement sur l'intervalle $[0, T]$. Pour pouvoir en prendre leur transformée de Fourier, on commence par prolonger chacune de ces grandeurs par 0 en dehors de $[0, T]$. On note respectivement $\widetilde{\mathbf{u}}_N$, $\widetilde{\mathbf{f}}_N$, \widetilde{g}_N et $\widetilde{\xi}_N$ les grandeurs étendues. On étend alors l'équation (4.3) pour t dans \mathbb{R} .

On rappelle la formule [15, Équation (II-27)] de la transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction $W^{1,1}([0, T], X)$ (pour un espace de Banach X)

$$\imath \tau \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N) = \mathcal{F}\left(\frac{\partial \widetilde{\mathbf{u}}_N}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{u}_N(0) - \frac{e^{-\imath \tau T}}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{u}_N(T).$$

On peut alors prendre la transformée de Fourier du problème de Galerkin (4.3). On obtient donc, pour tout $\mathbf{v}_N \in V_N$,

$$\begin{aligned} \imath \tau (\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N), \mathbf{v}_N)_\Omega &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathbf{u}_N(0), \mathbf{v}_N)_\Omega + \frac{e^{-\imath \tau T}}{\sqrt{2\pi}} (\mathbf{u}_N(T), \mathbf{v}_N)_\Omega \\ &\quad + \nu (\mathcal{F}(\nabla \widetilde{\mathbf{u}}_N), \nabla \mathbf{v}_N)_\Omega + (\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N), \mathbf{v}_N)_\Omega - \frac{1}{2} (\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{u}}_N), \mathbf{v}_N)_{\Gamma_R} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} (\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}), \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \times \mathbf{n}), \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ &= (\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N), \mathbf{v}_N)_\Omega + \frac{1}{\alpha} (\mathcal{F}(\widetilde{g}_N), \mathbf{v}_N \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\mathcal{F}(\widetilde{\xi}_N), \mathbf{v}_N \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}. \end{aligned}$$

On prend alors $\mathbf{v}_N = \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)(\tau)} \in V_N$ comme fonction test

$$\begin{aligned} \imath \tau \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_\Omega^2 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\mathbf{u}_N(0), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)})_\Omega + \frac{e^{-\imath \tau T}}{\sqrt{2\pi}} (\mathbf{u}_N(T), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)})_\Omega \\ &\quad + \nu \|\nabla \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_\Omega^2 + (\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)})_\Omega - \frac{1}{2} (\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{u}}_N), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)})_{\Gamma_R} \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n})\|_{\Gamma_R}^2 + \frac{1}{\beta} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \times \mathbf{n})\|_{\Gamma_R}^2 \\ &= (\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)})_\Omega + \frac{1}{\alpha} (\mathcal{F}(\widetilde{g}_N), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n})})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\mathcal{F}(\widetilde{\xi}_N), \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N \times \mathbf{n})})_{\Gamma_R}. \end{aligned}$$

On cherche désormais à estimer le terme issu de la dérivée en temps, dont on remarque qu'il est imaginaire pur, alors que le terme issu de la diffusion est lui réel, tout comme ceux issus des composantes normale et tangentielle de \mathbf{u}_N . On va donc majorer la partie imaginaire de l'égalité précédente.

$$\begin{aligned} |\tau| \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{\Omega}^2 &\leq \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| + \frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma_R} \mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{u}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| + \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\alpha} \left| \int_{\Gamma_R} \mathcal{F}(\widetilde{g}_N) \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \cdot \mathbf{n} \right| + \frac{1}{\beta} \left| \int_{\Gamma_R} \mathcal{F}(\widetilde{\xi}_N) \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \times \mathbf{n} \right| \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\Omega} \mathbf{u}_N(0) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{\Omega} \widetilde{\mathbf{u}}_N(T) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right|. \end{aligned} \quad (4.6)$$

On note I_N^1 à I_N^7 les sept termes précédents, que l'on va borner (en tant que fonction de τ) dans divers espaces $L^p(\mathbb{R})$. Nous insistons ici sur le fait que toutes les bornes reposent sur la majoration de $(\mathbf{u}_N)_N$ issue du Lemme 4.19 et des majorations du terme source et des termes de bord du Lemme 4.16, qui donnent des bornes indépendantes de N . Ainsi, le caractère borné des termes I_N^1 à I_N^7 sera, lui aussi, indépendant de N .

Terme I_N^1

Le Lemme 4.19 a permis de montrer que la suite $(\mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans $L^2(]0, T[, (H^1(\Omega))^2)$, donc dans $L^{6/5}(]0, T[, (H^1(\Omega))^2)$, et donc aussi dans $L^{6/5}(]0, T[, (L^6(\Omega))^2)$, grâce aux injections de Sobolev. Ainsi, $(\widetilde{\mathbf{u}}_N)_N$ est bornée dans $L^{6/5}(\mathbb{R}, (L^6(\Omega))^2)$ et *a fortiori* dans $L^1(\mathbb{R}, (L^6(\Omega))^2)$ (puisque $\widetilde{\mathbf{u}}_N$ est nulle en dehors de $]0, T[$). Alors, grâce au Théorème de Hausdorff-Young 4.4,

$$(\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N))_N \in L^6(\mathbb{R}, (L^6(\Omega))^2).$$

De plus, par l'inégalité de Hölder, puis grâce au Lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N\|_{L^{6/5}(\Omega)} &\leq \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_N\|_{L^3(\Omega)} \leq C \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^{2/3} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)}^{1/3} \\ &\leq C \left(\|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^{4/3} \|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^{2/3} \right), \end{aligned}$$

et donc, d'après le Lemme 4.19, $((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans $L^{3/2}(]0, T[, (L^{6/5}(\Omega))^2)$, et donc aussi dans $L^{6/5}(]0, T[, (L^{6/5}(\Omega))^2)$, et donc $((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N)_N$ est bornée dans les espaces $L^{6/5}(\mathbb{R}, (L^{6/5}(\Omega))^2)$ et $L^1(\mathbb{R}, (L^{6/5}(\Omega))^2)$. À nouveau, le théorème de Hausdorff-Young permet de déduire que

$$(\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N))_N \text{ est bornée dans } L^6(\mathbb{R}, (L^{6/5}(\Omega))^2).$$

L'inégalité de Hölder donne :

$$\left| \int_{\Omega} \mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| \leq \|\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^{6/5}(\Omega)} \|\overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)}\|_{L^6(\Omega)},$$

et l'inégalité de Young

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right|^3 &\leq \|\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^3 \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^6(\Omega)}^3 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \nabla) \widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^{6/5}(\Omega)}^6 + \frac{1}{2} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^6(\Omega)}^6. \end{aligned}$$

Finalement,

$$(I_N^1)_N \text{ est bornée dans } L^3(\mathbb{R}).$$

Terme I_N^2

Appliquons l'inégalité de Hölder, puis le Théorème 1.9.

$$\|(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq \|\mathbf{u}_N\|_{L^4(\Gamma_R)}^2 \leq C \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

et donc, du Lemme 4.19, on déduit que la suite $((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans $L^1(]0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$ et donc $((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{u}}_N)_N$ est bornée dans $L^1(\mathbb{R}, (L^2(\Gamma_R))^2)$. Puis, le théorème d'Hausdorff-Young donne que $(\mathcal{F}((\widetilde{\mathbf{u}}_N \cdot \mathbf{n}) \widetilde{\mathbf{u}}_N))_N$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}, (L^2(\Gamma_R))^2)$. De plus, le théorème de trace indique que

$$\|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Gamma_R)} \leq C \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ainsi, puisque la suite $(\mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans $L^2([0, T[, (H^1(\Omega))^2)$ d'après le Lemme 4.19, elle l'est aussi dans $L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$. En prolongeant ces majorations, sur \mathbb{R} , on obtient, avec le théorème d'Hausdorff-Young, que $(\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N))_N$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Gamma_R))^2)$. Finalement, il vient d'après le théorème de Cauchy-Schwarz,

$$(I_N^2)_N \text{ est bornée dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Terme I_N^3

D'après les théorèmes de Cauchy-Schwarz et Young,

$$\begin{aligned} I_N^3 &= \left| \int_{\Omega} \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| \\ &\leq \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N)\|_{\Omega} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{\Omega} \\ &\leq \frac{\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N)\|_{\Omega}^2}{2} + \frac{\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{\Omega}^2}{2}. \end{aligned}$$

Or, puisque $\mathbf{u}_N, \mathbf{f}_N \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, on a aussi $\widetilde{\mathbf{u}}_N, \widetilde{\mathbf{f}}_N \in L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Omega))^2) \cap L^1(\mathbb{R}, (L^2(\Omega))^2)$, on déduit du théorème de Hausdorff-Young que $\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{f}}_N), \mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N) \in L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Omega))^2)$, et donc,

$$(I_N^3)_N \text{ est bornée dans } L^1(\mathbb{R}).$$

Terme I_N^4 et I_N^5

D'après les théorèmes de Cauchy-Schwarz et de Young,

$$\begin{aligned} I_N^4 &= \left| \int_{\Gamma_R} \mathcal{F}(\widetilde{g}_N) \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \cdot \mathbf{n} \right| \\ &\leq \|\mathcal{F}(\widetilde{g}_N)\|_{L^2(\Gamma_R)} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^2(\Gamma_R)} \\ &\leq \frac{\|\mathcal{F}(\widetilde{g}_N)\|_{L^2(\Gamma_R)}^2}{2} + \frac{\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^2(\Gamma_R)}^2}{2}. \end{aligned}$$

Comme $g_N \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_R))$, on déduit du théorème d'Hausdorff-Young que $\mathcal{F}(\widetilde{g}_N)$ appartient à $L^2(\mathbb{R}, L^2(\Gamma_R))$.

Ainsi, puisque l'on a déjà montré que la suite $(\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N))_N$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Gamma_R))^2)$, on obtient

$$(I_N^4)_N \text{ est bornée dans } L^1(\mathbb{R}).$$

On trouve de même sur le terme de bord faisant intervenir ξ_N

$$(I_N^5)_N \text{ est bornée dans } L^1(\mathbb{R}).$$

Terme I_N^6 et I_N^7

On considère le terme I_N^6 , l'autre se traitant de manière similaire. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} \mathbf{u}_N(0) \cdot \overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)} \right| \leq \|\mathbf{u}_N(0)\|_{L^2(\Omega)} \|\overline{\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{L^2(\Omega)} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^2(\Omega)},$$

car $\|\mathbf{u}_N(0)\|_{\Omega} = \|\mathcal{P}_N(\mathbf{u}_0)\|_{\Omega} \leq \|\mathbf{u}_0\|_{\Omega}$ car \mathcal{P}_N est un projecteur orthogonal. Finalement, puisque la fonction $\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Omega))^2)$, et que $\|\mathbf{u}_0\|_{\Omega}$ est une constante du temps bornée indépendamment de N ,

$$(I_N^6)_N \text{ et } (I_N^7)_N \text{ sont bornées dans } L^2(\mathbb{R}).$$

Soit désormais $\delta \in]0, 1[$. Puisque pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, $|\tau|^{1-\delta} \leq 1 + |\tau|$, alors, en ajoutant $|\tau|$ de part et d'autre de cette inégalité, on obtient $|\tau|^{1-\delta}(1 + |\tau|^{\delta}) \leq 2|\tau| + 1 \leq 2|\tau| + (1 + |\tau|^{\delta})$. Finalement,

$$|\tau|^{1-\delta} \leq 2 \frac{|\tau|}{1 + |\tau|^{\delta}} + 1 \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

et donc, de (4.6), on déduit

$$|\tau|^{1-\delta} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \frac{I_N^1}{1 + |\tau|^{\delta}} + 2 \frac{I_N^2 + I_N^6 + I_N^7}{1 + |\tau|^{\delta}} + 2 \frac{I_N^3 + I_N^4 + I_N^5}{1 + |\tau|^{\delta}} + \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Or, par l'inégalité de Hölder,

- $\frac{I_N^1(\tau)}{1+|\tau|^\delta}$ est intégrable si $\tau \mapsto \frac{1}{1+|\tau|^\delta} \in L^{3/2}(\mathbb{R})$, puisque $I_N^1 \in L^3(\mathbb{R})$,
- $\frac{I_N^2(\tau)+I_N^6(\tau)+I_N^7(\tau)}{1+|\tau|^\delta}$ est intégrable si $\tau \mapsto \frac{1}{1+|\tau|^\delta} \in L^2(\mathbb{R})$, puisque $I_N^2, I_N^6, I_N^7 \in L^2(\mathbb{R})$,
- $\frac{I_N^3(\tau)+I_N^4(\tau)+I_N^5(\tau)}{1+|\tau|^\delta}$ est intégrable si $\tau \mapsto \frac{1}{1+|\tau|^\delta} \in L^\infty(\mathbb{R})$, puisque $I_N^3, I_N^4, I_N^5 \in L^1(\mathbb{R})$,
- $\|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_2^2$ est intégrable, puisque $\mathcal{F}(\mathbf{u}_N) \in L^2(\mathbb{R}, (L^2(\Omega))^2)$.

Pour tout $\delta \in]0, 1[$, la fonction $\tau \mapsto \frac{1}{1+|\tau|^\delta}$ est dans $L^\infty(\mathbb{R})$.

En outre, si $\delta \in]\frac{2}{3}, 1[$, et on a alors $\tau \mapsto \frac{1}{1+|\tau|^\delta} \in L^{3/2}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Ainsi, si $\delta \in]\frac{2}{3}, 1[$ on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tau|^{1-\delta} \|\mathcal{F}(\widetilde{\mathbf{u}}_N)\|_\Omega^2 d\tau \leq C_\delta,$$

où C_δ est une constante indépendante de N (car toutes les fonctions ont été bornées indépendamment de N), et on obtient le résultat annoncé dans le Lemme 4.20 en posant $\sigma = (1 - \delta)/2$. \square

On peut donc directement appliquer le Théorème 4.5 pour obtenir le résultat suivant.

Lemme 4.21. *Pour tout $T > 0$ et tout $0 < \sigma < 1/6$, la fonction \mathbf{u}_N appartient à l'espace de Nikolskii $N_2^\sigma([0, T], (L^2(\Omega))^2)$.*

Proposition 4.22. *Pour tout $T > 0$ et tout $0 < \sigma < 1$, l'injection*

$$L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2) \cap N_2^\sigma([0, T], (L^2(\Omega))^2) \hookrightarrow L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$$

est compacte.

Preuve. On applique le Théorème 4.6 avec $q = 2$, $B_0 = (H^1(\Omega))^2$, $B_1 = (L^2(\Omega))^2$, $B_2 = (L^2(\Omega))^2$.

Le résultat découle des injections de Sobolev, car l'injection de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte. De plus, $L^2(\Omega)$ s'injecte naturellement dans lui-même de manière continue. \square

4.2.3 Passage à la limite

Dans cette section, nous allons montrer qu'il existe une sous-suite de $(\mathbf{u}_N)_{N \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\bar{\mathbf{u}}$, une solution de notre problème initial. Pour cela, nous allons utiliser à de nombreuses reprises le Théorème 4.9.

Nous allons donc exploiter le caractère borné de chacun des termes de (4.3), pour extraire successivement une sous-suite qui sera solution de (4.1a). Par souci de simplification des notations, on notera toujours $(\mathbf{u}_N)_N$ les suites extraites.

Lemme 4.23 (Convergence des termes volumiques). *On a les convergences suivantes (à une sous-suite près) :*

- $\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{*} \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2)$,
- $\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2)$,
- $\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$.

Preuve. Les deux premières convergences sont des conséquences du caractère borné de $(\mathbf{u}_N)_N$ dans les espaces de Banach $L^\infty([0, T], (L^2(\Omega))^2) = (L^1([0, T], (L^2(\Omega))^2))'$ et $L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2)$, où l'espace $L^1([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ est séparable et $L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2)$ est réflexif, d'après le Théorème 4.7.

Enfin, la convergence forte de $(\mathbf{u}_N)_N$ est due à un résultat de compacité. Puisque celle-ci est bornée dans $L^2([0, T], (H^1(\Omega))^2)$ (d'après le Lemme 4.19) et dans $N_2^\sigma([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ avec $\sigma \in]0, 1/6[$ (d'après le Lemme 4.21), et que l'injection de l'intersection de ces deux espaces vers $L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ est compacte d'après la Proposition 4.22, on en déduit la convergence (forte) de $(\mathbf{u}_N)_N$ vers $\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ grâce au Théorème 4.11.

Les trois limites obtenues sont bien les mêmes, puisque les trois convergences impliquent toutes la convergence au sens des distributions de $\mathcal{D}'([0, T[\times \Omega)$, dont la limite est unique. \square

Lemme 4.24 (Convergence des termes de bord). *On a les convergences suivantes :*

- $\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$,
- $\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$,
- $\mathbf{u}_N \times \mathbf{n} \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$,
- $(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^{4/3}([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$.

Preuve. La convergence forte de $(\mathbf{u}_N)_N$ au bord découle de la convergence forte de $(u_N)_N$ dans $L^2(\Omega)$ et faible dans $H^1(\Omega)$. En effet, d'après le Théorème de trace 1.9, il existe une constante C (indépendante de N) telle que

$$\|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Gamma_R)}^2 \leq \|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C \|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{H^1(\Omega)},$$

et donc, en intégrant entre 0 et T , et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T[, L^2(\Gamma_R))}^2 \leq C \|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)} \|\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}\|_{L^2([0, T[, (H^1(\Omega))^2)}.$$

Le premier terme tend vers 0 en raison de la convergence forte de (\mathbf{u}_N) vers $\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$. Le second terme est borné en raison de la convergence faible de (\mathbf{u}_N) vers $\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T[, (H^1(\Omega))^2)$. Ainsi, $\mathbf{u}_N \rightarrow \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$ fortement, et les deux convergences suivantes sont obtenues directement.

Enfin, la dernière convergence est obtenue grâce à la majoration suivante, qui s'obtient par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le Théorème de trace 1.9, et l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_0^T \|(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Gamma_R)}^{4/3} &\leq \int_0^T \|\mathbf{u}_N\|_{L^4(\Gamma_R)}^{8/3} \\ &\leq C \int_0^T \|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^{2/3} \|\mathbf{u}_N\|_{H^1(\Omega)}^2 \\ &\leq C \|\mathbf{u}_N\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))}^{2/3} \|\mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T[, H^1(\Omega))}^2, \end{aligned}$$

avec C indépendant de N , et où le dernier terme est borné par le Lemme 4.19.

Ainsi, la suite $((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans l'espace $L^{4/3}([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$ qui est réflexif (voir Théorème 4.7), et donc $((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N)_N$ admet une limite faible dans cet espace.

En outre, le Théorème 4.13 (avec $E = F = L^2([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$, $G = L^1([0, T[, (L^1(\Gamma_R))^2)$) indique que $((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N)_N$ converge faiblement vers $(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^1([0, T[, (L^1(\Gamma_R))^2)$. Puisque les convergences dans $L^{4/3}([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$ et dans $L^1([0, T[, (L^1(\Gamma_R))^2)$ impliquent aussi celle au sens des distributions, on déduit de l'unicité de la limite que la suite $(\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n})\mathbf{u}_N$ converge faiblement vers $(\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n})\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^{4/3}([0, T[, (L^2(\Gamma_R))^2)$. \square

Lemme 4.25 (Convergence du terme non linéaire). *On a la convergence :*

$$(\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{u}} \quad \text{dans } L^{\frac{4}{3}}([0, T[, (L^{\frac{6}{5}}(\Omega))^2).$$

Preuve. Pour pouvoir passer à la limite dans le terme $(\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\mathbf{u}_N$, il suffit que ce terme soit borné dans le dual de l'espace des fonctions tests V , et donc par les injections de Sobolev, dans le dual de $L^\infty([0, T[, (L^6(\Omega))^2)$ (car les fonctions tests ne dépendent pas du temps). Pour cela, nous montrons que $(\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\mathbf{u}_N$ est borné dans deux espaces, et donc dans un espace interpolant choisi astucieusement.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne la relation :

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_N \cdot \nabla)\mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T[, L^1(\Omega))} &\leq \sqrt{\int_0^T \|\mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)}^2} \\ &\leq \|\mathbf{u}_N\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))} \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T[, L^2(\Omega))} \\ &\leq \|\mathbf{u}_N\|_{L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))} \|\mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T[, H^1(\Omega))}, \end{aligned}$$

et, de plus, par l'inégalité de Hölder, de Cauchy-Schwarz et les injections de Sobolev,

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N\|_{L^1([0, T], L^{3/2}(\Omega))} &\leq \int_0^T \|\mathbf{u}_N\|_{L^6(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2(\Omega)} \, d\tau \\ &\leq \|\mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T], L^6(\Omega))} \|\nabla \mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T], L^2(\Omega))} \\ &\leq C \|\mathbf{u}_N\|_{L^2([0, T], H^1(\Omega))}^2. \end{aligned}$$

Ainsi, grâce aux estimations d'énergie du Lemme 4.19 et aux deux majorations précédentes, on déduit que la suite $((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans les espaces $L^2([0, T], L^1(\Omega))$ et $L^1([0, T], L^{3/2}(\Omega))$, et donc, d'après le Théorème 4.10, dans tout espace interpolé de la forme $L^p([0, T], L^q(\Omega))$, où p et q vérifient

$$\frac{1}{p} = \frac{\theta}{1} + \frac{1-\theta}{2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} = \frac{2\theta}{3} + \frac{1-\theta}{1},$$

pour tout $\theta \in [0, 1]$. Ainsi, en prenant $\theta = 1/2$, on déduit que la suite $((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N)_N$ est bornée dans $L^{4/3}([0, T], (L^{6/5}(\Omega))^2)$ indépendamment de N . Ainsi, d'après le Théorème 4.9, il existe une fonction $\mathbf{s} \in L^{4/3}([0, T], (L^{6/5}(\Omega))^2)$ telle que

$$(\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mathbf{s}.$$

Il reste à vérifier que $\mathbf{s} = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}$.

Puisque la suite $(\mathbf{u}_N)_N$ converge fortement vers $\bar{\mathbf{u}} \in L^2([0, T], (L^2(\Omega))^2)$ et $\nabla \mathbf{u}_N$ converge faiblement vers $\nabla \bar{\mathbf{u}} \in L^2([0, T], (L^2(\Omega))^4)$, et grâce au Théorème 4.13, on déduit que $(\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N$ converge faiblement vers $(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}$ dans $L^1([0, T], (L^1(\Omega))^2)$. Mais puisque la suite $((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N)_N$ converge aussi faiblement vers \mathbf{s} dans $L^{4/3}([0, T], (L^{5/6}(\Omega))^2)$, et que ces deux convergences impliquent une convergence au sens des distributions, on déduit par unicité de la limite dans $\mathcal{D}'([0, T] \times \Omega)$, que $\mathbf{s} = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}$. \square

Avec toutes les limites exhibées précédemment, nous pouvons désormais montrer le résultat d'existence du champ de vitesse en passant à la limite dans la formulation de Galerkin.

Démonstration de l'existence de \mathbf{u} du Théorème 4.1. Soit $\mathbf{v} \in V$ et $\mathbf{v}_K := \mathcal{P}_K(\mathbf{v})$, qui tend vers \mathbf{v} dans V quand K tend vers $+\infty$, puisque la famille $(\omega_K)_K$ est totale dans V .

Puisque les espaces $(V_N)_N$ sont imbriqués les uns dans les autres, on peut, pour N suffisamment grand, considérer \mathbf{v}_K comme fonction test dans (4.3) prise au sens de $\mathcal{D}'([0, T])$, ce qui donne, par définition de la dérivation en temps au sens des distributions, pour tout $\theta \in \mathcal{D}([0, T])$:

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta'(\tau) \, d\tau + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{u}_N, \nabla \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau \\ & + \int_0^T ((\mathbf{u}_N \cdot \nabla) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}) \mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (\mathbf{u}_N \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\mathbf{u}_N \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_K \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (g_N, \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\xi_N, \mathbf{v}_K \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

On peut alors faire tendre N vers l'infini, en utilisant l'existence de limites obtenues précédemment dans les Lemmes 4.23, 4.24, 4.25 et 4.16,

$$\begin{aligned} & - \int_0^T (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta'(\tau) \, d\tau + \nu \int_0^T (\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau \\ & + \int_0^T ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}, \mathbf{v}_K \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (g, \mathbf{v}_K \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\xi, \mathbf{v}_K \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) \, d\tau. \end{aligned}$$

Le passage à la limite du terme de la dérivée temporelle est justifié ainsi :

$$- \int_0^T (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta'(\tau) \, d\tau = - \int_0^T (\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K \theta'(\tau))_\Omega \, d\tau,$$

or, puisque θ appartient à $\mathcal{D}(]0, T[)$, θ' appartient aussi à cette espace, et $\mathbf{v}_K \theta' \in \mathcal{D}(]0, T[, (L^2(\Omega))^2) \subset L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, et puisque \mathbf{u}_N tend faiblement vers $\bar{\mathbf{u}}$ dans $L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, on a

$$-\int_0^T (\mathbf{u}_n, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta'(\tau) d\tau \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\int_0^T (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K \theta'(\tau))_\Omega d\tau = -\int_0^T (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_\Omega \theta'(\tau) d\tau$$

On fait maintenant tendre K vers l'infini. Puisque $\theta \mathbf{v}_K$ tend vers $\theta \mathbf{v}$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], V)$, on obtient

$$\begin{aligned} & -\int_0^T (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_\Omega \theta'(\tau) d\tau + \nu \int_0^T (\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v})_\Omega \theta(\tau) d\tau \\ & + \int_0^T ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_\Omega \theta(\tau) d\tau - \frac{1}{2} \int_0^T ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\Gamma_R} \theta(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) d\tau \\ & = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \theta(\tau) d\tau + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) d\tau + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\xi, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \theta(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

ce qui est exactement

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_\Omega + \nu (\nabla \bar{\mathbf{u}}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2} ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}) \bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\alpha} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\bar{\mathbf{u}} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ & = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{\alpha} (g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\xi, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \end{aligned}$$

au sens des distributions de $\mathcal{D}'(]0, T[)$. Ainsi, $\bar{\mathbf{u}}$ vérifie bien (4.1a) lorsque l'on restreint l'espace des fonctions tests aux fonctions à divergence nulle, puisque dans ce cas le terme de pression s'annule.

L'existence ne sera complète que lorsque l'on aura de plus obtenu l'existence d'une pression p telle que le couple $(\bar{\mathbf{u}}, p)$ vérifie (4.1a) avec des fonctions tests dans X . Ce sera le cas à la Section 4.4.

Il reste alors à vérifier que $\bar{\mathbf{u}}$ vérifie la condition initiale (4.1b), i.e. $(\int_\Omega \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v})(0) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v}$ pour tout $\mathbf{v} \in V$. Prenons un tel \mathbf{v} . Puisque $(V_K)_{K \in \mathbb{N}}$ est dense dans V (pour la norme de $(H^1(\Omega))^2$), on déduit l'existence d'une suite $(\mathbf{v}_K)_{K \in \mathbb{N}}$ telle que $\mathbf{v}_k \in V_K \subset V$ et $\mathbf{v}_K \xrightarrow{K \rightarrow \infty} \mathbf{v}$ dans $(H^1(\Omega))^2$.

En étudiant le problème sur $\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}$ obtenu en faisant la différence des formulations (4.2a) et (4.1a) et en reprenant la preuve du Lemme 2.15 réalisée pour le problème d'Oseen, on obtient que la dérivée $\frac{d}{dt} (\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}) \in L^{2-\varepsilon}(]0, T[, V')$ pour un $\varepsilon \in]1, 2[$, et en outre, $(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}}) \in L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))$. Par ailleurs, on déduit du Théorème d'Aubin-Lions-Simon 4.14 que l'inclusion de $E_{\infty, 2-\varepsilon}$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], V')$ est compacte, ce qui donne, avec le Théorème de compacité 4.11, la convergence (encore à une sous-suite près) de la suite $(\mathbf{u}_N - \bar{\mathbf{u}})_N$ vers $\mathbf{0}$ dans $\mathcal{C}^0([0, T], V')$, et donc pour tout $t \in [0, T]$, pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega(t) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_\Omega(t),$$

et *a fortiori* en $t = 0$. Puisque les espaces $(V_N)_N$ sont imbriqués les uns dans les autres, la condition initiale du problème de Galerkin (4.2b) donne, pour N suffisamment grand,

$$(\mathbf{u}_N, \mathbf{v}_K)_\Omega(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_K)_\Omega.$$

Par unicité de la limite dans \mathbb{R} , on a :

$$(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_K)_\Omega(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_K)_\Omega.$$

Enfin, on peut passer à la limite sur K pour trouver que

$$(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v})_\Omega(0) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v})_\Omega,$$

ce qui donne l'existence d'une vitesse $\bar{\mathbf{u}}$ vérifiant la condition initiale (4.1b). \square

4.3 Unicité du champ de vitesse

Pour obtenir l'unicité, nous serons amenés à considérer la solution de (4.1a) elle-même comme fonction test. Comme cette formulation faible initiale ne considère que des fonctions tests indépendantes du

temps, nous devons dans un premier temps réécrire une formulation variationnelle prenant en compte des fonctions tests dépendant du temps.

Lemme 4.26. *Soit $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, V)$ et \mathbf{u} solution du problème (4.1). Alors $\mathbf{u} \in C^0([0, T], H)$, et $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^1(]0, T[, V')$, et on a en outre l'inégalité, pour tout $\varphi \in L^2([0, T], V) \cap L^\infty(]0, T[, H)$ et presque tout $\tau, s \in]0, T[$,*

$$\left| \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}(\tau), \varphi(s) \right\rangle_{V', V} \right| \leq C \left(R_1^\ell(\tau) T_1^\ell(s) + R_2^\ell(\tau) T_2^\ell(s) \right), \quad (4.7)$$

avec $C \geq 0$, et $R_1^\ell \in L^2(]0, T[)$, $T_1^\ell \in L^2(]0, T[)$, $R_2^\ell \in L^{4/3}(]0, T[)$, $T_2^\ell \in L^4(]0, T[)$.

Par ailleurs, pour tout $\varphi \in M_i$, on a $t \mapsto \langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \varphi \rangle_{V', V} \in L^1(]0, T[)$, et on a de plus l'égalité

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \varphi \right\rangle_{V', V} + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega + \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \varphi)_\Omega - \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{u})_\Omega \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \varphi \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \varphi \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ = \int_0^T (\mathbf{f}, \varphi)_\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (g, \varphi \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\xi, \varphi \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Enfin, pour tout $p \in [1, 2]$, on a $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^p(]0, T[, V')$.

Preuve. La preuve réalisée pour le problème d'Oseen du Lemme 2.15 a été faite sous la régularité du champ d'advection \mathbf{b} dans M_i qui est la même que celle de la solution \mathbf{u} que l'on a pour le problème de Navier-Stokes, et ne repose que sur le caractère linéaire par rapport à la fonction test, par rapport à \mathbf{u} . Aussi, la preuve s'étend naturellement pour obtenir la relation (4.8). Rappelons que la dérivée $\frac{d\mathbf{u}}{dt}$ qui est la dérivée au sens des distributions d'une fonction du temps à valeur dans V est à prendre au sens de la Définition 1.3. \square

On peut désormais prouver l'unicité de la solution de notre problème initial.

Preuve de l'unicité de \mathbf{u} du Théorème 4.1. La démonstration repose sur l'introduction de deux solutions du problème (4.1), et donc aussi solution de (4.8), notées \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 . Leur différence $\mathbf{u} := \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$ est telle que $\mathbf{u}(0) = 0$ dans V' . L'erreur \mathbf{u} vérifie donc le problème faible (4.8) homogène, et donc pour toute fonction test $\varphi \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \varphi \right\rangle_{V', V} + \nu \int_0^T (\nabla \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega + \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \varphi)_\Omega + \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \mathbf{u}, \varphi)_\Omega \\ - \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{u}_1)_\Omega - \frac{1}{2} \int_0^T ((\mathbf{u}_2 \cdot \nabla) \varphi, \mathbf{u})_\Omega \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^T (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \varphi \cdot \mathbf{n})_\Omega + \frac{1}{\beta} \int_0^T (\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \varphi \times \mathbf{n})_\Omega = 0. \end{aligned}$$

Soit $t \in]0, T[$. Puisque $\mathbf{u} \in L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$, on peut prendre $\mathbf{u} \mathbf{1}_{[0, t]}$ comme fonction test, et obtenir :

$$\begin{aligned} \int_0^t \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{u} \right\rangle_{V', V} + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 + \frac{1}{\alpha} \int_0^t \|\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 + \frac{1}{\beta} \int_0^t \|\mathbf{u} \times \mathbf{n}\|_{\Gamma_R}^2 \\ = -\frac{1}{2} \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u})_\Omega + \frac{1}{2} \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_1)_\Omega. \end{aligned}$$

On utilise la formule d'intégration de la dérivée du Théorème de Lions-Magenes 1.24, puis on majore les deux termes du second membre avec la formule (1.3), ce qui donne

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_\Omega^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_\Omega^2 + \left| \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_1, \mathbf{u})_\Omega \right| + \left| \int_0^t ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{u}_1)_\Omega \right| \\ &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_\Omega^2 + \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)} + \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{L^4(\Omega)}. \end{aligned}$$

On majore ensuite les normes $L^4(\Omega)$ avec le Lemme 1.1, puis l'on décompose les normes sur $H^1(\Omega)$ en utilisant que pour tout $\gamma \in \mathbb{R}^+$, on a la majoration $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^\gamma \leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^\gamma + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^\gamma)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_\Omega^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + C \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)}^{1/2} \\ &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)} + C \int_0^t \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)} \\ &\quad + C \int_0^t \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^{3/2} \right) \left(\|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \right), \end{aligned}$$

et donc, en appliquant trois inégalités de Young 1.11 :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|_\Omega^2 + 2\nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_\Omega^2 &\leq \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \left(C \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)} + \frac{C^2 \|\mathbf{u}_1\|_{H^1(\Omega)}^2}{4\nu} \right) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \int_0^t \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\quad + \int_0^t \left(CC' \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + CC' \left(\frac{3CC'}{4\nu} \right)^3 \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right), \end{aligned}$$

avec $C' = \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{u}_1\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \in L^4(]0, T[)$.

Il existe donc une fonction positive $\eta(\tau) \in L^1(]0, T[)$ telle que

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \eta(\tau) \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2(\tau) d\tau.$$

On peut alors appliquer Lemme de Grönwall 1.7, puisque la fonction η est intégrable sur $]0, T[$ (car \mathbf{u}_1 , qui est solution du problème (4.1), appartient à $L^\infty(]0, T[, H) \cap L^2(]0, T[, V)$) et que l'on a en outre $\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \in L^\infty(]0, T[)$. On a donc finalement pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2(t) \leq \|\mathbf{u}(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \exp \left(\int_0^t \eta(\tau) d\tau \right) = 0,$$

puisque l'erreur initiale à nulle à $t = 0$. On conclut donc que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ presque partout, ce qui termine la preuve de l'unicité du champ de vitesse. \square

4.4 Existence et unicité de la pression

Nous finissons la preuve du Théorème 4.1 en démontrant l'existence et l'unicité du champ de pression solution de Navier-Stokes avec conditions limites mixtes de Robin et de Dirichlet.

Lemme 4.27 ([19, Lemme 3.10]). Soit B l'opérateur de X dans $L^2(\Omega)$ tel que l'on a, pour tout $\mathbf{v} \in X$, $B(\mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}$, et B^T son adjoint. Alors, pour tout $\varphi \in X'$ qui s'annule sur V , il existe un $P \in L^2(\Omega)$ tel que $\varphi = B^T P$.

Lemme 4.28 ([19, Lemme 3.4]). L'opérateur B de X dans $L^2(\Omega)$ tel que, pour tout $\mathbf{v} \in X$, $B(\mathbf{v}) = -\nabla \cdot \mathbf{v}$, est continu et surjectif.

Lemme 4.29 ([40, Lemme A.40] avec $A = B$, $V = X$ et $W = L^2(\Omega)$). *Considérons un opérateur $B \in \mathcal{L}(X, L^2(\Omega))$, et B^T son adjoint. Alors, les propositions suivantes sont équivalentes :*

- B est surjective.
- Il existe $\gamma > 0$ tel que, pour tout $q \in L^2(\Omega)$,

$$\|B^T q\|_{X'} \geq \gamma \|q\|_{L^2(\Omega)}.$$

Preuve de l'existence et de l'unicité de la pression. Repartons de l'égalité (4.8). On a, en prenant pour fonction test $\varphi = \eta(t)\mathbf{v}$ avec $\mathbf{v} \in S(]0, T[, V)$ et $\eta \in D(]0, T[)$,

$$\begin{aligned} \int_0^T \eta(t) \left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} \right\rangle_{V', V} + \nu \int_0^T \eta(t) (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2} \int_0^T \eta(t) ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2} \int_0^T \eta(t) ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega \\ + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \eta(t) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} \int_0^T \eta(t) (\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ = \int_0^T \eta(t) (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{\alpha} \int_0^T \eta(t) (g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} \int_0^T \eta(t) (\xi, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour toute fonction η , on a donc, pour presque tout $t \in]0, T[$,

$$\left\langle \frac{d\mathbf{u}}{dt}, \mathbf{v} \right\rangle_{V', V} + \langle \mathcal{H}, \mathbf{v} \rangle_{V', V} = 0,$$

avec $\mathcal{H} \in L^1(]0, T[, X')$ tel que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}, \mathbf{v} \rangle_{V', V} = \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2} ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega \\ + \frac{1}{\alpha} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} + \frac{1}{\beta} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R} \\ - (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{\alpha} (g, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_R} - \frac{1}{\beta} (\xi, \mathbf{v} \times \mathbf{n})_{\Gamma_R}. \end{aligned}$$

Ainsi, en intégrant sur $]0, t[$, puis en appliquant le Théorème de Lions-Magenes 1.23, on a

$$(\mathbf{u}(t), \mathbf{v})_\Omega - (\mathbf{u}(0), \mathbf{v})_\Omega + \int_0^t \langle \mathcal{H}, \mathbf{v} \rangle_{V', V} = 0$$

Ainsi, grâce à la formule [15, Page 93], et à la réflexivité de V , on peut intervertir le crochet de dualité et l'intégrale, pour obtenir

$$\left\langle \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathcal{H}, \mathbf{v} \right\rangle_{V', V} = 0.$$

Cela étant vrai pour tout $\mathbf{v} \in V$, on déduit avec le Lemme 4.27 (à t fixé), qu'il existe un $P(t) \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathcal{H} = B^T P(t) \quad (4.9)$$

dans X' .

Nous avons défini $P(t) \in L^2(\Omega)$ pour presque tout t , montrons désormais que P appartient à $L^\infty(]0, T[, L^2(\Omega))$. Grâce à la surjectivité de l'opérateur de divergence obtenue dans le Lemme 4.28, on peut appliquer le Lemme 4.29. On déduit alors, à partir de l'égalité (4.9), qu'il existe une constante positive γ telle que

$$\begin{aligned} \|P(t)\|_{L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{\gamma} \|B^T P(t)\|_{X'} \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \left\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathcal{H} \right\|_{X'}. \end{aligned}$$

Ainsi, par inégalité triangulaire, et par l'inclusion $H \subset X'$,

$$\|P(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\gamma} \left(\|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0)\|_H + \left\| \int_0^t \mathcal{H} \right\|_{X'} \right).$$

Or, puisque $\mathbf{u} \in \mathcal{C}^0([0, T[, H)$ et $\mathcal{H} \in L^1([0, T[, X')$, alors $\left\| \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}(0) + \int_0^t \mathcal{H} \right\|_{X'} \in L^\infty([0, T[)$. Cela montre que $P \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))$, et l'on peut définir $p = \partial_t P \in \mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L^2(\Omega))$.

Finalement, en dérivant (au sens des distributions) l'égalité (4.9) et en utilisant la notation (2.10), on obtient exactement (4.1a).

Enfin, montrons que la pression est unique. Rappelons que nous avons déjà montré que la vitesse était unique. Supposons donc qu'il existe deux fonctions $P_1, P_2 \in L^\infty([0, T[, L^2(\Omega))$ associé à une même vitesse \mathbf{u} . Alors, d'après (4.9), la différence vérifie pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$(P_1(t) - P_2(t), \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega = 0.$$

Par surjectivité de la divergence, $P_1(t) - P_2(t) = 0$ dans $L^2(\Omega)$, et donc presque partout sur $]0, T[$. \square

Chapitre 5

Algorithme OSWR pour le problème de Navier-Stokes

Sommaire

5.1	Problème de Navier-Stokes et formulation multidomaines	91
5.1.1	Formulation forte	91
5.1.2	Formulation faible	92
5.2	OSWR pour le problème de Navier-Stokes	94
5.3	Convergence par estimation d'énergie	95
5.4	Recalibrage de la pression pour Navier-Stokes	99
5.5	OSWR pour résoudre le problème non linéaire	99
5.6	Résultats numériques	101

Les équations de Navier-Stokes jouent un rôle essentiel dans la modélisation des écoulements de fluides incompressibles. Cependant, leur nature non linéaires rend leur résolution numérique complexe et coûteuse en temps de calcul. Afin de préserver une précision élevée tout en optimisant le temps de résolution, l'utilisation de méthodes de parallélisation constitue une approche pertinente. Ces dernières décennies, de nombreuses études ont été consacrées à la décomposition de domaine appliquée au problème de Navier-Stokes. Toutefois, ces analyses avec des conditions limites de Robin ont toujours été menées sur la version discrétisée en temps du problème, en appliquant une méthode de décomposition de domaine stationnaire à chaque pas de temps (voir [25, 12, 28]).

L'objectif de ce chapitre est d'étendre l'algorithme OSWR au problème de Navier-Stokes en dimension 2. Dans le Chapitre 2, nous avons étudié ce schéma sur le problème d'Oseen, ce qui nous a permis de nous concentrer sur les aspects techniques de l'algorithme en évitant les difficultés liées à la non-linéarité de Navier-Stokes. Nous suivrons ici une approche similaire, en adaptant la trame générale de cette analyse au cadre des équations de Navier-Stokes. La principale difficulté de cette étude réside dans la démonstration de la convergence de l'algorithme par une estimation d'énergie, en raison de la non-linéarité du problème. Toutefois, comme cela avait été démontré [56], la convergence de l'algorithme OSWR peut être établie dans certains cas non linéaires.

Dans la Section 5.1, nous introduisons une formulation multidomaine adaptée au problème de Navier-Stokes. L'algorithme OSWR est présenté dans la Section 5.2, suivi de l'étude de sa convergence dans la Section 5.3. Nous abordons ensuite la technique de recalibrage de la pression dans la Section 5.4. Dans la Section 5.5, nous proposons d'utiliser l'algorithme OSWR en résolvant une suite de problèmes linéaires pour résoudre le problème non linéaire de Navier-Stokes. Enfin, des résultats numériques illustrant la convergence de l'algorithme sont présentés dans la Section 5.6.

5.1 Problème de Navier-Stokes et formulation multidomaines

5.1.1 Formulation forte

Sur un domaine borné non vide, lipschitzien et à frontière compacte $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et sur un intervalle de temps $]0, T[$, $T > 0$ le problème de Navier-Stokes instationnaire consiste à déterminer le couple

vitesse-pression (\mathbf{u}, p) solution de

$$\partial_t \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (5.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (5.1b)$$

$$\mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (5.1c)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, T[, \quad (5.1d)$$

avec un coefficient de diffusion $\nu > 0$, un terme source \mathbf{f} et une condition initiale \mathbf{u}_0 .

Afin d'introduire la méthode de décomposition de domaine, on réécrit, comme dans le Chapitre 2, le problème (5.1) sur $(\Omega_1, \dots, \Omega_M)$, une partition de Ω , avec, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$,

$$\partial_t \mathbf{u}_i - \nu \Delta \mathbf{u}_i + (\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{u}_i + \nabla p_i = \mathbf{f}_i \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (5.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_i = 0 \quad \text{dans } \Omega_i \times]0, T[, \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{u}_i(t=0) = \mathbf{u}_{0i} \quad \text{dans } \Omega_i, \quad (5.2c)$$

$$\mathbf{u}_i = 0 \quad \text{sur } (\partial\Omega \cap \partial\Omega_i) \times]0, T[, \quad (5.2d)$$

où l'on a défini, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$:

- $\mathbf{f}_i := \mathbf{f}|_{\Omega_i}$,
- $\mathbf{u}_{0i} := \mathbf{u}_0|_{\Omega_i}$,

et muni des conditions de transmission physiques sur les frontières intérieures $\Gamma_{ij} \times]0, T[$, pour $j \in \mathcal{I}_i$

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j, \quad (5.3a)$$

$$\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_i - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) = \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_j - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}), \quad (5.3b)$$

$$\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}) = \nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}). \quad (5.3c)$$

En remarquant que la relation $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_j$ se réécrit de manière équivalente en $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}$ et $\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}$, les conditions de transmission (5.3) se réécrivent de manière équivalente en (5.4), quel que soit le choix des coefficients $(\alpha_{ij}, \alpha_{ji}, \beta_{ij}, \beta_{ji}) \in (\mathbb{R}^{+*})^2$, sur $\Gamma_{ij} \times]0, T[$, $j \in \mathcal{I}_i$.

$$\alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_i - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij} = g_{ij}, \quad (5.4a)$$

$$\beta_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij} = \xi_{ij}, \quad (5.4b)$$

avec

- $g_{ij} := \alpha_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij} - p_j - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}$,
- $\xi_{ij} := \beta_{ij} \left(\nu \partial_{\mathbf{n}_{ij}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij} - \frac{1}{2}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij})(\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}) \right) + \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}$.

De la même manière que pour le problème d'Oseen (voir Proposition 2.3), on a la relation suivante sur les quantités de Robin.

Proposition 5.1. *On a la relation entre les quantités de Robin aux interfaces Γ_{ij} , pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, et $j \in \mathcal{I}_i$*

$$g_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}, \quad (5.5a)$$

$$\xi_{ij} = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ji}. \quad (5.5b)$$

5.1.2 Formulation faible

On conserve les notations des espaces fonctionnels définis dans la Section 2.1.2.1

Au problème fort (5.1), on associe la formulation variationnelle suivante : trouver la vitesse $\mathbf{u} \in L^2([0, T[, X)$ et la pression $p \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2_0(\Omega))$ telles que :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - ((p, \nabla \cdot \mathbf{v}))_\Omega = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_\Omega \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X), \quad (5.6a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q)_\Omega = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega), \quad (5.6b)$$

$$\left(\int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_\Omega \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V), \quad (5.6c)$$

avec A , l'application définie sur $X \times X \supset V \times V$ par

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_\Omega.$$

L'existence et l'unicité du couple (\mathbf{u}, p) solution du problème (5.6) sont données par le théorème suivant, obtenu à partir de [15, Théorème V.1.4].

Théorème 5.2. *Si Ω est un ouvert borné connexe et lipschitzien de \mathbb{R}^2 , et si $\mathbf{u}_0 \in H$, $\mathbf{f} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$, alors il existe un unique couple (\mathbf{u}, p) solution de (5.6), tel que pour tout $T > 0$,*

$$(\mathbf{u}, p) \in (C^0([0, T], H) \cap L^2([0, T[, V)) \times \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2_0(\Omega)), \quad (5.7)$$

avec $\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in L^2([0, T[, V')$.

On peut alors donner la définition d'un problème équivalent sur la partition $(\Omega_1, \dots, \Omega_M)$: trouver $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ tel que, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i \in M_i$, $p_i \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ et les quantités de Robin aux frontières $\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i, \mathcal{D}'([0, T[, \Gamma_i))$, tels que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - ((p_i, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = c_i(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X_i), \quad (5.8a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_i, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (5.8b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V_i), \quad (5.8c)$$

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} ((p_i, 1))_{\Omega_i} = 0, \quad (5.8d)$$

muni des relations sur les interfaces, pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$\sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} = \sum_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket} \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right), \quad (5.9a)$$

et, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$ et \mathbf{v} dans X , nul sur $\Omega \setminus (\Omega_i \cup \Omega_j)$

$$\langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} + \langle \boldsymbol{\lambda}_j, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_j} = \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ij}\alpha_{ji}} (\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ij}\beta_{ji}} (\mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}}, \quad (5.9b)$$

avec l'application A_i définie sur $X_i \times X_i$ par

$$A_i(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} + \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})_{\Omega_i} - \frac{1}{2}((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u})_{\Omega_i} \\ + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right),$$

et d_i^{-1} l'application définie sur $\mathbf{H}_{00}^{-1/2}(\Gamma_i) \times X_i$ telle que

$$c_i(\boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v}) := (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i}.$$

Théorème 5.3. *Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (5.6). Soit $\mathbf{u}_0 \in H$, ainsi que $\mathbf{f} \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega))^2)$. Le problème couplé (5.8)-(5.9) admet une unique solution $(\mathbf{u}_i, p_i, \boldsymbol{\lambda}_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$, qui est telle que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$ et $p_i = p|_{\Omega_i}$.*

¹Remarquons que l'application A_i est légèrement différente de celle du problème d'Oseen, quand d_i définit exactement la même application.

Preuve. La preuve du Théorème 5.3 pour le problème d'Oseen s'étend directement au problème de Navier-Stokes, car la régularité du champ d'advection \mathbf{b} était la même que celle \mathbf{u}_i , ce qui permet de définir les données de Robin $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1, M \rrbracket}$ de la même manière que (2.16), et d'obtenir leur continuité comme dans (2.17). Le caractère non linéaire n'a pas de conséquence ici, puisque la preuve n'utilise la linéarité que par rapport à la fonction test. \square

5.2 OSWR pour le problème de Navier-Stokes

Nous introduisons l'Algorithme 6 afin de résoudre le problème couplé (5.8)-(5.9), qui est exactement le même que pour le problème d'Oseen, à la différence que A_i désigne désormais l'application associée à l'opérateur de Navier-Stokes.

Algorithme 6 (OSWR pour le problème de Navier-Stokes)

Choisir des données de Robin initiales $g_{ij}^0, \xi_{ij}^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij})), \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

1. Pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, définir $g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$ tel que $g_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} g_{ij}^{\ell-1}$ et $\xi_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \xi_{ij}^{\ell-1}$.

2. Résoudre dans chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ le problème : trouver la vitesse $\mathbf{u}_i^\ell \in M_i$ et la pression $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ tel que

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + A_i(\mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v}) - ((p_i^\ell, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} = c_i(g_i^{\ell-1}, \xi_i^{\ell-1}, \mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, X_i), \quad (5.10a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}_i^\ell, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \text{pour tout } q \in L^2(\Omega_i), \quad (5.10b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{u}_i^\ell \cdot \mathbf{v} \right) (0) = \int_{\Omega_i} \mathbf{u}_{0i} \cdot \mathbf{v} \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in S([0, T[, V_i). \quad (5.10c)$$

3. Mettre à jour les données de Robin sur les interfaces, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$,

$$g_{ij}^\ell = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji}^{\ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j^\ell \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[, \quad (5.11a)$$

$$\xi_{ij}^\ell = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji}^{\ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j^\ell \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[. \quad (5.11b)$$

fin pour

Commençons par montrer que l'algorithme est bien défini. Cela repose en grande partie sur l'existence et l'unicité de la solution des problèmes locaux sur les sous-domaines, ce qui a été le travail du Chapitre 4.

Théorème 5.4. Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Supposons que, pour tout $j \in \mathcal{I}_i$, $g_{ij}^0, \xi_{ij}^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, $\mathbf{f}_i \in L^2([0, T[, (L^2(\Omega_i))^2)$ et $\mathbf{u}_{0i} \in H_i$, alors l'Algorithme 6 est bien posé, et pour toute itération d'OSWR $\ell \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathbf{u}_i^\ell \in \mathcal{C}^0([0, T[, H_i) \cap L^2([0, T[, V_i)$ et $p_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1, \infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ et les quantités de Robin aux interfaces $g_{ij}^\ell, \xi_{ij}^\ell$ sont dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$ pour tout $j \in \mathcal{I}_i$.

Preuve. Montrons cela par récurrence sur $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$. Partant de données de Robin aux interfaces dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, le Théorème 4.1 indique qu'il existe un unique couple (\mathbf{u}_i^1, p_i^1) solution de (5.10) dans les espaces mentionnés. Par le théorème de trace, on déduit que la trace de \mathbf{u}_i^1 sur Γ_{ij} est dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, et la formule (5.11) montre que les données de Robin restent dans l'espace $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$.

Par récurrence, on obtient de même qu'à chaque itération $\ell \geq 1$, partant de données de Robin dans $L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij}))$, la solution $(\mathbf{u}_i^\ell, p_i^\ell)$ est dans les espaces mentionnés, et la formule de mise à jour (5.11) permet de déduire que les données de Robin restent dans le même espace d'itération en itération. \square

Comme pour le problème d'Oseen, nous supposons une régularité supplémentaire des données de Robin aux interfaces du problème multidomaine.

Hypothèse 5.5. Supposons que $\lambda_i \in L^2(]0, T[, (L^2(\Gamma_i))^2)$.

Définissons $g_i = \lambda_i \cdot \mathbf{n}_i$ et $\xi_i = \lambda_i \times \mathbf{n}_i$. Alors g_i et ξ_i sont dans $L^2(]0, T[, L^2(\Gamma_i))$, et tels que

$$\langle \lambda_i, \mathbf{v} \rangle_{\Gamma_i} = (g_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}. \quad (5.12)$$

Alors, le second membre de (2.14a) s'écrit avec des produits scalaires au lieu des crochets de dualité, et l'on introduit l'application c_i telle que

$$c_i(g_i, \xi_i, \mathbf{v}) := d_i(\lambda_i, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + (g_i, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i} + (\xi_i, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_i)_{\Gamma_i}.$$

Pour $j \in \mathcal{I}_i$, on définit alors $g_{ij} := \alpha_{ij}g_i$ et $\xi_{ij} := \beta_{ij}\xi_i$ sur Γ_{ij} , ces quantités vérifiant, dans $L^2(0, T, L^2(\Gamma_{ij}))$, les relations²

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} g_{ji} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n}_{ji}, \\ \xi_{ij} &= \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \xi_{ji} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{u}_j \times \mathbf{n}_{ji}. \end{aligned}$$

5.3 Convergence par estimation d'énergie

Nous allons désormais montrer que l'Algorithme 6 définit bien une suite de vitesses convergeant vers les vitesses du problème multidomaine. Pour cela, comme pour l'étude de l'Algorithme OSWR pour le problème d'Oseen, nous allons devoir étendre la formulation variationnelle de l'algorithme à des fonctions qui dépendent du temps. Nous devons aussi ajouter des inégalités afin de borner les termes non-linéaires, ce qui permettra de mener la preuve par estimation d'énergie.

Théorème 5.6. Soit $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$ et $\mathbf{u}_0 \in H$. Supposons l'Hypothèse 5.5 vérifiée. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (5.6). Alors, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, la suite de solutions en vitesse $(\mathbf{u}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ obtenue par l'Algorithme 6 converge vers \mathbf{u}_i dans $L^p(]0, T[, H_i) \cap L^2(]0, T[, V_i)$, quel que soit $p \in [1, +\infty[$.

On définit l'erreur à l'itération $\ell \in \mathbb{N}^*$ dans le sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ de l'algorithme OSWR sur la vitesse $\mathbf{e}_i^\ell := \mathbf{u}_i^\ell - \mathbf{u}_i$ et la pression $d_i^\ell = p_i^\ell - p_i$. De même, on définit les erreurs des quantités de Robin à l'interface avec le sous-domaine $j \in \mathcal{I}_i$: $h_{ij}^\ell := g_{ij}^\ell - g_{ij}$ et $\zeta_{ij}^\ell := \xi_{ij}^\ell - \xi_{ij}$. En faisant la différence entre l'Algorithme 6 et la formulation, multidomaine (5.8)-(5.9), on obtient l'Algorithme 7 suivant. Notons que, dans la formulation variationnelle (5.14a), nous utilisons la relation $\mathbf{u}_i^\ell = \mathbf{e}_i^\ell + \mathbf{u}_i$ sur les termes non linéaires, de manière que l'algorithme obtenu ne dépende plus de \mathbf{u}_i^ℓ , mais de \mathbf{u}_i , qui est fixée.

Algorithme 7 (OSWR sur l'erreur pour le problème de Navier-Stokes)

Choisir des données de Robin initiales $h_{ij}^0, \zeta_{ij}^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_{ij})), \forall i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

1. Pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ et $j \in \mathcal{I}_i$, définir $h_i^{\ell-1}, \zeta_i^{\ell-1} \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma_i))$ tel que $h_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\alpha_{ij}} h_{ij}^{\ell-1}$ et $\zeta_i^{\ell-1}|_{\Gamma_{ij}} = \frac{1}{\beta_{ij}} \zeta_{ij}^{\ell-1}$.

2. Résoudre dans chaque sous-domaine $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ le problème : trouver la vitesse $\mathbf{e}_i^\ell \in M_i$ et la pression $d_i^\ell \in \mathcal{W}^{-1,\infty}([0, T[, L^2(\Omega_i))$ tel que :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}(\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + \nu(\nabla \mathbf{e}_i^\ell, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} - ((d_i^\ell, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} \\ & + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ & = \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ & - \frac{1}{2} ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} \\ & + \frac{1}{2} ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i}, \quad \forall \mathbf{v} \in S([0, T[, X_i), \end{aligned} \quad (5.14a)$$

$$(\nabla \cdot \mathbf{e}_i^\ell, q)_{\Omega_i} = 0 \quad \forall q \in L^2(\Omega_i), \quad (5.14b)$$

$$\left(\int_{\Omega_i} \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{v} \right) (0) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in S([0, T[, V_i). \quad (5.14c)$$

3. Mettre à jour les données de Robin sur les interfaces, pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket, j \in \mathcal{I}_i$,

$$h_{ij}^\ell = \frac{\alpha_{ij}}{\alpha_{ji}} h_{ji}^{\ell-1} - \frac{\alpha_{ij} + \alpha_{ji}}{\alpha_{ji}} \mathbf{e}_j^\ell \cdot \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[, \quad (5.15a)$$

$$\zeta_{ij}^\ell = \frac{\beta_{ij}}{\beta_{ji}} \zeta_{ji}^{\ell-1} - \frac{\beta_{ij} + \beta_{ji}}{\beta_{ji}} \mathbf{e}_j^\ell \times \mathbf{n}_{ji} \quad \text{dans } \Gamma_{ij} \times]0, T[. \quad (5.15b)$$

fin pour

Comme proposé dans [56], les termes non linéaires n'empêchent pas la preuve de convergence par estimation d'énergie, dans la mesure où ceux-ci sont contrôlés par la norme de \mathbf{e}_i^ℓ (et de son gradient). La majoration de l'énergie sera finalement obtenue grâce au lemme de Grönwall. Nous proposons dans les deux lemmes suivants une telle majoration des termes non linéaires.

Lemme 5.7. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*, i \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

Puisque $\mathbf{u}_i \in L^\infty([0, T[, (L^2(\Omega_i))^2) \cap L^2([0, T[, (H^1(\Omega_i))^2)$, on déduit qu'il existe une fonction ne dépendant que du temps $C_1 \in L^1([0, T[)$ (et donc indépendante de ℓ) telle que

$$|((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i}| \leq C_1 \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

Preuve. En appliquant l'inégalité (1.3) du Lemme 1.12, puis le Théorème 1.1, on a

$$\begin{aligned} |((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i}| & \leq \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^4(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{u}_i\|_{L^4(\Omega_i)} \\ & \leq C \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2} \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2} \\ & \leq C \|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2} \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2} \left(\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)} + \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^{3/2} \right), \end{aligned}$$

où l'on a écrit que $\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2} \leq \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^{1/2} + \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^{1/2}$.

On obtient finalement le résultat après application du théorème de Young, qui donne une fonction C_1 intégrable sur $]0, T[$ par hypothèse. En effet, appliquons le Théorème 1.11 deux fois,

- avec $a = C \|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2} \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2} \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}$, $b = \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}$, $p = q = 2$ et $\varepsilon = \nu/4$, et alors la constante obtenue est proportionnelle à $\|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)} \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)} \leq \|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$ qui est intégrable sur $]0, T[$ par hypothèse sur la régularité de \mathbf{u}_i ,

- avec $a = C\|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2}\|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^{1/2}\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^{1/2}$, $b = \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^{3/2}$, $p = 4$, $q = 4/3$ et $\varepsilon = \nu/4$, et alors la constante obtenue est proportionnelle à $\|\mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)}^2\|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$ qui est intégrable sur $]0, T[$ par hypothèse sur la régularité de \mathbf{u}_i . \square

Lemme 5.8. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$.

Puisque $\mathbf{u}_i \in L^2(]0, T[, (H^1(\Omega_i))^2)$, on déduit qu'il existe une fonction ne dépendant que du temps $C_2 \in L^1(]0, T[)$ (et donc indépendante de ℓ) telle que

$$|((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i}| \leq C_2\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \frac{\nu}{4}\|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2.$$

Preuve. D'après le Lemme 1.12, puis le Théorème 1.1, on a

$$\begin{aligned} |((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i}| &\leq \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^4(\Omega_i)}\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^4(\Omega_i)}\|\nabla \mathbf{u}_i\|_{L^2(\Omega_i)} \\ &\leq C\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}\|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}\|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}. \end{aligned}$$

En prenant $a = C\|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}\|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}$, $b = \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}$, $p = q = 2$ et $\varepsilon = \nu/4$ dans l'inégalité de Young 1.11, on obtient le résultat du lemme. Alors la fonction C_2 est proportionnelle à $\|\mathbf{u}_i\|_{H^1(\Omega_i)}^2$, et est donc intégrable sur $]0, T[$. \square

Enfin, comme pour l'analyse de l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen et le Lemme 2.15 (dont la preuve s'étend au problème de Navier-Stokes, en remplaçant \mathbf{b} par \mathbf{e}_i^ℓ , en ayant, en plus, les termes non-linéaires), on peut étendre la formulation variationnelle (5.14a) à des fonctions tests dépendant du temps.

Lemme 5.9. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$, $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. Supposons l'Hypothèse 5.5 vérifiée. Soit \mathbf{e}_i^ℓ la solution en vitesse de (5.14). Alors $\mathbf{e}_i^\ell \in C^0([0, T], H_i)$, et $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^1(]0, T[, V'_i)$, et on a en outre l'inégalité, pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in M_i$ et presque tout $\tau, s \in]0, T[$,

$$\left| \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}(\tau), \boldsymbol{\varphi}(s) \right\rangle_{V'_i, V_i} \right| \leq C_i \left(R_{1i}^\ell(\tau) T_{1i}^\ell(s) + R_{2i}^\ell(\tau) T_{2i}^\ell(s) \right), \quad (5.16)$$

avec $C_i \geq 0$, et $R_{1i}^\ell \in L^2(]0, T[)$, $T_{1i}^\ell \in L^2(]0, T[)$, $R_{2i}^\ell \in L^{4/3}(]0, T[)$, $T_{2i}^\ell \in L^4(]0, T[)$.

Par ailleurs, pour tout $\boldsymbol{\varphi} \in M_i$, on a $t \mapsto \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{V'_i, V_i} \in L^1(]0, T[)$, et on a de plus l'égalité

$$\begin{aligned} \int_0^T \left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \boldsymbol{\varphi} \right\rangle_{V'_i, V_i} + \int_0^T \nu(\nabla \mathbf{e}_i^\ell, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} \\ + \int_0^T \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ = \int_0^T \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ - \int_0^T \frac{1}{2} \left(((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\mathbf{e}_i^\ell, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\mathbf{u}_i, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\mathbf{e}_i^\ell, \boldsymbol{\varphi})_{\Omega_i} \right) \\ + \int_0^T \frac{1}{2} \left(((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla)\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Enfin, pour tout $p \in [1, 2]$, on a $\frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt} \in L^p(]0, T[, V'_i)$.

On peut désormais montrer la convergence de l'algorithme OSWR vers le champ de vitesse du problème monodomaine.

Preuve du Théorème 5.6. Commençons la preuve en partant de la formulation variationnelle (5.17),

en prenant $\varphi = \mathbf{e}_i^\ell \mathbb{1}_{[0,t]} \in M_i$ comme fonction test. On obtient alors :

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left(\left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} + \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) d\tau \quad (5.18) \\ & - \frac{1}{2} \int_0^t ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} - ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} d\tau. \end{aligned}$$

Cette égalité est tout à fait similaire à l'égalité (2.36) de la preuve du Lemme 2.17 pour l'équation d'Oseen, la seule différence étant l'ajout des deux termes non-linéaires au second membre. On peut donc reprendre les mêmes étapes que dans la preuve pour le problème d'Oseen, en effectuant les étapes suivantes :

- on remplace les quantités de Robin à l'interface grâce aux conditions de transmission (5.15),
- on applique le Théorème de Lions-Magenes 1.24 grâce à l'inégalité (5.16), avec la condition initiale sur l'erreur nulle en $t = 0$, puis on multiplie par 2,
- on somme sur $i = 1, \dots, M$ et on introduit les quantités des erreurs de Robin aux interfaces à l'itération ℓ : $\mathfrak{B}^\ell := \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \frac{\eta_{ij}}{\alpha_{ij}} \|h_{ij}^\ell(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2 d\tau + \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \int_0^t \frac{\mu_{ij}}{\beta_{ij}} \|\zeta_{ij}^\ell(\tau)\|_{\Gamma_{ij}}^2 d\tau$, avec $\eta_{ij} = \frac{\alpha_{ij}\alpha_{ji}}{\alpha_{ij}+\alpha_{ji}}$ et $\mu_{ij} = \frac{\beta_{ij}\beta_{ji}}{\beta_{ij}+\beta_{ji}}$,
- on définit $\mathfrak{E}^\ell(t) := \sum_{i=1}^M \|\mathbf{e}_i^\ell(t)\|_{\Omega_i}^2$ et $\mathfrak{F}^\ell(t) := \nu \sum_{i=1}^M \int_0^t \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{\Omega_i}^2 d\tau$,
- on somme sur les itérations d'OSWR $\ell = 1, \dots, L$,

de sorte que l'on arrive à la relation suivante qui est le pendant de l'égalité (2.38) obtenue dans le cas d'Oseen, avec les deux termes non linéaires en plus,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^L \left(\mathfrak{E}^\ell(t) + 2\mathfrak{F}^\ell(t) \right) + \mathfrak{B}^L(t) = \mathfrak{B}^0(t) \\ & + 2 \sum_{\ell=1}^L \int_0^t \sum_{i=1}^M \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\varphi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \psi_{ij} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) d\tau \\ & + \int_0^t \sum_{\ell=1}^L \sum_{i=1}^M \left(-((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^\ell \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} \right) d\tau, \end{aligned}$$

où $\varphi_{ij} := \frac{\alpha_{ij}-\alpha_{ji}}{2\alpha_{ij}\alpha_{ji}}$, et $\psi_{ij} := \frac{\beta_{ij}-\beta_{ji}}{2\beta_{ij}\beta_{ji}}$. Dans l'égalité précédente, la première somme du second membre est due à la démonstration en *two-sided*, et serait nulle en *one-sided*, se majore de manière similaire à l'inégalité (2.39). La seconde somme est propre au terme non linéaire de l'équation de Navier-Stokes, et n'existait pas dans la démonstration pour le problème d'Oseen. Aussi, puisque par hypothèse on a $\mathbf{u}_i \in L^\infty(]0, T[, (L^2(\Omega_i))^2) \cap L^2(]0, T[, (H^1(\Omega_i))^2)$ pour $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, on peut en appliquer les Lemmes 5.7 et 5.8 et aboutir à

$$\sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t)) + \mathfrak{B}^L(t) \leq \mathfrak{B}^0(t) + \int_0^t C(\tau) \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau + \sum_{\ell=1}^L \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \mathfrak{F}^\ell(t),$$

où la fonction $\tau \mapsto C(\tau)$ est la somme de la constante C due au terme de bord et que nous avons déjà dans la preuve pour l'équation d'Oseen, et des deux fonctions C_1 et C_2 des Lemmes 5.7 et 5.8, et est donc intégrable sur $]0, T[$. Ainsi, puisque que \mathfrak{B}^L est positif sur $]0, T[$, on a, en ajoutant $\int_0^t \frac{C(\tau)}{2} \mathfrak{F}^\ell(t) d\tau$ au second membre, et en majorant $\mathfrak{B}^0(t)$ par $\mathfrak{B}^0(T)$,

$$\begin{aligned} & \sum_{\ell=1}^L \left(\mathfrak{E}^\ell(t) + \frac{1}{2} \mathfrak{F}^\ell(t) \right) \leq \mathfrak{B}^0(T) + \int_0^t C(\tau) \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau \\ & \leq \mathfrak{B}^0(T) + \int_0^t C(\tau) \sum_{\ell=1}^L \left(\mathfrak{E}^\ell(\tau) + \frac{1}{2} \mathfrak{F}^\ell(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Puisque la fonction $t \mapsto \mathfrak{B}^0(T) \geq 0$, et que la fonction $t \mapsto \sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}^\ell(t)) \in L^\infty([0, T])$, on peut conclure avec le lemme de Grönwall 1.7

$$\sum_{\ell=1}^L \left(\mathfrak{E}^\ell(t) + \frac{1}{2}\mathfrak{F}^\ell(t) \right) \leq \mathfrak{B}^0(T) \exp \left(\int_0^t C(\tau) d\tau \right),$$

qui est borné, car, par hypothèse, les données de Robin initiales sont dans $L^2([0, T], L^2(\Gamma_{ij}))$ et donc $\mathfrak{B}^0(T)$ est borné, et puisque la fonction C est intégrable sur $]0, T[$.

Ainsi, le Lemme 1.25 indique que la suite $(\mathfrak{E}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ tend 0 dans $L^p([0, T])$ pour tout $p \in [1, +\infty[$, et donc que pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$ la suite $(\mathbf{e}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $L^p([0, T], H_i)$.

De plus, la série $\left(\sum_{\ell=1}^L \mathfrak{F}^\ell(t) \right)_{L \in \mathbb{N}^*}$ est convergente, et donc son terme général tend vers 0. Cela montre que la suite $\left(\int_0^t \sum_{i=1}^M \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell(\tau)\|_{\Omega_i}^2 d\tau \right)_\ell$ tend vers 0 quand ℓ tend vers $+\infty$, et donc finalement la convergence vers $\mathbf{0}$ de $(\mathbf{e}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ dans $L^2([0, T], V_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$. \square

5.4 Recalibrage de la pression pour Navier-Stokes

De manière équivalente à l'analyse sur l'équation d'Oseen donnée en 2.4, la solution obtenue sur la pression par l'algorithme OSWR ne converge pas vers une famille de pressions p_i sur le domaine Ω_i dont la réunion sur le domaine Ω serait solution de (5.1). Il faut donc effectuer une correction sur la pression qui s'obtient exactement de la même manière que celle définie pour le problème d'Oseen.

Théorème 5.10 (Recalibrage de la pression). *Supposons l'Hypothèse 2.19 vérifiée. Alors, le vecteur des pressions moyennes sur chaque sous-domaine $\mathbf{X} := (\langle p_1 \rangle_{\Omega_1}, \dots, \langle p_M \rangle_{\Omega_M})$ est la limite, dans \mathbb{R}^M , de la suite $(\mathbf{X}^\ell)_\ell$, où, pour tout ℓ , $\mathbf{X}^\ell \in \mathbb{R}^M$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} A\mathbf{X}^\ell &= \mathbf{B}^\ell, \\ C\mathbf{X}^\ell &= 0, \end{aligned}$$

avec les matrices A et C définies respectivement par (2.43) et (2.45), et le vecteur \mathbf{B}^ℓ par (2.44).

Alors, la pression corrigée définie, pour $t \in]0, T[$, par

$$\tilde{p}_i^\ell(t) := p_i^\ell(t) - \langle p_i^\ell(t) \rangle_{\Omega_i} + \mathbf{X}_i^\ell(t),$$

converge vers $p_i(t)$ dans $L^2(\Omega_i)$, avec $\mathbf{X}_i^\ell(t)$ la i -ème composante de $\mathbf{X}^\ell(t)$.

Preuve. La preuve du Théorème 2.21 s'étend à l'équation d'Oseen. Le Lemme 2.23 se limitant à des considérations algébriques sur la matrice A et le vecteur \mathbf{B}^ℓ indépendantes du problème, il s'applique aussi dans le cas de l'équation d'Oseen. Il n'y a donc qu'à montrer que le Lemme 2.22 s'applique aussi dans ce cas.

Or, à nouveau, la preuve donnée pour le problème d'Oseen s'étend. Elle repose en effet uniquement sur :

- (i) la relation sur les quantités de Robin aux interfaces, qui est donnée par (5.5),
- (ii) la propriété de vitesse à divergence nulle (5.2b),
- (iii) les hypothèses de convergence (2.41).

Ces éléments sont les seuls qui s'ajoutent aux considérations algébriques du Lemme 2.23 et sont communs à la fois à l'algorithme OSWR posé sur le problème d'Oseen et de Navier-Stokes, ce qui permet d'étendre la preuve et de montrer le Théorème 5.10. \square

5.5 OSWR pour résoudre le problème non linéaire

Dans cette section, nous souhaitons présenter un autre avantage de la décomposition de domaine pour résoudre le problème de Navier-Stokes. En effet, la non-linéarité peut être linéarisée, dans le sens où le champ d'autoadvection du terme non linéaire peut être calculé à partir du champ de vitesse obtenu

à l'itération précédente. Par cette méthode, nous définissons une suite de problèmes linéaires (donc de résolution plus aisée) convergeant vers la solution du problème de Navier-Stokes non linéaire. Plus précisément, dans l'écriture de l'Algorithme 6, on aurait pu, dans la formulation variationnelle (5.10a) remplacer $A(\mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v})$ par $\tilde{A}(\mathbf{u}_i^{\ell-1}, \mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v})$, où

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\mathbf{u}_i^{\ell-1}, \mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v}) &:= \nu (\nabla \mathbf{u}_i^\ell, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} + \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} - \frac{1}{2} ((\mathbf{u}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}_i^\ell)_{\Omega_i} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{u}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{u}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Le choix du premier champ d'advection \mathbf{u}_i^0 est libre, mais, afin d'assurer la bonne définition de l'algorithme, celui-ci doit toutefois être dans $L^\infty(]0, T[, (L^2(\Omega_i))^2)$. Par exemple, un choix possible est de prendre la condition initiale $\mathbf{u}_i^0 = \mathbf{u}_{i0}$.

Théorème 5.11. *Soit $\mathbf{f} \in L^2(]0, T[, (L^2(\Omega))^2)$ et $\mathbf{u}_0 \in H$. Supposons l'Hypothèse 5.5 vérifiée. Soit (\mathbf{u}, p) la solution du problème (5.6). Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, et supposons que $\mathbf{u}_i^0 \in L^\infty(]0, T[, H_i)$. Alors la suite de solutions $(\mathbf{u}_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}^*}$ obtenues par l'Algorithme 6 linéarisées par (5.19) converge vers \mathbf{u}_i dans $L^p(]0, T[, H_i) \cap L^2(]0, T[, V_i)$, pour tout $p \in [1, +\infty[$.*

Preuve. Soit $i \in \llbracket 1, M \rrbracket$, $\ell \in \mathbb{N}^*$. On reprend la même preuve que pour le Théorème 5.6, en ajustant les différences dues au nouvel opérateur \tilde{A}_i . On a d'abord, pour tout $\mathbf{v} \in S(]0, T[, X_i)$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} (\mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + \nu (\nabla \mathbf{e}_i^\ell, \nabla \mathbf{v})_{\Omega_i} - ((d_i^\ell, \nabla \cdot \mathbf{v}))_{\Omega_i} \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ &= \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{v} \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} (((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{v})_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{v})_{\Omega_i}) \\ &\quad + \frac{1}{2} (((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} + ((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} + ((\mathbf{u}_i \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i}). \end{aligned} \quad (5.20)$$

Puis, on étend la formulation variationnelle aux fonctions tests dépendant du temps, avant de prendre la fonction $\mathbf{e}_i^\ell \mathbb{1}_{[0, t]}$ elle-même comme fonction test. On obtient alors l'analogie de l'égalité (5.18) :

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\left\langle \frac{d\mathbf{e}_i^\ell}{dt}, \mathbf{e}_i^\ell \right\rangle_{V_i', V_i} + \nu \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{\Omega_i}^2 + \sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 + \frac{1}{\beta_{ij}} \|\mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij}\|_{\Gamma_{ij}}^2 \right) \right) d\tau \\ &= \int_0^t \left(\sum_{j \in \mathcal{I}_i} \left(\frac{1}{\alpha_{ij}} (h_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \cdot \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} + \frac{1}{\beta_{ij}} (\zeta_{ij}^{\ell-1}, \mathbf{e}_i^\ell \times \mathbf{n}_{ij})_{\Gamma_{ij}} \right) \right) d\tau \\ &\quad - \int_0^t \left(\frac{1}{2} (((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i} - \frac{1}{2} (((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i} \right) d\tau. \end{aligned}$$

Il est possible de majorer les deux termes du second membre, comme dans les Lemmes 5.7 et 5.8 :

$$\begin{aligned} |((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{e}_i^\ell, \mathbf{u}_i)_{\Omega_i}| &\leq \frac{C_3}{2} \left(\|\mathbf{e}_i^{\ell-1}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2, \\ |((\mathbf{e}_i^{\ell-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{e}_i^\ell)_{\Omega_i}| &\leq \frac{C_4}{2} \left(\|\mathbf{e}_i^{\ell-1}\|_{L^2(\Omega_i)}^2 + \|\mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2 \right) + \frac{\nu}{4} \|\nabla \mathbf{e}_i^\ell\|_{L^2(\Omega_i)}^2. \end{aligned}$$

On reprend alors les mêmes étapes, pour obtenir l'inégalité d'énergie

$$\begin{aligned} &\sum_{\ell=1}^L (\mathfrak{E}^\ell(t) + \mathfrak{F}^\ell(t)) + \mathfrak{B}^L(t) \\ &\leq \mathfrak{B}^0(t) + \int_0^t C(\tau) \sum_{\ell=1}^L \mathfrak{E}^\ell(\tau) d\tau + \sum_{\ell=1}^L \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) \mathfrak{F}^\ell(t) + \int_0^t (C_3 + C_4) \sum_{i=1}^M \|\mathbf{e}_i^0\|_{\Omega_i}^2, \end{aligned}$$

et l'on peut finir la preuve, de manière similaire à celle du Théorème 5.6, car $(C_3 + C_4) \int_0^T \sum_{i=1}^M \|\mathbf{e}_i^0\|_{\Omega_i}^2$ est une constante indépendante de ℓ , et bornée si $\mathbf{u}_i^0 \in L^2(]0, T[, H_i)$. \square

5.6 Résultats numériques

Nous allons, dans cette section, illustrer la convergence de l'Algorithme 6. Pour cela, nous nous plaçons dans le même cadre que pour les résultats numériques pour l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen dans la Section 2.6. Nous reprenons le code FREEFEM++, en l'adaptant au problème de Navier-Stokes. Pour cela, le terme non linéaire est discrétisé par un schéma semi-explicite en temps, c'est-à-dire qu'à chaque pas de temps $n \geq 1$, l'équation de la quantité de mouvement est discrétisée de la façon suivante : pour tout $\mathbf{v} \in X$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^n, \mathbf{v})_\Omega + \nu(\nabla \mathbf{u}^n, \nabla \mathbf{v})_\Omega + \frac{1}{2}((\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^n, \mathbf{v})_\Omega - \frac{1}{2}((\mathbf{u}^{n-1} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{u}^n)_\Omega - (p^n, \nabla \cdot \mathbf{v})_\Omega \\ = \frac{1}{\Delta t}(\mathbf{u}^{n-1}, \mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{f}(n\Delta t), \mathbf{v})_\Omega \end{aligned}$$

pour déterminer (\mathbf{u}^n, p^n) , une solution approchée au pas de temps $n \geq 1$ de (\mathbf{u}, p) , solution de (5.6). Nous utilisons également un schéma semi-explicite similaire pour les termes non linéaires pour les problèmes de l'algorithme OSWR sur chacun des sous-domaines (5.10a).

Le problème étant non linéaire, nous ne pouvons plus étudier le problème sur l'erreur, i.e. une convergence vers $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{0}, 0)$ comme nous le faisons pour le problème d'Oseen. Nous considérons donc la solution exacte, définie pour $t \in [0, 1]$ et $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$ par

$$\mathbf{u}(t, x, y) = \begin{pmatrix} -(t^2 + 1) \sin(\pi x) \cos(\pi y) + 1 \\ (t^2 + 1) \cos(\pi x) \sin(\pi y) + 2x \end{pmatrix}, \quad p(t, x, y) = \cos(t)(x^2 - y^2).$$

La condition initiale, les conditions de Dirichlet homogènes sur la frontière du domaine et le terme source sont calculés de manière que ce couple (\mathbf{u}, p) soit bien solution du problème de Navier-Stokes (5.1).

Sur la Figure 5.1, nous traçons l'erreur obtenue en fonction des itérations, avec un pas de temps Δt et un pas de maillage sur les frontières $h = 0.021$. À nouveau, nous montrons la convergence en norme $L^\infty([0, T], H)$ et $L^2([0, T], V)$ pour le champ de vitesse, et $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ pour la pression, adimensionnée par l'erreur du schéma associée à chacune des normes.

Nous faisons varier le coefficient de diffusion avec $\nu = 1, 0.3, 0.1, 0.03$.

Pour le problème de Navier-Stokes, nous n'avons pas défini de paramètres optimisés, la méthode usuelle par transformée de Fourier ne s'appliquant plus pour un problème non-linéaire. Ainsi, nous ne considérons que le cas *one-sided*, i.e. avec un unique coefficient de Robin $\alpha = \beta = 0.1$ choisi arbitrairement (et de l'ordre de grandeur de ceux obtenus pour le problème d'Oseen).

On observe alors sur cette figure la convergence de l'Algorithme 6 dans les quatre cas, où la diffusion varie. En dehors des premières itérations, la convergence pour les deux normes de la vitesse et celle pour la pression ont le même comportement : elles atteignent un régime linéaire où les courbes sont parallèles. La convergence est plus ou moins rapide selon les cas, néanmoins, nous n'avons pas cherché ici à optimiser le paramètre de Robin α , mais uniquement à illustrer la convergence de l'algorithme, pour une valeur donnée de α .

Une seconde étape serait d'étudier comment optimiser ce paramètre de Robin, en s'inspirant des paramètres optimisés obtenus pour le problème d'Oseen. Deux difficultés apparaissent alors :

- le champ d'advection \mathbf{b} serait remplacé par le champ de vitesse du pas de temps précédent, il faudrait donc calculer un coefficient à chaque pas de temps, et chaque itération de décomposition de domaine,
- le champ de vitesse n'étant pas constant en espace, il faudrait obtenir un coefficient de Robin non constant en espace, par exemple constant par maille.

Cela compliquerait le calcul de ce paramètre de Robin, mais offre une voie d'amélioration de l'algorithme à explorer afin d'accélérer la résolution du problème de Navier-Stokes grâce à la méthode OSWR.

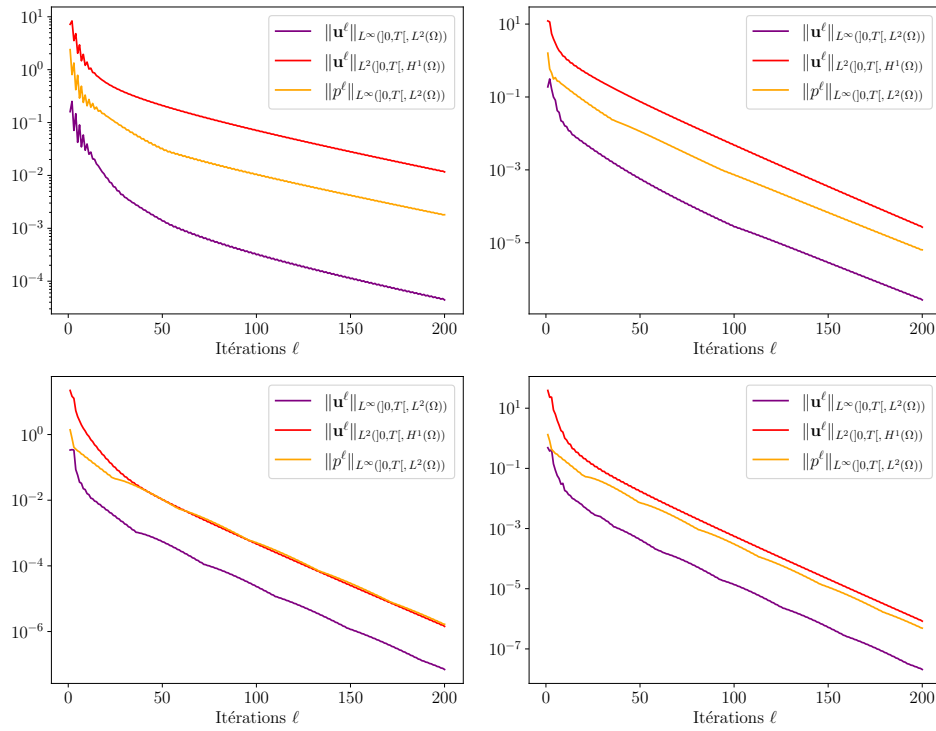


FIGURE 5.1 : Convergence d'OSWR pour le problème de Navier-Stokes pour les deux normes de la vitesse et celle de la pression, avec $\nu = 1$ (en haut à gauche), 0.3 (en haut à droite), 0.1 (en bas à gauche), 0.03 (en bas à droite).

Deuxième partie

Analyse discrète en temps de
l'algorithme OSWR

Cette seconde partie est dédiée à l'étude de l'algorithme OSWR. Nous y proposons une analyse reposant sur une discrétisation temporelle. Après introduction d'un schéma numérique (ici Euler-implicite), nous obtenons des relations vectorielles pour lesquelles nous étudions la convergence. L'information la plus importante qui émane de ce travail est la dépendance du paramètre de Robin optimal au nombre d'itérations de décomposition de domaine effectuées, comme cela est observé numériquement. L'analyse présentée ici en donne une explication, et propose une nouvelle définition des paramètres de Robin optimisés qui dépendent du nombre d'itérations effectuées, et qui apparaissent proches des optimaux numériques. Ce travail a été l'objet de l'article [4] publié en 2023 dans la revue *ESAIM-M2AN*, et coécrit avec Caroline Japhet et Pascal Omnes. Le Chapitre 6 reprend cet article sur l'équation de la chaleur unidimensionnelle, sans modifications, et en anglais.

Nous présentons ensuite dans le Chapitre 7 deux extensions de la méthodologie. La première donne une analyse dans le cas où la donnée de Robin initiale est calculée à partir de la condition initiale. Des paramètres de Robin optimisés prenant en compte cette initialisation sont définis, et leur optimalité pour un tel choix est observée numériquement. Nous présentons enfin une extension de [4] pour l'équation de la chaleur en deux dimensions d'espace.

Chapter 6

Discrete-time analysis of Optimized Schwarz Waveform Relaxation with Robin parameters depending on the targeted iteration count

Summary

6.1	Introduction	105
6.2	Problem Setting	107
6.3	Jordan decomposition	108
6.3.1	Definitions and general results	108
6.3.2	Square root of a matrix	109
6.3.3	Application to matrix A	110
6.4	OSWR algorithm	110
6.4.1	Continuous case	110
6.4.2	Dimensionless Robin parameters	111
6.4.3	Discrete-time algorithm	111
6.4.4	Discrete-time convergence analysis	111
6.4.5	Choice of the Robin parameters	115
6.5	Numerical results	116
6.5.1	Convergence depending only on $\bar{\alpha}$, for a given N	117
6.5.2	Comparison between discrete-time estimate and relative L^∞ -error	117
6.5.3	One-sided optimization	119
6.5.4	Two-sided optimization	122
6.5.5	Asymptotic behavior as a function of N	123
6.5.6	Comparison with $\bar{\alpha}_M$	124

6.1 Introduction

Schwarz waveform relaxation (SWR) algorithms [45, 59, 62], and their extensions, have a long history in the parallel solution of discretized time-dependent models driven by partial differential equations, such as those arising in engineering, physics, porous media or geophysical applications, etc [52, 96, 32, 65, 11, 72, 28, 14, 107, 1, 104]. The success of these iterative methods is linked to their fast convergence that can be optimized by choosing appropriate boundary conditions on the space-time interfaces between subdomains. In this contribution, we consider Robin boundary conditions without overlap, in which the value of the Robin parameter(s) can be chosen identically on the two sides of the interface (the so-called one-sided case), or differently (the two-sided case), and can be optimized to improve convergence rates. The corresponding algorithm is called optimized Schwarz waveform relaxation (OSWR), see [52, 95, 50]. These methods are well-suited to handle nonconformities in time and space, and can be combined with a posteriori estimates (to get efficient stopping criteria) or time parallelization techniques [67, 3, 64, 54, 18].

Traditional convergence analysis of OSWR algorithms is mostly performed using the continuous model, in an attempt to obtain a theory which is independent of the actual numerical schemes used for discretization. This analysis may be performed by energy estimates, both in the one-sided and two-sided cases [67, 71]. This technique is quite general but does not provide a convergence rate, nor a hint on how to properly choose the Robin parameters for fast convergence. At the discrete-time level, a convergence proof by energy estimates is performed for the one-sided case [67], but not for the two-sided case.

On the other hand, Fourier transforms in time and space are commonly used at the continuous level to obtain convergence rates of the OSWR method for each Fourier mode [78, 46, 52, 95, 50, 9]; although the supremum of this convergence factor over the whole Fourier space is one, it can however be used to choose efficient Robin parameters that optimize it over the bounded range of frequencies relevant to the discrete numerical (time and space) grids. However, actual numerical results obtained with this choice of Robin parameters do not always perform as efficiently as expected and it has been discussed that this problem may be linked to the Fourier transform in time that may not always allow to perform an adequate analysis of the convergence properties of the method [103, 57]. This may be due to the fact that the Fourier transform supposes an infinite time interval, while the actual simulation is necessarily performed on a finite one; switching to Fourier series does not solve this issue since the error does not vanish at the final time as it does at the initial time. Another approach, based on discrete-time analysis is proposed in [29, 68]; for simple schemes, it is based on the so-called one-sided \mathcal{Z} transform, which is a discrete equivalent of the Laplace transform. However, this also requires either to consider infinite intervals in time or to neglect the error at the final time. On the contrary, in the present contribution we do not perform any transformation in the time direction; restricting for the sake of simplicity to the one-dimensional heat equation, we solve directly the full space-time semi-discrete system on any finite time interval; this is made possible by the Jordan form of the backward Euler scheme that is used to discretize in the time direction. The extension to higher dimensions with domain decompositions that contain cross-points is more complex and is the subject of a separate work.

This approach is particularly rich and allows to obtain several new results: first, we prove convergence of the discrete-time one-sided and two-sided algorithms for any positive value of the Robin coefficients, with a convergence that, for any fixed value of the number of time steps, depends on a single parameter in the one-sided case (and on two parameters in the two-sided case) which is a combination of the diffusion coefficient value, the time step and the Robin parameter; secondly, we obtain exact convergence of the OSWR for a well-chosen value of the Robin parameters in a number of iterations equal to the number of time steps (one-sided case) or twice this number (two-sided case). Furthermore, numerical simulations show that the observed optimal Robin parameter depends itself on the number of iterations performed, and we propose a method to choose an efficient parameter as a function of this number; this allows us to recommend a couple (number of iterations, Robin parameter) to reach a given accuracy, e.g. the expected scheme accuracy.

This paper is organized as follows: in Section 6.2, we consider a model problem and state its well-posedness, as well as that of the equivalent multi-domain problem. Then we introduce the discrete-time multi-domain problem, using an implicit Euler scheme. This problem involves a matrix on which our analysis depends; some of its properties are given in Section 6.3. In Section 6.4, we first recall the continuous OSWR method, and the usual approach to calculate optimized Robin parameters using Fourier transform in time. Then we consider the discrete-time OSWR algorithm and prove its convergence, as well as various related properties. The main result of this article is an estimate of the relative convergence error at each iteration, which allows to introduce a new strategy to define discrete-time optimized parameters that depend on the number of iterations that will be performed. Finally, in Section 6.5, numerical experiments show that the proposed error estimate is close to the relative convergence error at each iteration. Numerical results comparing convergence with continuous or discrete-time optimized Robin parameters show that, even if the continuous ones can be a reasonable choice in some cases, the discrete-time ones give better performances, as they are close to the iteration dependent numerical optimal ones, in all test cases. Asymptotic performance with these optimized parameters shows that the convergence depends weakly (one-sided) and is almost independent (two-sided) of the time step.

6.2 Problem Setting

In order to simplify the analysis, we consider the following monodimensional heat equation on $\Omega \times (0, T)$, with $\Omega = \mathbb{R}$ and $T > 0$ the final time,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u &:= \partial_t u - \nu \partial_{xx} u = f && \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u(\cdot, t=0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x, \cdot) &&& \text{is bounded on } (0, T), \end{aligned} \quad (6.1)$$

where f is a source term, u_0 an initial condition and ν a positive diffusion coefficient.

Let $H^{r,s}(\Omega \times (0, T)) = L^2(0, T; H^r(\Omega)) \cap H^s(0, T; L^2(\Omega))$ be anisotropic Sobolev spaces defined in [87]. Let us recall Propositions 6.1 and 6.2 below, that can be directly deduced from [88].

Proposition 6.1. *If u_0 belongs to $H^1(\Omega)$ and f to $L^2(0, T; L^2(\Omega))$, then problem (6.1) admits a unique solution in $H^{2,1}(\Omega \times (0, T))$.*

Let us consider a decomposition of Ω into two non-overlapping subdomains

$$\Omega_1 = (-\infty, 0), \quad \Omega_2 = (0, +\infty),$$

and introduce the Robin interface operators as follows (see [89, 50])

$$\mathcal{B}_1 = \nu \partial_x + \alpha_1, \quad \mathcal{B}_2 = -\nu \partial_x + \alpha_2. \quad (6.2)$$

Then, problem (6.1) can be reformulated as the following equivalent multi-domain problem, with $f_i = f|_{\Omega_i}$, $u_i = u|_{\Omega_i}$, and $u_{0,i} = u_0|_{\Omega_i}$, $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1 &= f_1 && \text{in } \Omega_1 \times (0, T), & \mathcal{L}u_2 &= f_2 && \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \\ \mathcal{B}_1 u_1 &= \mathcal{B}_1 u_2 && \text{on } \{0\} \times (0, T), & \mathcal{B}_2 u_2 &= \mathcal{B}_2 u_1 && \text{on } \{0\} \times (0, T), \\ u_1(\cdot, 0) &= u_{0,1} && \text{in } \Omega_1, & u_2(\cdot, 0) &= u_{0,2} && \text{in } \Omega_2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u_1(x, \cdot) &&& \text{is bounded on } (0, T), & \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2(x, \cdot) &&& \text{is bounded on } (0, T). \end{aligned} \quad (6.3)$$

The Robin parameters α_1, α_2 involved in (6.3) (through \mathcal{B}_i , $i = 1, 2$, defined in (6.2)) are freely chosen positive real numbers taken such that : a) the Robin subdomain problems in (6.3) are well posed (see e.g. [88, 18]), b) they lead to a fast converging OSWR algorithm (see Section 6.4).

Proposition 6.2. *Let $i = 1$ or $i = 2$. If $u_{0,i} \in H^1(\Omega_i)$, $f_i \in L^2(0, T; L^2(\Omega_i))$, and $\mathcal{B}_i u_j \in H^{\frac{1}{4}}(0, T)$, with $j = 3 - i$, then the Robin subdomain problem in Ω_i in (6.3) has a unique solution in $H^{2,1}(\Omega_i \times (0, T))$.*

In practice, a problem such as (6.3) is solved approximately through discretization and approximation of the derivatives of u by discrete formulas. In this article, we are concerned with the implicit Euler approximation of the time derivative, with uniform time step $\Delta t = \frac{T}{N}$ ($N \in \mathbb{N}^*$). Thus, we consider the following semi-discrete approximation of (6.3): Find $U_i = (U_{i,1} \dots U_{i,N})^T$, for $i = 1, 2$, such that

$$\begin{aligned} LU_1 &= F_1 && \text{in } \Omega_1, & LU_2 &= F_2 && \text{in } \Omega_2, \\ B_1 U_1 &= B_1 U_2 && \text{at } x = 0, & B_2 U_2 &= B_2 U_1 && \text{at } x = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} U_1(x) &&& \text{is bounded,} & \lim_{x \rightarrow +\infty} U_2(x) &&& \text{is bounded,} \end{aligned} \quad (6.4)$$

with operator $L : (H^2(\Omega_i))^N \rightarrow (L^2(\Omega_i))^N$, $i = 1, 2$, defined as follows

$$LU_i := \frac{1}{\nu \Delta t} A U_i - U_i'',$$

where $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$ is defined by

$$A := \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ -1 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (6.5)$$

and where, for $i = 1, 2$, for all $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, for all $x \in \Omega_i$, $U_{i,n}(x)$ is an approximation of $u_i(x, n\Delta t)$, and $F_i = (F_{i,1} \dots F_{i,N})^T$, with $F_{i,n}(x) := \frac{f_i(x, n\Delta t)}{\nu} + \frac{u_0(x)}{\nu\Delta t} \delta_{1n}$ (where δ_{1n} is the Kronecker delta). The discrete interface operators B_1 and B_2 are extensions of \mathcal{B}_1 and \mathcal{B}_2 to vectors in $(H^2(\Omega_i))^N$, i.e. for $i = 1, 2$,

$$B_i : U \in (H^2(\Omega_i))^N \mapsto (-1)^{i+1} \nu \partial_x U + \alpha_i U. \quad (6.6)$$

The analysis performed in this article relies on various properties of matrix A , which are presented in the next section.

6.3 Jordan decomposition

As we will see in Theorem 6.13, solving (6.4) will involve a square root of matrix A . Therefore, we will prove that it exists, using the Jordan decomposition of A . This decomposition will also be very useful for the analysis of the OSWR algorithm in Section 6.4.

6.3.1 Definitions and general results

We recall here some definitions and results about matrix exponential, square root of a matrix and Jordan decomposition, from [100, 105, 63].

Definition 6.3 (Square root of a matrix). *A square root of a matrix M is a matrix whose square is M . It might not exist nor be unique.*

Definition 6.4 (Matrix exponential). *If M is a square matrix, the exponential of M is the matrix defined by*

$$\exp(M) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{M^k}{k!}.$$

We recall the following property about matrix exponential from [100, Page 79].

Proposition 6.5. *The function $\varphi : x \in \mathbb{C} \mapsto \exp(xM)$, where M is a square matrix, is differentiable with respect to x and $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = M \exp(xM) = \exp(xM) M$.*

We recall the following results (Definition 6.6 and Theorem 6.7) about Jordan decomposition from [105, Page 350] and [63, Page 317].

Definition 6.6 (Jordan block). *The Jordan block of parameter μ and size r_k is the $r_k \times r_k$ matrix ($r_k \in \mathbb{N}^*$), defined by*

$$J_\mu := \begin{pmatrix} \mu & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \mu \end{pmatrix}.$$

Theorem 6.7 (Jordan decomposition). *If $M \in \mathbb{C}^{N \times N}$, then there exists a nonsingular matrix $X \in \mathbb{C}^{N \times N}$ such that*

$$XMX^{-1} = \begin{pmatrix} J_{\mu_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_{\mu_K} \end{pmatrix},$$

where μ_1, \dots, μ_K are the eigenvalues of M , possibly equal. The number of Jordan blocks associated with an eigenvalue is equal to its geometric multiplicity, i.e. the dimension of the associated eigenspace.

Proposition 6.8 (Commuting two Jordan blocks of same size). *Blocks J_λ and J_μ commute (and thus also J_λ^{-1} and J_μ^{-1}), as well as J_λ^{-1} and J_μ .*

6.3.2 Square root of a matrix

In this part, we prove that a Jordan matrix admits a square root.

Proposition 6.9. *Every matrix $M = \mu \mathbf{I}_N + \mathcal{N}$ with μ nonzero and \mathcal{N} a nilpotent matrix admits a square root under the form*

$$\sqrt{M} := \sqrt{\mu} \sum_{k=0}^N \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{\mu^k} \mathcal{N}^k, \quad (6.7)$$

with generalized binomial coefficients:

$$\binom{\frac{1}{2}}{0} := 1, \quad \binom{\frac{1}{2}}{k} := \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2} - 1) \dots (\frac{1}{2} - k + 1)}{k!}, \quad \forall k \geq 1.$$

Proof. Let us start with the case where $\mu = 1$. Let d be the index of \mathcal{N} . If $d = 1$, then $\mathcal{N} = 0_{N,N}$, thus $M = \mathbf{I}_N$, and (6.7) gives $\sqrt{M} = \mathbf{I}_N$, which is indeed a square root of M . If $d > 1$, let

$$P_{d-1}(X) := \sum_{k=0}^{d-1} \binom{\frac{1}{2}}{k} X^k.$$

We will prove that $P_{d-1}^2(\mathcal{N}) = \mathbf{I}_N + \mathcal{N}$, i.e. that the polynomial R defined by $R(X) := 1 + X - P_{d-1}^2(X)$ vanishes in matrix \mathcal{N} . For this, we will first show that R is factorizable as a product of X^d and a polynomial, and then use that $\mathcal{N}^d = 0$.

The polynomial P_{d-1} has been chosen as the $(d-1)$ -order Taylor expansion of $t \mapsto \sqrt{1+t}$ around 0:

$$\sqrt{1+t} \underset{t \rightarrow 0}{=} P_{d-1}(t) + o(t^{d-1}).$$

By squaring the above equality, we get

$$1+t = \sqrt{1+t}^2 \underset{t \rightarrow 0}{=} P_{d-1}^2(t) + 2P_{d-1}(t)o(t^{d-1}) + o(t^{d-1})^2 = P_{d-1}^2(t) + o(t^{d-1}). \quad (6.8)$$

The polynomial R being of degree $2d-2$, it can be written under the form $R(X) = \sum_{k=0}^{2d-2} \eta_k X^k$, with $\eta_k \in \mathbb{R}$ and $\eta_{2d-2} \neq 0$. Then, from (6.8) and the definition of R , one gets $R(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(t^{d-1})$ which is only possible if all η_k are zeros for $k \in \llbracket 0, d-1 \rrbracket$. This implies that

$$R(X) = \sum_{k=d}^{2d-2} \eta_k X^k = \sum_{k=0}^{d-2} \eta_{k+d} X^{k+d} = X^d \sum_{k=0}^{d-2} \eta_{k+d} X^k.$$

Using that \mathcal{N} is a nilpotent matrix of index d , i.e. $\mathcal{N}^d = 0$, it follows that $R(\mathcal{N}) = 0$. According to the definition of R , we obtain:

$$\mathbf{I}_N + \mathcal{N} = P_{d-1}^2(\mathcal{N}).$$

Let us now consider the general case, with μ nonzero, arbitrary. We can rewrite M as $M = \mu(\mathbf{I}_N + \frac{1}{\mu}\mathcal{N})$ where the $\frac{1}{\mu}\mathcal{N}$ is nilpotent of index d , and then apply the above result to define \sqrt{M} by

$$\sqrt{M} := \sqrt{\mu} P_{d-1} \left(\frac{1}{\mu} \mathcal{N} \right),$$

with $\sqrt{\mu}$ a complex number whose square is μ . □

Corollary 6.10. *If μ is nonzero, J_μ admits a square root. In this case, \mathcal{N} is the matrix with 1 on the superdiagonal, and 0 elsewhere. Then the i -th superdiagonal of $\sqrt{J_\mu}$ only contains coefficient $\mu^{\frac{1}{2}-i} \binom{\frac{1}{2}}{i}$.*

6.3.3 Application to matrix A

Let us now prove that matrix A (defined in (6.5)) admits a square root and give the Jordan decomposition of the latter. The following proposition is immediate.

Proposition 6.11 (Eigenvalue and eigenspace of A). *The only eigenvalue of A is 1 and the associated eigenspace is of dimension one:*

$$S_1(A) := \text{Vect} \left\{ ((0, \dots, 0, 1)^T) \right\}. \quad (6.9)$$

Proposition 6.12 (Definition and properties of \sqrt{A}). *Matrix A admits a square root with the following properties:*

- (i). *The only eigenvalue of \sqrt{A} is 1 and the associated eigenspace is $S_1(A)$ defined in (6.9).*
- (ii). *\sqrt{A} admits a Jordan decomposition*

$$\sqrt{A} = Q^{-1} J_1 Q, \quad (6.10)$$

with Q an invertible matrix and J_1 as in Definition 6.6 with $\mu = 1$, $r_k = N$.

Proof. Since $A = \mathbf{I}_N + \mathcal{N}$, where \mathcal{N} is the strictly lower triangular matrix with coefficient -1 on the first lower diagonal, Proposition 6.9 shows that A admits a square root given by formula (6.7), which additionally shows that 1 is the only eigenvalue of \sqrt{A} , since all powers of \mathcal{N} are also strictly lower triangular.

Furthermore, let X be a nonzero eigenvector associated with the eigenvalue of \sqrt{A} . We thus have: $\sqrt{A}X = X$. Then $AX = \sqrt{A}\sqrt{A}X = \sqrt{A}X = X$. As X is nonzero, it is also an eigenvector of A , and, according to Proposition 6.11, X is necessarily collinear to $(0, \dots, 0, 1)^T$. This shows (i).

From (i) and Theorem 6.7, we obtain the Jordan decomposition (ii). \square

6.4 OSWR algorithm

In this section, after recalling some results in the continuous framework, we study the convergence of the discrete-time OSWR algorithm. This will then suggest a methodology for calculating the Robin parameters.

6.4.1 Continuous case

The OSWR method for solving (6.3) consists in choosing initial Robin data ξ_1^0, ξ_2^0 on $(0, T)$, and setting $\mathcal{B}_1 u_2^0(0, \cdot) := \xi_1^0$, $\mathcal{B}_2 u_1^0(0, \cdot) := \xi_2^0$. Then for $\ell = 1, 2, \dots$ one solves the local Robin problems

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u_1^\ell &= f_1 & \text{in } \Omega_1 \times (0, T), & \quad \mathcal{L}u_2^\ell &= f_2 & \text{in } \Omega_2 \times (0, T), \\ \mathcal{B}_1 u_1^\ell &= \mathcal{B}_1 u_2^{\ell-1} & \text{on } \{0\} \times (0, T), & \quad \mathcal{B}_2 u_2^\ell &= \mathcal{B}_2 u_1^{\ell-1} & \text{on } \{0\} \times (0, T), \\ u_1^\ell(\cdot, 0) &= u_{0,1} & \text{in } \Omega_1, & \quad u_2^\ell(\cdot, 0) &= u_{0,2} & \text{in } \Omega_2, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u_1^\ell(x, \cdot) & \text{is bounded,} & & \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2^\ell(x, \cdot) & \text{is bounded.} & \end{aligned} \quad (6.11)$$

The usual Fourier transform in time approach (with the assumption of an infinite time interval) provides an expression of the convergence factor of the above algorithm (see [49, 50]) as follows

$$\rho(\omega, \alpha_1, \alpha_2) := \left(\frac{\sqrt{\nu i \omega} - \alpha_1}{\sqrt{\nu i \omega} + \alpha_1} \right) \left(\frac{\sqrt{\nu i \omega} - \alpha_2}{\sqrt{\nu i \omega} + \alpha_2} \right),$$

for all Fourier time frequencies ω . While we have $\max_{\omega \in \mathbb{R}} |\rho(\omega, \alpha_1, \alpha_2)| = 1$, the convergence factor can be used to calculate efficient Robin parameters in the discrete setting. Indeed, in numerical computations the time frequency is bounded, i.e. in $[\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}]$. Then, one can define *continuous optimized Robin parameters* $\alpha_{1,C}, \alpha_{2,C}$ such that

$$|\rho(\omega, \alpha_{1,C}, \alpha_{2,C})| = \min_{(\alpha_1, \alpha_2) \in (\mathbb{R}^+)^2} \max_{\omega \in [\frac{\pi}{T}, \frac{\pi}{\Delta t}]} |\rho(\omega, \alpha_1, \alpha_2)|,$$

see e.g. [79, 95, 46, 50]. In our numerical experiments of Section 6.5, the minimization is done using the GNU OCTAVE *fminsearch* function [37].

One can also consider the one-sided case $\alpha := \alpha_1 = \alpha_2$ and define α_C as the solution of the above minimization problem on $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Ref. [49] gives an explicit formula for α_C when $\nu = 1$. Its extension to any ν through a change of variables provides

$$\alpha_C = \sqrt{\pi\nu} \left(\frac{1}{T\Delta t} \right)^{1/4}.$$

6.4.2 Dimensionless Robin parameters

In what follows, we will use the notation below, for dimensionless Robin parameters:

$$\bar{\alpha}_i := \alpha_i \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}}, \quad i = 1, 2, \quad \bar{\alpha} := (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2). \quad (6.12)$$

This notation will be useful for the convergence analysis in the discrete-time setting. More precisely, we will observe in Section 6.4.4 that the convergence depends only on $\bar{\alpha}$ and N .

Using this notation, the *dimensionless continuous optimized Robin parameters*, for the one and two-sided cases, are respectively denoted by

$$\bar{\alpha}_C := \sqrt{\pi} \left(\frac{\Delta t}{T} \right)^{1/4}, \quad \bar{\alpha}_C := \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} (\alpha_{1,C}, \alpha_{2,C}). \quad (6.13)$$

6.4.3 Discrete-time algorithm

The discrete-time OSWR algorithm for solving the coupled problem (6.4) is as follows.

Algorithm 8 (Discrete-time OSWR)

Choose initial Robin data $\Xi_1^0, \Xi_2^0 \in \mathbb{R}^N$ at $x = 0$, and set $B_1 U_2^0 := \Xi_1^0$, $B_2 U_1^0 := \Xi_2^0$

for $\ell = 1, 2, \dots$ **do**

 Solve the local Robin problems

$$\begin{aligned} LU_1^\ell &= F_1 && \text{in } \Omega_1, && LU_2^\ell &= F_2 && \text{in } \Omega_2, \\ B_1 U_1^\ell &= B_1 U_2^{\ell-1} && \text{at } x = 0, && B_2 U_2^\ell &= B_2 U_1^{\ell-1} && \text{at } x = 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} U_1^\ell(x) &&& \text{is bounded,} && \lim_{x \rightarrow +\infty} U_2^\ell(x) &&& \text{is bounded.} \end{aligned} \quad (6.14)$$

end for

In what follows, an analysis of the convergence of Algorithm 8 is given.

6.4.4 Discrete-time convergence analysis

Let us denote by (U_1, U_2) the solution of (6.4). Then, by linearity, the error $E_i^\ell := U_i^\ell - U_i$, $i = 1, 2$, at iteration ℓ of Algorithm 8, satisfies, for $\ell \geq 1$,

$$\begin{aligned} LE_1^\ell &= 0_N && \text{in } \Omega_1, && LE_2^\ell &= 0_N && \text{in } \Omega_2, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} E_1^\ell(x) &&& \text{is bounded,} && \lim_{x \rightarrow +\infty} E_2^\ell(x) &&& \text{is bounded.} \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$B_1 E_1^\ell = B_1 E_2^{\ell-1} \text{ at } x = 0, \quad B_2 E_2^\ell = B_2 E_1^{\ell-1} \text{ at } x = 0, \quad (6.16)$$

with

$$B_i E_j^0(0) := \Xi_i^0 - B_i U_i(0), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2. \quad (6.17)$$

Then we have the following result:

Theorem 6.13. *Let $\ell \geq 1$. There exists $\beta_i^\ell \in \mathbb{R}^N$, $i = 1, 2$, such that the subdomain solutions of (6.15) are of the form*

$$E_i^\ell(x) = e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu\Delta t}}\sqrt{A}} \beta_i^\ell, \quad \forall x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.18)$$

The proof of Theorem 6.13 is given in Appendix A.

Let us introduce the dimensionless initial Robin data for the errors

$$\bar{G}_i^0 := \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} (\Xi_i^0 - (B_i U_i)(0)), \quad i = 1, 2. \quad (6.19)$$

Let us also extend (6.18) to the case $\ell = 0$, for $\bar{\alpha}_j \neq 1$, $j = 1, 2$,

$$\beta_i^0 := (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N - \sqrt{A})^{-1} \bar{G}_j^0, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad (6.20)$$

$$E_i^0(x) := e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu \Delta t}}} \sqrt{A} \beta_i^0, \quad \forall x \in \Omega_i, \quad i = 1, 2. \quad (6.21)$$

For $\ell \geq 1$, the dimensionless Robin data for the errors are denoted by

$$\bar{G}_i^\ell := \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} (B_i(E_j^\ell))(0) = (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \beta_j^\ell, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2. \quad (6.22)$$

Let $\mathbf{H}^1(\Omega_i) := (H^1(\Omega_i))^N$ and $\mathbf{L}^\infty(\Omega_i) := (L^\infty(\Omega_i))^N$, equipped respectively with

$$\|U\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} := \sqrt{\sum_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} (\|U_j\|_{H^1(\Omega_i)}^2)}, \quad \|U\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_i)} := \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} (\|U_j\|_{L^\infty(\Omega_i)}).$$

With these notations and Theorem 6.13, we can now prove the convergence of Algorithm 8.

Theorem 6.14 (OSWR convergence). *Let $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$. Then, Algorithm 8 converges in $(\mathbf{H}^1(\Omega_1) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega_1)) \times (\mathbf{H}^1(\Omega_2) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega_2))$ to the solution of (6.4). Moreover, setting¹*

$$M(\bar{\alpha}) := (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A}) (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N - \sqrt{A}), \quad (6.23)$$

we have the following relations on the Robin data for the errors, for $i=1,2$,

$$\bar{G}_i^{2\ell} = (M(\bar{\alpha}))^\ell \bar{G}_i^0, \quad \forall \ell \geq 0, \quad (6.24a)$$

$$\bar{G}_i^{2\ell+1} = (M(\bar{\alpha}))^\ell \bar{G}_i^1, \quad \forall \ell \geq 0, \quad (6.24b)$$

as well as the discrete-time relations for the errors on the interface²

$$\beta_i^{2\ell} = (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^0 \quad \forall \ell \geq 0, \quad (6.25a)$$

$$\beta_i^{2\ell+1} = (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^1 \quad \forall \ell \geq 0, \quad (6.25b)$$

from which we deduce the following convergence estimates, for even and odd iterations

$$\frac{\|E_i^{2\ell}(0)\|_\infty}{\|E_i^0(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty, \quad \forall \ell \geq 0, \quad (6.26a)$$

$$\frac{\|E_i^{2\ell+1}(0)\|_\infty}{\|E_i^1(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty, \quad \forall \ell \geq 0. \quad (6.26b)$$

Thus, $\|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty$ is an estimate of the relative L^∞ -error at iterations 2ℓ and $2\ell + 1$, for all $\ell \geq 0$.

Proof. Let us first prove (6.24) for $\ell \geq 1$ (the case $\ell = 0$ being trivial).

Using Proposition 6.5, equation (6.18), and the definition of the Robin operator B_i in (6.6), we get, for $i = 1, 2$ and $j = 3 - i$:

$$(B_i E_j^\ell)(0) = \left(\alpha_i \mathbf{I}_N + \nu \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\nu \Delta t}} \right) \beta_i^\ell, \quad (B_i E_j^\ell)(0) = \left(\alpha_i \mathbf{I}_N - \nu \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\nu \Delta t}} \right) \beta_j^\ell, \quad \forall \ell \geq 1.$$

¹As all matrices of type $(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N \pm \sqrt{A})$ and their inverses commute one with the other, matrix M is independent of indices i and j .

²Formulas (6.25a) and (6.26a) below are only well-defined for $\bar{\alpha}_j \neq 1$, $j = 1, 2$. If $\bar{\alpha}_j = 1$, for $j = 1$ or $j = 2$, we have, for $i = 3 - j$, the equality $\beta_i^{2\ell} = (M(\bar{\alpha}))^{\ell-1} \beta_i^2$ and the convergence estimate $\frac{\|E_i^{2\ell}(0)\|_\infty}{\|E_i^2(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^{\ell-1}\|_\infty$, $\forall \ell \geq 1$.

Thus, using (6.16) and (6.17) lead to, for $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \left(\alpha_i \mathbf{I}_N + \nu \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\nu \Delta t}} \right) \beta_i^1 &= \Xi_i^0 - (B_i U_i)(0), \\ \left(\alpha_i \mathbf{I}_N + \nu \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\nu \Delta t}} \right) \beta_i^\ell &= \left(\alpha_i \mathbf{I}_N - \nu \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{\nu \Delta t}} \right) \beta_j^{\ell-1}, \quad j = 3 - i, \quad \forall \ell \geq 2, \end{aligned}$$

or equivalently, using the dimensionless notations (6.12) and (6.19), for $i = 1, 2$,

$$\left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right) \beta_i^1 = \bar{G}_i^0, \quad (6.27a)$$

$$\left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right) \beta_i^\ell = \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A} \right) \beta_j^{\ell-1}, \quad j = 3 - i, \quad \forall \ell \geq 2. \quad (6.27b)$$

For $i = 1, 2$, the matrix $\left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)$ is nonsingular. Indeed, using the Jordan decomposition of \sqrt{A} given in (6.10), and that $\bar{\alpha}_i > 0$, we get

$$\det \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right) = \det \left(Q^{-1} (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1) Q \right) = \det (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1) = (\bar{\alpha}_i + 1)^N \neq 0.$$

Thus, from (6.27a) and (6.27b) we obtain, for $i = 1, 2$,

$$\beta_i^2 = \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)^{-1} \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A} \right) \left(\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)^{-1} \bar{G}_j^0, \quad j = 3 - i, \quad (6.28a)$$

$$\beta_i^\ell = M(\bar{\alpha}) \beta_i^{\ell-2}, \quad \forall \ell \geq 3. \quad (6.28b)$$

Multiplying now (6.28a) and (6.28b) by $(\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N - \sqrt{A})$, with $j = 3 - i$, then using that all matrices of type $(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N \pm \sqrt{A})$ and their inverses commute one with the other, and using (6.22), we get, for $j = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \bar{G}_j^2 &= M(\bar{\alpha}) \bar{G}_j^0, \\ \bar{G}_j^\ell &= M(\bar{\alpha}) \bar{G}_j^{\ell-2}, \quad \text{for } \ell \geq 3, \end{aligned}$$

from which (6.24) is deduced by induction. From (6.28b), we also get (6.25b) by induction. Then, taking the L^∞ -norm of (6.25b), and using (6.18), we deduce (6.26b).

Let us now prove (6.25a) and (6.26a). We will distinguish the following cases:

Case $\bar{\alpha}_i \neq 1$, for $i = 1, 2$

Multiplying equations (6.24) by $(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A})^{-1}$ and then using (6.20) and (6.22) lead to (6.25a). Then, taking the L^∞ -norm of (6.25a), and using (6.18) and (6.21), we get (6.26a).

Case $\bar{\alpha}_i = 1$, for $i = 1$ or $i = 2$

In that case, relations (6.25a) and (6.26a) are replaced by $\beta_i^{2\ell} = (M(\bar{\alpha}))^{\ell-1} \beta_i^2$ and $\frac{\|E_i^{2\ell}(0)\|_\infty}{\|E_i^2(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^{\ell-1}\|_\infty$, $\forall \ell \geq 1$, respectively (see Footnote 2 above). The first relation is obtained by induction from (6.28b). Then, taking its L^∞ -norm, and using (6.18), we obtain the second one.

Let us now prove that Algorithm 8 converges. Matrix \sqrt{A} is lower triangular with value 1 on the diagonal. Thus, $M(\bar{\alpha})$ is a lower triangular matrix with a unique diagonal coefficient σ , that is its unique eigenvalue, given by

$$\sigma = \left(\frac{\bar{\alpha}_1 - 1}{\bar{\alpha}_1 + 1} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}_2 - 1}{\bar{\alpha}_2 + 1} \right).$$

Thus the spectral radius of $M(\bar{\alpha})$ is equal to $|\sigma|$ and strictly smaller than 1, as $\bar{\alpha}_i > 0$.

Consequently, we have $\lim_{\ell \rightarrow \infty} (M(\bar{\alpha}))^\ell = 0_{N,N}$, and thus $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \beta_i^{2\ell} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \beta_i^{2\ell+1} = 0_N$, for $i = 1, 2$.

Then, from (6.18) we get $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|E_i^{2\ell}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_i)} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|E_i^{2\ell+1}\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega_i)} = 0$, for $i = 1, 2$, as well as

$\lim_{\ell \rightarrow \infty} \|E_i^{2\ell}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} \|E_i^{2\ell+1}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega_i)} = 0$, $i = 1, 2$, for all positive $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$, which proves the convergence of Algorithm 8. \square

From Theorem 6.14, the following finite convergence results can be derived.

Theorem 6.15 (Finite convergence of OSWR method). *Let $\bar{\alpha}_i$, $i = 1, 2$, be the dimensionless Robin parameters defined in (6.12).*

- (i). *If $\bar{\alpha}_1 = 1$ or $\bar{\alpha}_2 = 1$ (two-sided case), then the OSWR algorithm 8 converges in at most $2N + 2$ iterations;*
- (ii). *If $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 1$ (one-sided case), then the OSWR algorithm 8 converges in at most $N + 1$ iterations.*

Proof. Let us prove (i). Using in (6.24a) the Jordan decomposition of \sqrt{A} (given in (6.10)), we get, for $\ell \geq 0$, for $i = 1, 2$

$$\bar{G}_i^{2\ell} = Q^{-1} \left((\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1)^{-1} (-\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1) (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + J_1)^{-1} (-\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + J_1) \right)^\ell Q \bar{G}_i^0. \quad (6.29)$$

Using Property 6.8, the four matrices commute one with the other (as each matrix is a Jordan matrix, e.g. $\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1 = J_{1+\bar{\alpha}_i}$). Then, we have :

$$\bar{G}_i^{2\ell} = Q^{-1} (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1)^{-\ell} (-\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1)^\ell (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + J_1)^{-\ell} (-\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + J_1)^\ell Q \bar{G}_i^0. \quad (6.30)$$

Let $i = 1$ or $i = 2$, and $j = 3 - i$. Let $\bar{\alpha}_i = 1$ (and $\bar{\alpha}_j$ arbitrary). Then the matrix $-\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1$ has all its coefficients zero, except the superdiagonal ones. Thus, $-\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + J_1$ is an $N \times N$ nilpotent matrix of index N . Consequently, from (6.30) with $\ell = N$, we have $\bar{G}_i^{2N} = 0_N$. Using now relations (6.27b) and (6.22), we obtain

$$\beta_i^{\ell+1} = (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \beta_j^\ell = (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} \bar{G}_i^\ell,$$

and thus $\beta_i^{2N+1} = 0_N$, and with (6.27b) we also have

$$\beta_j^{\ell+2} = (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \beta_i^{\ell+1},$$

thus $\beta_j^{2N+2} = 0_N$. Finally, from (6.18), we get $E_i^{2N+2} = 0_N$, $i = 1, 2$.

Let us now prove (ii). Taking $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2 = 1$ and multiplying both equations of (6.27) by $(\mathbf{I}_N - \sqrt{A})$, one gets :

$$\begin{aligned} \bar{G}_j^1 &= (\mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \bar{G}_i^0, \\ \bar{G}_j^\ell &= (\mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \bar{G}_i^{\ell-1}, \quad j = 3 - i, \quad \forall \ell \geq 2. \end{aligned}$$

Thus, by induction, we obtain

$$\bar{G}_j^\ell = (\mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-\ell} (\mathbf{I}_N - \sqrt{A})^\ell \bar{G}_{i/j}^0, \quad (6.31)$$

where $\bar{G}_{i/j}^0$ is \bar{G}_j^0 if ℓ is even, \bar{G}_i^0 if ℓ is odd.

Using the Jordan decomposition of \sqrt{A} in the above equality (as in (i)), we get

$$\bar{G}_j^\ell = Q^{-1} (\mathbf{I}_N + J_1)^{-\ell} (\mathbf{I}_N - J_1)^\ell Q \bar{G}_{i/j}^0. \quad (6.32)$$

Then, if $\ell = N$, one gets that $\bar{G}_j^N = 0$, $j = 1, 2$, and thus, using (6.27b) and (6.22), we get $\beta_j^{N+1} = (\mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} (\mathbf{I}_N - \sqrt{A}) \beta_i^N = (\mathbf{I}_N + \sqrt{A})^{-1} \bar{G}_j^N = 0_N$, $j = 1, 2$. Finally, from (6.18), we have $E_j^{N+1} = 0_N$, for $j = 1, 2$. \square

Remark 6.16. *Theorem 6.15 shows that for the 1D heat equation, OSWR algorithm converges in a finite number of iterations, equal to the number of time steps (or twice this number, for two-sided parameters) if one takes a dimensionless Robin parameter equal to 1. However, this value is not the one used in practice, since we search for parameters that will give a convergence in a number of iterations much more smaller than the number of time steps.*

From Theorem 6.14, the following result can be obtained.

Theorem 6.17 (Convergence depending only on $\bar{\alpha}$). *For a given $N \geq 1$, the L^∞ -norm convergence of Algorithm 8 depends only on $\bar{\alpha}$.*

Proof. This result directly comes from (6.25) where M depends only on $\bar{\alpha}$ and on N through its dimension. Indeed, the convergence of the sequence $(\beta_i^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, depends only on $\bar{\alpha}$ and N . Then, using (6.18) and that $\|E_i^\ell\|_{L^\infty(\Omega_i)} = \|\beta_i^\ell\|_\infty$ $i = 1, 2$, the theorem is proven. \square

Remark 6.18. For a given $N \geq 1$ (and thus for a given Δt), once the choice of $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ has been performed as recommended in Section 6.4.5 below, one simply has to choose $\alpha_i = \bar{\alpha}_i \sqrt{\frac{\nu}{\Delta t}}$, $i = 1, 2$, to obtain an efficient convergence which will not depend on ν (as follows from Theorem 6.17).

Remark 6.19 (Notation for matrix M). Throughout the sequel of this paper, the matrix defined in (6.23) will be denoted by $M(\bar{\alpha})$ in the one-sided case $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}, \bar{\alpha})$, and by $M(\bar{\alpha})$ in the two-sided case $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$.

Remark 6.20. Note that in (6.26), one could use the upper bound

$$\|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty \leq \|M(\bar{\alpha})\|_\infty^\ell, \quad (6.33)$$

and then define Robin parameters, for the one-sided and two-sided cases, respectively denoted by $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{\alpha}_M$, as follows³

$$\|M(\bar{\alpha}_M)\|_\infty = \min_{\bar{\alpha} \in]0,1]} \|M(\bar{\alpha})\|_\infty, \quad \|M(\bar{\alpha}_M)\|_\infty = \min_{\bar{\alpha} \in]0,1]^2} \|M(\bar{\alpha})\|_\infty. \quad (6.34)$$

However, for a given $N \geq 1$, $\|M(\bar{\alpha}_M)\|_\infty^\ell$ is larger than $\|(M(\bar{\alpha}_M))^\ell\|_\infty$, and differs more and more from $\|(M(\bar{\alpha}_M))^\ell\|_\infty$ when ℓ increases. Thus one loses information in the use of the upper bound (6.33). This will be observed numerically in Section 6.5.6, where the convergence with $\bar{\alpha}_M$ is much slower (except for the very first iterations) than that with the parameter $\bar{\alpha}$ that minimizes $\|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty$. Consequently, one main objective of this article is to search for discrete-time optimized Robin parameters $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}(\ell)$, that depend on iteration ℓ , and minimize $\|(M(\bar{\alpha}))^\ell\|_\infty$. Such parameters will be defined in Section 6.4.5.

Remark 6.21 (Equivalent writing of discrete-time estimate and notation). From relations (6.26), the discrete-time estimates at iteration ℓ read

$$\frac{\|E_i^\ell(0)\|_\infty}{\|E_i^0(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty, \quad \forall \ell \geq 0 \text{ even}, \quad (6.35a)$$

$$\frac{\|E_i^\ell(0)\|_\infty}{\|E_i^1(0)\|_\infty} \leq \|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty, \quad \forall \ell \geq 1 \text{ odd}, \quad (6.35b)$$

$$\text{with } q(\ell) := \begin{cases} \frac{\ell}{2} & \text{if } \ell \text{ is even} \\ \frac{\ell-1}{2} & \text{if } \ell \text{ is odd} \end{cases}, \quad \forall \ell \geq 0. \quad (6.36)$$

Thus, $\|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty$ is an estimate of the relative L^∞ -error at iteration ℓ , for $\ell \geq 0$.

6.4.5 Choice of the Robin parameters

Let us first consider the one-sided case, i.e. $\bar{\alpha} := \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. The convergence matrix defined in (6.23) then reads

$$M(\bar{\alpha}) = \left(\left(\bar{\alpha} \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)^{-1} \left(\bar{\alpha} \mathbf{I}_N - \sqrt{A} \right) \right)^2, \quad i = 1, 2.$$

Remarks 6.20 and 6.21 lead us to define a *discrete-time optimized Robin parameter*, denoted by $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$, depending on iteration $\ell \geq 2$, as follows (see Footnote 3 above).

$$\|(M(\bar{\alpha}_{D[\ell]}))^{q(\ell)}\|_\infty = \min_{\bar{\alpha} \in]0,1]} \|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty, \quad (6.37)$$

where $q(\ell)$ is defined in (6.36).

For example, if one wants to optimize the convergence at iteration $\ell = 7$, then one can use the Robin parameter $\bar{\alpha}_{D[7]}$ such that $\|(M(\bar{\alpha}_{D[7]}))^3\|_\infty = \min_{\bar{\alpha} \in]0,1]} \|(M(\bar{\alpha}))^3\|_\infty$.

³The choice of the interval $]0, 1]$ in the minimization problem comes from the fact that the Robin parameters are positive, and from our numerical observations in Section 6.5.

Remark 6.22. In practice, for the minimization problem in (6.37), we calculate $\|(M(\gamma_j))^{q(\ell)}\|_\infty$, with $\gamma_j := \frac{j}{100}$ for $j \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$, then take the index j_0 that gives the minimum value, and set $\bar{\alpha}_{D[\ell]} = \gamma_{j_0}$. Note that, although this process requires the repeated inversion of matrices, its cost remains low for the following reasons :

- the matrices are of size N and thus remain of moderate size, since for long time computations a splitting of the time interval into windows is necessary, and one uses the OSWR method in each time window [13, 67];
- the matrices involved at iteration ℓ will be recycled for iteration $\ell + 1$, so that the marginal cost of computing the norms of the matrices for an extra iteration remains cheap;
- the calculation of the terms $\|(M(\gamma_j))^{q(\ell)}\|_\infty$, $j \in \llbracket 1, 100 \rrbracket$ can be completely parallelized (with respect to j);
- the method provides a dimensionless optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ whose dependency is only in ℓ and N , and thus independent of the other parameters ν , f , u_0 and of space discretization. It can therefore be calculated only once, at fixed N , whatever the other data of the problem. The (dimensional) optimized Robin parameter is then given by $\alpha_{D[\ell]} := \sqrt{\frac{\nu}{\Delta t}} \bar{\alpha}_{D[\ell]}$.

This process can be extended to the two-sided case with corresponding *two-sided discrete-time optimized parameters* denoted by $\bar{\alpha}_{D[\ell]} = (\bar{\alpha}_{1,D[\ell]}, \bar{\alpha}_{2,D[\ell]})$, as follows :

$$\|(M(\bar{\alpha}_{D[\ell]}))^{q(\ell)}\|_\infty = \min_{\bar{\alpha} \in [0,1]^2} \|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty, \quad (6.38)$$

where $M(\bar{\alpha})$ is defined in (6.23).

Remark 6.23. Note that, by definition of $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{\alpha}_M$ in (6.34), and of $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ and $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$, $\ell \geq 2$, in (6.37) and (6.38) respectively, we have the following relations :

$$\bar{\alpha}_M = \bar{\alpha}_{D[2]} = \bar{\alpha}_{D[3]}, \quad \bar{\alpha}_M = \bar{\alpha}_{D[2]} = \bar{\alpha}_{D[3]}.$$

6.5 Numerical results

In this section, some numerical experiments are presented to illustrate the theoretical results of Section 6.4.

The domain $\Omega = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ is of length $L_\Omega = 1$. The resolution is done using a finite element code developed in the GNU OCTAVE [37] language, whose mesh size is $\Delta x = 10^{-3}$ (except in Section 6.5.5 where $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$). The final time is $T = 1$, and the time step is $\Delta t = \frac{T}{N}$, where N will vary, depending on the numerical examples.

In our test cases we simulate the error equations, i.e. we take $u_0 = 0$ and $f = 0$. As the domain is now bounded, we add homogeneous Dirichlet conditions at $x = -\frac{1}{2}$ and $x = \frac{1}{2}$.

We use the OSWR algorithm with the interface at $x = 0$, and with the most general initial Robin data on the interface, under the form of random values, as commonly done in the study of OSWR methods (see e.g. [9, 51]).

The algorithm is stopped when the L^∞ -norm of the jump of the Robin transmission conditions on the interface is smaller than 10^{-12} , unless specified.

In Section 6.4.4 we have proved that the convergence of the discrete-time OSWR algorithm depends only on dimensionless Robin parameters $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ and on N . Thus, in what follows, we will consider only dimensionless Robin parameters $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ ⁴.

The solution of the fully discrete error equations at iteration ℓ is denoted $E_{i,\Delta x}^\ell$, and is measured, on the interface⁵, either in the L^∞ -norm, or in the L^∞ -norm scaled by the initial error, as in our theoretical result (6.35b).⁶

In what follows, we will use the following terms, that are associated to the OSWR iteration ℓ (excepted for the first item in the list below) :

- *continuous optimized Robin parameter(s)* : $\bar{\alpha}_C$ or $\bar{\alpha}_C$ given in (6.13);

⁴This means that in the OSWR algorithm we take $\alpha_i = \bar{\alpha}_i \sqrt{\frac{\nu}{\Delta t}}$, $i = 1, 2$.

⁵Similar results will be obtained if one takes the maximum of the L^∞ -errors in the subdomains.

⁶One could also consider a scaling by $\|E_i^0(0)\|_\infty = \|\beta_i^0\|_\infty$ as in (6.35a), which will lead to similar results, if one takes random values for β_i^0 , and then set $\bar{G}_i^0 := (\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A})\beta_j^0$, $j = 3 - i$, $i = 1, 2$.

- *fully discrete numerical solution* : $E_{i,\Delta x}^\ell$ (as defined above);
- *relative L^∞ -error* : error term $\frac{\|E_{i,\Delta x}^\ell(0)\|_\infty}{\|E_{i,\Delta x}^1(0)\|_\infty}$;
- *discrete-time convergence estimate* : upper bound $\|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty$ in (6.35);
- *discrete-time optimized Robin parameter(s)* : $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ or $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$, see Section 6.4.5.

Since the problem is symmetrical for the two domains, the results presented here are only for the left domain (similar results will be obtained for the right domain, up to a permutation of α_1 and α_2 in the two-sided case). Moreover, in the two-sided case, the symmetry implies that the relative error, on odd iterations, obtained with $(\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ is the same as with $(\bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_1)$; thus we consider $\bar{\alpha}_1 \leq \bar{\alpha}_2$ in what follows.

Remark 6.24. While our analysis has been carried out on an infinite domain, in practice, the fully discrete numerical solution is necessarily calculated on a bounded domain. However, we can show that the theory is not very much affected by the bounded domain, as long as $\sqrt{\nu\Delta t} \ll L_\Omega$. Indeed, on a bounded domain, the solution is not exactly (6.18) but will involve matrices $e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu\Delta t}}\sqrt{A}}$ and $e^{\frac{|x|}{\sqrt{\nu\Delta t}}\sqrt{A}}$ (as shown below in (A.2)), and the norm of the vector coefficient associated to the latter will become very small if $\sqrt{\nu\Delta t} \ll L_\Omega$. Thus, in our fully discrete numerical experiments, ν , Δt and L_Ω have been chosen so that they verify this condition.

Remark 6.25. As our analysis has been carried out in the semi-discrete in time case, we will take Δx small enough in the numerical experiments, to approach the discrete-time problem, i.e. we take $\Delta x \ll \sqrt{\nu\Delta t}$. However, when the previous condition is not satisfied, e.g. when $\Delta x = \Delta t$, we get similar numerical results.

Section 6.5.1 illustrates that, for a given $N \geq 1$, the convergence depends only on $\bar{\alpha}$. Then, in Section 6.5.2, we verify that, at each OSWR iteration, the discrete-time convergence estimate is an accurate evaluation of the relative L^∞ -error. Sections 6.5.3 and 6.5.4 illustrate the importance of choosing Robin parameters that are optimized for a targeted iteration count. In Section 6.5.5, asymptotic behaviors as a function of N are shown. Finally in Section 6.5.6, a comparison with $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{\alpha}_M$ (defined in (6.34)) is given.

In Sections 6.5.1 to 6.5.3 we consider one-sided Robin parameters $\bar{\alpha} := \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$. The case of two-sided parameters ($\bar{\alpha}_1$ and $\bar{\alpha}_2$ possibly different) will be treated in Section 6.5.4, and both cases will be considered in Sections 6.5.5 and 6.5.6.

6.5.1 Convergence depending only on $\bar{\alpha}$, for a given N

In this part we take $N = 100$. From Theorem 6.17 and Remark 6.18, we expect, for a fixed $\bar{\alpha}$, a convergence almost independent of ν when α is chosen as $\alpha = \bar{\alpha}\sqrt{\frac{\nu}{\Delta t}}$.

In Figure 6.1, we plot the evolution of the L^∞ -error as a function of the number of iterations, for three values of ν (0.1, 0.05, 0.01). The four graphs correspond to four values of $\bar{\alpha}$ (0.1, 0.5, 1 and 3). We observe that the convergence is not influenced by the diffusion coefficient ν , as expected. As a consequence, in what follows, we only consider the case $\nu = 0.05$.

6.5.2 Comparison between discrete-time estimate and relative L^∞ -error

In this part, we show that the discrete-time convergence estimate $\|(M(\bar{\alpha}))^{q(\ell)}\|_\infty$ in (6.35) approaches well the relative L^∞ -error, at each OSWR iteration ℓ , when the Robin initial guess has no particular structure, e.g., is a random vector, which implies that one cannot do better than going from equalities (6.25) to inequalities (6.26).

In Figure 6.2, we plot the relative L^∞ -error (solid line) and the discrete-time estimate (dashed line), as functions of the number of iterations, for $N = 100$, and for different values of $\bar{\alpha}$ (0.1, 0.5, 1 and 3).

We observe that the discrete-time estimate is an upper bound of the relative L^∞ -error, as expected from (6.35). Thus, we could not expect both curves to exactly overlay. However, the discrete-time estimates follow the actual relative L^∞ -error curves, with very similar shapes, and are closer when $\bar{\alpha}$ is larger. A possible explanation for the differences is that the theoretical analysis of this paper is done on an infinite domain, while the numerical results are performed on the bounded domain $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Another possible explanation is the loss of information when going from equalities (6.25) to inequalities (6.26).

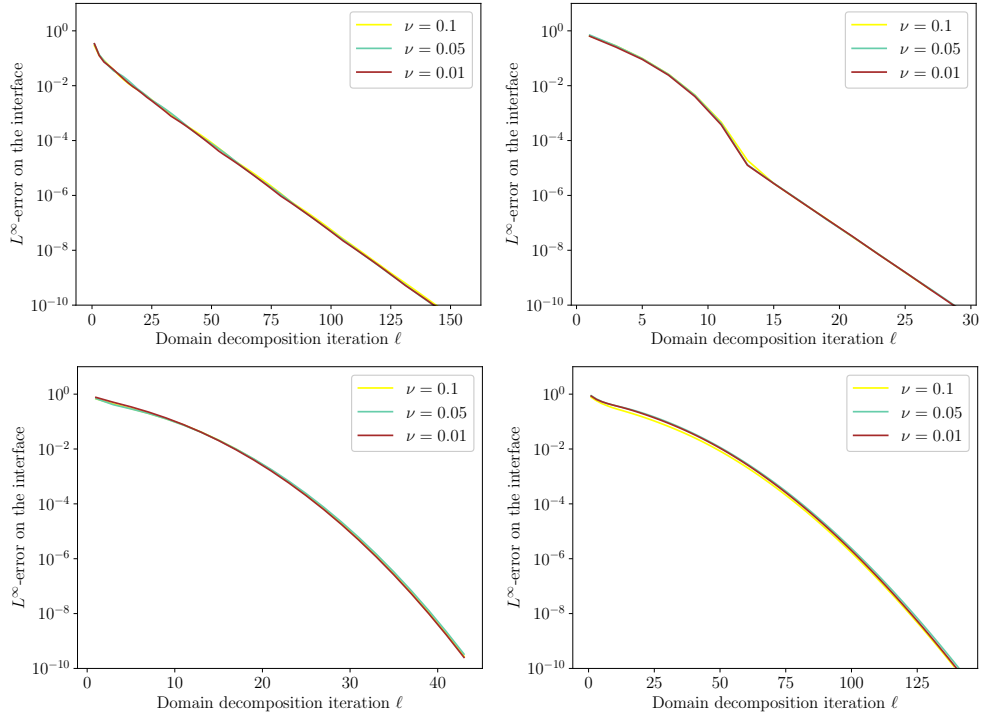


Figure 6.1: Illustration of convergence, which only depends on $\bar{\alpha}$, for a fixed N : L^∞ -error, with $N = 100$ and different values of ν , for $\bar{\alpha} = 0.1$ (top left), $\bar{\alpha} = 0.5$ (top right), $\bar{\alpha} = 1$ (bottom left), $\bar{\alpha} = 3$ (bottom right).

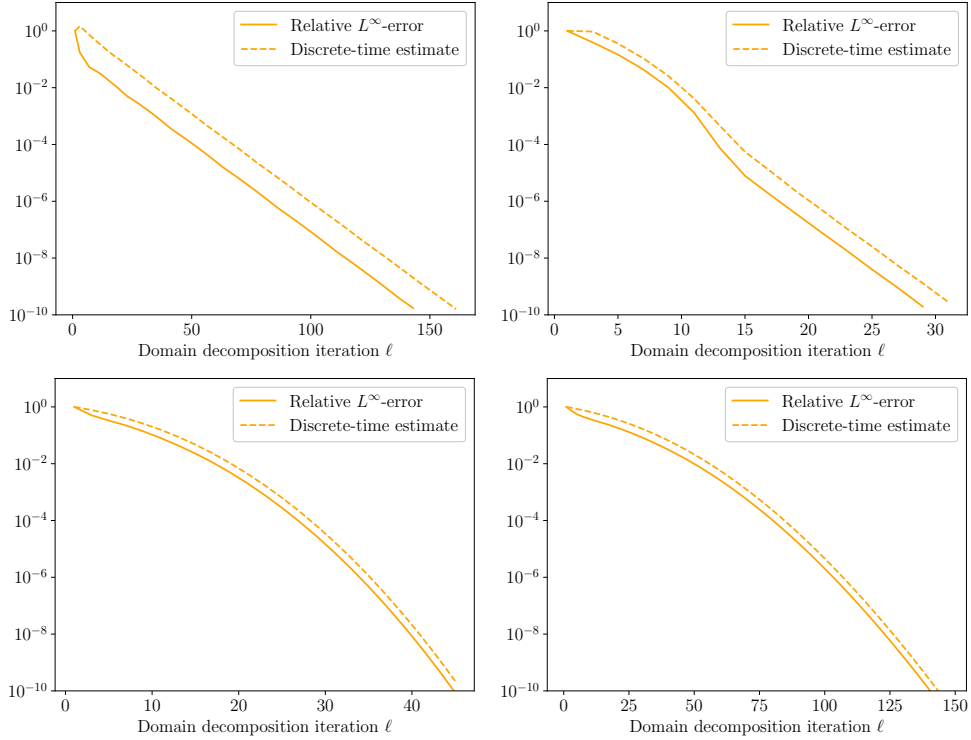


Figure 6.2: Comparison of relative L^∞ -error (solid line) and discrete-time estimate (dashed line), for $N = 100$, with $\bar{\alpha} = 0.1$ (top left), $\bar{\alpha} = 0.5$ (top right), $\bar{\alpha} = 1$ (bottom left), $\bar{\alpha} = 3$ (bottom right).

Remark 6.26. Additional tests seem to show that changing the initial Robin data from random values to values with a particular structure, e.g., the Robin operator applied to $(u - u_0)$ as can be done in practice (where u is the solution of (6.1), and u_0 is the (time independent) initial condition) has a (limited) influence on the shapes of the relative L^∞ -error curves, which are not as close to the discrete-time estimate as in the case of a random initial guess. In any case, the discrete-time estimates remain an upper bound of the actual error curves.

In this article, we intend to treat the most general case in which no information is known on the initial Robin data. Thus, in what follows, we focus on obtaining optimized dimensionless Robin parameters that minimize the discrete-time estimate, as done in Section 6.4.5, with random initial Robin values.

6.5.3 One-sided optimization

In this part, we consider *one-sided* Robin parameters ($\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$). We compute $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ using the method described in Remark 6.22.

6.5.3.1 Comparison of continuous and discrete-time parameters

In this section we compare the convergence obtained with the discrete-time optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ to those obtained with the continuous optimized parameter $\bar{\alpha}_C$ defined in (6.13) on the one hand, and with the actual numerical optimal one at iteration ℓ on the other hand. For this, we will consider two different iterations : $\ell = 7$ and $\ell = 21$.

On Figure 6.3 we plot the actual relative L^∞ -error at iteration 7 (left) and at iteration 21 (right) versus the Robin parameter $\bar{\alpha}$. On these graphs, stars stand for continuous optimized Robin parameters $\bar{\alpha}_C$, and triangles are discrete-time optimized Robin parameters $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (left) and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (right). Figure 6.3 allows to find the numerical optimal Robin parameter at iteration ℓ (for $\ell = 7$ and $\ell = 21$),

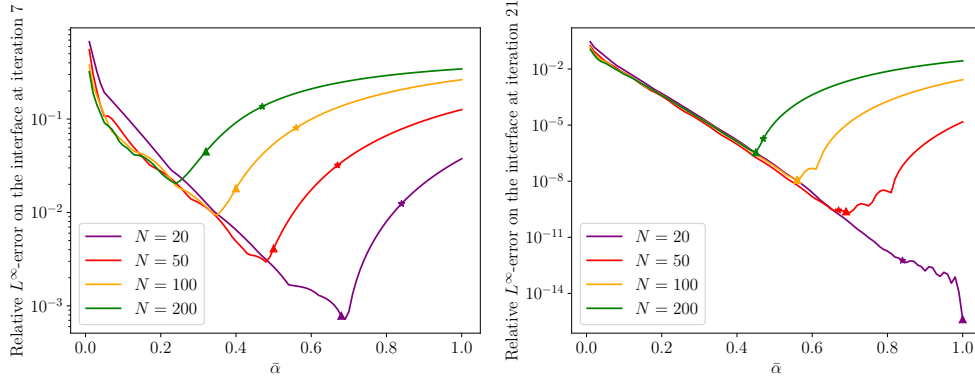


Figure 6.3: Relative L^∞ -error on the interface as a function of $\bar{\alpha}$, at iteration 7 (left) and 21 (right). In each case, the triangles show $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (left) and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (right), and the stars show $\bar{\alpha}_C$.

denoted $\bar{\alpha}_{opt[\ell]}$.

The values of $\bar{\alpha}_C$, $\bar{\alpha}_{opt[7]}$, $\bar{\alpha}_{opt[21]}$, $\bar{\alpha}_{D[7]}$, and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (rounded to the nearest hundredth), versus N , are reported in Table 6.1. Recall that $\bar{\alpha}_C$ is independent of the iterations, while $\bar{\alpha}_{D[7]}$ and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ optimize iterations 7 and 21, respectively.

N	$\bar{\alpha}_C$	$\bar{\alpha}_{D[7]}$	$\bar{\alpha}_{opt[7]}$	$\bar{\alpha}_{D[21]}$	$\bar{\alpha}_{opt[21]}$
20	0.84	0.68	0.69	1.00	1.00
50	0.67	0.50	0.48	0.69	0.70
100	0.56	0.40	0.35	0.56	0.56
200	0.47	0.32	0.24	0.45	0.45

Table 6.1: Dimensionless *one-sided* Robin parameter optimized with continuous and discrete-time analysis, and numerical optimal parameter.

On Figure 6.3 (left) and in Table 6.1 we observe that, at iteration 7, for all values of N , the parameter $\bar{\alpha}_{D[7]}$ is close to the numerical optimal $\bar{\alpha}_{opt[7]}$. The value of $\bar{\alpha}_{D[7]}$ deviates slightly from that of $\bar{\alpha}_{opt[7]}$, when N increases; however the corresponding L^∞ -error values remain close (within a factor of approximately 2, for $N = 200$). On Figure 6.3 (right) and Table 6.1, we see that at iteration 21 the parameter $\bar{\alpha}_{D[21]}$ is extremely close to the numerical optimal $\bar{\alpha}_{opt[21]}$. This is also the case for the parameter $\bar{\alpha}_C$, obtained by the continuous framework, except for $N = 200$. However, at iteration $\ell = 21$ for $N = 20$ and $N = 200$, and at iteration $\ell = 7$, for all N , the parameter $\bar{\alpha}_C$ is a worse approximation of $\bar{\alpha}_{opt[\ell]}$ than $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$. This observation is crucial when one wants to perform

a small number of iterations: in that case, the continuous optimization provides only a poor Robin coefficient and thus does not allow the OSWR algorithm to work efficiently.

On Figure 6.4, we plot the relative L^∞ -error as a function of OSWR iterations (note the scale change for the top left figure), for different values of N , and with $\bar{\alpha}_C$, $\bar{\alpha}_{D[7]}$, $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ and $\bar{\alpha}_{D[21]}$. Since the values of $\bar{\alpha}_{D[21]}$ and $\bar{\alpha}_{opt[21]}$ are extremely close for each N , the curves obtained with $\bar{\alpha}_{opt[21]}$ are not added on Figure 6.4.

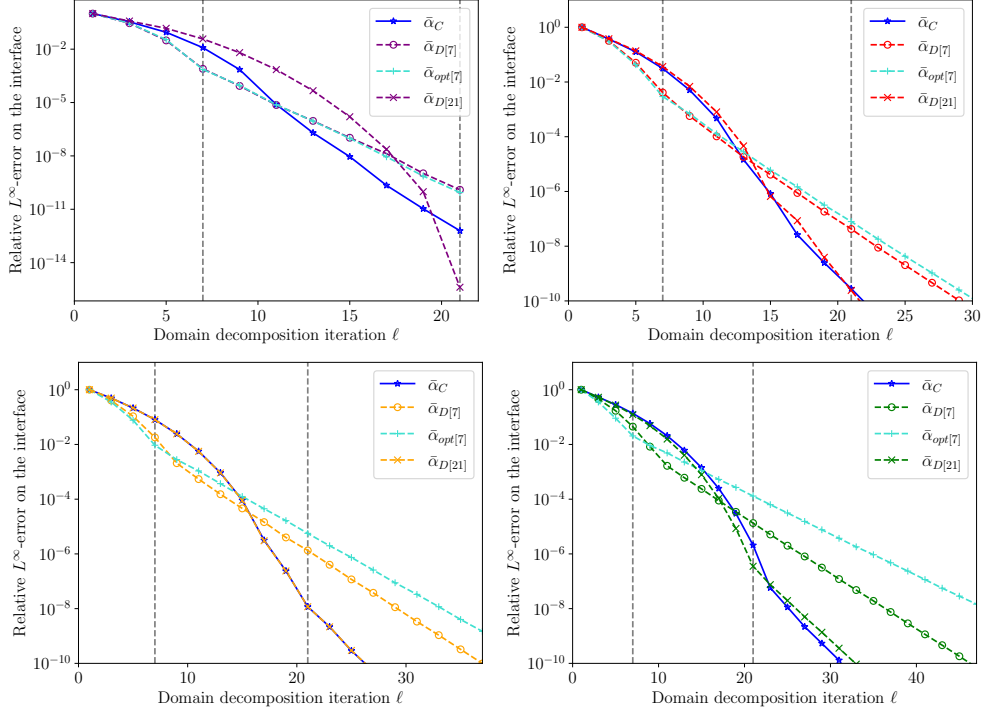


Figure 6.4: Relative L^∞ -error computed with one-sided continuous, discrete-time (optimized at iteration $\ell = 7$ and 21) and numerical optimal (at iteration $\ell = 7$) Robin parameters, for $N = 20$ (top left), $N = 50$ (top right), $N = 100$ (bottom left), $N = 200$ (bottom right). Note the scale change for the top left figure (in that case convergence with $\bar{\alpha}_{D[21]} = 1$ is almost exact at the 21st iteration, as expected from Theorem 6.15).

The curves with $\bar{\alpha}_{opt[21]}$ are not shown, since they are superimposed with those of $\bar{\alpha}_{D[21]}$.

We observe that at iteration 7 (resp. 21), the L^∞ -error with $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{D[21]}$) is very close to the one obtained with $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{opt[21]}$) and is smaller than the ones obtained with $\bar{\alpha}_C$. This confirms the relevance of choosing an optimized parameter that depends on the targeted iteration, as pointed out by the analysis. We also notice that, for $N \geq 50$, the curves obtained with $\bar{\alpha}_C$ and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ are almost superimposed, since these Robin parameters are almost the same.

One of the main results of this article is that there is not a single Robin coefficient, independent of the iterations, that optimizes each iteration. Figures 6.3 and 6.4 illustrate this point : the numerical optimum varies according to ℓ ; the parameter α_C , that minimizes the continuous convergence factor (which is independent of the iteration), cannot optimize all iterations, whereas the method presented here allows to find a quite accurate approximation of the numerical optimum parameter, for each iteration ℓ .

6.5.3.2 Choice of an optimized pair $(\ell, \bar{\alpha})$ to reach a given accuracy

In this part, we give an abacus that allows to find an optimized pair $(\ell_A, \bar{\alpha}_{D[\ell_A]})$ to reach a given accuracy, e.g. the expected accuracy of the numerical scheme, or a fraction thereof.

Figure 6.5 shows, for different values of N , the values of $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ as a function of the targeted iteration count ℓ (top left figure), and the associated discrete-time estimate $\|(M(\bar{\alpha}_{D[\ell]}))^{q(\ell)}\|_\infty$ versus iteration ℓ (top right figure), with a zoom on the first iterations (bottom figure). With the cases $N = 20$ and $N = 50$, we see that for $\ell \geq N$ iterations, the discrete-time optimized Robin parameter is 1, as expected from Theorem 6.15. These numerical results also show that, after a few iterations, $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ is a globally increasing function of ℓ , that tends to 1, and a decreasing function of N .

Abacus 6.27 (How to choose ℓ and $\bar{\alpha}$ to reach a given accuracy). *Figure 6.5 allows to find an optimized pair $(\ell, \bar{\alpha}_{D[\ell]})$ to reach a given accuracy, e.g. the expected accuracy of the numerical scheme, or a fraction thereof. More precisely, the top right (or bottom) figure enables, for a given N , to find the minimum number ℓ of iterations one has to perform in order to reach a given error. Then, the top left figure gives the associated Robin parameter $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$.*

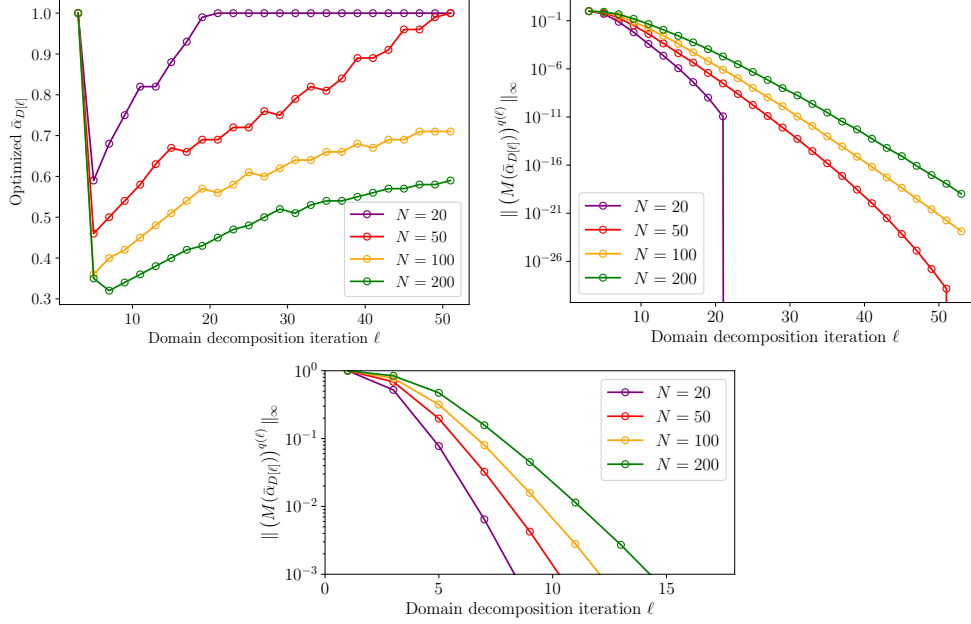


Figure 6.5: Discrete-time optimized Robin parameter $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ (top left) and associated discrete-time convergence estimate $\|(M(\bar{\alpha}_{D[\ell]}))^{q(\ell)}\|_\infty$ (top right), versus OSWR iterations, with a zoom on the first iterations (bottom).

Let us now use the above abacus on an example. We choose f and the values of the boundary and initial conditions so that the continuous solution of (6.1) is given by $u(x, t) = (1 + t + t^2)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$. The relative scheme error (between the fully discrete monodomain solution and the continuous solution) in L^∞ -norm, denoted ε_{sch} , is given in Table 6.2 (first line), for different values of N . For each N , a pair $(\ell_A, \bar{\alpha}_{D[\ell_A]})$ is obtained by Abacus 6.5.3.2 to reach ε_{sch} , and is given in Table 6.2 (last two lines).

N	20	50	100	200
ε_{sch}	3.5×10^{-2}	1.4×10^{-2}	7.1×10^{-3}	3.6×10^{-3}
ℓ_A	7	9	11	13
$\bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$	0.68	0.54	0.45	0.38

Table 6.2: Relative L^∞ -error of the fully discrete numerical scheme on the interface, as a function of N , and associated optimized iteration ℓ_A and $\bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$ given by Abacus 6.5.3.2.

For example, for $N = 200$, if one wants to guarantee a relative L^∞ -error smaller than $\varepsilon_{sch} = 3.6 \times 10^{-3}$, then from Figure 6.5 (top right or bottom) one only needs to perform thirteen iterations ($\ell_A = 13$). Then Figure 6.5 (top left) gives the discrete-time optimized Robin parameter $\bar{\alpha}_{D[\ell_A]} = \bar{\alpha}_{D[13]} = 0.38$.

Then, we choose $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$ in the actual simulation and plot on Figure 6.6 the corresponding relative L^∞ -error (circle) curve as a function of OSWR iterations for the different values of N as well as a horizontal line corresponding to the scheme error (the other two curves of Figure 6.6 are discussed below). Then, we check two important questions. The first is to know whether the actual error reached by choosing $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$ is indeed lower than ε_{sch} after ℓ_A iterations. This is the case, since we observe on Figure 6.6 that the circle located on the vertical dashed line is below the horizontal line. The second is to verify that the proposed value of ℓ_A iterations is equal, or at least close to the overall (whatever the values of $\bar{\alpha}$) minimum value ℓ_{opt} of iterations needed to reach ε_{sch} . This is also the case, since, in the examples that we treated, we found that $\ell_{opt} = \ell_A - 2$. This leads the practitioner to the

following alternative: either one chooses the couple $(\ell_A, \bar{\alpha}_{D[\ell_A]})$ and this leads to a comfortable safety margin that ensures that the additional error due to domain decomposition is negligible with respect to the scheme error, or one chooses in a heuristic way the couple $(\ell_A - 2, \bar{\alpha}_{D[\ell_A - 2]})$ (pink curves on Figure 6.6) and this leads to an error which is lower than the scheme error, close to the best possible error obtained in the optimal number of iterations $((\ell_{opt}, \bar{\alpha}_{opt[\ell_{opt}]})$ cyan curves on Figure 6.6).

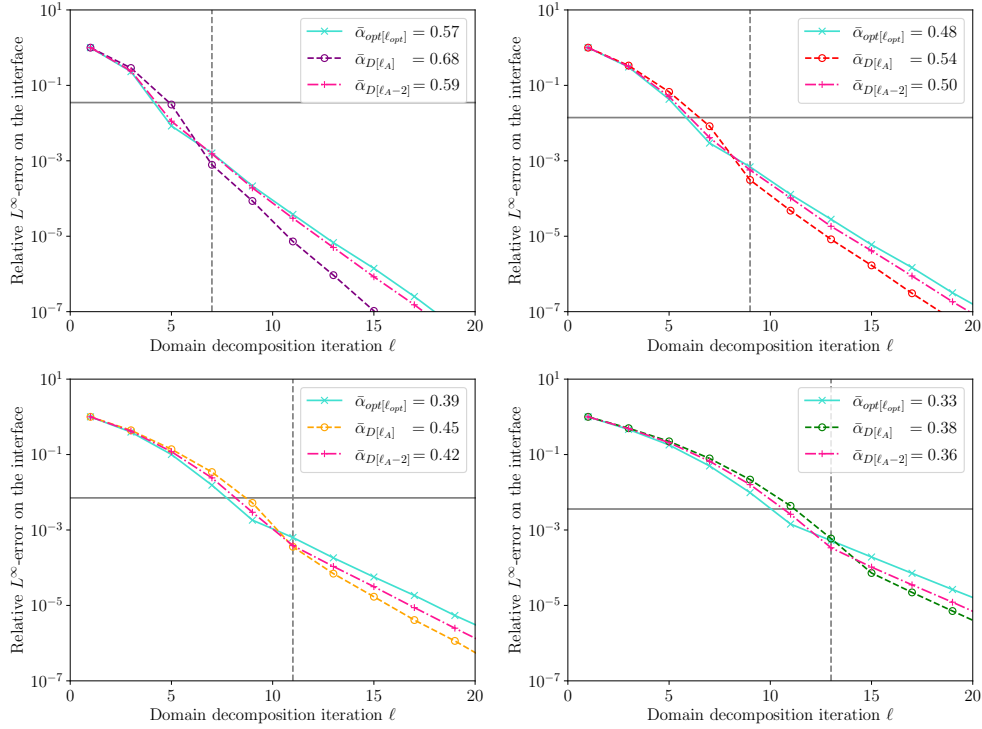


Figure 6.6: Relative L^∞ -error computed with $\bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$ provided by Abacus 6.5.3.2 for $N = 20$ (top left), $N = 50$ (top right), $N = 100$ (bottom left), $N = 200$ (bottom right).

The error curves corresponding to $\bar{\alpha}_{D[\ell_{opt}=\ell_A-2]}$ and $\bar{\alpha}_{opt[\ell_{opt}]}$ are also shown, where ℓ_{opt} is the overall minimum (whatever the values of $\bar{\alpha}$) of iterations needed to reach the error scheme, represented by the horizontal line.

6.5.4 Two-sided optimization

We now consider two-sided Robin parameters (i.e. $\bar{\alpha}_1$ and $\bar{\alpha}_2$ are possibly different), and more precisely the following ones :

- continuous $\bar{\alpha}_C = (\bar{\alpha}_{1,C}, \bar{\alpha}_{2,C})$, defined in (6.13) (independent of the iterations);
- discrete-time $\bar{\alpha}_{D[7]}$ that optimizes iteration 7, defined in (6.38) with $\ell = 7$;
- discrete-time $\bar{\alpha}_{D[21]}$ that optimize iteration 21, defined in (6.38) with $\ell = 21$.

We will compare the convergence obtained with these parameters to that obtained with the actual numerical optimal ones.

On Figure 6.7, we plot the level curves for the relative L^∞ -error (in logarithmic scale) after 7 iterations (left), and 21 iterations (right), for various values of the two-sided Robin parameters $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$, for $N = 100$. The blue star shows the continuous optimized parameter $\bar{\alpha}_C$, the orange triangle shows the discrete-time optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (left figure) and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (right figure). Figure 6.7 allows to find the numerical optimal Robin parameter at iteration ℓ (for $\ell = 7$ and $\ell = 21$), denoted $\bar{\alpha}_{opt[\ell]}$, and represented by the cyan circle, for $N = 100$.

The values of $\bar{\alpha}_C$, $\bar{\alpha}_{opt[7]}$, $\bar{\alpha}_{opt[21]}$, $\bar{\alpha}_{D[7]}$, and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (rounded to the nearest hundredth), versus N , are given in Table 6.3. For $N = 20, 50, 200$, the values of $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ and $\bar{\alpha}_{opt[21]}$ are determined in a similar way to those of the case $N = 100$.

On Figure 6.7 and in Table 6.3, we observe that, at iteration 7 (resp. 21), the discrete-time optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{D[21]}$) is close to the numerical optimal $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{opt[21]}$), and much closer to this optimal value than $\bar{\alpha}_C$.

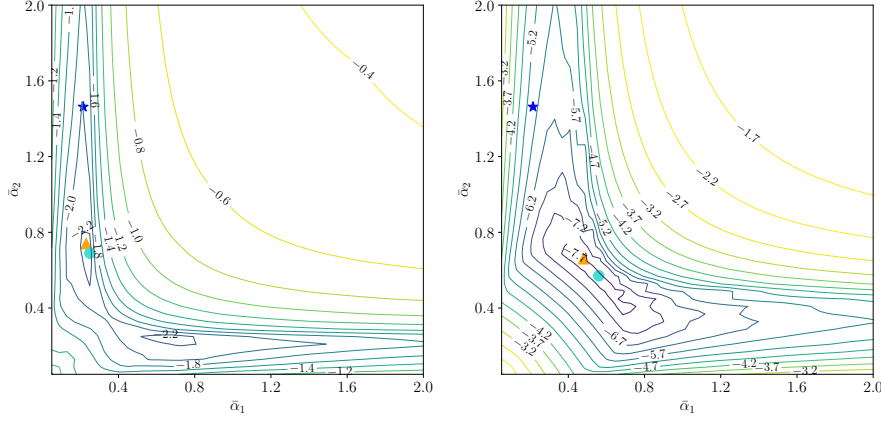


Figure 6.7: Level curves for the relative L^∞ -error (in logarithmic scale) after 7 iterations (left), and 21 iterations (right), for various values of the parameters $\bar{\alpha} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$, for $N = 100$. The blue star shows $\bar{\alpha}_C$, the orange triangle shows $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (left) and $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (right), and the cyan circle shows $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ (left) and $\bar{\alpha}_{opt[21]}$ (right).

N	$\bar{\alpha}_C$	$\bar{\alpha}_{D[7]}$	$\bar{\alpha}_{opt[7]}$	$\bar{\alpha}_{D[21]}$	$\bar{\alpha}_{opt[21]}$
20	(0.56, 1.26)	(0.55, 0.86)	(0.69, 0.70)	(1.00, 1.00)	(1.00, 1.00)
50	(0.30, 1.49)	(0.33, 0.80)	(0.38, 0.74)	(0.68, 0.70)	(0.70, 0.71)
100	(0.21, 1.46)	(0.23, 0.74)	(0.25, 0.69)	(0.48, 0.66)	(0.56, 0.57)
200	(0.17, 1.33)	(0.16, 0.77)	(0.17, 0.77)	(0.30, 0.69)	(0.28, 0.64)

Table 6.3: Dimensionless *two-sided* Robin parameters optimized with continuous and discrete-time analysis, and numerical optimal parameters.

On Figure 6.8 we plot the relative L^∞ -error as a function of OSWR iterations (note the scale change for the top left figure), obtained with these parameters.

As in the one-sided case, we observe that, at iteration 7 (resp. 21), the L^∞ -error with $\bar{\alpha}_{D[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{D[21]}$) is very close to the one obtained with $\bar{\alpha}_{opt[7]}$ (resp. $\bar{\alpha}_{opt[21]}$) and is smaller than the one obtained with $\bar{\alpha}_C$. At iteration 7, the parameter $\bar{\alpha}_C$ is a little less efficient than the discrete-time optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[7]}$. However, for a larger number of iterations (e.g. $\ell = 21$), $\bar{\alpha}_C$ appears to be significantly less efficient than the discrete-time optimized parameter $\bar{\alpha}_{D[21]}$. Again, we observe that the discrete-time optimized Robin coefficients proposed in this article allow to optimize efficiently the L^∞ -error at a targeted iteration.

Moreover, we notice that, the higher the number ℓ of domain decomposition iterations, the less $\bar{\alpha}_{1,D[\ell]}$ and $\bar{\alpha}_{2,D[\ell]}$ differ, as shown on Figure 6.9.

6.5.5 Asymptotic behavior as a function of N

In this part, we present the asymptotic performance as a function of N (or Δt), with continuous and discrete-time optimized parameters. Thus, we take $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$ (to ensure $\Delta x \ll \sqrt{\nu \Delta t}$, see Remark 6.25).

In Figure 6.10 we plot the number ℓ_\star of iterations that it takes to reduce the relative L^∞ -error by a factor 10^{-3} (left figures) and 10^{-6} (right figures), as a function of N , on a log-log plot, in the one-sided case (top figures) and in the two-sided case (bottom figures). On top figures, the blue star curves are obtained with $\bar{\alpha}_C$, and the brown circle curves with $\bar{\alpha}_{D[\ell_A]}$, where $(\ell_A, \bar{\alpha}_{D[\ell_A]})$ is obtained by Abacus 6.5.3.2 to reach 10^{-3} (top left) and 10^{-6} (top right); e.g. for $N = 200$, Abacus 6.5.3.2 gives $\ell_A = 23$ to reach 10^{-6} , then, choosing $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_{D[23]} (= \bar{\alpha}_{D[22]}$ from Definition (6.37)) in the actual simulation, one needs $\ell_\star = 22$ iterations to actually reach the relative accuracy 10^{-6} . We proceed similarly in the two-sided case (bottom figures).

Using that $\Delta t = \frac{T}{N}$, the numerical results show the following asymptotic behaviors :

- $\ell_\star = \mathcal{O}(N^{\frac{1}{4}}) = \mathcal{O}(\Delta t^{-\frac{1}{4}})$ in the one-sided case, both for discrete-time and continuous optimized parameters (as predicted in [50] for the latter);
- $\ell_\star = \mathcal{O}(N^{\frac{1}{8}}) = \mathcal{O}(\Delta t^{-\frac{1}{8}})$ in the two-sided case, both for discrete-time and continuous optimized parameters.

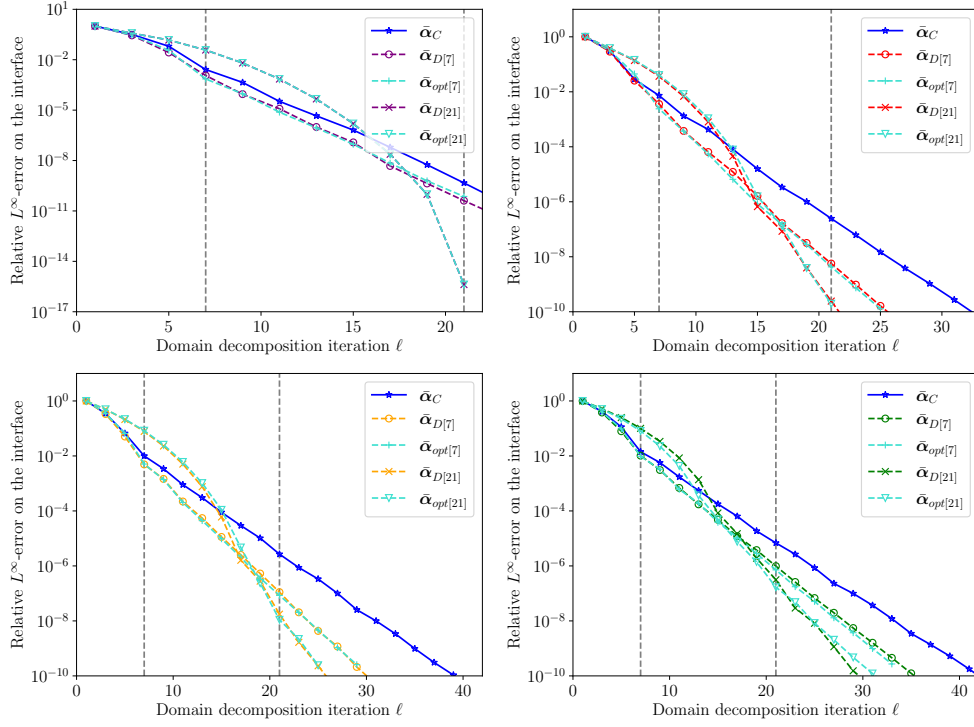


Figure 6.8: Relative L^∞ -error computed with two-sided continuous, discrete-time (optimized at iteration $\ell = 7$ and 21) and numerical optimal (at iteration $\ell = 7$ and 21) Robin parameters, for $N = 20$ (top left), $N = 50$ (top right), $N = 100$ (bottom left), $N = 200$ (bottom right). Note the scale change for the top left figure, as explained in Figure 6.4. Note that, for $N = 20$, since $\alpha_{D[21]}$ and $\alpha_{opt[21]}$ are equal, the associated curves are superimposed.

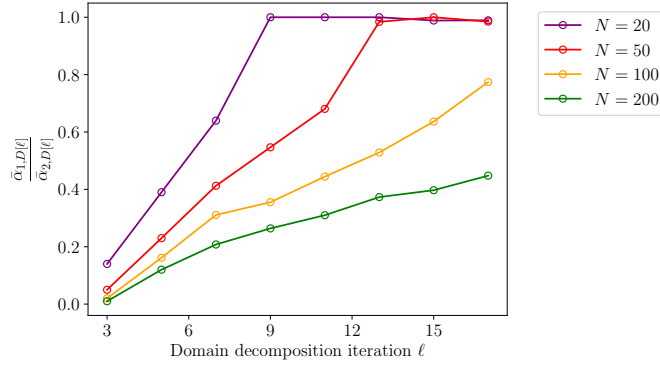


Figure 6.9: Ratio between discrete-time optimized two-sided Robin coefficients.

The curves on Figure 6.10 show that discrete-time and continuous optimized parameters give similar asymptotic behaviors versus N (or Δt), depending only a little on N (or Δt) for one-sided (increasing approximately by a factor 2 when N is multiplied by a factor 16), and almost independent of N (or Δt) for two-sided parameters (increasing approximately by a factor 2 when N is multiplied by a factor 256).

6.5.6 Comparison with $\bar{\alpha}_M$

In this test, we take $N = 100$. Figure 6.11 shows the relative L^∞ -errors as a function of OSWR iterations, obtained with $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{\alpha}_M$ defined in (6.34), compared to those obtained with continuous and discrete-time optimized parameters. Using Remark 6.23, we find $\bar{\alpha}_M = 1$ and $\bar{\alpha}_M = (0.02, 1)$. We observe that, except for the very first iterations, the convergence with $\bar{\alpha}_M$ (left) or $\bar{\alpha}_M$ (right) is much slower than with the other parameters.

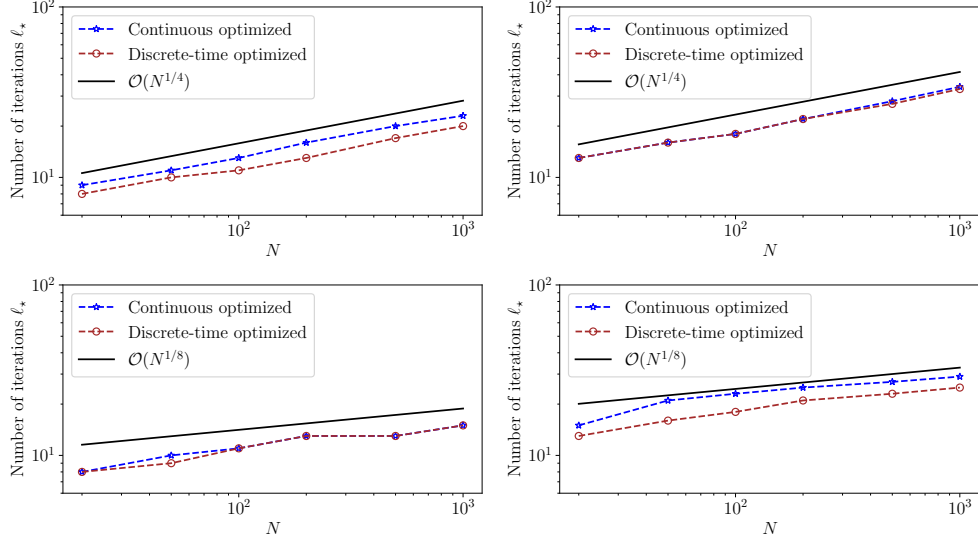


Figure 6.10: Asymptotic behavior : number of iterations ℓ_* to obtain a relative L^∞ -error smaller than 10^{-3} (left figures) and 10^{-6} (right figures), as a function of N , with $\Delta x = 5 \times 10^{-5}$, with continuous and discrete-time optimized parameters, in one-sided (top) and two-sided (bottom) cases.

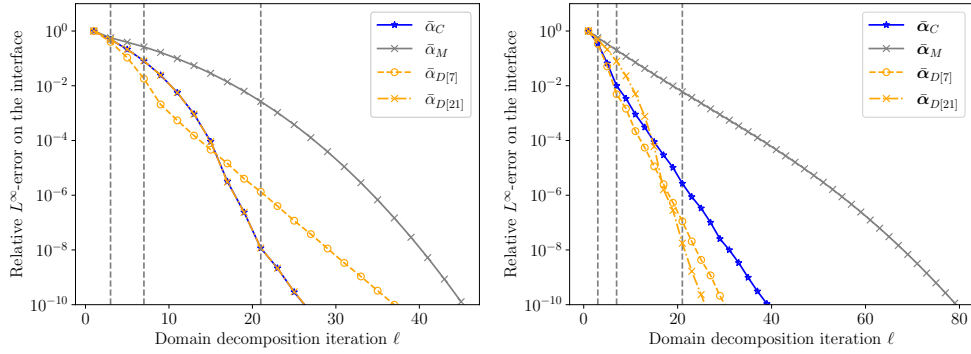


Figure 6.11: Comparison with parameters $\bar{\alpha}_M$ and $\bar{\alpha}_M$: relative L^∞ -errors computed with one-sided optimized parameters $\bar{\alpha}_C$, $\bar{\alpha}_M$, $\bar{\alpha}_{D[7]}$, $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (left), and two-sided optimized parameters $\bar{\alpha}_C$, $\bar{\alpha}_M$, $\bar{\alpha}_{D[7]}$, $\bar{\alpha}_{D[21]}$ (right), for $\nu = 0.05$ and $N = 100$.

Chapitre 7

Extensions de l'analyse discrète en temps de l'algorithme OSWR

Ce chapitre vise à approfondir la méthodologie d'analyse introduite dans le Chapitre 6. Nous explorons deux prolongements. Le premier, abordé dans la Section 7.1, constitue une extension directe du chapitre précédent. Il s'agit d'utiliser l'analyse développée afin d'examiner le comportement de l'algorithme OSWR lorsque la donnée de Robin initiale est déterminée à partir de la condition initiale. La Section 7.2 est consacré à l'analyse discrète en temps de l'algorithme OSWR pour l'équation de la chaleur en dimension deux. Comme dans le Chapitre 6, nous démontrons la convergence de l'algorithme discrétisé en temps ainsi qu'une borne de convergence. Dans ces deux sections, nous proposons une méthodologie pour calculer des paramètres optimisés de Robin, avant de conclure par des résultats numériques illustrant la convergence de l'algorithme et l'efficacité des paramètres choisis.

Sommaire

7.1	Prise en compte de la donnée de Robin initiale à l'interface	127
7.1.1	Analyse	127
7.1.2	Résultats numériques	129
7.2	Analyse discrète en temps pour l'équation de la chaleur 2D	134
7.2.1	Problème modomaine et algorithme OSWR	134
7.2.2	Analyse de l'algorithme	135
7.2.3	Majoration et matrice de convergence	138
7.2.4	Estimation de la norme de l'erreur prenant en compte le maillage	138
7.2.5	Optimisation pratique	140
7.2.6	Résultats numériques	140

7.1 Prise en compte de la donnée de Robin initiale à l'interface

7.1.1 Analyse

Dans l'analyse du Chapitre 6 nous n'avons jamais fait d'hypothèse sur le choix de la donnée de Robin initiale au bord. Ainsi, par souci d'exhaustivité, et pour considérer le cas le « pire » (celui présentant toutes les fréquences temporelles), nous avons, dans les résultats numériques sur l'erreur, choisi une donnée de Robin aléatoire entre 0 et 1. Néanmoins, pour les applications pratiques, il est souvent d'usage de partir d'une fonction constante en temps égale à l'opérateur de Robin \mathcal{B}_i appliqué à la condition initiale, voir par exemple [71, Section 6.2]. Ce choix est pertinent, puisqu'il semble préférable de partir au plus proche de la solution, et pour cela un bon candidat est la solution au temps initial. On observe en pratique une convergence significativement plus rapide qu'avec une donnée de Robin initiale aléatoire, ce que nous vérifierons dans la Section 7.1.2. Dans cette partie, nous cherchons à développer la méthodologie du Chapitre 6 pour une telle donnée de Robin initiale. Cela permet de définir un paramètre de Robin optimisé prenant en compte la donnée de Robin initiale, ce qui, à notre connaissance, n'avait jamais été proposé. Nous observons en pratique, sur divers cas, que le paramètre obtenu est bien une bonne approximation du paramètre optimal pour différentes données de Robin initiales. Nous reprenons dans cette section les notations du Chapitre 6.

Nous souhaitons toujours analyser l'Algorithme discret 8, en explicitant cette fois les données de Robin initiales :

$$\xi_i^0 = \mathcal{B}_i(u_{0,i})(x=0) \quad \text{sur }]0, T[, \quad (7.1)$$

ou, en version discrète en temps, si $U_{0,i} \in (H^2(\Omega))^N$ est le vecteur de taille N dont toutes les composantes sont $u_{0,i}$,

$$\Xi_i^0 = B_i(U_{0,i})(x=0),$$

où les opérateurs \mathcal{B}_u et B_i sont respectivement définis par (6.2) et (6.6).

Nous proposons ici une analyse de l'erreur discrète en temps prenant en compte le choix (7.1) comme première donnée de Robin, et nous en déduisons des paramètres optimisés. Nous nous restreignons au cas *one-sided*, mais le cas *two-sided*, s'obtient de manière similaire.

Théorème 7.1. *Soit $\ell \geq 0$, $i = 1, 2$. Si la donnée de Robin est choisie selon (7.1), et que la solution exacte u est de classe $\mathcal{C}^2([0, T])$ sur l'interface, alors il existe une constante réelle C telle que le vecteur d'erreur à l'interface β_i^ℓ (défini en (6.18)) vérifie, pour des temps T faibles :*

$$\beta_i^{2\ell+1} \underset{T \rightarrow 0}{=} CK_\ell(\bar{\alpha}) + \mathcal{O}(T^2),$$

et donc

$$\|\beta_i^{2\ell+1}\|_\infty \underset{T \rightarrow 0}{=} |C| \|K_\ell(\bar{\alpha})\|_\infty + \mathcal{O}(T^2), \quad (7.2)$$

avec le vecteur $K_\ell(\bar{\alpha}) := (M(\bar{\alpha}))^\ell \left(\bar{\alpha} \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ N \end{pmatrix}$.

Preuve. Soit $i = 1, 2$ et $\ell \geq 0$. Nous repartons de la formule de convergence (6.25b) faisant intervenir la matrice de convergence $M(\bar{\alpha})$

$$\beta_i^{2\ell+1} = (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^1, \quad (7.3)$$

et de la relation entre les vecteurs d'interface et la donnée de Robin à l'interface (6.27a)

$$\beta_i^1 = \left(\bar{\alpha} \mathbf{I}_N + \sqrt{A} \right)^{-1} \bar{G}_i^0. \quad (7.4)$$

Il faut alors estimer \bar{G}_i^0 pour connaître $\beta_i^{2\ell+1}$. Pour cela, la démonstration repose sur un développement limité au voisinage du temps initial. Pour des temps T faibles, la solution du problème (6.1), qui vérifie aussi (6.3), s'écrit sur $]0, T[$, et dans un voisinage de l'interface $\{x=0\}$,

$$u_i(x, t) \underset{T \rightarrow 0}{=} u_i(x, 0) + D(x)t + \mathcal{O}(T^2).$$

Au niveau du problème continu en temps, la donnée de Robin pour l'erreur à l'interface s'écrit, pour tout $t \in]0, T[$,

$$\begin{aligned} g_i^0(t) &:= \mathcal{B}_i(u_{0,i}) - \mathcal{B}_i(u_i(t))(x=0) \\ &= \mathcal{B}_i(u_{0,i} - u_i(t))(x=0) \\ &\underset{T \rightarrow 0}{=} \mathcal{B}_i(u_{0,i} - u_{0,i} - D(x)t)(x=0) + \mathcal{O}(T^2) \\ &\underset{T \rightarrow 0}{=} t \left((-1)^{i+1} \nu \partial_x + \alpha \right) (D)(x=0) + \mathcal{O}(T^2). \end{aligned}$$

On définit alors la constante $\tilde{D} := ((-1)^{i+1} \nu \partial_x + \alpha)(D)(x=0)$, ce qui nous amène à l'expression de la donnée initiale de Robin adimensionnée discrète en temps

$$\bar{G}_i^0 = \tilde{D} \Delta t \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} (1, 2, \dots, N)^T. \quad (7.5)$$

Finalement, en combinant les relations (7.3), (7.4) et (7.5), on obtient le résultat annoncé par le théorème, où la constante C vaut $\tilde{D} \Delta t \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}}$. \square

Nous connaissons désormais une estimation de l'erreur à l'interface. Pour minimiser l'erreur de l'algorithme, nous sommes donc amenés à définir le paramètre de Robin de la manière suivante :

$$\bar{\alpha}_{I[\ell]} := \operatorname{argmin}_{\alpha \in]0,1]} \|K_\ell(\bar{\alpha})\|_\infty. \quad (7.6)$$

Le calcul de ce paramètre est alors réalisé selon la méthodologie décrite dans la Section 6.4.5, avec un coût de calcul semblable.

7.1.2 Résultats numériques

On reprend le cadre des résultats du Chapitre 6, Section 6.5, avec un domaine $\Omega = [0, 1]$, un maillage uniforme de pas $\Delta x = 10^{-3}$. Le temps final T variera, et le pas de temps est $\Delta t = T/N$, avec N lui aussi variable. La diffusion considérée est $\nu = 0.05$. Pour la décomposition de domaine, l'interface est placée en $\{x = 1/2\}$. La différence majeure est que nous ne travaillons plus sur le problème sur l'erreur, mais sur le véritable problème (6.11), dans trois différents cas de solutions exactes $u(x, t)$ régulières. Cela définit $u_0(x, t) = u(x, 0)$, et $f(x, t) = (\partial_t - \nu \partial_{xx})u(x, t)$. L'algorithme OSWR est alors initialisé, constant en temps, avec $\xi_i^0 = \mathcal{B}_i(u_{0,i})$.

Nous souhaitons vérifier que l'estimation de l'erreur à l'interface (7.2) donne une bonne estimation du paramètre optimal, et donc que le paramètre optimisé discret (7.6) est une estimation proche du paramètre optimal. Pour cela, nous traçons sur les Figures 7.2 à 7.5, l'erreur (i.e. la norme $L^\infty(]0, T])$ à l'interface de la différence entre la solution obtenue à l'itération ℓ et la solution monodomaine, divisée par l'erreur $L^\infty(]0, T])$ de la solution modomaine à l'interface) obtenue aux itérations 7 et 21 en fonction de $\bar{\alpha}$, et nous superposons la courbe $\bar{\alpha} \mapsto \|K_\ell(\bar{\alpha})\|_\infty/N$ (l'adimensionnement par N est uniquement pour la lisibilité, la majoration étant de toute façon à une constante près). Nous superposons aussi la courbe de l'erreur, obtenue avec une condition initiale et un terme source nuls, en partant d'une donnée de Robin $g_i^0(t) = t$. En effet, c'est cette erreur que l'on étudie dans cette analyse, et que l'on souhaite minimiser. Les courbes suivantes montrent qu'il s'agit en effet d'une bonne estimation de l'erreur dans un vrai cas test, où la donnée de Robin est choisie à partir de la condition initiale. Enfin, le triangle indique la position du paramètre optimisé discret (7.6), et l'étoile celui du paramètre optimisé continu (6.13), qui ne prend en compte ni le nombre de pas de temps, ni le choix de la donnée de Robin initial. Les valeurs des paramètres optimisés sont reprises dans le Tableau 7.1.

N	$\bar{\alpha}_C$	$\bar{\alpha}_{D[7]}$	$\bar{\alpha}_{D[21]}$
20	0.84	0.59	1.00
50	0.67	0.38	0.62
100	0.56	0.27	0.53
200	0.47	0.19	0.41

TABLE 7.1 : Paramètres de Robin adimensionnés continus et discrets en temps prenant en compte les données de Robin initiales.

7.1.2.1 Sinus en temps

On considère dans ce cas la solution exacte $u(x, t) = \sin(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$. Tout d'abord, on observe effectivement sur la Figure 7.1 que la convergence peut être beaucoup plus rapide en partant d'une donnée de Robin calculée à partir de la condition initiale, surtout à l'itération 7. Néanmoins, on observe aussi que pour certains paramètres de Robin, l'erreur peut être légèrement moins bonne. Aussi, il semble pertinent de partir d'une donnée de Robin calculée à partir de la condition initiale, mais il est alors nécessaire de choisir un paramètre de Robin adapté.

On observe sur la Figure 7.2 que l'estimation (7.2) est très proche de la vraie courbe de l'erreur en fonction de $\bar{\alpha}$, ce qui montre que la relation (7.2) est une bonne estimation de l'erreur obtenue en pratique. Par ailleurs, le paramètre optimisé discret donne une bonne approximation de l'optimum numérique.

Pour la démonstration du théorème, nous faisons l'hypothèse que la dépendance en temps est de la forme $u_0 + Ct$. Ce développement de Taylor est plausible pour des temps faibles, mais il semble, sur la Figure 7.3, que même pour des temps élevés ($T = 5$), les résultats obtenus soient, eux aussi, précis. Bien que cela sorte du cadre du théorème et que l'estimation soit ici *a priori* plus grossière, le paramètre (7.6) reste un très bon choix de paramètre de Robin, même si le temps final T est élevé. De

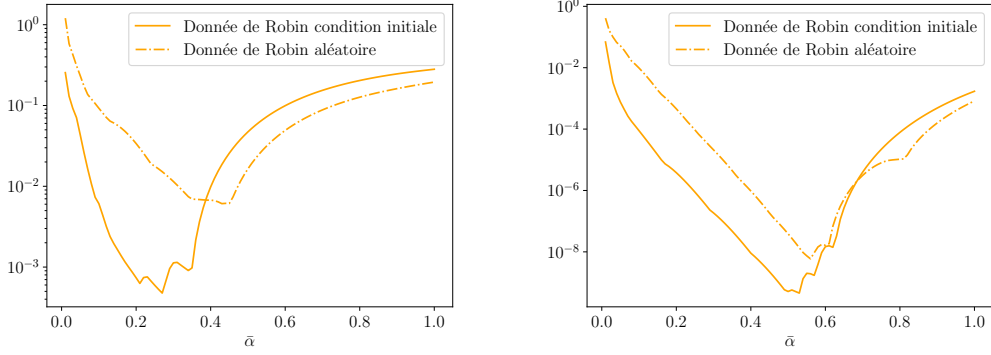


FIGURE 7.1 : Comparaison de l'erreur $L^\infty([0, T])$ relative à l'interface en fonction de $\bar{\alpha}$, obtenue en partant d'une donnée de Robin calculée à partir de la condition initiale ou aléatoire, aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite), avec $N = 100$, pour $T = 1$, pour la solution sinusoïdale en temps $u(x, t) = \sin(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$.

manière plus générale, il est courant pour l'algorithme OSWR de se ramener à des fenêtres en temps de petite taille, voir par exemple [71, Section 6.2], et de faire converger l'algorithme fenêtre temporelle après fenêtre temporelle. Dans ce cas, l'hypothèse de temps faible est plus pertinente.

7.1.2.2 Cosinus en temps et $1 + t + t^2$

Avec la solution exacte prise, sous forme de sinus en temps, nous avons bel et bien, pour des temps courts, une solution exacte de la forme $u_0 + Ct$. Mais que se passe-t-il si la solution exacte n'a pas de terme à l'ordre 1, comme avec un cosinus en temps ? Ou si le terme à l'ordre 2 n'est plus négligeable au temps final, comme avec une solution de la forme $1 + t + t^2$? Nous traçons les résultats obtenus pour ces deux propositions au temps final $T = 1$. Nous ne présentons que les résultats avec $N = 100$, mais les résultats avec les autres nombres de pas de temps sont similaires.

Nous observons à nouveau sur les Figures 7.4 (qui est obtenue pour une solution exacte donnée par $u(x, t) = \cos(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$) et 7.5 (qui est obtenue pour une solution exacte donnée par $u(x, t) = (1 + t + t^2)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$), que le paramètre optimisé discret est proche du paramètre optimal numérique. Ainsi, le paramètre optimisé discret (7.6) semble prendre efficacement en compte la donnée de Robin à l'interface initiale dans un certain nombre de cas.

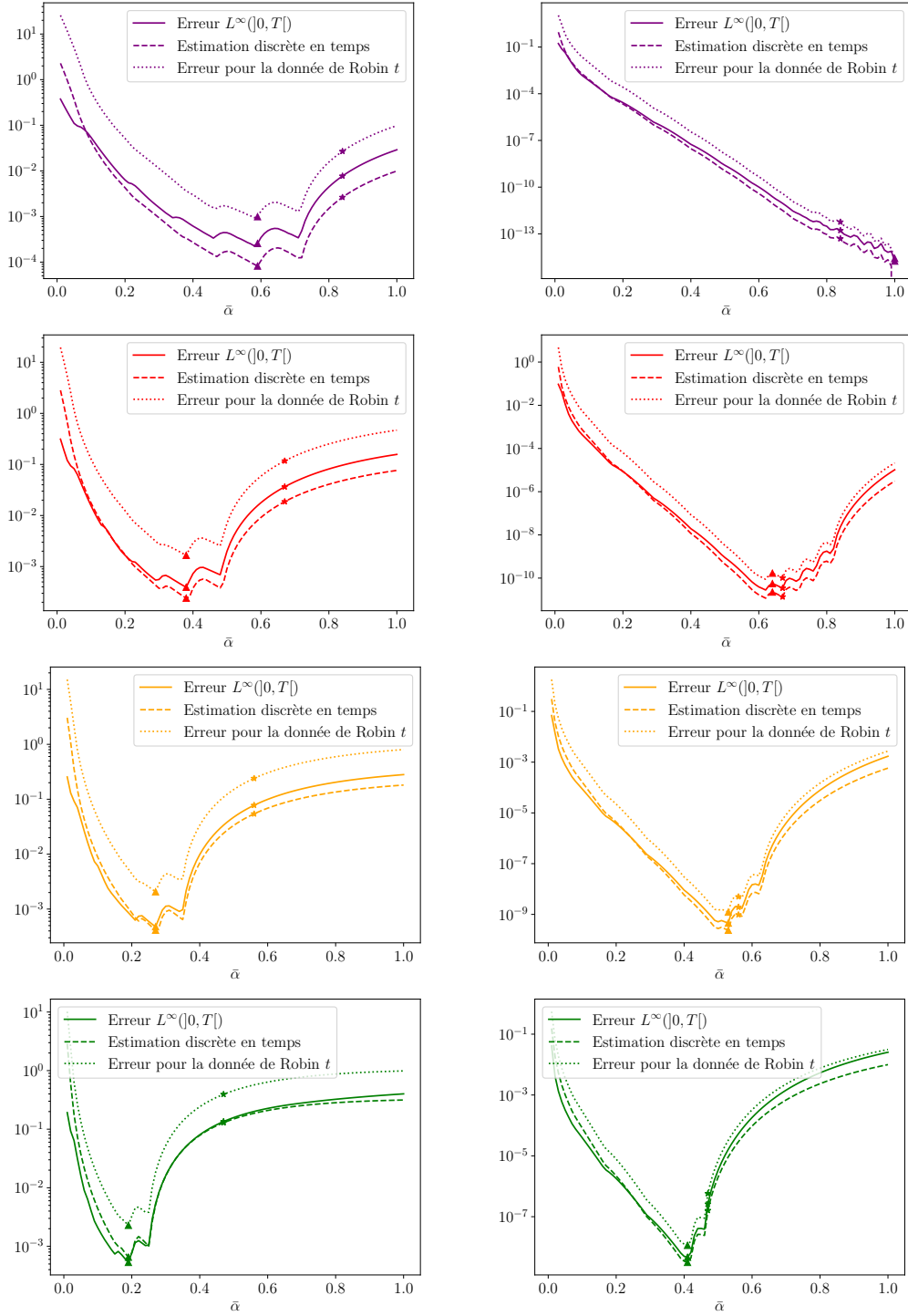


FIGURE 7.2 : Erreur $L^\infty([0, T])$ relative en fonction de $\bar{\alpha}$ aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite), avec, de haut en bas $N = 20$, $N = 50$, $N = 100$, $N = 200$, pour $T = 1$, pour la solution en sinusoïdale en temps $u(x, t) = \sin(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$.

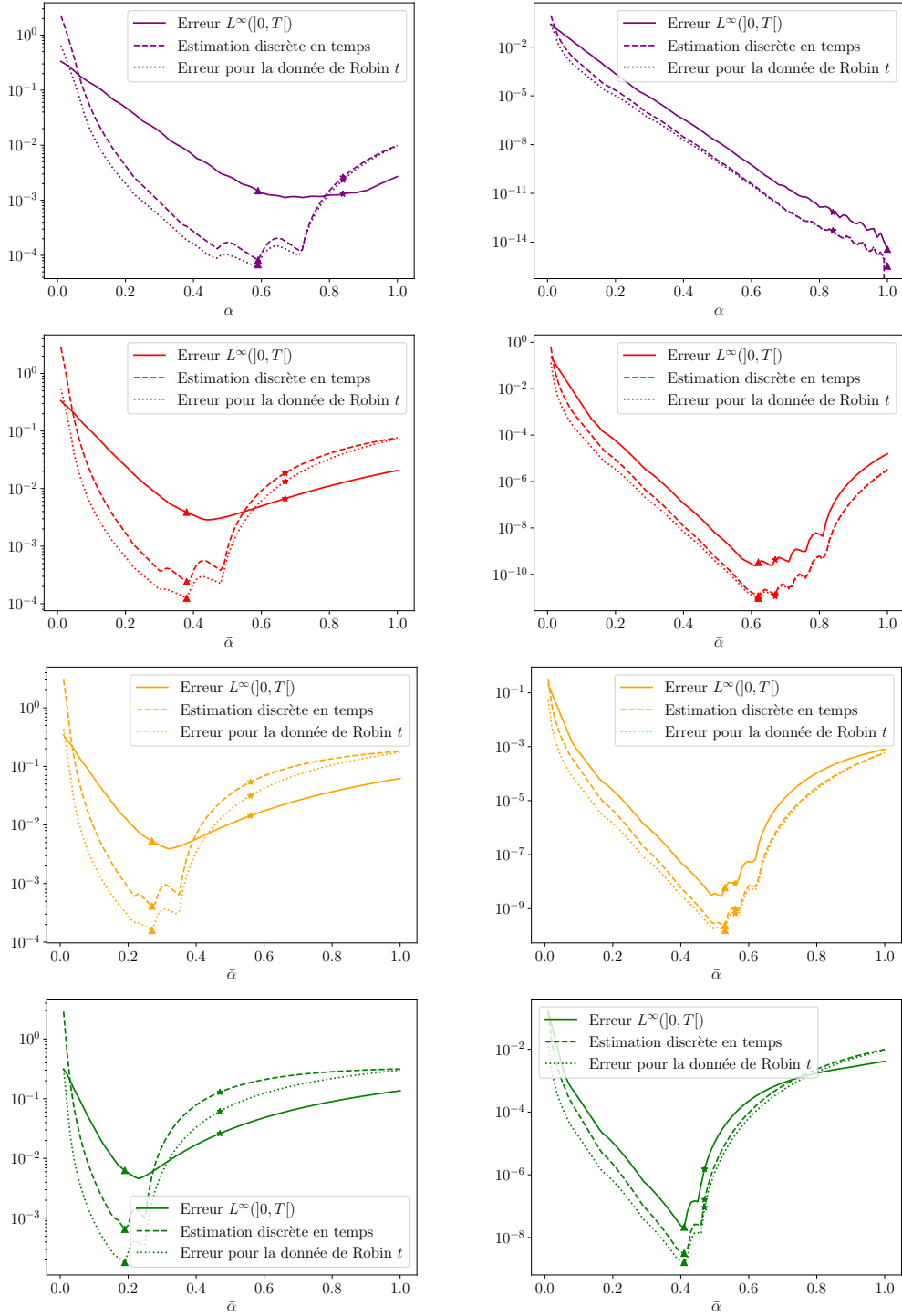


FIGURE 7.3 : Erreur $L^\infty([0, T])$ relative en fonction de $\bar{\alpha}$ aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite), avec, de haut en bas $N = 20, N = 50, N = 100, N = 200$, pour $T = 5$, pour la solution sinusoïdale en temps $u(x, t) = \sin(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$.

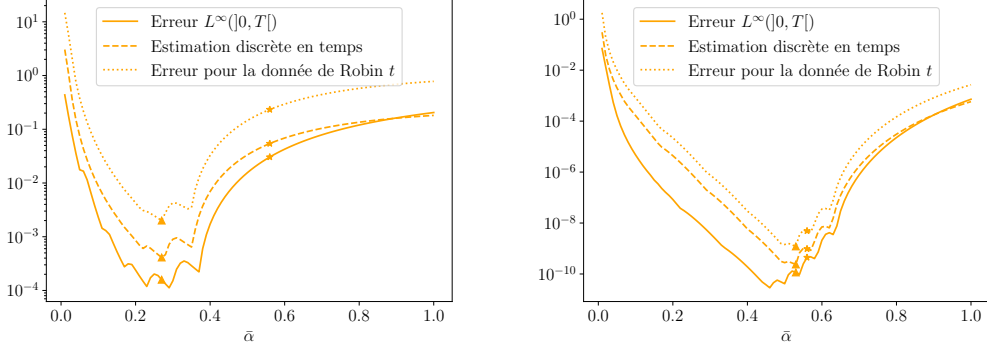


FIGURE 7.4 : Erreur $L^\infty([0, T])$ relative en fonction de $\bar{\alpha}$ aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite), avec $N = 100$, pour $T = 1$, pour la solution en cosinus en temps $u(x, t) = \cos(\pi t)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$.

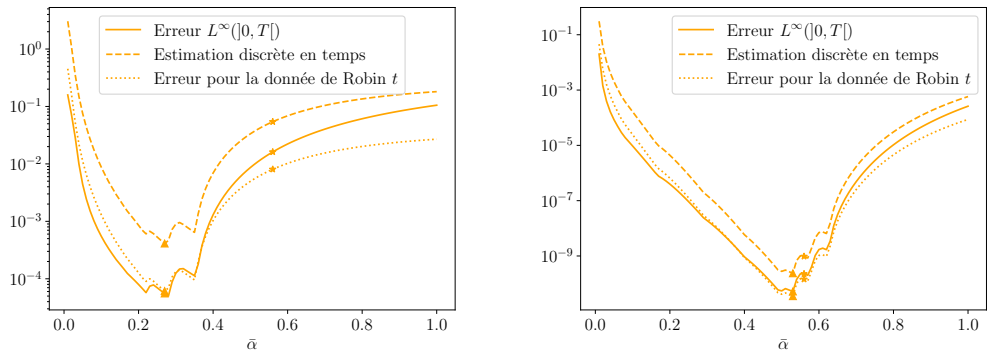


FIGURE 7.5 : Erreur $L^\infty([0, T])$ relative en fonction de $\bar{\alpha}$, aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite), avec $N = 100$, pour $T = 1$, pour la solution quadratique en temps $u(x, t) = (1 + t + t^2)(\sin(\pi x) + \cos(\pi x))$.

7.2 Analyse discrète en temps pour l'équation de la chaleur 2D

7.2.1 Problème modomaine et algorithme OSWR

Dans cette section, nous nous intéressons à l'équation de la chaleur bidimensionnelle, posée sur le domaine $\Omega = \mathbb{R} \times]0, Y[$ (avec $Y > 0$)

$$\mathcal{L}u := \partial_t u - \nu \partial_{xx} u - \nu \partial_{yy} u = f \quad \text{dans } \Omega \times]0, T[, \quad (7.7a)$$

$$u(t = 0) = u_0 \quad \text{sur } \Omega, \quad (7.7b)$$

$$u = u_D^- \quad \text{sur } \{y = 0\} \times]0, T[, \quad (7.7c)$$

$$u = u_D^+ \quad \text{sur } \{y = Y\} \times]0, T[, \quad (7.7d)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u^\ell(x, \cdot, \cdot) \quad \text{est bornée,} \quad (7.7e)$$

avec f un terme source, u_0 une condition initiale, u_D^- et u_D^+ deux conditions de Dirichlet aux bords bas et haut respectivement, et ν un coefficient de diffusion, strictement positif.

En vue d'introduire l'algorithme de décomposition de domaine, nous partitionnons le domaine $\bar{\Omega}$ en deux sous-domaines $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, où $\Omega_1 := \mathbb{R}^- \times]0, Y[$, $\Omega_2 := \mathbb{R}^+ \times]0, Y[$. L'interface Γ entre les deux sous-domaines est en $\{x = 0\}$. La Figure 7.6 illustre ce découpage en sous-domaines.

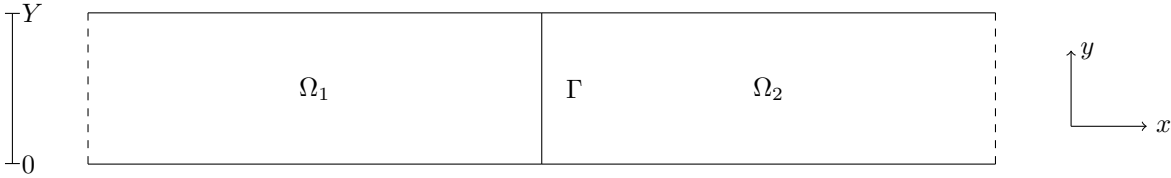


FIGURE 7.6 : Schéma de la décomposition en sous-domaines.

Ce problème se réécrit de manière équivalente en deux sous-problèmes, définis sur Ω_1 et Ω_2 , avec, pour $i = 1, 2$, $f_i = f|_{\Omega_i}$, $u_i = u|_{\Omega_i}$, $u_{0,i} = u_0|_{\Omega_i}$, $u_{D_i}^- = u_D^-|_{\partial\Omega_i \cap \{y=0\}}$ et $u_{D_i}^+ = u_D^+|_{\partial\Omega_i \cap \{y=Y\}}$:

$$\mathcal{L}u_1 = f_1 \quad \text{dans } \Omega_1 \times]0, T[, \quad \mathcal{L}u_2 = f_2 \quad \text{dans } \Omega_2 \times]0, T[, \quad (7.8a)$$

$$u_1(t = 0) = u_{0,1} \quad \text{dans } \Omega_1, \quad u_2(t = 0) = u_{0,2} \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (7.8b)$$

$$u_1 = u_{D_1}^- \quad \text{sur } \{y = 0\} \times]0, T[, \quad u_2 = u_{D_2}^- \quad \text{sur } \{y = 0\} \times]0, T[, \quad (7.8c)$$

$$u_1 = u_{D_1}^+ \quad \text{sur } \{y = Y\} \times]0, T[, \quad u_2 = u_{D_2}^+ \quad \text{sur } \{y = Y\} \times]0, T[, \quad (7.8d)$$

$$\mathcal{B}_1 u_1 = \mathcal{B}_1 u_2 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \quad \mathcal{B}_2 u_2 = \mathcal{B}_2 u_1 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \quad (7.8e)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u_1(x, \cdot, \cdot) \quad \text{est bornée,} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2(x, \cdot, \cdot) \quad \text{est bornée,} \quad (7.8f)$$

où $\mathcal{B}_i : u \mapsto ((-1)^{i+1} \nu \partial_x + \alpha_i)u$.

Pour résoudre ce problème couplé, on introduit l'Algorithme OSWR 9.

Algorithme 9 (OSWR pour le problème de la chaleur 2D continu en temps)

Choisir des données de Robin initiales $\xi_1^0, \xi_2^0 \in L^2([0, T[, L^2(\Gamma))$, et poser $\mathcal{B}_1 u_2^0 := \xi_2^0$, $\mathcal{B}_2 u_1^0 := \xi_1^0$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

Résoudre les deux problèmes sur chacun des sous-domaines

$$\begin{array}{llll} \mathcal{L}u_1^\ell = f_1 & \text{dans } \Omega_1 \times]0, T[, & \mathcal{L}u_2^\ell = f_2 & \text{dans } \Omega_2 \times]0, T[, \\ u_1^\ell(t = 0) = u_{0,1} & \text{dans } \Omega_1, & u_2^\ell(t = 0) = u_{0,2} & \text{dans } \Omega_2, \\ u_1^\ell = u_{D_1}^- & \text{sur } \{y = 0\} \times]0, T[, & u_2^\ell = u_{D_2}^- & \text{sur } \{y = 0\} \times]0, T[, \\ u_1^\ell = u_{D_1}^+ & \text{sur } \{y = Y\} \times]0, T[, & u_2^\ell = u_{D_2}^+ & \text{sur } \{y = Y\} \times]0, T[, \\ \mathcal{B}_1 u_1^\ell = \mathcal{B}_1 u_2^{\ell-1} & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, & \mathcal{B}_2 u_2^\ell = \mathcal{B}_2 u_1^{\ell-1} & \text{sur } \Gamma \times]0, T[, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u_1^\ell(x, \cdot, \cdot) & \text{est bornée,} & \lim_{x \rightarrow +\infty} u_2^\ell(x, \cdot, \cdot) & \text{est bornée.} \end{array}$$

fin pour

Pour l'analyse de la convergence de l'algorithme OSWR, on étudie l'erreur introduite par la méthode. En pratique, par linéarité, cela revient à analyser le problème où $u_0 = 0$, $f = 0$, et $u_D^\pm = 0$. Pour $i = 1, 2$, on note $e_i^\ell := u_i^\ell - u_i$, la solution de l'algorithme OSWR sur l'erreur.

Nous souhaitons analyser le problème non pas continu en temps, mais discrétisé avec le schéma d'Euler implicite, de manière similaire à la méthodologie développée dans le Chapitre 6.

Dans chacun des sous-domaines, on introduit un schéma numérique en temps d'Euler implicite, de pas de temps Δt . L'équation aux dérivées partielles (7.8a) se réécrit donc, pour $i = 1, 2$, à chaque itération de décomposition de domaine $\ell \in \mathbb{N}^*$, et à chaque pas de temps $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

$$\frac{e_{i,n}^\ell - e_{i,n-1}^\ell}{\Delta t} - \nu \partial_{xx} e_{i,n}^\ell - \nu \partial_{yy} e_{i,n}^\ell = 0, \quad (7.9)$$

où $e_{i,n}^\ell$ est une approximation de $e_i^\ell(t = n\Delta t)$, et $e_{i,0}^\ell = 0$.

L'algorithme (9), une fois discrétisé en temps avec la formule (7.9), se réécrit sous la forme suivante.

Algorithme 10 (OSWR sur l'erreur pour le problème de la chaleur 2D discret en temps)

Choisir des données de Robin initiales $G_1^0, G_2^0 \in (L^2(\Gamma))^N$, et poser $B_1 E_2^0 := G_1^0$, $B_2 E_2^0 := G_2^0$.

pour $\ell = 1, 2, \dots$ **faire**

 Résoudre les deux problèmes sur chacun des sous-domaines

$$L E_1^\ell = 0_N \quad \text{dans } \Omega_1, \quad L E_2^\ell = 0_N \quad \text{dans } \Omega_2, \quad (7.10a)$$

$$E_1^\ell = 0_N \quad \text{sur } \{y = 0\}, \quad E_2^\ell = 0_N \quad \text{sur } \{y = 0\}, \quad (7.10b)$$

$$E_1^\ell = 0_N \quad \text{sur } \{y = Y\}, \quad E_2^\ell = 0_N \quad \text{sur } \{y = Y\}, \quad (7.10c)$$

$$B_1 E_1^\ell = B_1 E_2^{\ell-1} \quad \text{sur } \Gamma, \quad B_2 E_2^\ell = B_2 E_1^{\ell-1} \quad \text{sur } \Gamma, \quad (7.10d)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} E_1^\ell(x, \cdot) \quad \text{est bornée}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} E_2^\ell(x, \cdot) \quad \text{est bornée}. \quad (7.10e)$$

fin pour

L'opérateur différentiel vectoriel $L : (H^2(\Omega_i))^N \rightarrow (L^2(\Omega_i))^N$ est l'équivalent discret en temps de \mathcal{L} , et est tel que $LE := \frac{1}{\nu \Delta t} AE - \partial_{xx} E - \partial_{yy} E$, où la matrice A est définie par (6.5), et, pour $i = 1, 2$, $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$,

- $(E_i^\ell)_n = e_{i,n}^\ell$, pour $\ell \geq 1$,
- B_i , l'extension de l'opérateur \mathcal{B}_i au vecteur de $(H^2(\Omega_i))^N$.

7.2.2 Analyse de l'algorithme

Pour montrer la convergence, nous commençons par déterminer la forme générale des solutions obtenue par séparation de variables dans chacun des sous domaines, et une relation qui lie ces solutions grâce aux relations sur l'interface Γ .

Remarque 7.2. *Nous cherchons ici des solutions par séparation de variable. Pour que l'ensemble des solutions obtenues soit représentatif, il faut pouvoir décomposer les données de Robin initial $B_i E_j^0$ dans une base de Fourier ne contenant que des modes sinusoïdaux, afin de pouvoir vérifier les conditions limites en haut et en bas du domaine. Cela est possible si les données de Dirichlet au bord haut et bas sont homogènes, ou bien si l'on a une compatibilité entre les quantités de Robin initiales sur l'interface et la trace de Robin des données u_D^- et u_D^+ au bord haut et bas.*

Lemme 7.3. Soit $\ell \geq 1$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le vecteur

$$E_i^{\ell,k}(x, y) := \sin\left(\frac{k\pi y}{Y}\right) e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu\Delta t}} \sqrt{A(\lambda_k)}} \beta_i^{\ell,k} \quad \forall (x, y) \in \Omega_i, \quad i = 1, 2, \quad (7.11)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles de (7.10a), (7.10b), (7.10c), et (7.10e), avec, pour chaque mode spatial $\lambda_k := \left(\frac{k\pi}{Y}\right)^2$, la matrice

$$A(\lambda_k) := \begin{pmatrix} 1 + \nu\Delta t\lambda_k & & & & \\ & -1 & 1 + \nu\Delta t\lambda_k & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 1 + \nu\Delta t\lambda_k \end{pmatrix},$$

et un vecteur $\beta_i^{\ell,k} \in \mathbb{R}^N$.

En outre, l'application des conditions limites (7.10d) permet de trouver la relation

$$\beta_i^{2\ell+1,k} = (M(\bar{\alpha}, \lambda_k))^\ell \beta_i^{1,k}, \quad (7.12a)$$

$$\beta_i^{2\ell+2,k} = (M(\bar{\alpha}, \lambda_k))^\ell \beta_i^{2,k}, \quad (7.12b)$$

où la matrice de convergence $M(\bar{\alpha}, \lambda_k)$ est donnée, pour $i = 1, 2$, $j = 3 - i$, $k \in \mathbb{Z}$ par

$$M(\bar{\alpha}, \lambda_k) := \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A(\lambda_k)}\right)^{-1} \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N - \sqrt{A(\lambda_k)}\right) \left(\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N + \sqrt{A(\lambda_k)}\right)^{-1} \left(\bar{\alpha}_j \mathbf{I}_N - \sqrt{A(\lambda_k)}\right).$$

Preuve. On regarde un sous-domaine Ω_i , et on omet l'indice i pour simplifier. On cherche E une solution de (7.10) sur l'erreur par la méthode de séparation des variables, i.e. sous la forme :

$$E(x, y) = g(y)\mathbf{f}(x),$$

où g est une fonction scalaire continue, et \mathbf{f} une fonction continue à valeur dans \mathbb{R}^N . Ainsi, toutes les composantes de E ont la même dépendance y . On injecte cette expression dans l'équation aux dérivées partielles (7.10a), et l'on en prend le produit scalaire avec $\mathbf{f}(x)$:

$$\frac{g(y)}{\nu\Delta t} A\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x) - g(y)\mathbf{f}''(x) \cdot \mathbf{f}(x) - g''(y)\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x) = 0.$$

Alors, puisque \mathbf{f} est continue, si \mathbf{f} n'est pas identiquement nulle, on peut trouver un intervalle \mathcal{T} tel que $\int_{\mathcal{T}} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x) \neq 0$, et alors, en intégrant l'égalité précédente sur \mathcal{T} , on a

$$g(y) \frac{1}{\int_{\mathcal{T}} \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x)} \left(\int_{\mathcal{T}} \frac{A\mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{f}(x)}{\nu\Delta t} - \mathbf{f}''(x) \cdot \mathbf{f}(x) \right) - g''(y) = 0,$$

ce qui montre qu'il existe une constante λ , indépendant de y , telle que

$$\lambda g(y) - g''(y) = 0.$$

Si λ était positif, les conditions limites en $y = 0$ et $y = Y$ impliqueraient que $g = 0$. On en déduit que $\lambda < 0$, puis, que

$$g(y) = a \cos(\sqrt{-\lambda}y) + b \sin(\sqrt{-\lambda}y).$$

Les conditions limites en $Y = 0$ et $Y = L$ (7.10b) et (7.10c) imposent que

$$g(y) = b \sin(\sqrt{-\lambda}y),$$

où $\sqrt{-\lambda} = \frac{k\pi}{Y}$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On a alors $\frac{g''(y)}{g(y)} = -\left(\frac{k\pi}{Y}\right)^2 =: -\lambda_k$, et l'on peut injecter cette expression dans (7.10a) pour obtenir l'équation,

$$\frac{1}{\nu\Delta t} A\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}''(x) + \lambda_k \mathbf{f}(x) = 0,$$

et donc,

$$\frac{1}{\nu\Delta t} A(\lambda_k)\mathbf{f}(x) - \mathbf{f}''(x) = 0.$$

La preuve reprend ensuite le même cheminement que la preuve du Théorème 6.13 dans l'Annexe A, à la différence que la matrice $A(\lambda_k)$ replace la matrice A . Mais dans ce cas aussi, $A(\lambda_k)$ admet une racine carrée (c'est une conséquence du Corollaire 6.9), et est inversible (car c'est une matrice triangulaire à coefficients diagonaux strictement positifs), et donc $\sqrt{A(\lambda_k)}$ aussi. Pour l'application des conditions limites (qui permet d'annihiler l'exponentielle $+|x|\sqrt{A(\lambda_k)}$), on remarque que $A(\lambda_k)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $1 + \nu\Delta t \left(\frac{k\pi}{Y}\right)^2$ et donc que $\sqrt{A(\lambda_k)}$ est aussi triangulaire à coefficient diagonaux égaux à $\sqrt{1 + \nu\Delta t \left(\frac{k\pi}{Y}\right)^2} > 0$.

L'obtention de la relation (7.12a) est tout à fait similaire à la démonstration de (6.25b) du cas unidimensionnel, en injectant les solutions obtenues dans chaque sous-domaine (7.11) dans les conditions à l'interface (7.10d). \square

On peut désormais démontrer la convergence de l'algorithme dans la norme suivante, donnée, pour $U \in (L^2(\Omega_i))^N$, par

$$\|U\|_{\mathbf{L}^{\infty,2}(\Omega_i)} := \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} (\|U_j\|_{L^2(\Omega_i)}).$$

Remarque 7.4. Pour la résolution numérique, sur un maillage du domaine, seul un nombre fini de modes dans la direction y seront présents, N_y , s'il y a N_y mailles dans cette direction sur l'interface. Nous ferons donc ici l'hypothèse, qui sera vérifiée en pratique dans les simulations numériques, que la donnée de Robin initiale sur l'erreur est de la forme $G_i^0(y) = \sum_{k=1}^{N_y} \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) G_i^{0,k}$ avec $(G_i^{0,k})_k \in \mathbb{R}^{N_y}$. Alors, la solution de (7.10) qui résulte de cette donnée initiale s'écrit, pour $\ell \geq 1$, $i = 1, 2$:

$$E_i^\ell = \sum_{k=1}^{N_y} E_i^{\ell,k} \quad \text{dans } \Omega_i,$$

où $E_i^{\ell,k}$ est de la forme donnée par (7.11) avec $\beta_i^{\ell,k}$ obtenu par la condition de Robin $G_i^{0,k}$. Plus précisément, on obtient en 2D la même relation que (6.27b) en obtenue en 1D, où $\beta_i^{1,k}$ est déterminé par $\beta_i^{1,k} = \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A(\lambda_k)} \right)^{-1} G_i^{0,k}$.

Théorème 7.5 (Convergence de l'algorithme OSWR). Soit $\bar{\alpha}_i > 0$, $i = 1, 2$. Si les données de Robin initiales sont de la forme

$$G_i^0(y) = \sum_{k=1}^{N_y} \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) G_i^{0,k}, \quad (7.13)$$

avec $(G_i^{0,k})_k \in \mathbb{R}^{N_y}$, alors, la suite de solutions de l'algorithme sur l'erreur (7.10) $(E_1^\ell, E_2^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ converge vers 0_N dans $(\mathbf{H}^1(\Omega_1) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega_1)) \times (\mathbf{H}^1(\Omega_2) \cap \mathbf{L}^\infty(\Omega_2))$.

Preuve. On se place sous l'hypothèse de la décomposition de la donnée de Robin sur l'erreur de la forme $G_i^0(y) = \sum_{k=1}^{N_y} \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) G_i^{0,k}$. Fixons alors une fréquence λ_k , $k \in \llbracket 1, N_y \rrbracket$, la convergence mode par mode entraînant la convergence globale.

$A(\lambda_k)$ est une matrice triangulaire dont l'unique coefficient diagonal est $1 + \nu\Delta t \lambda_k$. Ainsi, $\sqrt{A(\lambda_k)}$ l'est aussi, avec $\sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}$ sur la diagonale. Chaque bloc $\left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N \pm \sqrt{A(\lambda_k)} \right)$ est donc une matrice triangulaire avec $\bar{\alpha}_i \pm \sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}$ sur la diagonale. La matrice $M(\bar{\alpha}, \lambda_k)$ est donc une matrice triangulaire avec pour coefficient diagonal

$$\sigma_k := \left(\frac{\bar{\alpha}_1 - \sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}}{\bar{\alpha}_1 + \sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}} \right) \left(\frac{\bar{\alpha}_2 - \sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}}{\bar{\alpha}_2 + \sqrt{1 + \nu\Delta t \lambda_k}} \right).$$

Ainsi, puisque $\bar{\alpha}_i > 0$, $i = 1, 2$, $|\sigma_k| < 1$, et donc le rayon spectral de $M(\bar{\alpha}, \lambda_k)$ est strictement plus petit que 1. On en déduit que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} (M(\bar{\alpha}, \lambda_k))^\ell = 0_{N,N}$, puis, que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(\beta_i^{\ell,k} \right) = 0_N$, et enfin, que $\lim_{\ell \rightarrow \infty} \left(E_i^{\ell,k} \right) = 0_N$. \square

7.2.3 Majoration et matrice de convergence

Afin d'optimiser l'algorithme, nous allons calculer une borne de la norme de l'erreur, ce qui donnera une quantité à minimiser. Pour les simulations numériques, le problème sera posé sur les domaines bornés $\Omega_1 = [-L, 0] \times [0, Y]$, $\Omega_2 = [0, L] \times [0, Y]$, ce que nous considérerons pour la suite. Nous pouvons alors donner une borne de la norme de l'erreur.

Proposition 7.6. *La norme de l'erreur vérifie, pour $i = 1, 2$, $\ell \geq 0$,*

$$\|E_i^{2\ell+1}\|_{\mathbf{L}^{\infty,2}(\Omega_i)} \leq \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} \sqrt{\frac{Y}{2}} \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} \left(\sqrt{\int_{x=0}^L \sum_{k=1}^{N_y} \left(\sum_{n=1}^N \left| (D_i^{\ell,k}(\bar{\alpha}, x))_{j,n} \right| \right)^2 \|G_i^{0,k}\|_{\infty}^2 dx} \right),$$

$$\text{avec } D_i^{\ell,k}(\bar{\alpha}, x) := e^{-\frac{|x|}{\sqrt{\nu \Delta t}}} \sqrt{A(\lambda_k)} M^{\ell}(\bar{\alpha}, \lambda_k) \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A(\lambda_k)} \right)^{-1}.$$

Preuve. Par définition de la norme de $E_i^{2\ell+1}$

$$\|E_i^{2\ell+1}\|_{\mathbf{L}^{\infty,2}(\Omega_i)} = \max_{j \in \llbracket 1, N \rrbracket} \|(E_i^{2\ell+1})_j\|_{L^2(\Omega_i)},$$

avec, par définition de $D_i^{\ell,k}$, et en notant $G_{i,n}^{0,k}$ la n -ième composante du vecteur $G_i^{0,k}$,

$$(E_i^{2\ell+1})_j = \sqrt{\frac{\Delta t}{\nu}} \sum_{k=1}^{N_y} \sin\left(\frac{k\pi}{Y} y\right) \sum_{n=1}^N \left(D_i^{\ell,k}(\bar{\alpha}, x) \right)_{j,n} G_{i,n}^{0,k}.$$

Aussi, puisque la famille $(\sin(\frac{k\pi}{Y} y))_{k \in \llbracket 1, N_y \rrbracket}$ est orthogonale dans $L^2(]0, Y[)$, et de norme $\sqrt{\frac{Y}{2}}$, alors

$$\begin{aligned} \|(E_i^{2\ell+1})_j\|_{L^2(\Omega_i)}^2 &= \frac{\Delta t}{\nu} \int_{\Omega_i} ((E_i^{2\ell+1})_j)^2 dx dy \\ &= \frac{\Delta t}{\nu} \frac{Y}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^{N_y} \left(\sum_{n=1}^N \left(D_i^{\ell,k}(\bar{\alpha}, x) \right)_{j,n} G_{i,n}^{0,k} \right)^2 dx \\ &\leq \frac{\Delta t}{\nu} \frac{Y}{2} \int_0^L \sum_{k=1}^{N_y} \left(\sum_{n=1}^N \left| \left(D_i^{\ell,k}(\bar{\alpha}, x) \right)_{j,n} \right| \right)^2 \|G_i^{0,k}\|_{\infty}^2 dx. \quad \square \end{aligned}$$

7.2.4 Estimation de la norme de l'erreur prenant en compte le maillage

L'estimation de la Proposition 7.6 donne en pratique de mauvais résultats pour le choix du paramètre optimisé. Pour pallier cela, nous avons mis en place deux corrections qualitatives, prenant en compte le maillage, et qui donnent *in fine* une bonne approximation du paramètre de Robin optimal numérique.

7.2.4.1 Norme des $G_i^{0,k}$

Bien que la famille des $(G_{i,n}^0)_{n \in \llbracket 1, N \rrbracket}$ des composantes du vecteur G_i^0 prise en pratique dans l'algorithme suive une loi aléatoire entre 0 et 1, les coefficients de Fourier associés $G_{i,n}^{0,k}$ suivent une loi dépendant de k .

Proposition 7.7. *Soit $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Si la donnée de Robin initiale sur l'erreur donnée par (7.13) est telle que $G_{i,n}^0$ est de classe $\mathcal{C}^3(]0, Y[)$, alors il existe une constante C telle que*

$$G_{i,n}^{0,k} \underset{k \rightarrow \infty}{=} \frac{C}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{k^3}\right),$$

où la constante dépend de la donnée de Robin $G_{i,n}^0$ et de ses dérivées, mais est indépendante de k .

Preuve. On prolonge la donnée de Robin $G_{i,n}^0$ par $y \mapsto -G_{i,n}^0$ sur $] -Y, 0[$, en conservant la notation. Ainsi, la fonction ainsi définie est impaire et élément de $L^2(] -Y, Y[)$, elle est donc égale à sa série de

Fourier sur $] -Y, Y[$, et celle-ci ne contient que des modes $\sin\left(\frac{2k\pi}{2Y}y\right)$. Soit $k \in \llbracket 1, N_y \rrbracket$, $i = 1, 2$. En écrivant la définition du k -ième coefficient de Fourier de $(G_{i,n}^0)_n$, on obtient

$$G_{i,n}^{0,k} = \frac{2}{2Y} \int_{-Y}^Y \sin\left(\frac{2k\pi}{2Y}y\right) G_{i,n}^0(y) dy = \frac{2}{Y} \int_0^Y \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) G_{i,n}^0(y) dy.$$

Puis, en intégrant par parties trois fois successivement, on trouve,

$$\begin{aligned} \frac{Y}{2} G_{i,n}^{0,k} &= \int_0^Y G_{i,n}^0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) dy \\ &= -\frac{Y}{k\pi} \left[G_{i,n}^0(y) \cos\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \right]_0^Y + \left(\frac{Y}{k\pi}\right)^2 \left[\partial_y G_{i,n}^0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \right]_0^Y \\ &\quad - \left(\frac{Y}{k\pi}\right)^3 \left[\partial_{yy} G_{i,n}^0(y) \cos\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \right]_0^Y + \left(\frac{Y}{k\pi}\right)^3 \int_0^Y \partial_{yyy} G_{i,n}^0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) dy. \end{aligned}$$

Or, $\int_0^Y \partial_{yyy} G_{i,n}^0(y) \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) dy = \mathcal{O}(1)$, ce qui amène au résultat. \square

Ainsi, les modes k sont principalement pondérés d'un facteur $1/k$, ce qui nous utiliserons dans la suite pour le calcul des paramètres de Robin optimisés. L'absence de terme à l'ordre 2 légitime davantage ce choix, puisque que même pour des modes k relativement faible, le terme d'ordre 1 sera dominant sur celui d'ordre 3.

7.2.4.2 Correction des fréquences de Fourier numériques

En pratique, sur un maillage dans la direction y , la dérivée seconde numérique n'a pas un comportement semblable pour tous les modes pris en compte. La solution continue pour la composante spatiale y est $g(y) = \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right)$, dont la dérivée seconde est $g''(y) = -\left(\frac{k\pi}{Y}\right)^2 g(y) = -\lambda_k g(y)$. Voyons ce qu'il en est pour la solution numérique.

Prenons l'exemple d'un schéma différences finies centré à trois points pour la discrétisation de la dérivée seconde en y , de pas d'espace Δy .

$$\begin{aligned} g''(y) &\underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\Delta y^2} (g(y + \Delta y) - 2g(y) + g(y - \Delta y)) \\ &\underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\Delta y^2} \left(\sin\left(\frac{k\pi}{Y}(y + \Delta y)\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{Y}(y - \Delta y)\right) \right) \\ &\underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\Delta y^2} \left(2\sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \cos\left(\frac{k\pi}{Y}\Delta y\right) - 2\sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \right) \\ &\underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{\Delta y^2} \sin\left(\frac{k\pi}{Y}y\right) \left(\cos\left(\frac{k\pi}{Y}\Delta y\right) - 1 \right) \\ &\underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} -\frac{4}{\Delta y^2} g(y) \left(\sin\left(\frac{k\pi}{2Y}\Delta y\right) \right)^2. \end{aligned}$$

Cela nous permet de nous rendre compte que pour avoir $g''(y) \underset{\Delta y \rightarrow 0}{\sim} \lambda_k^{\Delta y} g(y)$ dans une solution numérique, il faut prendre une version discrète des modes de Fourier.

Modification numérique 7.8. En pratique, les fréquences de Fourier à prendre en compte dans la matrice $D_i^{\ell,k}$ dans la Proposition 7.6, pour un maillage avec $\Delta y = Y/N_y$, sont

$$\lambda_k^{\Delta y} := \left(\frac{2 \sin\left(\frac{k\pi}{2N_y}\right)}{\Delta y} \right)^2.$$

7.2.5 Optimisation pratique

Afin d'obtenir des coefficients optimisés, nous allons donc minimiser la norme de l'erreur $E_i^{2\ell+1}$ avec les modifications proposées. Cela nous amène à définir un paramètre de Robin optimisé discret par

$$\bar{\alpha}_{i,D}[\ell] := \operatorname{argmin}_{\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^{+*}} \max_{j \in [1, N]} \left(\sum_{s=1}^{N_x} \sum_{k=1}^{N_y} \frac{1}{k^2} \left| \sum_{n=1}^N \left(e^{-\frac{x_s}{\sqrt{\nu \Delta t}} \sqrt{A(\lambda_k^{\Delta y})}} M^\ell(\bar{\alpha}, \lambda_k^{\Delta y}) \right) \left(\bar{\alpha}_i \mathbf{I}_N + \sqrt{A(\lambda_k)} \right)^{-1} \right|_{j,n}^2 \right),$$

avec le vecteur des composantes dans la direction x donné par $(x_s)_{s \in [1, N_x]}$ où $x_s = \frac{sL}{N_x}$ et N_x le nombre de mailles dans la direction x .

Remarque 7.9. Pour l'analyse 1D de l'équation de la chaleur, la norme considérée était la norme $L^\infty([0, T], L^\infty(\Omega_i))$. Une norme plus naturelle à considérer est $L^2(\Omega_i)$ en espace, qui est la norme considérée ici pour l'équation en 2D, et qui nous permet de tirer profit de la base de Fourier. En 1D, cela était en réalité « presque » équivalent. En effet, la solution était de la forme

$$E_i^{2\ell+1}(x) = e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu \Delta t}}} (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^1.$$

On a donc, d'une part,

$$\|E_i^{2\ell+1}\|_{L^\infty([0, T], L^\infty(\Omega_i))} \leq \| (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^1 \|_\infty,$$

et d'autre part,

$$\|E_i^{2\ell+1}\|_{L^\infty([0, T], L^2(\Omega_i))} \leq \|e^{\frac{-|x|}{\sqrt{\nu \Delta t}}}\|_{L^2([-L, L])} \| (M(\bar{\alpha}))^\ell \beta_i^1 \|_\infty.$$

Ainsi, l'ordre des deux normes ne diffèrent que d'une constante indépendante de $\bar{\alpha}$: $\left\| \exp\left(\frac{-|x|}{\sqrt{\nu \Delta t}}\right) \right\|_{L^2([-L, L])}$, ce qui donne le même paramètre de Robin optimisé discret.

7.2.6 Résultats numériques

L'objectif de cette section est de vérifier l'adéquation entre les résultats théoriques et la convergence observée en pratique dans un code entièrement discrétisé. Pour cela, nous utilisons un code FREEFEM++ qui résout l'équation de la chaleur dans le domaine $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ sur la fenêtre temporelle $[0, 1]$. Les pas d'espace dans les directions x et y sont similaires, de l'ordre de 4.10^{-2} , et le pas de temps $\Delta t = \frac{1}{N}$ variera avec N selon les cas. Le coefficient de diffusion sera pris égale à $\nu = 0.05$.

Pour la décomposition de domaine, nous introduirons une interface verticale Γ en $\{x = \frac{1}{2}\}$. Puisque nous nous intéressons au problème sur l'erreur, on aura alors $u_0 = 0$, $u_D = 0$ et $f = 0$, de telle sorte que nous imposons des conditions de Dirichlet homogène sur tout le contour du domaine. En outre, nous ne présentons que le cas *one-sided* où $\bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_2$.

7.2.6.1 Estimation de la borne de la convergence

Tout d'abord, nous souhaitons illustrer l'estimation de la Proposition 7.6, en prenant en compte les deux modifications proposées dans les corrections proposées dans la Section 7.2.4. Nous traçons donc sur une même figure cette estimation et la norme $L^\infty([0, T])$ de l'erreur à l'interface obtenue par le code entièrement discrétisé, divisée par l'erreur $L^\infty([0, T])$ à l'interface de la solution obtenu à la première itération de décomposition de domaine, au cours des itérations de décomposition de domaine. Nous observons ainsi, sur la Figure 7.7, que bien que les deux courbes diffèrent durant les premières itérations de décomposition de domaines, elles ont un comportement similaire sur les itérations élevées.

7.2.6.2 Efficacité des paramètres optimisés

Nous souhaitons vérifier que les paramètres optimisés sont proches des optimums obtenus en pratique dans la simulation numérique. On calcule donc l'erreur selon $\bar{\alpha}$ pour $\bar{\alpha} \in [0, 2]^1$, et on trace les courbes obtenues aux itérations 7 et 21 sur la Figure 7.8. On place aussi sur ces mêmes courbes les paramètres obtenus avec différentes méthodes :

- le paramètre continu $\bar{\alpha}_C$ est représenté par une étoile,

¹Contrairement au cas unidimensionnel, certains paramètres optimisés se sont avérés être légèrement plus grands que 1, nous ne nous limitons donc plus au cas $\bar{\alpha} \in [0, 1]$.

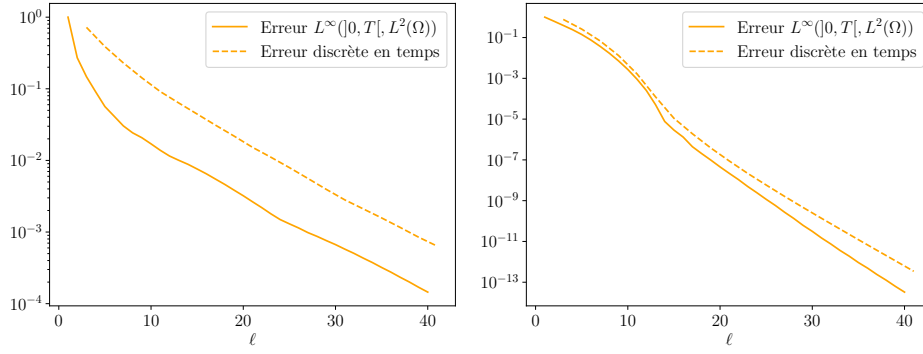


FIGURE 7.7 : Comparaison entre l'estimation discrète en temps et l'erreur obtenue au cours des itérations par le code entièrement discrétisé, pour $N = 100$ et $\bar{\alpha} = 0.1$ (gauche) et $\bar{\alpha} = 0.5$ (droite).

- le paramètre discret $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ est représenté par un triangle.

Le tableau suivant reprend les valeurs des paramètres optimisés utilisés dans les figures.

N	$\bar{\alpha}_C$	$\bar{\alpha}_{D[7]}$	$\bar{\alpha}_{D[21]}$
20	1.04	0.69	1.08
50	0.70	0.46	0.75
100	0.59	0.34	0.56
200	0.49	0.24	0.44

TABLE 7.2 : Coefficients de Robin optimisés.

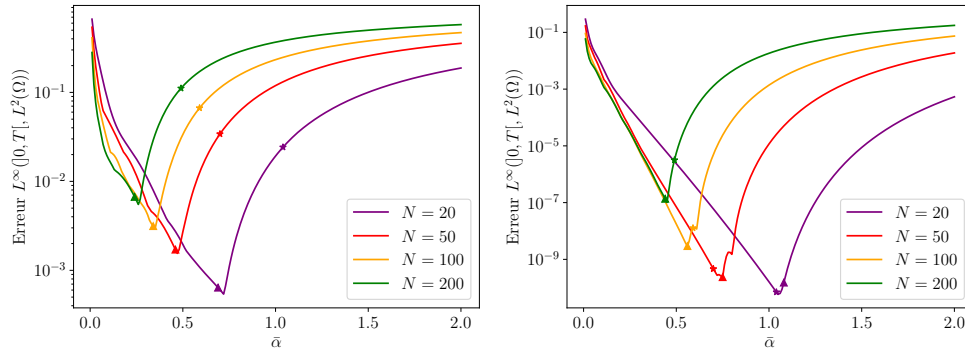


FIGURE 7.8 : Erreur relative $L^\infty([0, T], L^2(\Omega))$ à l'interface de la solution entièrement discrétisée en fonction de $\bar{\alpha}$ à l'itération 7 (gauche) et 21 (droite).

On observe sur la Figure 7.8 que les valeurs obtenues par l'analyse discrète en temps sont véritablement proches des optimaux numériques obtenus par le code entièrement discrétisé. Le paramètre optimal numérique montre bien une évolution selon ℓ , qui est bien suivie par le paramètre $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$, quant le paramètre $\bar{\alpha}_C$ est constant et ne peut donc pas être optimisé à chacune des itérations.

7.2.6.3 Vérification de la pertinence des modifications

Dans la Section 7.2.4.1, nous avons montré que chaque mode k devait être pondéré d'un facteur $1/k$ dans leur contribution à la solution générale. Dans la Section 7.2.4.2, nous avons proposé de remplacer λ_k par $\lambda_k^{\Delta y}$, de façon à être plus proche d'une réalité numérique. Nous vérifions dans ce paragraphe l'utilité de ces deux corrections sur deux exemples. Nous reprenons les graphes de l'erreur en fonction de $\bar{\alpha}$ dans deux cas, et nous rajoutons :

- un rond à la position du paramètre optimisé sans le facteur $1/k$,
- un carré à la position du paramètre optimisé avec λ_k à la place de $\lambda_k^{\Delta y}$.

N	α_C	Itération 7			Itération 21		
		$\alpha_{D[7]}$	avec λ_k	sans $1/k$	$\alpha_{D[21]}$	avec λ_k	sans $1/k$
20	1.04	0.69	0.74	0.74	1.08	1.19	1.12
100	0.59	0.34	0.37	0.36	0.56	0.59	0.59

TABLE 7.3 : Coefficients de Robin optimisés avec et sans corrections.

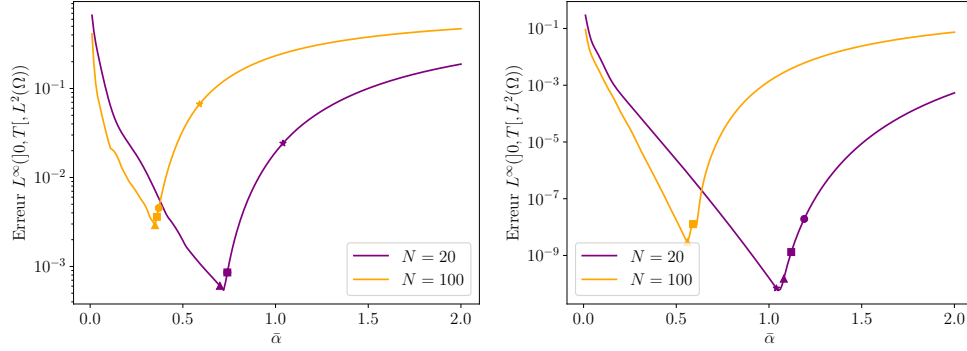


FIGURE 7.9 : Erreur relative $L^\infty([0, T])$ de la solution entièrement discrétisée en fonction de $\bar{\alpha}$ aux itérations 7 (gauche) et 21 (droite) pour $N = 100$. Le triangle représente le paramètre $\bar{\alpha}_{D[7]}$ ou $\bar{\alpha}_{D[21]}$, l'étoile, $\bar{\alpha}_C$, le carré pour le paramètre optimisé discret avec λ_k , et enfin, le rond pour le paramètre optimisé discret sans la pondération $1/k$.

On observe dans ces deux cas que, sans les corrections proposées, les coefficients optimisés ne suivent pas aussi bien les minimums que le coefficient $\bar{\alpha}_{D[\ell]}$ que nous proposons, ce qui confirme l'intérêt de ces modifications. Il est intéressant de remarquer que pour un nombre de pas de temps élevé, $N = 100$, les coefficients optimisés avec et sans les corrections sont très proches. Ainsi, les corrections semblent avoir moins d'influence pour un grand nombre de pas de temps, mais être nécessaires pour un faible nombre de pas de temps.

Annexe A

Appendix : Solution to a second-order vector equation

This appendice gives the proof of Theorem 6.13.

Proof. Let us first consider the problem in Ω_1 in (6.15) : find U such that

$$\begin{aligned} LU &= 0 && \text{in } \Omega_1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} U(x) &&& \text{is bounded.} \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

From Proposition 6.12 and Equation (6.7), the matrix $C := \frac{1}{\sqrt{\nu\Delta t}}\sqrt{A}$ is lower triangular, invertible, with all its diagonal coefficients equal to $\frac{1}{\sqrt{\nu\Delta t}} > 0$.

Setting $Z := \begin{pmatrix} U' \\ U \end{pmatrix}$, $\chi := U'(x=0)$, $\Psi := U(x=0)$, and $M := \begin{pmatrix} 0 & C^2 \\ I & 0 \end{pmatrix}$, then problem (A.1) can be written into the equivalent first order differential system

$$\begin{aligned} Z' &= MZ && \text{in } (-\infty, 0), \\ Z(x=0) &= (\chi, \Psi)^T, \\ Z &\text{ is bounded in } (-\infty, 0). \end{aligned}$$

The solution of the above problem is given by

$$Z(x) = e^{xM} \begin{pmatrix} \chi \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$

Using that $M^2 = \begin{pmatrix} C^2 & 0 \\ 0 & C^2 \end{pmatrix}$, by induction we have $M^{2k} = \begin{pmatrix} C^{2k} & 0 \\ 0 & C^{2k} \end{pmatrix}$ and $M^{2k+1} = \begin{pmatrix} 0 & C^{2k+2} \\ C^{2k} & 0 \end{pmatrix}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, and thus

$$\begin{aligned} e^{xM} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} M^{2k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} M^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{2k!} \begin{pmatrix} C^{2k} & 0 \\ 0 & C^{2k} \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} 0 & C^{2k+1}C \\ C^{2k+1}C^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(xC) & 0 \\ 0 & \text{ch}(xC) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \text{sh}(xC)C \\ \text{sh}(xC)C^{-1} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{ch}(xC) & \text{sh}(xC)C \\ \text{sh}(xC)C^{-1} & \text{ch}(xC) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Then we have, $\forall x \in (-\infty, 0)$,

$$\begin{pmatrix} U'(x) \\ U(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ch}(xC) & \text{sh}(xC)C \\ \text{sh}(xC)C^{-1} & \text{ch}(xC) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

from which we obtain, $\forall x \in (-\infty, 0)$,

$$U(x) = \text{sh}(xC)C^{-1}\chi + \text{ch}(xC)\Psi.$$

The solutions of the system can therefore be written as follows

$$U(x) = e^{x^C} \beta^+ + e^{-x^C} \beta^-, \quad (\text{A.2})$$

where $\beta^+ \in \mathbb{R}^N$ and $\beta^- \in \mathbb{R}^N$ will be determined using the boundary conditions.

More precisely, let us show that the condition U is bounded in $(-\infty, 0)$ implies that $\beta^- = 0_N$. We set

$$\mathcal{E}(x) := \exp(-x^C) \beta^-. \quad (\text{A.3})$$

Since C is lower triangular, so are the sums and multiples of C . Coming back to the definition of the exponential of a matrix (with power series), we deduce that $\exp(-x^C)$ is a lower triangular matrix whose diagonal is only composed of the exponential of $-\frac{x}{\sqrt{\nu\Delta t}}$. Thus, the first line of (A.3) gives $(\mathcal{E}(x))_1 = e^{-\frac{x}{\sqrt{\nu\Delta t}}}(\beta^-)_1$, with $\frac{1}{\sqrt{\nu\Delta t}} > 0$. Since U (and thus \mathcal{E}) is bounded as x tends to $-\infty$, we deduce that $(\beta^-)_1 = 0$. Then, the second line of (A.3) gives $(\beta^-)_2 = 0$, and by induction we obtain $\beta^- = 0_N$. Thus, the solutions of (A.1) are of the form $U(x) = e^{x^C} \beta^+$, with $\beta^+ \in \mathbb{R}^N$. The problem in Ω_2 is treated similarly to that in Ω_1 , by using a change of variables, which end the proof of Theorem 6.13. \square

Annexe B

Annexe : Nullité d'un champ vectoriel à partir de ses projections normale et tangentielle

Lemme B.1. Soit Γ une partie connexe de la frontière d'un domaine lipschitzien. Soit $\eta \neq 0$ et $\mathbf{u} \in (L^2(\Gamma))^2$, tel que, pour tout $\mathbf{v} \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma))^2$, on a

$$\int_{\Gamma} \left(\eta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{n})(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \right) = 0,$$

où \mathbf{n} désigne la normale de Γ . Alors, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ presque partout sur Γ .

Preuve. Soit $\mathbf{v} \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma))^2$. Introduisons $u_x, u_y \in L^2(\Gamma)$, $v_x, v_y \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, $n_x, n_y \in L^2(\Gamma)$ tels que $\mathbf{u} = (u_x, u_y)^T$ et $\mathbf{v} = (v_x, v_y)^T$ et $\mathbf{n} = (n_x, n_y)^T$, où $n_x^2 + n_y^2 = 1$. Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \left(\eta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) + (\mathbf{u} \times \mathbf{n})(\mathbf{v} \times \mathbf{n}) \right) \\ &= \int_{\Gamma} \left(\eta(u_x n_x + u_y n_y)(v_x n_x + v_y n_y) + (u_x n_y - u_y n_x)(v_x n_y - v_y n_x) \right) \\ &= \int_{\Gamma} \left(v_x(\eta u_x n_x^2 + \eta u_y n_x n_y + u_x n_y^2 - u_y n_x n_y) + v_y(\eta u_x n_x n_y + \eta u_y n_y^2 - u_x n_x n_y + u_y n_x^2) \right). \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $v_x, v_y \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, on a donc l'égalité, dans $H_{00}^{-1/2}(\Gamma)$,

$$\begin{aligned} (\eta n_x^2 + n_y^2)u_x + (n_x n_y)(\eta - 1)u_y &= 0, \\ (n_x n_y)(\eta - 1)u_x + (\eta n_y^2 + n_x^2)u_y &= 0, \end{aligned}$$

et par densité de $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ dans $L^2(\Gamma)$, ces égalités restent vraies dans $L^2(\Gamma)$. Le déterminant du système (homogène) précédent étant η , qui est non nul par hypothèse, on en déduit que l'unique solution est $u_x = u_y = 0$ presque partout sur Γ . \square

Conclusions et perspectives

Cette thèse a permis le développement des algorithmes de parallélisation OSWR et Pararéel pour des modèles en mécanique des fluides incompressibles, tout en approfondissant la compréhension de l'algorithme OSWR discrétisé en temps.

Dans la première partie, nous avons adapté l'algorithme OSWR aux problèmes d'Oseen et de Navier-Stokes, ainsi que le couplage Pararéel-OSWR au problème d'Oseen.

Le chapitre dédié à l'algorithme OSWR pour le problème d'Oseen a permis la mise en place de toute la structure d'analyse, commune aux chapitres suivants. L'écriture du problème sous forme faible a facilité l'analyse de la convergence du champ de vitesse, tout en tenant compte de la régularité minimale imposée par le problème, à l'exception des données de Robin du problème multidomaine (pour lesquelles certaines pistes laissent penser que ces hypothèses pourraient être assouplies). Ainsi, nous avons défini de manière rigoureuse le problème couplé équivalent au problème monodomaine *via* la formulation faible. Cette approche met explicitement en évidence les relations entre les données de Robin aux interfaces, conduisant à l'écriture de l'algorithme OSWR. Nous avons ensuite établi des inégalités d'énergie sur l'erreur générée par l'algorithme, afin de démontrer sa convergence. La non-convergence de la pression et la méthodologie de correction, déjà nécessaire pour le problème de Stokes, sont alors présentées et étendues au cas *two-sided*.

Les résultats numériques ont confirmé la convergence de l'algorithme et l'efficacité des paramètres de Robin optimisés. L'étude en fonction du nombre de sous-domaines a mis en évidence l'intérêt d'en utiliser plus de deux pour accélérer la convergence. Toutefois, nous nous sommes limités à 25 sous-domaines, et une étude à plus grande échelle serait nécessaire pour tirer pleinement parti du gain de temps apporté par la décomposition de domaine. Par ailleurs, l'ajout d'un préconditionneur grille grossière apparaît essentiel afin d'éviter une dégradation excessive de la convergence lorsque le nombre de sous-domaines augmente.

Avec le formalisme mis en place au sein du premier chapitre, les extensions ont été facilitées, nous permettant de nous concentrer sur les difficultés spécifiques aux nouveaux algorithmes.

Concernant le couplage Pararéel-OSWR, les difficultés liées à la résolution sur les sous-domaines, notamment l'obtention des estimations d'énergie, sont similaires à celles rencontrées pour l'algorithme OSWR seul. Pour démontrer la convergence, il a fallu combiner les estimations de convergence de Pararéel et d'OSWR, afin de prouver celle de l'algorithme couplé.

Les résultats numériques se sont révélés concluants : la convergence a été observée et s'est avérée efficace. Il semble que très peu d'itérations d'OSWR (voire une seule) suffisent pour optimiser cet algorithme, du moins avec deux sous-domaines. Dans ces conditions, la parallélisation espace-temps accélère effectivement la résolution du problème d'Oseen. De plus, les paramètres de Robin optimisés se sont avérés proches des optimums numériques, bien que ceux-ci aient été définis uniquement pour l'algorithme OSWR pur. Leur pertinence pour l'utilisation dans le cadre du couplage semble toutefois se confirmer.

Pour le moment, nous n'avons pas présenté de résultats numériques pour une décomposition en plus de deux sous-domaines. Or, pour l'algorithme OSWR pur, une augmentation du nombre de sous-domaines avait entraîné un gain significatif en temps de calcul. Un comportement similaire est attendu pour le couplage, ce qui rendrait cet algorithme particulièrement compétitif.

L'étude de l'algorithme OSWR pour le problème de Navier-Stokes reprend en grande partie le formalisme développé pour le problème d'Oseen, la principale difficulté étant ici la prise en compte du caractère non linéaire de l'équation de quantité de mouvement dans l'estimation d'énergie. Cette difficulté a été traitée grâce à des majorations astucieuses couplées à l'utilisation du lemme de Grön-

wall. Les résultats numériques, bien que préliminaires, illustrent la convergence pour la vitesse et la pression recalibrée.

Une perspective importante reste la définition de paramètres optimisés permettant de minimiser le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de l'algorithme OSWR pour le problème de Navier-Stokes. Les approches classiques, basées sur une analyse dans le domaine de Fourier ou de Laplace, ne s'appliquent pas aux problèmes non linéaires. Il apparaît donc nécessaire de poursuivre les recherches afin d'exploiter pleinement les degrés de liberté offerts par les paramètres de Robin pour accélérer la convergence d'OSWR.

Il serait désormais extrêmement intéressant d'étudier le couplage Pararéel-OSWR pour le problème de Navier-Stokes, dont il nous semble qu'il offrirait un gain de temps significatif pour la résolution numérique de ce problème fondamental en mécanique des fluides, grâce à la parallélisation espace-temps. Pour l'analyse, il semble que l'utilisation des méthodologies et résultats obtenus dans les chapitres sur le couplage pour Oseen et sur OSWR pour Navier-Stokes permettrait, sans difficulté majeure, de définir cet algorithme et d'étudier sa convergence, en combinant les estimations d'énergie obtenues dans les deux cas.

La seconde partie de la thèse a apporté une nouvelle analyse de l'algorithme OSWR et une meilleure compréhension de son fonctionnement : mise en évidence de la dépendance à l'itération pour les paramètres optimisés, convergence finie, dépendance de la convergence uniquement au nombre de pas de temps et aux paramètres de Robin adimensionnés. L'analyse discrète en temps présentée pour l'équation de la chaleur a l'avantage d'être riche en conclusions, tout en étant suffisamment générale pour être étendue à d'autres contextes, comme nous l'avons présenté pour l'équation de la chaleur en dimension 2. Des premières investigations concluantes ont été réalisées pour une extension à l'équation d'advection-diffusion et une résolution temporelle avec le schéma BDF d'ordre 2, au cours d'un stage Master 2 réalisé par Quynh Ngo, et co-encadré avec Pascal Omnes et Anh Ha Le. Ces résultats n'ont pas été intégrés à ce manuscrit, néanmoins la théorie fonctionne de manière totalement similaire, et les résultats numériques observés semblent donner de bons résultats pour le choix des paramètres de Robin.

Le résultat principal qui se dégage nous paraît être la mise en évidence que les paramètres de Robin optimaux dépendent du nombre d'itérations d'OSWR effectuées. Cela nous semble être une direction de recherche cruciale pour le développement de la méthode et son utilisation dans un cadre industriel : les paramètres optimisés usuels sont en effet efficaces lorsque l'algorithme a atteint son régime linéaire, ce qui peut advenir après bien plus d'itérations que nécessaire dans certains cas.

C'est dans ce contexte que nous avons développé l'abaque qui donne un couple nombre d'itérations / paramètre de Robin optimisé. Cela permet, d'une part, d'effectuer un nombre suffisant d'itérations (et proche du nombre optimal) pour atteindre une précision souhaitée, et d'autre part, d'utiliser un paramètre adapté à cette précision.

Nous nous sommes néanmoins rendus compte que les paramètres optimaux sont dépendants de la donnée de Robin initiale. Dans la littérature, les résultats numériques sont souvent obtenus en étudiant l'algorithme sur l'erreur et en partant de données aléatoires sur l'interface, ce que nous avons, nous aussi, réalisé jusqu'alors. Toutefois, ce n'est pas le choix qui est effectué en pratique, puisqu'il faut initialiser l'algorithme (et non son erreur). Le choix de cette initialisation est libre – il n'empêche pas la convergence – mais un choix usuel efficace est de partir de données de Robin reliées aux données du problème, et en pratique calculées à partir de la condition initiale. Dans ce cas, de nouvelles formes de courbe de l'erreur en fonction du paramètre de Robin (à une itération donnée) sont apparues. Nous avons alors réussi à les approcher théoriquement avec finesse, en prolongeant l'analyse discrète en temps.

Être capable de déterminer des paramètres de Robin prenant en compte la donnée initiale paraît encore plus important dans le contexte d'un couplage entre Pararéel et OSWR. En effet, à chaque itération de Pararéel, on souhaite effectuer très peu d'itérations d'OSWR, il faut alors savoir minimiser le plus efficacement possible l'erreur pour un faible nombre d'itérations fixé à l'avance. À chaque itération de Pararéel, l'algorithme OSWR est initialisé à partir de données de Robin de l'itération de Pararéel précédente, qui sont donc déjà une bonne estimation des véritables données de Robin. Dès lors, un gain d'efficacité prometteur pourrait être d'utiliser le paramètre de Robin optimisé pour ce

nombre d'itérations fixé, issu de l'analyse prenant en compte des données de Robin initiales proches des véritables valeurs. La considération de ces données initiales qui donne déjà de très bons résultats pour l'algorithme OSWR, pourrait apporter une véritable plus-value dans le cadre de l'algorithme couplé Pararéel-OSWR.

Une limite de la méthode présentée ici est que celle-ci n'est conçue que pour deux domaines uniquement, et l'on peut donc s'attendre à une variation du paramètre optimal avec plus de sous-domaines.

Avec les paramètres continus usuels, on considère que si les domaines sont en bandes, et de largeur suffisamment importante, le calcul d'optimisation des paramètres effectué sur deux sous-domaines de taille infinie est une bonne approximation. Avec la méthode d'analyse discrète en temps, l'hypothèse de domaine en bande de taille infinie reste bonne et donc les paramètres optimisés aussi.

De plus grandes difficultés mathématiques apparaissent lorsque les sous-domaines ont des points de croisement, par exemple pour une configuration en grille. Nous avons en effet observé numériquement les solutions (sur l'erreur) de l'équation de la chaleur en dimension 2, au cours des itérations, en 4 domaines en grille. Les solutions obtenues sont relativement complexes, mais laissent tout de même apparaître des modes que nous aimerions analyser avec la méthode discrète en temps, ce que nous n'avons pas été en mesure de faire pour le moment. Cela ouvrirait la voie à une optimisation précise de l'algorithme discret en temps adapté à la décomposition, et donc à une accélération de l'algorithme dans le cas d'un grand nombre de sous-domaines.

Bibliographie

- [1] E. AHMED, S. ALI HASSAN, C. JAPHET, M. KERN, AND M. VOHRALÍK, *A posteriori error estimates and stopping criteria for space-time domain decomposition for two-phase flow between different rock types*, The SMAI journal of computational mathematics, 5 (2019), pp. 195–227.
- [2] E. AHMED, C. JAPHET, AND M. KERN, *Space-time domain decomposition for two-phase flow between different rock types*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 371 (2020), p. 113294.
- [3] S. ALI HASSAN, C. JAPHET, AND M. VOHRALÍK, *A posteriori stopping criteria for space-time domain decomposition for the heat equation in mixed formulations*, Electron. Trans. Numer. Anal., 49 (2018), pp. 151–181.
- [4] A. ARNOULT, C. JAPHET, AND P. OMNES, *Discrete-time analysis of optimized Schwarz waveform relaxation with Robin parameters depending on the targeted iteration count*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 57 (2023), pp. 2371–2396.
- [5] L. BAFFICO, S. BERNARD, Y. MADAY, G. TURINICI, AND G. ZÉRAH, *Parallel-in-time molecular-dynamics simulations*, Physical Review E, 66 (2002), p. 057701.
- [6] G. BAL AND Y. MADAY, *A “parareal” time discretization for non-linear pde’s with application to the pricing of an american put*, in Recent developments in domain decomposition methods, Springer, 2002, pp. 189–202.
- [7] A. BELLEN AND M. ZENNARO, *Parallel algorithms for initial-value problems for difference and differential equations*, Journal of Computational and applied mathematics, 25 (1989), pp. 341–350. Publisher : Elsevier.
- [8] D. BENNEQUIN, M. GANDER, AND L. HALPERN, *A homographic best approximation problem with application to optimized schwarz waveform relaxation*, Mathematics of Computation, 78 (2009), pp. 185–223.
- [9] D. BENNEQUIN, M. J. GANDER, L. GOUARIN, AND L. HALPERN, *Optimized Schwarz waveform relaxation for advection reaction diffusion equations in two dimensions*, Numer. Math., 134 (2016), pp. 513–567.
- [10] P.-M. BERTHE, *Méthodes de décomposition de domaine de type relaxation d’ondes optimisées pour l’équation de convection-diffusion instationnaire discrétisée par volumes finis*, PhD thesis, Paris 13, 2013.
- [11] P.-M. BERTHE, C. JAPHET, AND P. OMNES, *Space-time domain decomposition with finite volumes for porous media applications*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXI, J. Erhel, M. J. Gander, L. Halpern, G. Pichot, T. Sassi, and O. Widlund, eds., Cham, 2014, Springer International Publishing, pp. 567–575.
- [12] E. BLAYO, D. CHEREL, AND A. ROUSSEAU, *Towards optimized Schwarz methods for the Navier-Stokes equations*, Journal of Scientific Computing, 66 (2016), pp. 275–295. Publisher : Springer.
- [13] E. BLAYO, L. HALPERN, AND C. JAPHET, *Optimized Schwarz waveform relaxation algorithms with nonconforming time discretization for coupling convection-diffusion problems with discontinuous coefficients*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVI, O. B. Widlund and D. E. Keyes, eds., Berlin, Heidelberg, 2007, Springer Berlin Heidelberg, pp. 267–274.

- [14] E. BLAYO, A. ROUSSEAU, AND M. TAYACHI, *Boundary conditions and Schwarz waveform relaxation method for linear viscous Shallow Water equations in hydrodynamics*, The SMAI journal of computational mathematics, 3 (2017), pp. 117–137.
- [15] F. BOYER AND P. FABRIE, *Mathematical Tools for the Study of the Incompressible Navier-Stokes Equations and Related Models*, Applied Mathematical Sciences, Springer New York, 2012.
- [16] H. BREZIS, *Functional analysis, sobolev spaces and partial differential equations*, 2011.
- [17] D. Q. BUI, *Nouveaux algorithmes de décomposition de domaine espace-temps combinés avec l'algorithme Pararéel*, PhD thesis, Université Paris 13, 2021. Thèse de doctorat dirigée par Omnes, Pascal et Japhet, Caroline Mathématiques Paris 13 2021.
- [18] D. Q. BUI, C. JAPHET, Y. MADAY, AND P. OMNES, *Coupling parareal with optimized Schwarz waveform relaxation for parabolic problems*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 60 (2022), pp. 913–939.
- [19] D.-Q. BUI, C. JAPHET, AND P. OMNES, *Optimized Schwarz waveform relaxation method for the incompressible Stokes problem*, ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 58 (2024), pp. 1229–1261.
- [20] T. CADEAU AND F. MAGOULES, *Coupling the parareal algorithm with the waveform relaxation method for the solution of differential algebraic equations*, in 2011 10th International Symposium on Distributed Computing and Applications to Business, Engineering and Science, IEEE, 2011, pp. 15–19.
- [21] F. CAETANO, M. J. GANDER, L. HALPERN, AND J. SZEFTTEL, *Schwarz waveform relaxation algorithms for semilinear reaction-diffusion equations*, Networks and heterogeneous media, 5 (2010), pp. 487–505.
- [22] X.-C. CAI, *Additive schwarz algorithms for parabolic convection-diffusion equations*, Numerische Mathematik, 60 (1991), pp. 41–61.
- [23] P. CHARTIER AND B. PHILIPPE, *A parallel shooting technique for solving dissipative ODE's*, Computing, 51 (1993), pp. 209–236.
- [24] W. CHEN, M. GUNZBURGER, F. HUA, AND X. WANG, *A Parallel Robin-Robin Domain Decomposition Method for the Stokes-Darcy System*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 49 (2011), pp. 1064–1084.
- [25] D. CHEREL, *Décomposition de domaine pour des systèmes issus des équations de Navier-Stokes*, PhD Thesis, Université de Grenoble, 2012.
- [26] G. CIARAMELLA, L. HALPERN, AND L. MECHELLI, *Convergence analysis and optimization of a robin schwarz waveform relaxation method for time-periodic parabolic optimal control problems*, Journal of Computational Physics, 496 (2024), p. 112572.
- [27] O. CIOBANU, *Méthode de décomposition de domaine avec adaptation de maillage en espace-temps pour les équations d'Euler et de Navier-Stokes*, PhD Thesis, Université Paris 13, 2014.
- [28] O. CIOBANU, L. HALPERN, X. JUVIGNY, AND J. RYAN, *Overlapping Domain Decomposition Applied to the Navier-Stokes Equations*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXII, T. Dickopf, M. J. Gander, L. Halpern, R. Krause, and L. F. Pavarino, eds., Cham, 2016, Springer International Publishing, pp. 461–470.
- [29] S. CLEMENT, F. LEMARIÉ, AND E. BLAYO, *Discrete analysis of Schwarz waveform relaxation for a diffusion reaction problem with discontinuous coefficients*, SMAI J. Comput. Math., 8 (2022), pp. 99–124.
- [30] A. COHEN, *Approximations variationnelles des EDP*. Notes du Cours de M2.
- [31] X. DAI AND Y. MADAY, *Stable parareal in time method for first-and second-order hyperbolic systems*, SIAM Journal on Scientific Computing, 35 (2013), pp. A52–A78.
- [32] S. DESCOMBES, V. DOLEAN, AND M. J. GANDER, *Schwarz waveform relaxation methods for systems of semi-linear reaction-diffusion equations*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XIX, Y. Huang, R. Kornhuber, O. Widlund, and J. Xu, eds., Berlin, Heidelberg, 2011, Springer Berlin Heidelberg, pp. 423–430.

- [33] M. DISCACCIATI, A. QUARTERONI, AND A. VALLI, *Robin-Robin Domain Decomposition Methods for the Stokes-Darcy Coupling*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 45 (2007), pp. 1246–1268.
- [34] V. DOLEAN, P. JOLIVET, AND F. NATAF, *An Introduction to Domain Decomposition Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2015.
- [35] V. DOLEAN, F. NATAF, AND G. RAPIN, *Deriving a new domain decomposition method for the Stokes equations using the Smith factorization*, Mathematics of computation, 78 (2009), pp. 789–814.
- [36] J. DRONIOU, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles*. working paper or preprint, 2001, hal-01382368v2.
- [37] J. W. EATON, D. BATEMAN, S. HAUBERG, AND R. WEHBRING, *GNU Octave version 7.1.0 manual : a high-level interactive language for numerical computations*, 2022.
- [38] V. EHRLACHER AND L. FRÉDÉRIC, *Problèmes d'évolution*. Notes du Cours de M2, 2024.
- [39] H. C. ELMAN, D. J. SILVESTER, AND A. J. WATHEN, *Finite elements and fast iterative solvers : with applications in incompressible fluid dynamics.*, Numer. Math. Sci. Comput., Oxford : Oxford University Press, 2005.
- [40] A. ERN AND J.-L. GUERMOND, *Theory and practice of finite elements*, vol. 159, Springer, 2004.
- [41] P. F. FISCHER, F. HECHT, AND Y. MADAY, *A Parareal in Time Semi-implicit Approximation of the Navier-Stokes Equations*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, T. J. Barth, M. Griebel, D. E. Keyes, R. M. Nieminen, D. Roose, T. Schlick, R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Périaux, O. Pironneau, O. Widlund, and J. Xu, eds., vol. 40, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005, pp. 433–440. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [42] L. FLORIAN, D. LAURENT, AND B. ERIC, *Toward an optimized global-in-time Schwarz algorithm for diffusion equations with discontinuous and spatially variable coefficients, part 1 : The constant coefficients case*, Electronic transactions on numerical analysis, (2013).
- [43] L. FOLTYN, D. LUKÁŠ, AND I. PETEREK, *Domain decomposition methods coupled with parareal for the transient heat equation in 1 and 2 spatial dimensions*, Applications of Mathematics, 65 (2020), pp. 173–190.
- [44] M. GANDER AND L. HALPERN, *Absorbing boundary conditions for the wave equation and parallel computing*, Mathematics of computation, 74 (2005), pp. 153–176.
- [45] M. J. GANDER, *Overlapping Schwarz waveform relaxation for parabolic problems*, Contemporary Mathematics, 218 (1998), pp. 425–431. Publisher : Providence, RI : American Mathematical Society.
- [46] M. J. GANDER, *Optimized Schwarz Methods*, SIAM J. Numerical Analysis, 44 (2006), pp. 699–731.
- [47] M. J. GANDER, *50 years of time parallel time integration*, in Multiple Shooting and Time Domain Decomposition Methods : MuS-TDD, Heidelberg, May 6-8, 2013, Springer, 2015, pp. 69–113.
- [48] M. J. GANDER AND E. HAIRER, *Nonlinear convergence analysis for the parareal algorithm*, in Domain decomposition methods in science and engineering XVII, Springer, 2008, pp. 45–56.
- [49] M. J. GANDER AND L. HALPERN, *Méthodes de relaxation d'ondes (SWR) pour l'équation de la chaleur en dimension 1. (Optimized Schwarz waveform relaxation (SWR) for the one-dimensional heat equation)*, C. R., Math., Acad. Sci. Paris, 336 (2003), pp. 519–524.
- [50] ———, *Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal., 45 (2007), pp. 666–697.
- [51] M. J. GANDER, L. HALPERN, F. HUBERT, AND S. KRELL, *Optimized Schwarz methods with general ventcell transmission conditions for fully anisotropic diffusion with discrete duality finite volume discretizations*, Moroccan Journal of Pure and Applied Analysis, 7 (2021), pp. 182–213.

- [52] M. J. GANDER, L. HALPERN, AND F. NATAF, *Optimal Schwarz waveform relaxation for the one dimensional wave equation*, SIAM J. Numer. Anal., 41 (2003), pp. 1643–1681.
- [53] M. J. GANDER AND C. JAPHET, *Algorithm 932 : PANG : Software for nonmatching grid projections in 2D and 3D with linear complexity*, ACM Transactions on Mathematical Software, 40 (2013), pp. 1–25.
- [54] M. J. GANDER, Y. JIANG, AND B. SONG, *A superlinear convergence estimate for the parareal Schwarz waveform relaxation algorithm*, SIAM Journal on Scientific Computing, 41 (2019), pp. A1148–A1169.
- [55] M. J. GANDER, Y.-L. JIANG, AND R.-J. LI, *Parareal Schwarz Waveform Relaxation Methods*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XX, R. Bank, M. Holst, O. Widlund, and J. Xu, eds., vol. 91, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2013, pp. 451–458. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [56] M. J. GANDER, S. B. LUNOWA, AND C. ROHDE, *Non-Overlapping Schwarz Waveform-Relaxation for Nonlinear Advection-Diffusion Equations*, SIAM Journal on Scientific Computing, 45 (2023), pp. A49–A73.
- [57] M. J. GANDER AND V. MARTIN, *A detailed Fourier mode analysis of Schwarz waveform relaxation methods*. Contributed lecture at the 27th International Domain Decomposition Conference, DD27, Prague, Czech Republic, 2022.
- [58] ———, *Why Fourier mode analysis in time is different when studying Schwarz Waveform Relaxation*, Journal of Computational Physics, 491 (2023), p. 112316. Publisher : Elsevier.
- [59] M. J. GANDER AND A. M. STUART, *Space-time continuous analysis of waveform relaxation for the heat equation*, SIAM Journal on Scientific Computing, 19 (1998), pp. 2014–2031.
- [60] M. J. GANDER AND S. VANDEWALLE, *Analysis of the parareal time-parallel time-integration method*, SIAM Journal on Scientific Computing, 29 (2007), pp. 556–578.
- [61] M. J. GANDER AND G. WANNER, *The origins of the alternating schwarz method*, in Domain decomposition methods in science and engineering XXI, Springer, 2014, pp. 487–495.
- [62] E. GILADI AND H. KELLER, *Space-time domain decomposition for parabolic problems*, Numerische Mathematik, 93 (2002), pp. 279–313.
- [63] G. H. GOLUB AND C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, Johns Hopkins University Press, 1996.
- [64] R. GUETAT, *Méthode de parallélisation en temps : application aux méthodes de décomposition de domaine*, PhD thesis, UPMC Université Paris 6 et Ecole polytechnique de Tunisie, 2011.
- [65] F. HAEBERLEIN, *Méthodes de décomposition de domaine espace temps pour le transport réactif : Application au stockage géologique de CO₂*, PhD thesis, Université Paris 13, 2011.
- [66] L. HALPERN AND F. HUBERT, *A finite volume ventcell-schwarz algorithm for advection-diffusion equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 52 (2014), pp. 1269–1291.
- [67] L. HALPERN, C. JAPHET, AND J. SZEFTTEL, *Optimized Schwarz waveform relaxation and discontinuous Galerkin time stepping for heterogeneous problems*, SIAM J. Numer. Anal., 50 (2012), pp. 2588–2611.
- [68] R. D. HAYNES AND K. MOHAMMAD, *Fully discrete Schwarz waveform relaxation on two bounded overlapping subdomains*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XXV, R. Haynes, S. MacLachlan, X.-C. Cai, L. Halpern, H. H. Kim, A. Klawonn, and O. Widlund, eds., Cham, 2020, Springer International Publishing, pp. 159–166.
- [69] F. HECHT, *New development in FreeFem++*, J. Numer. Math., 20 (2012), pp. 251–265.
- [70] O. M. HERNANDEZ, *Quelques contributions vers la simulation parallèle de la cinétique neutronique et la prise en compte de données observées en temps réel*, PhD thesis, Paris 6, 2014.
- [71] T.-T.-P. HOANG, J. JAFFRÉ, C. JAPHET, M. KERN, AND J. E. ROBERTS, *Space-time domain decomposition methods for diffusion problems in mixed formulations*, SIAM J. Numer. Anal., 51 (2013), pp. 3532–3559.

- [72] T.-T.-P. HOANG, C. JAPHET, M. KERN, AND J. E. ROBERTS, *Space-Time Domain Decomposition for Reduced Fracture Models in Mixed Formulation*, SIAM J. Numer. Anal., 54 (2016), pp. 288–316.
- [73] D. HULIN, *Equations différentielles ordinaires*. Cours.
- [74] A. Q. IBRAHIM, S. GÖTSCHER, AND D. RUPRECHT, *Parareal with a physics-informed neural network as coarse propagator*, in European Conference on Parallel Processing, Springer, 2023, pp. 649–663.
- [75] C. JAPHET, *Optimized Krylov-Ventcell Method. Application to convection-diffusion problems*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering IX, P. Bjørstad, M. Espedal, and D. Keyes, eds., John Wiley & Sons Ltd, 1998, pp. 382–389.
- [76] C. JAPHET, Y. MADAY, AND F. NATAF, *A new interface cement equilibrated mortar (nicem) method with robin interface conditions : the p1 finite element case*, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, 23 (2013).
- [77] C. JAPHET, Y. MADAY, AND F. NATAF, *Robin Schwarz algorithm for the NICEM Method : the Pq finite element case*. working paper or preprint, Jan. 2014.
- [78] C. JAPHET AND F. NATAF, *The best interface conditions for domain decomposition methods : absorbing boundary conditions*, in Absorbing Boundaries and Layers, Domain Decomposition Methods, Nova Sci. Publ., Huntington, NY, 2001, pp. 348–373.
- [79] C. JAPHET, F. NATAF, AND F. ROGIER, *The Optimized Order 2 method : Application to convection-diffusion problems*, Future Generation Computer Systems, 18 (2001), pp. 17–30.
- [80] O. A. LADYZHENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon & Breach, (1969).
- [81] E. LELARASMEE, A. E. RUEHLI, AND A. L. SANGIOVANNI-VINCENTELLI, *The waveform relaxation method for time-domain analysis of large scale integrated circuits*, IEEE transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems, 1 (1982), pp. 131–145.
- [82] F. LEMARIÉ, E. BLAYO, AND L. DEBREU, *Analysis of ocean-atmosphere coupling algorithms : Consistency and stability*, Procedia Computer Science, 51 (2015), pp. 2066–2075. Publisher : Elsevier.
- [83] J. LERAY, *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, Journal de Mathématiques pures et appliquées, 13 (1934), pp. 331–418.
- [84] E. LINDELÖF, *Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 10 (1894), pp. 117–128.
- [85] J. LIONS, *Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires*, Dunford/Gauthier-Villars, (1969).
- [86] J.-L. LIONS, Y. MADAY, AND G. TURINICI, *Résolution d'EDP par un schéma en temps «para-réel»*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series I - Mathematics, 332 (2001), pp. 661–668.
- [87] J.-L. LIONS AND E. MAGENES, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181.
- [88] ———, *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. II*, Springer-Verlag, New York, 1972. Translated from the French by P. Kenneth, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 182.
- [89] P.-L. LIONS, *On the Schwarz alternating method. III : a variant for nonoverlapping subdomains*, in Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, held in Houston, Texas, March 20–22, 1989, T. F. Chan, R. Glowinski, J. Périaux, and O. Widlund, eds., Philadelphia, PA, SIAM, 1990, pp. 202–223.

- [90] P.-L. LIONS ET AL., *On the schwarz alternating method. I*, in First international symposium on domain decomposition methods for partial differential equations, vol. 1, Paris, France, 1988, p. 42.
- [91] G. LISSONI, *DDFV method : applications to fluid mechanics and domain decomposition*, PhD thesis, COMUE Université Côte d’Azur, 2019.
- [92] Y. MADAY AND O. MULA, *An adaptive parareal algorithm*, Journal of computational and applied mathematics, 377 (2020), p. 112915. Publisher : Elsevier.
- [93] Y. MADAY AND G. TURINICI, *Parallel in time algorithms for quantum control : Parareal time discretization scheme*, International journal of quantum chemistry, 93 (2003), pp. 223–228.
- [94] ———, *The Parareal in Time Iterative Solver : a Further Direction to Parallel Implementation*, in Domain Decomposition Methods in Science and Engineering, T. J. Barth, M. Griebel, D. E. Keyes, R. M. Nieminen, D. Roose, T. Schlick, R. Kornhuber, R. Hoppe, J. Périaux, O. Pironneau, O. Widlund, and J. Xu, eds., vol. 40, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2005, pp. 441–448. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [95] V. MARTIN, *An optimized Schwarz waveform relaxation method for the unsteady convection diffusion equation in two dimensions*, Appl. Numer. Math., 52 (2005), pp. 401–428.
- [96] ———, *Schwarz waveform relaxation algorithms for the linear viscous equatorial shallow water equations*, SIAM J. Scientific Computing, 31 (2009), pp. 3595–3625.
- [97] J. NIEVERGELT, *Parallel methods for integrating ordinary differential equations*, Communications of the ACM, 7 (1964), pp. 731–733.
- [98] É. PICARD, *Sur l’application des méthodes d’approximations successives à l’étude de certaines équations différentielles ordinaires*, Journal de mathématiques pures et appliquées, 9 (1893), pp. 217–271.
- [99] H. A. SCHWARZ, *Gesammelte mathematische abhandlungen*, vol. 260, American Mathematical Soc., 1972.
- [100] D. SERRE, *Les matrices - Théorie et pratique*, Dunod, 2001.
- [101] J. STEINER, D. RUPRECHT, R. SPECK, AND R. KRAUSE, *Convergence of Parareal for the Navier-Stokes Equations Depending on the Reynolds Number*, in Numerical Mathematics and Advanced Applications - ENUMATH 2013, A. Abdulle, S. Deparis, D. Kressner, F. Nobile, and M. Picasso, eds., vol. 103, Springer International Publishing, Cham, 2015, pp. 195–202. Series Title : Lecture Notes in Computational Science and Engineering.
- [102] R. TEMAM AND A. NORTH-HOLLAND, *Reprint of the 1984 edition*, Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis, (2001).
- [103] S. THERY, *On the links between observed and theoretical convergence rates for Schwarz waveform relaxation algorithm for the time-dependent problems*, in 26th International Domain Decomposition Conference, Dec 2020, Hong Kong, China., 2020.
- [104] S. THERY, C. PELLETIER, F. LEMARIÉ, AND E. BLAYO, *Analysis of Schwarz Waveform Relaxation for the Coupled Ekman Boundary Layer Problem with Continuously Variable Coefficients*, Numerical Algorithms, 89 (2022), pp. 1145–1181.
- [105] C. W. UEBERHUBER, *Numerical Computation 2*, Springer, 1995.
- [106] J. WHITE, F. ODEH, A. VINCENTELLI, AND A. RUEHLI, *Waveform relaxation : theory and practice*, Transactions of the Society for Computer Simulation, 2 (1985).
- [107] S.-L. WU, *Schwarz waveform relaxation algorithm for heat equations with distributed delay*, Thermal Science, 20 (2016), pp. 659–667.
- [108] Y. XU, *Optimized Schwarz methods with Ventcell transmission conditions for model problems with continuously variable coefficients*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 334 (2018), pp. 97–110. Publisher : Elsevier.